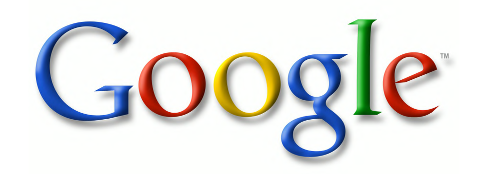
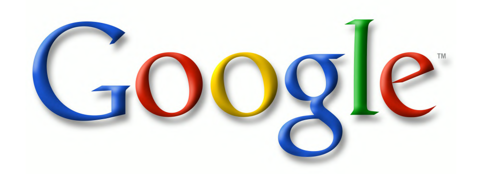














# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

---

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

---

### HUNDERTZEHNTER BAND.

---


WIEN, 1901.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

## AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

---

CX. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1901. — HEFT I BIS X.

(MIT 7 TAFELN UND 67 TEXTFIGUREN.)

WIEN, 1901.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

# INHALT.

# SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. I. BIS III. HEFT.

JAHRGANG 1901. — JÄNNER BIS MÄRZ.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 1 TAFEL UND 4 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1901.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

# INHALT

des 1. bis 3. Heftes Jänner bis März 1901 des CX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

# I. SITZUNG VOM 10. JÄNNER 1901.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stiftung.

Das Comité des V. internationalen Physiologencongresses in Turin übermittelt eine Einladung zu dem am 16. bis 19. September l. J. in Turin stattfindenden Congresse.

Herr Dr. Wolfgang Pauli in Wien dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Fortführung einer Reihe von Untersuchungen über die physikalischen Zustandsänderungen der biologisch wichtigen Kolloide.

Herr Dr. Ludwig Unger in Wien spricht den Dank für die ihm gewährte Subvention behufs Anfertigung von Zeichnungen zu seiner Arbeit: »Beiträge zur Morphologie und Faserung des Reptiliengehirnes« aus.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt eine Arbeit von Herrn Prof. August Adler in Prag vor, betitelt: »Zur sphärischen Abbildung der Flächen und ihrer Anwendung in der darstellenden Geometrie«.

Das c. M. Herr Prof. Karl Exner in Innsbruck übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Zur Genesis der richtigen Erklärung der Scintillationserscheinungen«.

Das c. M. Herr Prof. J. M. Pernter übersendet eine Abhandlung: »Studien über Wirbelbewegungen«, von Herrn Alois Indra, k. und k. Oberst.

Das w. M. Herr Hofrath F. Mertens überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck: »Über continuierliche Involutionsgruppen«.

Das w. M. Herr Hofrath A. Lieben überreicht eine Arbeit von Herrn Dr. Paul Cohn aus dem chemischen Laboratorium des k. k. technologischen Gewerbemuseums in Wien: »Über Chlor-*m*-Phenylendiamin«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Über Eiweißkrystalle in den Eiern des Rehes«.

Das w. M. Herr Prof. F. Becke überreicht eine vorläufige Mittheilung über die Bestimmung der Schmelzpunkte der Mineralien und Gesteine, von Herrn C. Doelter.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Akademischer Senat der k. k. Franz-Josefs-Universität in Czernowitz, Festschrift zum ersten Vierteljahrhundert ihres Bestehens. Czernowitz, 1900. 4⁰.

Arnold F., Dr., Die Lichenen des fränkischen Jura. Regensburg, 1885. 8⁰.

— Zur Lichenenflora von München. München, 1891. 8⁰.

— Die Lichenen des fränkischen Jura. Stadtamhof, 1890. 8⁰.

État Indépendant du Congo, La télégraphe et le téléphon dans l'État Indépendant du Congo, par A. Mahieu. Brüssel, 1900. 8⁰.

Fascianelli L., Catalogo degli strumenti sismici e meteorologici più recente adottati dagli osservatorii del regno. Rom, 1900. 8⁰.

Goldhard-Landau G. M., Quadratur des Kreises und Kreis des Quadrates. Odessa, 1900. Groß-4⁰.

Platte A., Das Flugproblem definitiv gelöst. Wien, 1901. Groß-4⁰.

Weinek L., Die Tychonischen Instrumente auf der Prager Sternwarte. Prag, 1901. 8⁰.

---

# Über continuierliche Involutionsgruppen

von

**Konrad Zindler** in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1901.)

Wenn eine $r$-gliedrige Involutionsgruppe $G$ von $\rho$-facher Ausbreitung ist, d. h. wenn eine allgemeine Stelle durch ihre Transformationen in $\infty^\rho$ verschiedene Lagen übergeführt werden kann, so können die infinitesimalen Transformationen einer $\rho$-gliedrigen Untergruppe $\rho$-facher Ausbreitung von $G$ auf die Form $p_1, p_2, \ldots p_\rho$ gebracht werden, wobei

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} = X_k \qquad (k = 1, 2, \ldots \rho).$$

Die übrigen infinitesimalen Transformationen von $G$ haben dann die Form

$$U_i = \sum_{k=1}^{\rho} \xi_{ik} p_k \qquad (i = 1, 2, \ldots \rho'; \; \rho + \rho' = r).$$

Die $\xi$ sind wegen $(U_i X_m) = 0$ von $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ frei: die übrigen Veränderlichen, welche sie enthalten, nennen wir $w_1, w_2, \ldots w_{\sigma'}$. Wenn die $\xi$, die in der Anzahl $\sigma = \rho\rho'$ auftreten, sämmtlich voneinander unabhängige Functionen der $w$ sind, können sie als neue Veränderliche $\mathfrak{w}$ an Stelle der $w$ eingeführt werden. In diesem Falle waren also unter den $w$ gerade $\sigma$ wesentliche Veränderliche (vergl. »Über die Anzahl der wesentlichen Veränderlichen in einer $r$-gliedr. contin. Gruppe von Punkttransf.«, Mathem. Annalen, Bd. 54), und die ganze Gruppe enthält $\rho + \sigma = \rho(r + 1 - \rho)$ wesentliche Veränderliche. Dies ist also für die $r$-gliedrigen Involutionsgruppen

$\rho$-facher Ausbreitung die wahre obere Grenze für die Anzahl der wesentlichen Veränderlichen.[1]

Die Gruppe $G$ ist jetzt auf die Form gebracht (wir schreiben statt $\mathfrak{w}$ wieder $w$ mit zwei Indices):

$$X_k = p_k \qquad (k = 1, 2, \ldots \rho)$$

$$U_i = \sum_{k=1}^{\rho} w_{ik} p_k \qquad (i = 1, 2, \ldots \rho').$$

Wenn sich unter den $\xi$ nur $\tau$ voneinander unabhängige finden lassen ($\tau < \rho\rho'$), so kann man solche $\tau$ unter den $\xi$, deren Functionaldeterminante hinsichtlich passender $\tau$ unter den $w$ nicht identisch verschwindet, an Stelle dieser $w$ als neue Veränderliche $\mathfrak{w}$ einführen; die übrigen $w$ fallen heraus, indem die von den anderen abhängigen $\xi$ nun Functionen der $\mathfrak{w}$ allein sind. Diese Functionen können, wenn es sich um Aufstellung

---

[1] Es ist sehr wahrscheinlich, dass die a. a. O. angegebene Zahl $\left(\frac{r+1}{2}\right)^2$ für ungerades $r$ und $\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}+1\right)$ für gerades $r$ nicht nur für die $r$-gliedrigen Involutionsgruppen, sondern überhaupt für die $r$-gliedrigen Gruppen die wahre obere Grenze für die Anzahl der wesentlichen Veränderlichen ist. Auch für $r = 4$ habe ich mich durch theilweise Bestimmung der viergliedrigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen davon überzeugt.

Bei dieser Gelegenheit fand ich, dass in Richard Kochs Dissertation: »Bestimmung der viergliedrigen Gruppen des Raumes« (1898) noch überzählige Typen vorkommen: Unter den Gruppen mit der Zusammensetzung

$$(X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = 0, \quad (X_2X_3) = X_2$$
$$(X_1X_4) = X_1, \quad (X_2X_4) = 0, \quad (X_3X_4) = 0$$

kommt das Paar vor (S. 72 unter XIII):

$$\alpha) \quad p, q, \quad yq+zr, \quad xp+zq;$$
$$\beta) \quad p, q, \quad zp+yq, \quad xp+zr.$$

Nun sind die Gruppen dieser Zusammensetzung mit sich selbst derart ähnlich, dass den Transformationen $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ der Reihe nach $X_2$, $X_1$, $X_4$, $X_3$ entsprechen. Vertauscht man nun in $\alpha$) die beiden ersten Transformationen, ebenso die letzten beiden, ändert dann die Bezeichnung, indem man $x$ und $y$ vertauscht, so geht $\alpha$) in $\beta$) über. Auf dieselbe Art überzeugt man sich von der Äquivalenz der beiden Typen

$$p, q, \quad yq+r, \quad xp; \qquad p, q, \quad yq, \quad xp+r.$$

der Gruppentypen handelt, als willkürlich betrachtet werden. Die Gruppe enthält nun $\rho+\tau$ wesentliche Veränderliche. Indem wir wieder $w$ statt $\mathfrak{w}$ schreiben, erhalten wir einen Typus, der auch unmittelbar aus $G$ hervorgeht, wenn man $\tau' = \sigma-\tau$ Symbole $w$ durch willkürliche Functionen $W$ der übrigen $w$ ersetzt. Beliebig viele der $W$ können auch Null gesetzt werden; nur darf dadurch keine Transformation verschwinden. Jener Ersatz kann bei gegebenem $\tau'$ noch in mannigfacher Weise geschehen: Zunächst zerlege man $\tau'$ auf irgendeine Art in $\rho'$ Summanden $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{\rho'}$, von denen keiner $> \rho$ sein soll, einige aber auch Null sein können. In jeder Transformation $U_i$ ersetze man $\lambda_i$ Symbole $w$ durch $W$. Man kann voraussetzen:

$$\lambda_i \geqq \lambda_{i+1};$$

denn eine andere Vertheilung derselben Summanden auf die Transformationen wäre mit einer Änderung der Bezeichnung gleichbedeutend. Aus demselben Grunde kann man annehmen, dass man in $U_1$ die ersten $\lambda_1$ Symbole $w$ durch $W$ ersetzt hat; dadurch sind auch von den $p$ die ersten $\lambda_1$ für die Fortsetzung des Verfahrens ausgezeichnet. Man kann also in $U_2$ den Ersatz von $\lambda_2$ Grössen $w$ durch $W$, wenn $\rho \geqq \lambda_1+\lambda_2$ ist, auf $\lambda_2+1$ Arten machen (indem man entweder $0, 1, 2, \dots$ oder alle $W$ zu denselben $p$ hinschreibt, wie in $U_1$), wenn jedoch $\rho < \lambda_1+\lambda_2$, bloß auf $\rho-\lambda_1+1$ Arten. Für die Fortsetzung des Verfahrens sind die Symbole $p$ in $U_3$ in vier Classen zu theilen, nämlich in solche, bei denen sowohl in $U_1$, als in $U_2$ ein Symbol $W$ steht, solche, bei denen dies bloß in $U_1$ oder bloß in $U_2$ oder in keiner von beiden der Fall ist. Man muss nun $\lambda_3$ auf alle möglichen Arten so in vier Summanden zerlegen, dass deren Größen die diesen vier Classen entsprechenden Anzahlen nicht überschreiten, dann diesen Zerlegungen entsprechend den Ersatz der $w$ durch $W$ vornehmen. Beim Ersatz in $U_{k+1}$ hat man $2^k$ Classen der $p$ zu unterscheiden; wenn jedoch unter den $\lambda_i$ gleiche vorkommen, verringert sich die Anzahl der Classen; auch brauchen nicht alle wirklich vorzukommen. Alle Fallunterscheidungen bei $U_{k+1}$ hat man mit allen früheren zu combinieren und das Verfahren fortzusetzen, solange die $\lambda_i$ von Null verschieden sind.

Wir erläutern den Vorgang bei $\rho = 5$, $\rho' = 4$, $\tau' = 7$. Die zulässigen Zerlegungen von $\tau'$ sind hier (wobei als Summanden auftretende Nullen nicht geschrieben sind):

| | |
|---|---|
| 5, 2. | 3, 3, 1. |
| 5, 1, 1. | 3, 2, 2. |
| 4, 3. | 3, 2, 1, 1. |
| 4, 2, 1. | 2, 2, 2, 1. |
| 4, 1, 1, 1. | |

Wir greifen eine Zerlegung 3, 2, 2 heraus und stellen für diese die möglichen Arten des Ersatzes der $w$ durch die $W$ auf. Jene Stellen, wo dieser Ersatz geschieht, deuten wir durch Punkte an, so dass wir zunächst für $U_1$ und $U_2$ die Möglichkeiten haben:

| | $U_1$ | | | | | $U_2$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ |
| I | • | • | • | | | • | • | | | |
| II | • | • | • | | | • | | | • | |
| III | • | • | • | | | | | | • | • |

Für die Fortsetzung (und zugleich den Abschluss) des Verfahrens bei $U_3$ sind bei I bloß drei Classen der $p$ wirklich vertreten, bei III bloß zwei, bei II dagegen alle vier. Bei II gehören $p_2$ und $p_3$ zur selben Classe. Man kann also beide verfügbaren Punkte in $U_3$ dieser einen Classe zutheilen oder sie auf $\binom{4}{2}$ verschiedene Arten auf zwei verschiedene Classen vertheilen, so dass der Fall II bei $U_3$ sieben Fälle ergibt. Im ganzen ergibt die Zerlegung 3, 2, 2 von $\tau' = 7$ die 15 Fälle der folgenden Tafel:

| | | $U_3$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ |
| I. | 1 | • | • | | | |
| | 2 | | | | • | • |
| | 3 | • | | • | | |
| | 4 | • | | | • | |
| | 5 | | | • | • | |
| II. | 1 | | • | • | | |
| | 2 | • | • | | | |
| | 3 | • | | | • | |
| | 4 | • | | | | • |
| | 5 | | • | | • | |
| | 6 | | • | | | • |
| | 7 | | | | • | • |
| III. | 1 | • | • | | | |
| | 2 | | | | • | • |
| | 3 | • | | | • | |

Z. B. entspricht der Zeile II, 6 die Transformation:

$$U_3 = w_{31}\,p_1 + W_{32}\,p_2 + w_{33}\,p_3 + w_{34}\,p_4 + W_{34}\,p_4,$$

wobei die $W$ willkürliche Functionen aller $\tau = \rho\rho' - \tau'$ (hier 13) Veränderlichen $w$ sind.

Wenn man dieses Verfahren für alle Zerlegungen eines Wertes $\tau'$ und für alle $\tau'$ $(1 \leqq \tau' < \sigma)$ durchführt, bekommt man ein Schema von Gruppentypen, das sicher alle $\rho+\rho'$-gliedrigen Involutionsgruppen $\rho$-facher Ausbreitung umfasst. Aber es werden darunter noch ähnliche[1] vorkommen; anderseits bekommt man, wenn man eine Anzahl der willkürlichen Functionen Null setzt, Gruppen, bei denen gewisse Untergruppen geringere Ausbreitungszahl haben, als im allgemeinen Falle, aus dem sie durch Specialisierung hervorgegangen sind. Man wird diese als eigene Typen zählen wollen.[2]

Die Aufstellung einer vollständigen Tafel der Involutionsgruppen ohne überzählige Typen führen wir nun für $r = 4$ wirklich durch; es bedarf dabei nur der Fall $\rho = \rho' = 2$ und hier wieder nur der Fall $\tau = \tau' = 2$ einiger Worte. Die Gruppe $G$ lautet bei diesen Annahmen:

$$p_1, \ p_2, \qquad U_1 = w_{11} p_1 + w_{12} p_2, \qquad U_2 = w_{21} p_1 + w_{22} p_2.$$

Es ist bequemer, sobald es sich um einen concreten Fall handelt, beim Ersatze der $w$ durch $W$ die letzten Transformationen $U$ und innerhalb einer solchen die letzten Stellen zu bevorzugen. $\tau' = 2$ gibt die drei Möglichkeiten (wir vereinfachen die Schreibweise):

$$\begin{array}{llll} \alpha) & p_1, \ p_2, & w_1 p_1 + w_2 p_2, & W_1 p_1 + W_2 p_2 \\ \beta) & p_1, \ p_2, & w_1 p_1 + W_1 p_2, & w_2 p_1 + W_2 p_2 \\ \gamma) & p_1, \ p_2, & w_1 p_1 + W_1 p_2, & W_2 p_1 + w_2 p_2 \end{array}$$

[1] Wenn von zwei Typen, die willkürliche Functionen enthalten, gesagt wird, sie seien ähnlich, so ist dies natürlich so zu verstehen, dass bloß in dem einen Typus die Functionen willkürlich gewählt werden, im anderen dann passend bestimmt werden können.

[2] Schon bei $r = 3$ wird es sich empfehlen, den Typus $p, q, zp$, der aus $p, q, zp+Z(z)q$ durch $Z \equiv 0$ hervorgeht, besonders zu zählen (vergl. Monatsh. f. Math. u. Phys., XI, S. 344), weil er eine zweigliedrige Untergruppe bloß einfacher Ausbreitung hat. Dann modificiert sich der Satz 18 (a. a. O., S. 346) so: »Es gibt 25 Typen dreigliedriger Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen. Von diesen treten einer schon bei einer Veränderlichen auf, 11 kommen bei zwei, 12 bei drei und ein einziger erst bei vier Veränderlichen hinzu; 4 haben einfache, 15 zweifache und 6 dreifache Ausbreitung; zwei enthalten eine willkürliche Function, 3 eine willkürliche Constante; diese repräsentieren also eigentlich unendlich viele«.

Setzen wir in $\beta$) und $\gamma$) alle Symbole $W$ gleich Null, so erhalten wir die Gruppen:

$$\beta') \quad p_1, \; p_2, \quad w_1 p_1, \quad w_2 p_1$$
$$\gamma') \quad p_1, \; p_2, \quad w_1 p_1, \quad w_2 p_2,$$

die wesentlich verschieden sind, weil $\beta'$) drei, $\gamma'$) vier zweigliedrige Untergruppen zweifacher Ausbreitung hat. Es ist also keiner der Typen $\beta$) und $\gamma$) völlig entbehrlich; trotzdem ist in dieser Allgemeinheit einer überzählig. Denn wenn $W_2$ in $\gamma$) das $w_2$ enthält, so führen wir $\mathfrak{w}_2 = W_2$ als neue Veränderliche statt $w_2$ ein. Dann geht $\gamma$) in $\beta$) über (abgesehen von der Bezeichnung). Ist $W_2$ bloß Function von $w_1$, so führe man, wenn $w_1$ in $W_1$ enthalten ist, $\mathfrak{w}_1 = W_1$ statt $w_1$ in $\gamma$) ein, und man erhält einen Typus, der sich von $\beta$) nur durch die Vertauschung von $p_1$ und $p_2$ unterscheidet. Man sieht, dass $\gamma$) nur dann n i c h t in $\beta$) transformierbar ist, wenn $W_1$ bloß $w_2$ und gleichzeitig $W_2$ bloß $w_1$ enthält; alsdann aber ist es in einen Specialfall von $\alpha$) transformierbar, und zwar in

$$\alpha') \quad p_1, \; p_2, \quad w_1 p_1 + w_2 p_2, \quad W_1(w_1)p_1 + W_2(w_2)p_2,$$

außer wenn beide $W$ verschwinden. Analog überzeugt man sich, dass $\alpha$) außer im eben angeschriebenen Specialfalle stets mit $\beta$) ähnlich ist; wir brauchen also, solange beide $W$ von Null verschieden bleiben, neben $\beta$) nur $\alpha'$) beizubehalten. Ebenso sind von den Fällen, wo e i n $W$ verschwindet, nur beizubehalten:

$$\beta'') \quad p_1, \; p_2, \quad w_1 p_1, \quad w_2 p_1 + W p_2$$
$$\alpha'') \quad p_1, \; p_2, \quad w_1 p_1 + w_2 p_2, \quad W(w_2) p_2.$$

$\tau' = 2$ hat also die sechs Typen $\beta$), $\alpha'$), $\beta'$), $\gamma'$), $\beta''$), $\alpha''$) ergeben, die selbst dann aufeinander nicht zurückgeführt werden können, wenn man lineare Combinationen der $U$ statt dieser selbst einführt. Die Fälle $\tau' = 1, 3$ (bei $\rho = 2$) und $\rho = 1, 3$ sind hiernach selbstverständlich. Man erhält 23 Typen viergliedriger Involutionsgruppen, die in der folgenden Tafel zusammengestellt sind. Wir haben den Typus $\beta$) in gewisser Weise bevorzugt; es braucht daher kaum bemerkt zu werden, dass man die Reduction auch in anderer Weise vornehmen kann.

**Tafel der viergliedrigen Involutionsgruppen in beliebig vielen Veränderlichen.**

| | | |
|---|---|---|
| $\rho = 1$ | 1. $w_1 p_1, \; w_2 p_1, \; w_3 p_1$ | 4 |
| $p_1$ | 2. $w_1 p_1, \; w_2 p_1, \; W p_1$ | 3 |
| | 3. $w \; p_1, \; W_1 p_1, \; W_2 p_1$ | 2 |
| | 4. $w_1 p_1 + w_2 p_2, \; w_3 p_1 + w_4 p_2$ | 6 |
| | 5. $w_1 p_1 + w_2 p_2, \; w_3 p_1 + W p_2$ | 5 |
| | 6. » $w_3 p_1$ | |
| | 7. $w_1 p_1 + W_1 p_2, \; w_2 p_1 + W_2 p_2$ | 4 |
| | 8. $w_1 p_1 + w_2 p_2, \; W_1(w_1) p_1 + W_2(w_2) p_2$ | |
| $\rho = 2$ | 9. $w_1 p_1$ , $w_2 p_1 + W p_2$ | |
| $p_1, p_2$ | 10. $w_1 p_1 + w_2 p_2, \; W(w_2) p_2$ | |
| | 11. $w_1 p_1$ , $w_2 p_1$ | |
| | 12. $w_1 p_1$ , $w_2 p_2$ | |
| | 13. $w p_1 + W_1 p_2, \; W_2 p_1 + W_3 p_2$ | 3 |
| | 14. $w p_1$ , $W_1 p_1 + W_2 p_2$ | |
| | 15. » , $W p_1$ | |
| | 16. » , $W p_2$ | |
| | 17. $w_1 p_1 + w_2 p_2 + w_3 p_3$ | 6 |
| | 18. $w_1 p_1 + w_2 p_2 + W p_3$ | 5 |
| $\rho = 3$ | 19. $w_1 p_1 + w_2 p_2$ | 5 |
| $p_1, p_2, p_3$ | 20. $w p_1 + W_1 p_2 + W_2 p_3$ | 4 |
| | 21. $w p_1 + W p_2$ | 4 |
| | 22. $w p_1$ | 4 |
| $\rho = 4$ | 23. $p_1, p_2, p_3, p_4$ | 4 |

## Erklärung der Tafel.

Die Transformationen $p$, die unter den Ausbreitungszahlen $\rho$ stehen, sind nur einmal geschrieben, gehören aber zu allen nebenstehenden Nummern der betreffenden Ausbreitungszahl. Die Symbole $W$ bedeuten willkürliche Functionen, deren Argumente, wo sie nicht ausdrücklich angegeben sind, alle im selben Typus auftretenden $w$ sind. Nicht alle diese brauchen wirklich in den $W$ aufzutreten; jedoch ist $W = 0$ (auch $W =$ constans) ausgeschlossen, da diese Annahme die Ausbreitungszahl der Untergruppen ändert und daher Gruppen liefert, die als besondere Typen in die Tafel aufgenommen wurden. Die letzte Colonne enthält die Anzahl $n$ der Veränderlichen, die im ganzen in der Gruppe auftreten.

## II. SITZUNG VOM 17. JÄNNER 1901.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, XXI. Band, 10. Heft (December 1900).

Der Vorsitzende, Herr Präsident Prof. E. Suess, macht Mittheilung von dem Verluste, welchen die Classe durch das am 14. Jänner l. J. erfolgte Ableben ihres Ehrenmitgliedes, Herrn Prof. Charles Hermite in Paris, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen ihres Beileides von den Sitzen.

Die königl. Akademie der Wissenschaften in Turin übersendet das Programm für die dreizehnte Verleihung des Bressa-Preises im Betrage von 9600 Francs für die hervorragendste Erfindung oder Entdeckung aus dem Gebiete der Naturwissenschaften.

Der Concurs wird am 31. December 1902 geschlossen.

Die Marine-Section des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums dankt für die geschenkweise Überlassung einer Reihe von Apparaten an das Sanitätsamt in Djiddah behufs Fortführung der meteorologischen Beobachtungen an diesem Orte.

Die Herren Dr. A. Schattenfroh und Dr. R. Grassberger übersenden ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht folgende zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium:

I. »Über Carbonsäureester der Phloroglucine«, von den Herren Prof. J. Herzig und F. Wenzel.

II. »Über Brasilin und Hämatoxylin« (VI. Mittheilung), von den Herren Prof. J. Herzig und J. Pollak.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. E. Weiß überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. G. v. Niessl in Brünn mit dem Titel: »Bahnbestimmung des großen Meteors vom 11. März 1900«.

Herr Dr. Franz Kossmat überreicht eine Abhandlung über die Geologie der Inseln Sokótra, Sémḥa und ʿAbd el-Kûri, welche den Abschluss seiner während der südarabischen Expedition der kaiserl. Akademie der Wissenschaften auf dieser Inselgruppe vorgenommenen Studien enthält.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

American Mathematical Society, Transactions. Vol. I, Number 1, 2, 3. Lancaster and New York, 1900. 4°.

Ricerche di fisiologia e scienze affini dedicate al Prof. Luigi Luciani nel XXV. anno del suo insegnamento. Mailand, 1900. 4°.

# Bahnbestimmung des großen Meteors vom 11. März 1900

von

Prof. **G. v. Niessl** in Brünn.

(**Vorgelegt in der Sitzung am 17. Jänner 1901.**)

Den größeren Theil des im folgenden verarbeiteten reichlichen Beobachtungsmateriales verdanke ich, wie in sehr vielen früheren Fällen, der erfolgreichen Initiative des Herrn Hofrathes und Sternwarte-Directors Prof. Dr. Edmund Weiß, welcher, nachdem er die erste Nachricht erhalten hatte, in einigen der meistverbreiteten Wiener Tagesblätter zur Mittheilung von Beobachtungen aufforderte. Auch meinerseits ist ein ähnlicher Aufruf, sowohl in Wiener Journalen, als auch in der Prager »Bohemia« und in den Brünner Blättern mit sehr günstigem Erfolge ausgegangen. Es darf daher auch an dieser Stelle nicht unterlassen werden, den betreffenden Redactionen für ihr freundliches Entgegenkommen wärmstens zu danken.

Der Meteorfall fand bei noch sehr wirksamer Dämmerung statt, so dass die Orientierung nach Sternen nicht sogleich erfolgen konnte. Wie gewöhnlich, schien auch diesmal der Verlauf der Erscheinung nach den ersten Berichten näher gerückt, als er sich später herausstellte, insoferne nämlich gar kein Theil der ziemlich langen Bahn, welche durch die Richtung von Leipzig über Trebnitz, nördlich von Breslau, hinaus bezeichnet erscheint, auch nur die Grenzen der Monarchie berührte. Da stellte sich denn eine Reihe von Mittheilungen aus Preußisch-Schlesien, für welche ich auch im vorliegenden Falle wieder Herrn Prof. Dr. E. Reimann in Hirschberg dankbarst verpflichtet bin, als höchst wichtig heraus. Es waren

dies die einzigen, welche mir aus dem Deutschen Reiche zugekommen sind, während doch die Feuerkugel südwärts bis an die steiermärkische Grenze auf eine Entfernung von ungefähr 400 *km* noch beobachtet und ohne Zweifel auch gegen Norden hin, in der Mark und in Posen, vielfach wahrgenommen worden ist.

Herrn Adjuncten Dr. Friedrich Bidschof bin ich besonderen Dank für die Feststellung einiger Wiener Beobachtungen schuldig, sowie auch den Herren Professoren Emanuel Urban in Troppau und Dr. Fr. Nábělek in Kremsier für ähnliche erfolgreiche Bemühungen in den genannten Städten.

Den vielen Persönlichkeiten, welche nicht allein ihre Wahrnehmungen nach bestem Wissen und Können mitgetheilt, sondern auch die weiteren, manchmal wiederholten Anfragen willig und entgegenkommend beantwortet, wo möglich auch Messungen vorgenommen haben, sei hiemit ebenfalls wärmstens gedankt.

Die eingelangten Beobachtungen, welche, wie leicht begreiflich, auch manches Unwesentliche enthielten, waren vielfach so umfangreich, dass sie nur in gekürzter Form hier mitgetheilt werden können. Selbstverständlich ist dabei nichts Wichtiges weggeblieben und es sind insbesondere auch die vielen charakteristischen Angaben über das Aussehen der Feuerkugel in den verschiedenen Phasen übersichtlich zusammengestellt worden.

In der Bearbeitung des Materials ist gegenüber früheren Fällen eine Änderung nicht eingetreten. Sie ist in aller Strenge durchgeführt worden. Hiebei konnten 28 scheinbare Bahnbogen und mehr als 30 Dauerschätzungen benützt werden. Als Resultat ergab sich ein Radiationspunkt, welcher dem der Pultusker Meteoriten, wie wir ihn aus Prof. Galles klassischer Arbeit kennen, so nahe liegt, dass es mir von großem Interesse schien, den etwa möglichen Beziehungen nachzuforschen, umsomehr, als auch hier eine gestreckte Hyperbel für die heliocentrische Bahn sich ebenso bestimmt und unabweisbar ergab, als dort. Deshalb habe ich geglaubt, an dieser Stelle auch die von mir schon vor vielen Jahren versuchte, aber noch nicht veröffent-

lichte Ergänzung der von Galle nur auf zwei — allerdings sehr verlässliche — Beobachtungen gegründeten Bahnbestimmung dieses höchst wichtigen Falles anführen zu dürfen.

Das Ergebnis, sowie die Vergleichung mit den Bahnverhältnissen des hier besprochenen und auch noch einiger anderen Meteore findet man am Schlusse erörtert.

**Beobachtungen.**

1. Semmering (Hôtel »Erzherzog Johann«, 33° 30′; 47° 38′). In einer von dem Herrn C. Boye mir freundlichst mitgetheilten Skizze ist die Bahn des Meteors als flacher Bogen, mit der Bezeichnung: »$^1/_3$ aufsteigend, $^2/_3$ absteigend«, ungefähr von NW oder etwas nördlicher nach NE dargestellt. *D*:[1] 5—6$^s$.

2. Wien. *a)* X. Bezirk, bei der »Spinnerin am Kreuz« (34° 2′; 48° 9′). Nach den Angaben der Beobachterin, Fräulein M. Eberl, und in deren Gegenwart, wurde von dem Herrn Adjuncten Dr. F. Bidschof Folgendes durch Messung ermittelt: Erstes Erblicken an einem »im Azimut gut bestimmbaren Punkte«, 50° W von magn. N. Die Höhe konnte nicht angegeben werden. Verschwinden an der Dachrinne des Hauses 29° E von magn. N, 12°5 hoch. Leider war das Richtobject sehr nahe und der Standpunkt also von großem Einflusse. Die scheinbare Bahnneigung wurde durch einen Strich zu 14°5 angedeutet. *D*: 3$^s$. Gelbrothe Kugel von Mondgröße (?). »Der Schweif glich einem brennenden Strauche.« Die magnetische Declination[2] für Wien zu 8°1 genommen, wäre das Azimut des ersten Punktes 121°9, das des zweiten 200°9.

*b)* IV. Bezirk, am oberen Eingange in das Belvedere, Heugasse (34° 3′; 48° 11′). Beobachterin war das zehnjährige Töchterlein des Herrn Prof. Schwertner. Das Meteor schien von der inneren Stadt zur russischen Kirche zu ziehen. Scheinbare Neigung gegen den Horizont 18°. Nach den Erhebungen des Herrn Dr. Bidschof soll daselbst die Feuerkugel hinter

---

[1] *D* bedeutet die Dauer.

[2] Alle hier benützten Werte der magnetischen Declination wurden entnommen: Liznar, »Die Vertheilung der erdmagnetischen Kraft in Österreich-Ungarn«, Denkschriften der kais. Akademie, 67. Bd.

einer Mauerkante, 39°5 E von magn. N, also in Azimut 211°4, 14°2 hoch verschwunden sein. Die Bestimmung ist jedoch aus demselben Grunde wie in der vorigen Beobachtung wenig sicher.

*c)* Bei Schönbrunn (33° 59'; 48° 11'5). W. Tirk, Schüler der dritten Gymnasialclasse, berichtete Herrn Sternwarte-Director Hofrath Dr. Weiß mündlich: Das Meteor schien in einem Bogen, zuerst schwach aufsteigend, dann sich rasch senkend, in der Richtung W—E zu ziehen. Nach dem Stadtplane ergab sich, dass es zuerst in NW gesehen wurde und in NNE hinter einem Hause verschwunden ist. Licht bläulich, *D*: 10ˢ (gelegentlich des Berichtes nach der Uhr gezählt), Schweif 3ˢ nachleuchtend.

*d)* Tivoli (34° 0'; 48° 10'). Die Feuerkugel zog scheinbar über dem Leopoldsberge der Donau zu (NNE). Bahnneigung 18° (Herr J. Köck).

*e)* Prater (34° 5'; 48° 12'5). Herr Baumeister Sturany sah nur einen Theil der Bahn, fast wagrecht, dann abfallend und nach 2ˢ hinter Bäumen verschwindend. Größte Höhe 8° bis 10°.

Einige andere Mittheilungen aus Wien, welche keine Andeutungen über die Bahnlage enthalten, sollen später noch kurz erwähnt werden. Auch aus Brunn und Fischament liegen beiläufige Berichte vor. Herr G. Mayer gibt aus Mauer (33° 56'; 48° 9') die Bewegung über Wien gegen NE »unter einem Winkel von ungefähr 30°« an. *D*: 4 bis 5ˢ.

3. Floridsdorf (34° 5'; 48° 15'). Ein kurzes Bahnstück unter 27° Neigung gegen den Horizont. Richtung W—E (Heinr. Redlich, Bürgerschüler).

4. Ober-Hollabrunn (33° 45'; 48° 33'). Richtung der Bewegung WSW—ENE. Neigung 19 bis 20°, Ende verdeckt (Herr Kaufmann J. Wimmer).

5. Horn (33° 19'; 48° 39'). Verlauf in NE unter etwa 45° Neigung (Herr L. Pollatschek).

6. Retz (33° 37'; 48° 45'5). Ein von NW gegen E zu sich senkender Feuerball (Herr Dr. A. Chwoika).

7. Léva in Ungarn (36° 16'; 48° 13'5). Nach der ersten Mittheilung wurde das Meteor hier am nördlichen Himmel

gesehen, wo es »einen kurzen Bogen in östlicher Richtung beschrieb«. Herr E. Rappeport, dem ich diese, und mit Unterstützung des Herrn E. Stosius, Stationsvorstandes daselbst, die weiteren Mittheilungen verdanke, hat die Feuerkugel jedoch nicht selbst gesehen und war auf die späteren Angaben der Beobachter angewiesen. Mit Hilfe der Specialkarte und des Gradbogens wurde ermittelt, dass das Meteor in etwa 188° Azimut, 6° hoch hinter einem Firste verschwunden ist, was dem Complex der übrigen Beobachtungen ungefähr entsprechen würde, ebenso, dass der erste Punkt 13° hoch war. Die Bewegungsrichtung wurde aber nun im entgegengesetzten Sinne der ersten Nachricht, nämlich von E her, angegeben. Es würde sich hier also entweder um ein anderes Meteor handeln, oder der Lauf desselben war den Beobachtern nicht mehr in Erinnerung geblieben. Bei der hinreichenden Übereinstimmung des Endpunktes und der Fallzeit ist wohl letzteres wahrscheinlicher, da ja in der ersten Mittheilung die Bewegungsrichtung wirklich als eine östliche angegeben wurde.

8. Lundenburg (34° 33′; 48° 45′). Prachtvolles Meteor, das ungefähr 35° hoch (geschätzt) von SW—NE in einer sehr flachen Curve zog und etwa so hoch über dem Horizonte erlosch, als die Sonne $45^m$ vor dem Untergange steht. Bahnneigung 18 bis 20°. *D*: 6 bis $7^s$ (Herr S. Bittner).

9. Nicolsburg (34° 18′; 48° 48′). Herr Dr. F. Fischer berichtet an die Wiener Sternwarte, dass er nur ein kurzes Bahnstück während $2^s$ gesehen habe, dessen Länge etwa 10 Mondbreiten bei etwa 25° Neigung betrug. Das Meteor verschwand hinter dem Schlosse etwa 15 Mondbreiten hoch in einer β Orionis genau gegenüber liegenden Richtung ($A = 190°5$).

10. Ungarisch-Brod (35° 19′; 49° 1′5). Frau Bezirkshauptmann Henriette Masłowski lieferte der Sternwarte einen anschaulichen Bericht über die äußere Erscheinung, auf welchen ich noch zurückkommen werde. Bewegungsrichtung SW—NE.

11. Ungarisch-Hradisch (35° 7′5; 49° 4′). Richtung SW—NE. Ende noch ziemlich hoch über dem Horizonte (Herr R. Doleček).

12. Brumow (35° 42′; 49° 5'5). Das Meteor flog aus NW gegen die kleinen Karpathen in nordöstlicher Richtung (Herr L. Bermann).

13. Brünn. *a)* (34° 18'3; 49° 10'8). Herr Volksschullehrer C. Wlczek befand sich südlich der Landes-Irrenanstalt. Um $6^h$ $32^m$ Brünner Ortszeit zog scheinbar über diese hin von W—E in sanftem Bogen und geringer Höhe ein Meteor von blendend weißem Glanze, elektrischem Bogenlichte vergleichbar, einen Lichtstreifen nachziehend. Gegen das Ende der sichtbaren Bahn schien das Licht schwächer und röthlich zu werden, dann verschwand es plötzlich ohne die gewöhnlichen Zeichen einer Explosion. *D*: $4^s$ (später nach der Uhr geprüft). Bahnlänge ungefähr 50°. Skizzierte Neigung gegen den Horizont 24°. Die mit Beihilfe des Herrn Beobachters von mir vorgenommenen Messungen lieferten folgendes Ergebnis. Endpunkt (gut markiert, anscheinend recht sicher) $A = 210°5$, $h = 5°5$. Im Vertical des Kapellenthurmes $A = 183°$, $h = 8°$. Anfang (minder sicher in Höhe) $A = 168°$, $h = 11°$ oder ein wenig mehr.

*b)* (34° 14′; 49° 13′). Einem anderen Beobachter erschien von der Mitte des Dorfes Sebrowitz die Feuerkugel knapp über der Kozihora-Kuppe ($A = 175°$, Höhenwinkel der Kuppe 7°) und zog im flachen Bogen in östlicher Richtung. Wenn die Bahn des Meteors einige Grade über der Kuppe angenommen wird, so stimmt die Beobachtung in diesem Punkte sehr nahe mit der vorigen überein.

*c)* (34° 15'6; 49° 11′). Frau Anna Pospiech befand sich beim Ausgange des Altbrünner Friedhofes in der Wienergasse. Nach ihren mündlichen Mittheilungen bemerkte sie das Meteor zuerst ungefähr in N, eher ein wenig westlich. Es zog in geringer Höhe über den Thurm der Barmherzigenkirche (wofür ich später $h = 18$ bis 20°, doch nicht sehr sicher fand) in einem flachen Bogen gegen NE, verschwand aber schon früher. Scheinbare Neigung 19°5, *D*: $3^s$ (vorgezählt).

Eine andere Beobachterin in der Thalgasse gibt ebenfalls die Bewegungsrichtung SW—NE an.

14. Zlin (35° 20′; 49° 14′). Das Meteor wurde erst am nordöstlichen Himmel, knapp vor dem Verschwinden, gesehen,

schien unter einem Winkel von etwa 45° abzufallen und verschwand beiläufig in $A = 220°$, $h = 15°$ hinter dem benachbarten Bergrücken (Herr Bürgerschuldirector J. Horák).

15. Kremsier (35° 5′; 49° 18′). Hier wurde die Feuerkugel von einigen Gymnasialschülern beobachtet. Herr Prof. Dr. Fr. Nábělek war so freundlich, mit jedem einzelnen die nöthigen Messungen vorzunehmen. Die Angaben stimmen ziemlich gut überein. Folgende Resultate konnte er mir mit voller Sicherheit mittheilen: Beginn zwischen magn. N und 5° westlich davon (also, mit 8° magn. Declination, $A = 167°$ bis 172°) $h = 18$ bis 20°. Ende 30° östlich von magn. N, d. i. $A = 202°$, $h = 7$ bis 9°. Auch die Höhen sind alle gemessen. Scheinbare Bahnneigung etwa 24°. Länge des Bogens gegen 34°. $D$: $4^s$.

16. Doloplas (34° 50′; 49° 21′4). Zog gegen NE und die Bahn war »über dem nordwestlichen Horizonte etwa 80° hoch, also beinahe im Zenith«. $D$: $5^s$ (Dr. G. Bunzel an die Wiener Sternwarte).

17. Wal. Meseritsch (35° 38′5; 49° 28′5). Herrn Fachschuldirector Fr. Rosmael, welcher auf mein Ersuchen Messungen vorgenommen hat, verdanke ich folgende Mittheilungen. Ende in $A = 194°5$, $h = 11°$, doch ist es ungewiss, ob erloschen, oder hinter den Dächern verschwunden. Der größere Theil der Bahn erschien fast horizontal in 15° Culminationshöhe. Anfang etwa WNW, 14° hoch. Bewegungsrichtung WSW—ENE. Durchmesser = $^1/_8$ Vollmond. Schweif doppelt so lang, rothglühend. $D$: 5 bis $6^s$.

18. Neustadtl (33° 44′; 49° 34′). Herr Prof. J. Minks von der dortigen Landes-Oberrealschule theilte Herrn Prof. Nábělek mit, dass, nach Angaben von Realschülern, welche das Meteor beobachteten, die Erscheinung bei β Ursae minoris begonnen hat und bei β Leonis verschwunden ist, anfangs 30°, zuletzt 10° hoch. $D$: $5^s$.

19. Olmütz (34° 54′; 49° 36′). Herr Gymnasialprofessor K. Minařík berichtete an Herrn Hofrath Prof. Dr. Weiß, dass er um $6^h 25^m$ m. e. Z. am nördlichen Himmel in 25° Höhe ein Meteor aufleuchten sah, welches von W—E einen gegen unten hohlen Bogen beschrieb und beiläufig unter η Ursae majoris in

etwa 10° Höhe erlosch. Fixsterne waren noch nicht zu sehen und es konnte diese Feststellung erst später erfolgen. Das Meteor war heller als Venus, licht gelblichgrün, in der zweiten Hälfte der Bahn schwächer. *D*: 3 bis 4ˢ. Nachträgliche Messungen lieferten die Azimute für Anfang und Ende: 173°5 und 202°6. Die scheinbare Neigung betrug 23°.

20. Paulowitz (34° 56'5; 49° 36'). Die Feuerkugel erschien am »südwestlichen Himmel«, zog gegen NE und war 6ˢ bis 8ˢ zu sehen. Scheinbare Neigung 14° (Herr M. Groß).

Auch aus Zwittau und Gr. Ullersdorf liegen Nachrichten vor, doch enthalten sie keine Angaben über die Bahn.

21. Friedek (36° 1'; 49° 41'). Bewegung SW—NE. Anfang $A = 182°$, $h = 45°7$. Ende $A = 205°$, $h = 6°3$ hinter einem Dache. *D*: 5 bis 7° (Beobachtung des Herrn Notars Dr. Odstrčil. Messungen durch Herrn Prof. Karl Koeppner).

22. Bielitz (36° 42'7; 49° 49'8). Richtung SW—NE; durch bedeutenden Glanz und hervorragende Größe ausgezeichnet. *D*: 3 bis 4ˢ. Nach Eintragung in die Specialkarte war der Endpunkt ungefähr in $A = 180°$ und die zugehörige Höhe wurde zumindestens 25° angegeben. Bahnneigung 39°, Anfanghöhe etwa 50°. $^2/_3$ Mondgröße.

23. Oderberg (36° 2'; 49° 54'). Das Meteor soll schon etwa 5° nördlich von W erschienen sein. Es hatte ungefähr die Richtung gegen 13° nördlich von E (skizziert). Über den Endpunkt konnte keine sichere Angabe erlangt werden (Herr C. Fiala).

24. Troppau (35° 32'5; 49° 55'5). *a)* Einige Herren befanden sich auf dem Ottendorfer Wege, etwa 100 bis 200 Schritte vor der Einmündung in die Olmützer Straße. Sie erblickten das Meteor scheinbar aus der Venus ($\alpha = 28°8$, $\delta = +12°6$) oder deren nächster Nähe kommend. Es verschwand über der Landes-Irrenanstalt. Bewegung SW—NE (»Freie schlesische Presse« Nr. 58 und Erhebungen des Herrn Prof. Urban). Letzterer theilte mir ferner mit, dass Herr F. Kromer bei der Hozenitz-Brücke das Meteor in der Mitte des Galgenberges von SW—NE ziehen sah, während er bis sechs zählen konnte.

*b)* Herr J. Hawlitzky, welcher sich ebenfalls auf der Ottendorfer Straße befand, berichtete, dass er die Feuerkugel zuerst in der Gegend von β Pegasi ($\alpha = 344°8$, $\delta = +27°5$), damals in 117°5 Azimut befindlich, erblickt habe und dass sie hinter dem Neubau des Krankenhauses verschwunden sei. Die Bahnneigung wurde nur zu 10° bis 12° geschätzt. $D$: $6^s$. Herr Hawlitzky bemühte sich, allerdings viel später, mir hinsichtlich des Endpunktes noch etwas bestimmtere Angaben zu liefern. »Zur Zeit, als die beiden hellen Sterne vom Viereck des kleinen Bären senkrecht gegen den Horizont übereinander standen, war durch diese Senkrechte das Ende der Bahn bestimmt ($A$ ungefähr 200°). Die Höhe mag dem Abstande α bis γ Orionis entsprochen haben. Aus einer Boussolenmessung fand Herr Hawlitzky für den letzten von ihm gesehenen Punkt 21° östlich von magn. N, d. i. $A = 193°1$.

25. Chotieschau bei Pilsen (30° 52′; 49° 39′5). Fräulein Mathilde Sturm sah das Meteor in einem weiten Bogen von N—E fallen und zeichnete die Bahn mit 69° Neigung.

26. Hunschitz bei Pilsen (30° 52′5; 49° 50′). Eine grünliche Kugel mit kurzem Lichtschein bewegte sich von W—E. Nachträglich wurde das erste Erscheinen gegen Dohalitz, d. i. etwas westlich von N und die Bewegung gegen ein wenig südlich von E hin dargestellt (Herr Rembert Graf Schmising-Kerssenbrock auf Schloss Lichtenstein).

27. Landskron (34° 17′; 49° 55′). Die Feuerkugel erschien in NNW und zog in einer nach der Zeichnung etwa 20° geneigten Bahn mit der Richtung gegen SSE (?) (Herr A. Haselbauer). Die letzte Angabe ist im Widerspruche mit der ersten.

28. Hlubočep bei Prag (32° 3′; 50° 2′5). Die folgende recht sachgemäße Darstellung übermittelte Fräulein Wilma v. Bronneck der Wiener Sternwarte: »Ich bemerkte etwas östlich von der Stelle am Firmamente, wo der Polarstern sich befindet, ein großes, helles Meteor sich vom Himmel lösen. Es hatte die weißgrünliche Färbung des Sirius, erschien mir aber bedeutend größer und leuchtete intensiver als dieser, was umso auffallender war, als es noch so hell war, dass keine Sterne zu sehen gewesen. Es bewegte sich in einem weiten Bogen gegen E, vergrößerte sich im Fallen stetig und verschwand, als

es am größten schien, zur Erde niederfallend, unterm Horizonte auch in dieser Richtung, gerade dort, wo die Sonne aufgeht. Die Dauer war unmerklich länger, als die einer Sternschnuppe. Nachleuchten war nicht zu bemerken.

29. Prag (32° 6′; 50° 5ꞏ5). Bewegung ziemlich langsam von SW—NE. Vom ersten Erblicken, etwa im Zenith, bis zum Verschwinden nahe dem Horizonte wäre etwa $^1/_4{}^m$ Dauer zu veranschlagen (Herr G. Pollak an die Sternwarte). Der Genannte war so freundlich, mir später in einer Skizze darzustellen, dass seiner, allerdings nicht mehr sicheren Erinnerung nach, das Azimut des Einfallspunktes ungefähr 230° und die Bahnneigung gegen den Horizont etwa 74° betragen haben mochte.

30. Zwischen Chlumetz und Nepolis (33° 7ꞏ5; 50° 11′). Beobachter befand sich zu Wagen zwischen den hier genannten Orten und sah das Meteor von prächtig lichtgrüner Farbe aus NNW in der Richtung von Chlumetz nach Nechanitz (die Richtung nach Nechanitz hatte etwa $A = 240°$) schräg durch sich senken. Bahnneigung ungefähr 15°. Erlöschen ohne Zerspringen etwa so hoch, als die Sonne am 1. April, $6^h$ $19^m$ abends steht (dies wäre wenig über 1°). $D$: 3 bis $4^s$ (Herr A. v. Ritter).

31. Dauba (32° 13′; 50° 13′). Scheinbare Bahnneigung 30° (Herr C. Jaksch).

32. Nachod (33° 49ꞏ6; 50° 25′). Herr Fabriksdirector E. Goldmann bezeichnete in einem Berichte an die Sternwarte das Phänomen als ein solches, wie er es an Größe, Intensität und Dauer noch nie gesehen. Es bewegte sich gegen Slaney hin ($A = 242°$) in Form eines riesigen Schweifes, von dem sich schließlich ein feuriger Ball löste und abfiel. In diesem Augenblicke erlosch auch der ganze Feuerschein. $D$: $3^s$. Einige Höhen wurden, allerdings wesentlich später, mit dem Gradbogen gemessen. Die Bahn schien zuerst aufsteigend, aus etwa 24° Höhe. Der höchste Punkt lag in 34 bis 36° und das Erlöschen in 28 bis 29°.

33. Komotau (31° 5′; 50° 28ꞏ5). Erschien am nördlichen Himmel und gieng in südöstlicher (?) Richtung (Herr E. Schönherr).

34. Czalositz bei Leitmeritz (31° 46'; 50° 31'7). Das Meteor erschien am nordöstlichen Himmel, 32 bis 35° hoch und verschwand — nach genauer Darstellung auf der Specialkarte über dem Leitmeritzer Domthurme vom Orte Czalositz aus — in $A = 255°6$ nur etwa 3° hoch. Bahn sehr steil, »fast senkrecht«, nach der Zeichnung in 75° Neigung gegen den Horizont. $D$: $4^s$. Birnförmig, gelblichweiß, weit über Venus. »Nach dem Verschwinden sah man noch durch $2^s$ ein weiterleuchtendes Fragment der Erde zufallen«. Schweif durch $22^s$ nachleuchtend (Herr H. Ankert).

35. Lomnitz a. d. Popelka (33° 2'5; 50° 32'). Richtung SW—NE. Neigung 59° (Herr Lehrer J. Tichánek).

36. Arnau (33° 23'; 50° 32'2). Sichtbar von NW bis NE. Ende gegen Wildschütz zu, d. i. in $A = 247°2$. Scheinbare Neigung 63°5 (Herr R. Doležal).

37. Trautenau (33° 35'; 50° 34'). Zuerst wurde das Meteor hoch, anscheinend ziemlich genau in N erblickt. Es zog in einer sanft gebogenen Linie unter 60° Neigung östlich und verschwand wie im Dunstkreise in $A = 247°5$ (Herr C. Schweiger, Beamter).

38. Wildschütz (33° 29'; 50° 34'). Richtung nordöstlich, scheinbare Neigung nur zu 38° skizziert. Gegen Ende sich stark abschwächend und verlierend (Herr F. Hartmann, Baumeister).

39. Aussig (31° 42'; 50° 40'). Neigung 53°. Bahn am östlichen Horizonte sichtbar (Herr C. Kraupenhaar).

40. Mariaschein (31° 32'; 50° 41'). Am östlichen Himmel, 35° hoch erscheinend, Bewegung W—E, Ende in etwa 20° (Höhen abgeschätzt). Licht gleich dem der Venus, kein Schweif. $D$: $4^1/_2{}^s$, gezählt (Herr C. Masse).

41. Bürgstein (32° 15'3; 50° 44'6). Fall sehr steil, fast senkrecht, Ende gegen das Jeschkengebirge ($A = 256°5$) (Fräulein Rosa Meltzer).

42. Reichenberg (32° 43'; 50° 46'). *a)* Neigung ungefähr 71°, links nach rechts, nordöstlich (Herr Prof. Dr. L. Adamek). *b)* Zuerst in NE, dann in nur 34° Neigung herabziehend, knapp über dem Horizonte verschwindend. $D$: $3^s$. Hatte einen ziemlich langen Schweif (Herr W. Hausmann).

43. Tetschen (31° 52'5; 50° 47'). Scheinbare Neigung 74°. Richtung gegen den Fallpunkt, nach der Karte noch etwas südlich von E. Diese Angabe beruhte jedoch auf einer unwillkürlichen Bahnverlängerung, weil es schien, als ob das Meteor noch vor den bedeutenden Höhen auf der Ostseite gefallen wäre. Es konnte jedoch nur hinter denselben verschwunden sein (Frau Ernestine Tschulik).

44. Grottau (32° 30'5; 50° 51'). Ein prächtiges Meteor gieng aus der Gegend des »Großen Bären« im Osten nieder. Sein intensives Licht würde bei größerer Dunkelheit die Nacht durch 5 bis $6^s$ taghell erleuchtet haben (»Reichenberger Zeitung«).

45. Bad Salzbrunn (33° 54'; 50° 47'5). Die Feuerkugel senkte sich von N in großem Bogen nach E. *D*: $5^s$ (»Schlesische Zeitung«).

46. Petersdorf im Riesengebirge (33° 15'; 50° 51'). Neigung 60° gegen N hin, Bewegung links oben nach rechts unten (Primaner V. v. Brauchitsch, nach Mittheilung des Herrn Prof. Dr. E. Reimann).

47. Hirschberg (33° 24'; 50° 54'3). *a)* Der hier erscheinende »Bote aus dem Riesengebirge« brachte Nr. 61 (14. März) folgende Mittheilung, welche ich hier anführe, weil sie auch Herr Prof. Reimann, dem ich sie verdanke, auf Hirschberg bezogen hat. Sie widerspricht jedoch anderen verlässlichen Angaben von dort ganz entschieden. Vermuthlich würde sie richtiger unter Nr. 50 (Sprottau) am Platze sein:

»$6^h$ $21^m$ ist hier in vielen Orten Niederschlesiens ein herrliches Meteor beobachtet worden. Dasselbe erschien nahezu im Zenith, etwa 8 bis 10 Breitengrade nördlich der Mondscheibe und senkte sich auffallend langsam genau in östlicher Richtung dem Horizonte zu, um erst dicht über demselben zu verschwinden. Es hatte etwa die Größe der Mondscheibe, aber ein grelleres Licht als diese. Die Größe nahm allmählich ab und das Licht, ein blendend weißer Kern mit einem grünschimmernden Mantel, nahm beim Verschwinden eine röthliche Färbung an. *D*: $6^s$.«

Nach dieser Beziehung auf den Mond müsste das Meteor südlich an Hirschberg vorübergezogen sein, während die drei

folgenden Beobachtungen, welche mir Herr Prof. Reimann freundlichst mitgetheilt hat, übereinstimmend das Gegentheil beweisen.

*b)* In Hirschberg beobachtete der Sextaner Arndt das Meteor. Nach seiner Angabe constatierte Herr Prof. Reimann, dass es zuerst in nördlicher Richtung etwa 60° hoch gesehen wurde und genau im Osten, wenige Grade über dem Horizonte hinter einem Hause verschwunden ist. Helligkeit wie Venus. *D*: $5^s$.

*c)* Mit Arndt zusammen, beobachtete auch der Quintaner Niebuhr die Feuerkugel. Seine Aussagen decken sich mit jenen Arndts, nur schätzt er die Dauer auf $3^s$. Beide fertigten auch Skizzen der Bahn an, aus denen die scheinbare Neigung nach N hin bei Arndt zu 52°5, bei Niebuhr zu 49°5, im Mittel 51° folgt.

Auch der Primaner Berliner hat auf der Warmbrunner Straße das Meteor von links (nördlich) oben nach rechts unten ziehen sehen. Es ist daher wohl nicht zu bezweifeln, dass die Bahn nördlich an Hirschberg vorbeigieng.

48. Liegnitz (33° 49′; 50° 57′5). Eine faustgroße, goldige Feuerkugel nahm ihren Weg W—E, hinter sich einen glänzenden Schweif lassend. Fast im Zenith passierte das Meteor unsere Stadt. Verschwinden am Osthorizonte. *D*: 5 bis $6^s$ (»Schlesische Zeitung«).

49. Breslau (34° 41′5; 51° 8′). Um $6^h 30^m$ wurde von der Oswitzer Chaussee bei den Kirchhöfen am nördlichen Himmel ein hell leuchtendes Meteor beobachtet. Es bewegte sich, einen flachen Bogen beschreibend, in westöstlicher Richtung. *D*: $5^s$ (»Schlesische Zeitung« vom 12. März).

In dem Blatte vom 17. März ist dieselbe Beobachtung ausführlicher wiederholt. Der Mond begann bereits Schatten zu werfen, gleichwohl verursachte die Feuerkugel helles Aufleuchten. Nördlich war erst nur ganz schwach der »Große Bär« zu erkennen. Das Meteor hatte die Richtung auf die Deichsel des Wagens gehabt und diesen noch nicht erreicht.

50. Sprottau (33° 12′5; 51° 34′). Die »Schlesische Zeitung« vom 17. März berichtete ferner: »Auch in Sprottau ist das Meteor beobachtet worden. Man schreibt uns von dort:

Abends $6^h\ 21^m$ (?) wurde hier am Osthimmel ein herrliches Meteor beobachtet.« Von hier an ist die Notiz wörtlich gleichlautend mit der in dem »Boten aus dem Riesengebirge« enthaltenen, unter (47) angeführten, doch ist der nördliche Abstand vom Monde nur zu 2 bis 3° angegeben und findet sich der Satz eingeschaltet: »Anfangs sah es aus, als ob plötzlich ein neuer Mond am Himmel erschienen wäre.« Alles übrige bis zum Schlusse ist genau identisch.

Obwohl es auffällt, dass der Abstand vom Monde, sei es zufällig oder absichtlich, in beiden Notizen verschieden angegeben erscheint, so ist im übrigen von der unrichtigen Zeitangabe angefangen, bis zum Schlusse die textliche Übereinstimmung so genau, dass man wohl beide als aus derselben Quelle stammend ansehen muss. Vermuthlich sind sie aus einem in Sprottau erscheinenden Localblatte abgedruckt, denn nach den direct aus Hirschberg unter (47) mitgetheilten Beobachtungen kann in dieser Gegend das Meteor nicht in die Nähe des Mondes gekommen sein, da es noch weit auf der Nordseite das Zenith passierte.

---

Nach den sichersten Angaben, zu welchen ohne Zweifel die übereinstimmenden aus Brünn und Olmütz gehören, kann für die Epoche des Falles: 1900, März 11, $5^h\ 25^m$ mittl. Greenw. Zeit, d. i. $6^h\ 31^m5$ mittl. Brünner Zeit, genommen werden.

---

## Geographische Lage und Höhe des Endpunktes.

Zur Ermittelung der geographischen Coordinaten desjenigen Punktes, über welchem das Meteor schließlich erloschen ist, sind die Azimute aus 12 Beobachtungsorten verwendbar. Messungsergebnisse nach bestimmten, weit entlegenen Marken erhielten Gewicht 2, jene aus solchen beiläufigen Einzeichnungen, welche den Beobachtern selbst unsicher schienen, nur $^1/_2$; den übrigen wurde das Gewicht 1 beigelegt. Unbenützt mussten in diesem Punkte die Angaben aus Wien, Nicolsburg,

Zlin, Friedek und Prag bleiben, weil sie sich entweder nicht auf das eigentliche Erlöschen beziehen, oder wegen zu großer Nähe der Richtmarken offenbar sehr unsicher sind. Die Angabe aus Neustadtl kann sich nicht richtig auf β Leonis beziehen, welcher Stern viel zu weit östlich war. Für Troppau wurde das Mittel der beiden unter (24 *b*) angeführten Azimute mit dem Gewichte 2 beibehalten. Der Endpunkt wurde demnach aus folgenden Azimuten nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt:

| | Azimut | Gewicht |
|---|---|---|
| Léva (7) | 188° | 0·5 |
| Brünn (13) | 210·5 | 2 |
| Kremsier (15) | 202 | 2 |
| Wal. Meseritsch (17) | 194·5 | 1 |
| Olmütz (19) | 202·6 | 2 |
| Bielitz (22) | 180 | 0·5 |
| Troppau (24) | 196·6 | 2 |
| Nachod (32) | 242 | 1 |
| Czalositz (34) | 255·6 | 2 |
| Arnau (36) | 247·2 | 1 |
| Trautenau (37) | 247·5 | 1 |
| Bürgstein (41) | 256·5 | 1 |

Hieraus ergab sich, dass der Endpunkt in 36° 18'2 Länge östl. v. F. und 51° 15'2 nördlicher Breite, d. i. ein wenig nördlich von Wielun in Russisch-Polen, gelegen war. Die mittlere Unsicherheit beträgt rechnungsgemäß in Länge ±5'6 oder 6·5 *km*, in Breite ±4'3 oder 7·9 *km*.

Da alle Beobachtungspunkte weit entfernt waren (Troppau, als nächster, noch immer 157 *km*), ist es wohl begreiflich, dass die lineare Genauigkeit nicht größer ausfallen konnte. Dagegen bietet wieder die große Entfernung Vortheile für die Bestimmung des Radianten.

Was nun die Höhe des Endpunktes über der Erdoberfläche betrifft, so ergaben sich aus 9 Angaben brauchbare Resultate, welche hier sammt den zugehörigen Rechnungsgrundlagen angeführt sind:

| | Scheinbare Höhe | Entfernung vom Endpunkte | Höhe des Endpunktes |
|---|---|---|---|
| Léva (7) ......... | 6° | 333 *km* | 43·7 *km* |
| Lundenburg (8) ... | 8 | 303 | 49·8 |
| Brünn (13) ....... | 5·5 | 270 | 31·8 |
| Kremsier (15)..... | 8 | 232 | 36·9 |
| W. Meseritsch (17) | 11 | 200 | 42·1 |
| Olmütz (19) ...... | 10 | 208 | 40·1 |
| Friedek (21)...... | 6·3 | 175 | 21·8 |
| Troppau (24)...... | 7·5 | 157 | 22·6 |
| Czalositz (34)..... | 3 | 329 | 25·7 |

Der Durchschnittswert würde 34·9±3 *km* betragen. Den einzelnen Resultaten kommen jedoch verschiedene Gewichte zu, denn eigentlich sind nur in Brünn und Kremsier genaue Messungen vorgenommen worden. Dass die Angaben aus Léva und Meseritsch berücksichtigt werden konnten, obwohl die Höhen sich nicht sicher auf den Endpunkt beziehen, ist darin begründet, dass bei der scheinbaren Bahnlage die Höhenänderung auch für eine merkliche azimutale Differenz gering war. Gleichwohl haben die betreffenden Resultate offenbar weniger Gewicht als die anderen.

Die ziffermäßige Gewichtschätzung ist hier jedoch unsicher und, weil das Mittel aus den beiden Resultaten, welche im voraus als die sichersten gelten müssen, nämlich jenen aus Brünn und Kremsier, für die Höhe den Wert: 34·3 *km* gibt, welcher nur unbedeutend vom Durchschnittswerte abweicht, so will ich dieses Mittel beibehalten und den weiteren Betrachtungen zugrunde legen.

Die nöthigen Verbesserungen (berechnet — beobachtet), welche an den benützten Beobachtungen anzubringen sind, zeigt folgende Übersicht:

| | $\Delta A$ | $\Delta h$ |
|---|---|---|
| Léva (7) .............. | — 7°6 | —1°4 |
| Lundenburg (8) ........ | — | —2·9 |
| Brünn (13) ............ | + 0·3 | +0·5 |
| Kremsier (15) .......... | — 0·8 | —0·6 |

| | ΔA | Δh |
|---|---|---|
| Wal. Meseritsch (17).... | — 1°4 | —2°2 |
| Olmütz (19) ........... | + 5·3 | —1·6 |
| Friedek (21)........... | — | +3·7 |
| Bielitz (22)............ | —10·1 | — |
| Troppau (24).......... | + 3·0 | +4·2 |
| Nachod (32)........... | — 0·4 | — |
| Czalositz (34).......... | + 1·5 | +1·5 |
| Arnau (36)............ | + 0·4 | — |
| Trautenau (37)......... | — 1·5 | — |
| Bürgstein (41)......... | + 0·6 | — |

Für die Azimute ist der mittlere Fehler einer Beobachtung der Gewichtseinheit ±3°9. Der mittlere Fehler einer Höhenangabe beträgt 2°5. Diese auffallend geringe Unsicherheit der scheinbaren Höhen rührt aber theilweise von der Ausschließung einiger stark abweichenden Angaben her. Wenn man deren Verbesserungen auch einbeziehen wollte, so wären unter Δ*h* noch in Betracht zu ziehen:

| | Δh |
|---|---|
| Wien (2 *a*)......... | — 9°0 |
| Wien (2 *b*)......... | —10·7 |
| Zlin (14)........... | — 7·7 |
| Neustadtl (18)...... | — 3·7 |
| Bielitz (22)......... | —13·8 |
| Bei Chlumetz (30)... | + 5·4 |
| Nachod (32)........ | —19·5 |

Mit diesen Einbeziehungen würde dann der mittlere Fehler einer Höhenangabe auf ±7°8 steigen.

Nachträglich lässt sich noch bemerken, dass die nur beiläufige Angabe der Beobachtung nächst Chlumetz (30) für die Richtung sehr gut stimmt, indem sie etwa 240°, die Rechnung aber 241° Azimut gibt.

**Scheinbarer Radiationspunkt.**

Zur Ermittelung des Radianten, der Hauptaufgabe jeder derartigen Untersuchung, konnten die Beobachtungen aus 28 verschiedenen Orten benützt werden. Der Endpunkt der

betreffenden scheinbaren Bahn wurde überall durch Rückberechnung aus der vorhin gefundenen Lage des wirklichen gefunden und in die folgende Zusammenstellung unter II eingetragen. Es konnten daher auch jene Beobachtungen nunmehr verwendet werden, bei welchen das Ende gar nicht gesehen oder nur sehr ungenau bezeichnet wurde.

Die Beziehung der scheinbaren Bahn auf Gestirne konnte wegen der noch hellen Dämmerung nur in wenigen Fällen erfolgen und es wurde die Lage des Anfangspunktes der gesehenen Lichtbahn nur an acht Orten auf diese Weise oder durch Messung festgestellt. Es sind dies die in der nachstehenden Übersicht unter I angeführten Coordinaten bei den ersten acht Bahnen.

Bei den übrigen 20 Beobachtungen musste die angegebene scheinbare Neigung verwendet werden, nach den graphischen Darstellungen, ausnahmsweise auch nach der Messung der Höhe am scheinbaren Culminationspunkt des Bahnbogens. Da diese Bahnen nur der Lage, nicht der Länge nach gegeben sind, ist unter I der Knoten am Äquator, daher überall $\delta = 0$ angeführt.

Die Art, wie die Angaben mehrerer Beobachtungen zur Rechnung benützt wurden, erfordert bei einzelnen derselben eine kurze Erörterung, welche zunächst noch Raum finden soll. —

Wien (2). Aus den Neigungsangaben unter *a)*, *b)* und *d)*: 14°5, 18°, 18° wurde als Mittel 16°8 beibehalten.

Brünn (13). Es liegt unter *a)* eine Doppelbestimmung vor. Die eine ist direct, für $A = 168°$, $h = 11°$, die andere gibt wegen der scheinbaren Bahnneigung von 24°, in $A = 168°$, $h = 21°$. Im Mittel wäre daher für $A = 168°$, $h = 16°$, welche Position beibehalten wurde, da sie auch mit der Neigungsangabe unter *c)*: 19°5 gut übereinstimmt.

Wal. Meseritsch (17). Die Höhe des Culminationspunktes der Bahn, 15°, ist zugleich die scheinbare Neigung, da jener vom Knoten 90° absteht.

Neustadtl (18). Die abgeschätzte Endhöhe von 10° gibt mit 0·63 multipliciert, die berechnete. Es wurde daher auch die Höhe des Anfangspunktes mit demselben Factor reduciert,

woraus sich dann statt 30° rund 19° ergab. Für das Azimut wurde jenes von β Urs. min. $A = 193^\circ 5$ genommen.

Olmütz (19). Hier erforderte die abgeschätzte Endhöhe den Reductionsfactor 0·84. Für den Anfang wurde in $A = 173^\circ 5$, $h = 25^\circ$ geschätzt, woraus sich, mit demselben Factor reduciert, $h = 21^\circ$ ergibt.

Troppau (24). Für den Anfang wurde der in der Mitte zwischen Venus und β Pegasi liegende Ort eingesetzt.

Hlubočep (28). In Ermangelung einer bestimmteren Bezeichnung wurde Polaris als Anfangspunkt genommen.

Reichenberg (42). Die beiden von hier vorliegenden Angaben über die Neigung 71° und 34° weichen zwar stark von einander ab, ich habe aber doch den Mittelwert 52°5 benützt.

Grottau (44). Die angenommene Position entspricht der Mitte im Viereck des »Großen Bären«.

Hirschberg (47). Beibehalten wurde das Mittel aus den beiden Neigungsangaben unter *c)*, nämlich 51°.

Sprottau (50). Angenommen wurde der im Texte bezeichnete nördliche Abstand vom Monde. Das Resultat der gesammten Ausgleichung ist dagegen der Hypothese günstig, dass der unter (47) angeführte Abstand, 8 bis 10°, der für Sprottau vermuthlich richtige war. Doch ergab sich dafür von vorneherein kein sicherer Anhaltspunkt.

Die Gewichtsbemessung für die nachstehenden scheinbaren Bahnen ist nach denselben Grundsätzen, wie in früheren Fällen, vorgenommen worden.

| | I | | II | | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|
| | α | δ | α | δ | |
| Brünn (13) | 287°1 | 55°4 | 225°1 | 39°6 | 4 |
| Kremsier (15) | 287·8 | 58·4 | 237·0 | 44·5 | 4 |
| Neustadtl (18) | 242·4 | 57·7 | 211·3 | 33·6 | 2 |
| Olmütz (19) | 279·5 | 60·5 | 228·0 | 42·7 | 2 |
| Troppau (24) | 6·8 | 20·0 | 237·9 | 48·4 | 2 |
| Hlubočep (28) | 19·5 | 88·8 | 191·7 | 19·9 | 2 |
| Grottau (44) | 171·0 | 57·0 | 178·0 | 13·3 | 1 |
| Sprottau (50) | 121·8 | 19·6 | 164·3 | 1·5 | 2 |
| Wien (2) | 13·4 | 0·0 | 232·8 | 40·5 | 3 |

| | I α | I δ | II α | II δ | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|
| Floridsdorf (3) | 22°1 | 0°0 | 233°1 | 40°7 | 1 |
| Ober-Hollabrunn (4) | 13·9 | 0·0 | 226·2 | 38·6 | 1 |
| Lundenburg (8) | 16·4 | 0·0 | 230·2 | 42·0 | 1 |
| Nicolsburg (9) | 19·7 | 0 0 | 230·3 | 40·7 | 1 |
| Wal. Meseritsch (17) | 10·4 | 0·0 | 248·3 | 47·9 | 1 |
| Paulowitz (20) | 7 8 | 0·0 | 229·1 | 43·1 | 1 |
| Landskron (27) | 7·0 | 0·0 | 210·7 | 35·5 | 1 |
| Dauba (30) | 1·1 | 0·0 | 189·5 | 18·6 | 1 |
| Nachod (31) | 5·2 | 0·0 | 192·7 | 24·8 | 1 |
| Czalositz (34) | 9·5 | 0·0 | 183·3 | 13·6 | 1 |
| Lomnitz (35) | 9·5 | 0·0 | 186·9 | 18·4 | 1 |
| Arnau (36) | 12·5 | 0·0 | 188·6 | 20·3 | 1 |
| Trautenau (37) | 12·5 | 0·0 | 189·2 | 21·8 | 1 |
| Wildschütz (38) | 3·2 | 0·0 | 187·7 | 20·4 | 1 |
| Aussig (39) | 0·8 | 0·0 | 181·3 | 11·8 | 1 |
| Reichenberg (42) | 1·9 | 0·0 | 181·5 | 13·6 | 2 |
| Tetschen (43) | 3·4 | 0·0 | 179·8 | 11·0 | 1 |
| Petersdorf (46) | 0·7 | 0·0 | 178·8 | 13·0 | 1 |
| Hirschberg (47) | 0·0 | 0·0 | 179·9 | 14·3 | 2 |

Hieraus ergaben sich die Coordinaten für den scheinbaren Radiationspunkt in

5°8 ± 1°1 Rectascension

und

13°4 ± 1°5 n. Declination.

Die nöthigen Verbesserungen gegenüber den angenommenen Größen der Beobachtungen ergeben sich aus folgender Zusammenstellung, und zwar für die ersten acht am Anfangspunkte, für die übrigen an der Neigung.

| | |
|---|---|
| Brünn | + 2°9 |
| Kremsier | — 2·2 |
| Neustadtl | — 0·1 |
| Olmütz | — 1·7 |
| Troppau | — 3·8 |

| | |
|---|---|
| Hlubočep .......... | — 9·3 |
| Grottau ............ | + 7·2 |
| Sprottau ........... | — 7·1 |
| Wien.............. | + 2·2 |
| Floridsdorf ........ | — 8·2 |
| Ober-Hollabrunn .... | + 0·5 |
| Lundenburg ........ | — 1·0 |
| Nikolsburg ......... | — 4·9 |
| Wal. Meseritsch ..... | + 4·7 |
| Paulowitz .......... | + 6·3 |
| Landskron ......... | + 7·1 |
| Dauba............. | +11·7 |
| Nachod ............ | + 7·2 |
| Czalositz........... | —18·1 |
| Lomnitz ........... | — 9·5 |
| Arnau ............. | —15·7 |
| Trautenau.......... | —13·8 |
| Wildschütz ........ | + 8·0 |
| Aussig............. | + 9·3 |
| Reichenberg ........ | + 7·2 |
| Tetschen.......... | — 7·5 |
| Petersdorf.......... | + 6·1 |
| Hirschberg ......... | +11·5 |

Der durchschnittliche Betrag der Verbesserung am Anfangspunkte, d. i. also für die ersten acht Beobachtungen, beträgt ±4°3, der durchschnittliche Neigungsfehler dagegen ±8°.

Aus dem ermittelten Radiationspunkte lässt sich nun angeben, dass die Bahn aus 92°5 Azimut, also nur 2°5 nördlich von W her gegen den Endpunkt gerichtet war und eine Neigung von 15° gegen den Horizont des letzteren hatte.

Das Meteor hatte daher ziemlich genau die Richtung über Leipzig her, zog ein wenig nördlich von Riesa, über Großenhein in Sachsen, dann über Uhsmannsdorf und Rothenburg, zwischen Sprottau und Liegnitz, noch etwas nördlich von Haynau, über Aufhalt a. d. Oder und Trebnitz, nördlich von Breslau, wenig südlich vom Kempen und

über die polnische Grenze zum angegebenen Endpunkte nördlich von Wielun.

### Höhe des ersten Aufleuchtens.

Die Angaben für den Punkt der ersten Sichtbarkeit sind sehr von den verschiedenen Umständen, unter welchen die Beobachtung erfolgte, abhängig. Je nachdem die Beobachter dem betreffenden Theile des Himmels zufällig ihre Aufmerksamkeit zugewendet hatten oder erst durch den Lichtblitz die entsprechende Anregung erhielten, konnte die Feuerkugel früher oder später wahrgenommen worden sein. Es liegt also in der Natur der Sache, dass man hinsichtlich des Anfangspunktes der gesehenen Bahn eine ähnliche Übereinstimmung der verschiedenen Wahrnehmungen wie beim Endpunkte nicht fordern und erwarten kann.

Da später, bei der Ausmittelung der Geschwindigkeit, die beobachteten einzelnen Bahnlängen, mit welchen die Anfangshöhen zusammenhängen, ohnehin angeführt werden müssen, soll hier bezüglich dieser Höhe nur eine nach Beobachtungsgruppen geordnete Übersicht gegeben und dabei von den kürzesten Bahnlängen ausgegangen werden.

Nahezu gleichzeitig und, innerhalb der unvermeidlichen Fehlergrenzen, ungefähr am gleichen Orte, im Mittel 130 *km* vom Endpunkte noch entfernt und 70 *km* hoch über der Gegend NW von Breslau, etwas nördlich von Auras, wurde das Meteor in Kremsier, Olmütz und Neustadtl zuerst erblickt. Vielleicht könnte dieser Phase auch die Beobachtung der Frau Pospiech in Brünn (13 *c*) zugezählt werden. Eigentlich trifft diese Angabe aber schon etwas weiter westlich, 75 *km* über der Gegend zwischen Wohlau und Aufhalt. Hiemit stimmt auch ungefähr Brünn *b)* der Richtung nach.

Wesentlich weiter nach rückwärts und höher in der Atmosphäre versetzt die Feuerkugel eine andere und wohl die zahlreichste Beobachtungsgruppe, welche in erster Linie durch die sorgfältigen Angaben des Herrn Lehrers Wlczek (Brünn, *a*) sichergestellt ist und der auch die Wahrnehmungen aus Trautenau und Landskron anzuschließen wären, nämlich 87·5 *km* über der Gegend NNE von Haynau. Wenig verschieden

davon sind die Ergebnisse aus Nachod, Czalositz, Komotau, Hirschberg, Grottau, Liegnitz, Sprottau, für welche man eine Entfernung von 207 bis 209 *km* vom Ende und 91 *km* Höhe, etwa 6 *km* westlich von Haynau, zu nehmen hätte.

Viel früher wurde aber das Meteor schon in Troppau, in und bei Wien, sowie auf dem Semmering, wahrscheinlich überhaupt in den weitest entfernten Gebieten gesehen. Wenn man im Sinne der beiden Troppauer Beobachtungen gelten lässt, dass die Feuerkugel etwa in der Mitte zwischen Venus und β Pegasi schon gesehen wurde, so befand sie sich in diesem Momente 141 *km* über Leipzig. Vermuthlich hat auch der Beobachter in Paulowitz (20) das Meteor ungefähr an dieser Stelle, wenn nicht schon früher gesehen.

Dass die Feuerkugel selbst noch in einer höheren Region sichtbar geworden ist, kann nach einigen Angaben aus Niederösterreich nicht bezweifelt werden. Nach der Beobachtung aus Wien (2 *c*) soll dort das Meteor schon in NW bemerkt worden sein. Dies ist allerdings eine beiläufige Angabe, obwohl dabei der Stadtplan zu Rathe gezogen wurde. Allein eine andere Wiener Beobachtung (2 *a*) gibt für den Anfang, als gut bestimmbar, gar das Azimut 121°9, also eine noch näher an W liegende Richtung.

Eine Bestätigung dieser Angaben liegt in dem Umstande, dass hier, sowie auf dem Semmering durch Beschreibung und Zeichnung zum Ausdrucke gebracht wurde, dass das Meteor zuerst in aufsteigender Bahn erschien. Erst ungefähr in NW konnte hier die Bahn scheinbar horizontal und noch weiter gegen W aufsteigend erscheinen. Das früher erwähnte Azimut aus (2 *a*) würde eine sehr große Bahnlänge bezeichnen, welche nur deshalb zweifelhaft erscheint, weil die Beobachterin für die Dauer nur $3^s$ angibt.

Lässt man also auch nur die Angabe (2 *c*) mit 135° Azimut gelten, so erhält man eine Bahnlänge von 529 *km* und den Anfangspunkt in einer Höhe von 192 *km* oder nicht ganz 26 g. M. über der Gegend etwas östlich von Kassel. Dies ist eine für Boliden sehr gewöhnliche Höhe des ersten Aufleuchtens, und da in dieser Beobachtung die Dauer auf nicht weniger als $10^s$ geschätzt worden ist, kann das Ergebnis als sehr

wahrscheinlich gelten, ja man kann, in Anbetracht der übrigen Angaben, die Möglichkeit einer noch größeren Höhe nicht ausschließen.

**Geocentrische Geschwindigkeit.**

Von den vorliegenden 32 Dauerschätzungen beziehen sich sieben (Brünn *a)* und *c)*, Olmütz, Kremsier, Troppau, Neustadtl und Leitmeritz) auf je bestimmt abgeschlossene Bahnstrecken. Für weitere 10 Beobachtungen kann die zugehörige Bahnlänge wenigstens annähernd ermittelt werden. Hinsichtlich der übrigen Dauerangaben fehlen die nöthigen Bezeichnungen, aus welchen man mit einiger Wahrscheinlichkeit auf die entsprechende Bahnstrecke schließen könnte.

Zu den verlässlichsten Angaben scheinen mir jene aus Brünn zu gehören. Die Beobachtung des Herrn Wlczek liefert, wie oben erwähnt, 195 *km* Bahnlänge und mit $4^s$ Dauer 48·8 *km* Geschwindigkeit. Die andere (13 *c*) gibt nur 151 *km* Länge und $3^s$ Dauer, also 50·3 *km*. Die Übereinstimmung ist eine für derartige Schätzungen sehr günstige. Von den sehr langen Bahnen würde Wien (2 *c*) nach den oben mitgetheilten Zahlen 52·9 *km* für die Geschwindigkeit liefern.

Die einzelnen Ergebnisse aus den 17 erwähnten bestimmteren Bezeichnungen sind der nachstehenden Übersicht zu entnehmen, in welcher die erstangeführten sieben Beobachtungen, welche also wohl eigentlich ein größeres Gewicht verdienen, mit einem * angeführt sind.

Die Angabe WNW in Wal. Meseritsch würde eigentlich auch sehr nahe der für Troppau nachgewiesenen Strecke entsprechen. Da sie jedoch wegen geringer Entfernung der Richtmarken unsicher ist, habe ich die geringere Länge beibehalten.

| | Bahnlänge | Dauer | Geschwindigkeit |
|---|---|---|---|
| *Olmütz | 123 *km* | $3·5^s$ | 35·2 *km* |
| *Kremsier | 132 | 4 | 33·1 |
| *Neustadtl | 137 | 5 | 27·4 |
| *Brünn *c)* | 151 | 3 | 50·3 |
| Salzbrunn | 174 | 5 | 34·8 |
| *Brünn *a)* | 195 | 4 | 48·8 |
| Trautenau | 200 | 5·5 | 36·4 |

| | Bahnlänge | Dauer | Geschwindigkeit |
|---|---|---|---|
| Nachod | 207 *km* | $3^s$ | 69·0 *km* |
| *Czalositz | 209 | 4 | 52·2 |
| Hirschberg | 209 | 4 ($5^s$ u. $3^s$) | 52·2 |
| Grottau | 209 | 5·5 | 38·0 |
| Liegnitz | 209 | 5·5 | 38·0 |
| Sprottau | 209 | 6 | 34·8 |
| Wal. Meseritsch | 209 | 5·5 | 38·0 |
| *Troppau | 373 | 6 | 62·2 |
| Gr. Paulowitz | 373 | 7 | 53·3 |
| Wien *c)* | 529 | 10 | 52·9 |

Das Mittel aus den mit * bezeichneten Ergebnissen würde für die Geschwindigkeit $44 \cdot 2 \pm 5$ *km* und der Durchschnittswert aus allen 17, nur wenig verschieden, $44 \cdot 5 \pm 2 \cdot 8$ *km* liefern. Soweit die vorliegenden Beobachtungen es gestatten, kann daher der abgerundete Wert von 44 *km* für die geocentrische Geschwindigkeit beibehalten werden.

Wenn man aber auch noch auf die übrigen Dauerschätzungen Rücksicht nehmen wollte, welche sich auf eine bestimmte Bahnlänge einzeln nicht beziehen, so könnte etwa das Mittel derselben mit dem Durchschnitte der Bahnlängen verglichen werden. Letzterer beträgt 229 *km*. Die Dauerangaben sind, wenn man auch die offenbare Überschätzung $15^s$ nicht ausschließt, folgende:

| | |
|---|---|
| Semmering | $5^s$ bis $6^s$ |
| Wien *a)* | 3 |
| Wien *e)* | 2 |
| Mauer bei Wien | $3^s$ bis 4 |
| Lundenburg | 6 » 7 |
| Nicolsburg | 2 |
| Doloplas | 5 |
| Friedek | $5^s$ bis 7 |
| Bielitz | 3 » 4 |
| Prag | 15 |
| Chlumetz | $3^s$ bis 4 |
| Reichenberg | 3 |
| Mariaschein | 4·5 |
| Breslau | 5 |

Das Mittel ist $4 \cdot 9^s$, woraus sich daher 46·1 *km* Geschwindigkeit ergeben würde. Also auch dieses minder gewichtige Resultat weicht von der früheren Bestimmung so wenig ab, dass es bei derselben wohl sein Bewenden haben kann.

Angesichts der vorstehenden Einzelnheiten dürfte es am Platze sein, zu erwähnen, dass, wenn dieser kleine Himmelskörper im Sonnensystem eine parabelähnliche Bahn durchlaufen hätte, dessen Geschwindigkeit nicht mehr als die Hälfte oder nahezu 22 *km* hätte betragen können. Man bemerkt aber leicht, dass es nicht gut möglich ist, den vielen Beobachtungen so bedeutende Fehler zuzuschreiben, um zu einem derartigen Resultate zu gelangen.

## Äußere Erscheinung der Feuerkugel.

Wegen der noch hellen Dämmerung war die Lichtstärke zwar vermindert, doch zeigten sich die charakteristischen Eigenthümlichkeiten ganz ausgeprägt.

Die Gestalt war die typische, »birnförmig« (34), »Kugel mit spitzverlaufendem Schweife« (22), »mit zuckerhutförmigem Schweife« (4), »ein sehr stumpfer Kegel« (8). Auch mit einem geschweiften Kometen wurde sie verglichen.

Eine recht hübsche Beschreibung des Aussehens lieferte Frau Henriette Masłowski aus Ung. Brod. Das Meteor hatte, als es sich vom Himmel loslöste, eine tulpenartige Form (der Lichtstreifen hinter demselben den Schaft andeutend) und war im E (vorne) von schönstem Pfauenblaugrün, im W (rückwärts) ganz feurig. Es hinterließ einen feurigen Schweif, aus dem sich die Kugel entwickelte und zur Erde fiel. Je näher sie gegen die Erde kam, desto mehr verlor sich der Schweif. »Es war ein herrliches Phänomen, wie ich seinesgleichen noch nie sah.« Im Berichte aus Nachod (32) ist von einem riesigen Schweife die Rede, von dem sich ein feuriger Ball ablöste. In Wien *a)* kommt der Vergleich mit einem brennenden Strauche vor. Nach der Angabe aus Meseritsch (17) wäre der Schweif scheinbar nur doppelt so lang, als der Kugeldurchmesser gewesen.

Ob unter dem »nachleuchtenden Lichtstreifen«, dessen einige Beobachtungen erwähnen, der Schweif selbst, oder eine auf der Bahn zurückgebliebene längere Lichtspur gemeint war,

lässt sich umsoweniger sicher entscheiden, als einige andere (Lundenburg, Hlubočep, Chlumetz, Mariaschein) ausdrücklich hervorheben, dass eine nachleuchtende Lichtspur nicht zurückgeblieben ist. Aus den Gegenden in Schlesien, über welchen das Meteor hingezogen ist, wird davon auch nichts erwähnt.

Über die scheinbare Größe liegen nur drei brauchbare Schätzungen vor, nämlich, den Durchmesser des Mondes als Einheit genommen: Wal. Meseritsch $^1/_3$, Bielitz $^2/_3$, Sprottau 1.

Die Schätzung (2 *a*) ist offenbar zu hoch gegriffen. Wenn die drei vorstehenden Schätzungen auf die betreffenden kürzesten Entfernungen bezogen werden, so liefern sie der Ordnung nach für den Durchmesser die Resultate 620 *m*, 1020 *m*, 880 *m*, im Mittel 840 *m*.

Nach der Angabe aus Meseritsch müsste also die Länge des conischen Schweifes hinter der Kugel mindestens 1680 *m* betragen haben. Sie kann aber auch größer gewesen sein, denn da nicht angegeben ist, auf welche Stelle der Bahn sich die Schätzung bezieht, so kann auch eine projectivische Verkürzung vorgekommen sein.

Kein einziger Bericht meldet diesmal einen explosionsähnlichen Vorgang mit Funkensprühen beim Erlöschen. Vielfach wird das Verschwinden des Meteors als ein allmähliches dargestellt. Von einer Theilung ist nur in der Beobachtung aus Kremsier die Rede. Die Gymnasialschüler, welche Herrn Prof. Nábělek berichteten, erzählten, dass sich die Kugel in etwa sechs Stücke getheilt habe.

Bei der Bezeichnung der Farbe des Lichtes findet sich 14 mal glänzendweiß und der Vergleich mit »Bogenlicht«, »Auerlicht«; außerdem kommen aber auch noch besondere Angaben vor: wie »blendendweißer Kern mit grün- und blauschillerndem Mantel«, »weiß, mit grünlichem Rande, dann mehr grünlich«, »weiß, später grün, endlich roth«. Ferner finden sich je 2 mal die Bezeichnungen blau und blaugrün, 3 mal grünlichweiß, 7 mal grünlich und grün, 1 mal smaragdgrün ins orangegelbe, 2 mal gelblichgrün, 3 mal hellgelb, 3 mal gelbroth, 3 mal roth. Übrigens kommt auch vielfach die nicht unwesentliche Bemerkung vor, dass das weiße Licht vor dem Erlöschen ins röthliche übergieng.

Im Einklange damit steht es auch, dass der Schweif zumeist feuerroth angegeben wird, eine Farbe, welche eben der bereits stark verminderten Wärme-Intensität entspricht.

In wenigen Secunden stellen uns diese Erscheinungen ähnliche Phasen in der Farbe des Lichtes dar, wie die Fixsterne sie in sehr großen Zeiträumen durchmachen.

Von Detonationen ist im vorliegenden Falle nirgends die Rede. Allerdings fehlen auch Nachrichten aus der Nähe der Fallstelle gänzlich.

## Kosmische Verhältnisse.

In dem vorhin abgeleiteten Betrage der geocentrischen Geschwindigkeit von 44 *km* ist auch der Zuwachs enthalten, welcher durch die Wirkung der Erdschwere entstanden ist. Dieser beträgt jedoch nur 1·4 *km*, so dass die ursprüngliche, von dem Einflusse der Erde völlig befreite Geschwindigkeit noch immer 42·6 *km* beträgt. Durch denselben Einfluss wurde zugleich die Zenithdistanz des Radiationspunktes um 1°5 vermindert, weshalb für den ungestörten Radianten $A = 92°5$, $h = 13°5$, entsprechend $\alpha = 5°0$, $\delta = +12°1$ oder $\lambda = 9°5$, $\beta = +9°1$ hervorgehen würde.

Mit $\odot = 350°7$ ergibt sich dann die heliocentrische Geschwindigkeit zu 59·7 *km* oder rund 8 g. M., entsprechend einer hyperbolischen Bahn von der Halbaxe 0·5. Die Länge des aufsteigenden Knotens ist mit $\odot$ identisch, die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik $i = 8°8$, die Bewegung war rechtläufig. Die auf das Perihel bezüglichen Elemente sind hier ohne Wert. Die Sonnennähe war bereits überschritten und das Meteor hatte sich bereits wieder aus derselben entfernt, als das Zusammentreffen mit der Erde erfolgte. Wichtig ist der siderische Ausgangspunkt im Weltraume, welcher — allerdings in hohem Grade abhängig von der angenommenen Geschwindigkeit — heliocentrisch sich in 355° Länge und 0°7 nördlicher Breite ergeben würde.

Da der hier nachgewiesene Radiant um diese Zeit noch sehr im Bereiche des Sonnenlichtes liegt, ist es wohl nicht auffallend, dass er in den Verzeichnissen der Radiationspunkte

von Feuerkugeln und Sternschnuppen bisher nicht vorgekommen, also wenigstens für diese Epoche neu ist. Denning führt (General Catalog, p. 227) für 1896 März 1 wohl eine correspondierend beobachtete Sternschnuppenbahn aus dem Radianten in $\alpha = 18°$, $\delta = +5°$ — also viel weiter von der Sonne entfernt — an, allein der Abstand von dem hier nachgewiesenen ($\alpha = 5°8$, $\delta = +13°4$) ist doch zu groß, als dass man an eine nahe Beziehung dieser beiden denken könnte.

Wenn man jedoch eine etwas entferntere Epoche berücksichtigt, so zeigt der Radiant des großen, durch Prof. Galles ausgezeichnete Untersuchungen bedeutungsvoll gewordenen Meteoritenfalles bei Pultusk am 30. Jänner 1868 schon in der von Galle (Abhandlungen der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau 1868) gelieferten Ableitung $\alpha = 13°5$, $\delta = +19°$ eine bemerkenswerte Annäherung, wenn nämlich auch die der Veränderung im Knoten entsprechende Verschiebung in Betracht gezogen wird. Diese muss in der That derart erfolgen, dass vom Jänner bis März die Rectascension des Radianten sich vermindert. Die Quantität wäre von der Hypothese für die Geschwindigkeit abhängig.

Die Bahn der Pultusker Meteoriten erwies sich ebenfalls als eine stark ausgeprägte Hyperbel, ungefähr mit derselben Halbaxe, wie sie hier gefunden wurde. Jene und die Körper, welche das Meteor vom 11. März 1900 veranlassten, sind daher aus relativ benachbarten Regionen des Fixsternraumes in das Sonnensystem gekommen. Es schien mir daher von Interesse, zu untersuchen, ob etwa mit einiger Wahrscheinlichkeit beiden ein identischer Ausgangspunkt zugeschrieben werden könnte.

Bekanntlich hat Prof. Galle den Radianten nur aus den Beobachtungen von Breslau und Danzig abgeleitet. Es war eben ein wichtiges Bestimmungsstück durch die thatsächliche Fallstelle der Meteoriten bei Pultusk schon gegeben. Somit bedurfte die Angabe aus Breslau, dass das Meteor scheinbar vertical herabgefallen sei, keiner weiteren Richtungsorientierung. Die Beobachtung aus Danzig stammt von dem Astronomen Kayser und ist sehr bestimmt gehalten.

Die übrigen noch vorliegenden Beobachtungen wurden nachträglich mit dem Resultate verglichen, wobei sich zumeist

eine recht gute Übereinstimmung zeigte, bis auf den Umstand, dass denjenigen Angaben, nach welchen das Meteor vom Monde ($\alpha = 15^\circ 5$, $\delta = +3^\circ$) herzukommen schien, am wenigsten gut entsprochen war.

Ich habe nun den Versuch gemacht, auch die übrigen Beobachtungen einzubeziehen. Die Schätzung, ob die Bahn (in Breslau) ganz genau vertical war, ist ja doch, wie die Erfahrung lehrt, auch unvermeidlichen Fehlern unterworfen, und was die Beobachtung aus Danzig betrifft, so ist die Lage des angegebenen Bahnbogens gegen den Radianten eine derartige, dass ein Fehler in der Declination am Anfangspunkte der scheinbaren Bahn fast in dreifacher Größe auf die Declination des Radianten übergeht. Letztere kann also, selbst bei sehr genauer Beobachtung, doch merklich unsicher sein.

Zur Beurtheilung des Ergebnisses dieser Untersuchung halte ich es für nothwendig, die Angaben, auf welche sie sich stützt, hier ganz kurz mitzutheilen.

Zunächst nehme ich mit Galle die Epoche: 1868 Jänner 30, $6^h 50^m$ mittlere Danziger Zeit, die geographische Lage der Fallstelle in 39° 3′ östlich von Ferro und 52° 45′ nördlicher Breite, und die Höhe der Hemmung über derselben zu 41·6 *km*. Ferner finden sich bei Galle folgende Beobachtungen:

1. Breslau (34° 42′; 51° 7′). Fall senkrecht, ziemlich genau von $\varkappa$ Ursae maj. oder in der Mitte zwischen $\alpha$ Urs. maj. und $\beta$ Geminorum herab zu 4 bis 5° über dem Horizonte.

2. Danzig (36° 20′; 54° 21′). Die Erscheinung zeigte sich zuerst genau bei $\beta$ Orionis und endete bei Sirius.

3. Ragendorf in Ungarn (34° 50′; 48° 0′). Erschien unter dem Polarsterne und bewegte sich zwischen $\varepsilon$ und $\zeta$ Ursae maj. in nordnordöstlicher Richtung dem Horizonte zu.

4. Leobschütz (35° 35′; 50° 12′). Die Feuerkugel kam aus $\beta$ Ursae maj. und gieng gegen NE.

5. Ratibor (35° 53′; 50° 5′). Zwischen den beiden mittelsten Sternen der Deichsel des Wagen löste sich ein Stern ab etc.

6. Kock (40° 5′; 51° 40′). Der Mond stand in $A = 50^\circ$, $h = 33^\circ$. Der Beobachter berichtete, dass er gerade in diese Gegend hinsah und bezeichnet nun den Anfang des Meteors in

gleicher Höhe mit dem Monde, etwa 30° nördlicher. Er zeichnete die scheinbare Neigung des zurückgebliebenen hellen Schweifes, wie Prof. Galle angibt, zu 30°.

7. Sokołow (39° 5′; 52° 45′). Ein kleiner Stern fieng an, sich vom Mond zu entfernen und hierauf sich immer mehr in die Höhe heben, vergrößerte er sich u. s. w.

Nach dem wirklichen Endpunkte können die scheinbaren Positionen desselben für alle Beobachtungsorte berechnet werden. Sie sind hier unter II angeführt. Was den ersten Bahnpunkt betrifft, so sind für Breslau nach dem Berichte dreierlei Annahmen möglich. Die eine — genau verticaler Fall — entspricht einer Bahn durchs Zenith. Diejenige, welche sich auf die Mitte zwischen $\alpha$ Urs. maj. und $\beta$ Geminorum bezieht, würde einen Bogen liefern, der 7° nördlich am Zenith vorübergieng. Allein der Abstand dieser beiden Sterne ist so groß, dass die Halbierung desselben schätzungsweise nicht genau möglich ist, daher die Abweichung wohl begreiflich erscheint. Die Position $\varkappa$ Urs. maj. ($\alpha = 133°7$, $\delta = +47°7$) würde eine Bahn 3° südlich vom Zenith geben. Ich habe daher das Mittel aus dieser Angabe und dem senkrechten Fall beibehalten, also eine Bahn 1°5 südlich am Zenith vorbei, was gewiss eine kaum merkbare Abweichung vom senkrechten Fall und eine noch geringere bei $\varkappa$ Urs. maj. bedingt.

Für Danzig wurde unter I der Ort von $\beta$ Orionis, für Ragendorf die Mitte zwischen den bezeichneten Sternen, für Leobschütz $\beta$ Urs. maj., für Sokołow zur Bezeichnung der Bahnlage, nicht als Anfangsort, der Mondort genommen und für Kock ein durch den berechneten Endpunkt unter 30° scheinbarer Neigung gegen den Horizont liegender Bogen gewählt. Hinsichtlich Ratibor erhält man eine sehr stark von den übrigen abweichende Bahn, wenn man sie zwischen die bezeichneten »Deichselsterne« legt. Vermuthlich ist eine Verwechselung mit den nächstanliegenden vorgekommen. Diese Beobachtung habe auch ich ausgeschlossen.

Es ergaben sich auf diese Weise folgende scheinbare Bahnen:

| | I | | II | | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|
| | α | δ | α | δ | |
| *Breslau | 50°1 | +49°6 | 163°8 | +24°3 | 4 |
| Danzig | 77·0 | — 8·4 | 100·0 | —16·4 | 4 |
| Ragendorf | 195·9 | +56·1 | 195·3 | +35·2 | 4 |
| Leobschütz | 163·5 | +57·0 | 181·9 | +34·0 | 4 |
| *Kock | 14·2 | 0 | 350·8 | +23·4 | 1 |
| Sokołow | 15·5 | + 3 | 49·6 | +52·6 | 1 |

Aus diesen sechs Gleichungen ergab sich nun der scheinbare Radiationspunkt ungefähr 6° südlicher als bei Galle, nämlich in

$$12°6 \pm 3° \text{ Rectascension}$$

und

$$13°1 \pm 4° \text{ nördl. Declination.}$$

Die Verbesserungen stellen sich für die beiden ersten von Galle allein benützten Beobachtungen auch bei diesem Resultate als sehr geringfügig heraus, es hat jedoch den Vorzug, dass es den übrigen Beobachtungen besser entspricht, als seines.

Es ergibt sich, dass für Danzig die Bahn 1°3 unter β Orionis und in Breslau 2°5 südlich am Zenith, dann sehr nahe an κ Urs. maj. vorübergieng. Die Verbesserung für Ragendorf beträgt nur 0°8, jene für Leobschütz 3°7. Für Kock wäre die scheinbare Neigung auf 37°8 zu erhöhen und in Sokołow hätte der Abstand des Mondes von der Bahn nur mehr 6°7 betragen.

Der Versuch, die beiden Radiationspunkte im Jänner und März durch Bahnen von identischer kosmischer Herkunft darzustellen, wurde mit verschiedenen Hypothesen für die Geschwindigkeit unternommen, weil die so häufig stattfindende Überschätzung der Dauer und der Einfluss des Luftwiderstandes die Sicherheit des aus den Beobachtungen erhaltenen Resultates mehr oder weniger beeinträchtigen.

Das schließliche Ergebnis lässt sich dahin zusammenfassen, dass für eine Geschwindigkeit von $v = 2·5$ (jene der Erde als Einheit genommen), d. h. für eine hyperbolische Halbaxe $a = 0·24$ die günstigste Übereinstimmung stattfinden und

dass dann für die heliocentrischen Coordinaten des Ausgangsortes: 8°5 Länge und 3°3 nördl. Breite den beiden nachgewiesenen Radianten am besten entsprochen würde.

Durch Rechnung würde sich nämlich mit diesen Annahmen der Radiant für den 30. Jänner ergeben, in $\alpha = 9°5$, $\delta = +11°5$, gegen den aus den Beobachtungen abgeleiteten in $\alpha = 12°6$, $\delta = +13°1$ ($\Delta\alpha = -3°1$, $\Delta\delta = -1°6$) und jener für den 11. März in $\alpha = 7°5$, $\delta = +14°1$, während der vorhin gefundene die Coordinaten $\alpha = 5°8$, $\delta = +13°4$ hatte ($\Delta\alpha = +1°7$, $\Delta\delta = +0°7$). Die Unterschiede sind daher nicht so groß, dass sie nicht aus jener Unsicherheit erklärt werden könnten, welche durch die gewöhnlichen Beobachtungsfehler begründet ist.

Dieser Ausgangspunkt wurde versuchsweise der Berechnung von Radiationspunkten zu anderen Jahresepochen (Knotenlängen) und einer Vergleichung mit beobachteten Sternschnuppen- und Feuerkugel-Radianten zugrunde gelegt. Letztere ist gegenwärtig sehr erleichtert durch die vollständige und übersichtliche Darstellung in Dennings »General-Catalogue«. Er ist hier mit »D. G.« citiert. Gut vergleichbares Material erhielt ich für Mai bis November.

Man findet im folgenden einige Beispiele.

| | Berechnet | | Aus den Beobachtungen nachgewiesen | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Ort | | Epoche |
| | $\alpha$ | $\delta$ | $\alpha$ | $\delta$ | |
| Mai 1.... | 337°3 | — 5°5 | 335° | — 9° | April 29. bis Mai 5. 1870 |
| | | | 337 | — 2 | April 30. bis Mai 6. 1886 |
| | | | 334 | — 5 | April bis Mai |
| | | | 339 | — 5 | Mai 1892 |
| | | | 338 | — 2 | Mai 1. bis 4. 1895, 1896 (Den. G. C. p. 283) |
| | | | | | Mittel: $\alpha = 336°6$, $\delta = -4°6$ |
| Juni 1.... | 350·4 | — 1·2 | 345 | ± 0 | Juni 11. bis 13. 1885 (G. C. p. 285). |
| Juli 1.... | 0·0 | + 3·0 | | | |
| | | | 7 | + 4 | Juli. Schmidt (G. C. p. 225) |

| | Berechnet | | Aus den Beobachtungen nachgewiesen | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Ort | | Epoche |
| | α | δ | α | δ | |
| August 1. | 11°0 | + 7°2 | 13° | + 9° | August 1. bis 31. Schmidt (G. C. p. 227). Vielleicht auch die Feuerkugel von August 25. 1884 (nicht sehr sicher): $\alpha = 10°$, $\delta = +6°$ |
| Sept. 1... | 20·1 | +11·1 | 22 | +16 | Feuerkugel von Sept. 19. 1862 (Rep. 1862 und 1863) |
| Octob. 1.. | 27·3 | +14·3 | 26·5 | +15·5 | October 1. bis 5. 1888 (G. C. p. 232). Vielleicht auch folgende Feuerkugeln: |
| | | | 25·2 | +17·8 | October 15. 1889 |
| | | | 20(?) | +15 | October 19. 1877 (Monthly Not. 1878, p. 229) |
| Nov. 1... | 31·3 | +16·3 | 30 | +16 | November 4. bis 7. 1877 (G. C. p. 232) |
| | | | 34 | +19 | Feuerkugel Novemb. 17. 1886 (G. C. p. 232). |

An den berechneten Positionen ist hier die Wirkung der Erdschwere nicht angebracht, weil sie von der scheinbaren Höhe des Radianten abhängt. Sie kann jedoch unter den gegebenen Voraussetzungen 1° nur wenig überschreiten. Die Mehrzahl der verglichenen Positionen würde für eine etwas nördlichere Lage des Ausgangspunktes sprechen, wie sie auch aus dem Pultusker Radianten folgen würde.

# Zur sphärischen Abbildung der Flächen und ihrer Anwendung in der darstellenden Geometrie

von

**August Adler,**

*k. k. Professor an der deutschen Staats-Realschule in Karolinenthal.*

(Mit 1 Tafel.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1901.)**

Die sphärische Abbildung der Flächen, welche bekanntlich von Gauss (Disq. gen., Art. 6) eingeführt wurde und in der Differentialgeometrie eine hervorragende Rolle spielt, wurde synthetisch, unseres Wissens nach, noch nicht behandelt, und insbesondere wurde sie noch nicht zur Lösung von Aufgaben der darstellenden Geometrie herangezogen.

Es ist das Ziel des Folgenden, dies zu leisten. Es wird sich dabei herausstellen, dass nicht nur die synthetische Behandlung der sphärischen Abbildung vieler Flächen, insbesondere der des zweiten Grades, eine einfache, sondern dass auch die Beziehung dieser Abbildung zu vielen umfassenden Aufgaben der darstellenden Geometrie eine innige ist.

## A.

1. Sei $P$ ein Punkt der Fläche $F$, $\tau$ die Tangentialebene von $F$ in $P$, $K$ eine Kugel mit dem Mittelpunkte $O$; fällt man nun von $O$ auf $\tau$ die Normale $(n)$, bringt dieselbe mit $K$ zum Schnitte und weist einen dieser beiden Schnittpunkte (P) dem Punkte $P$ zu, so ist (P) das sphärische Bild des Punktes P der Fläche $F$. (Beide Schnittpunkte von $(n)$ mit $K$ werden im folgenden immer zusammen auftreten.)

Man kann übrigens die sphärische Abbildung von $F$ noch auf eine zweite Art durchführen: Construiert man zu jedem Punkte P (mit der Tangentialebene $\tau$) von $F$ die Polarebene $\pi_1$ in Bezug auf die Kugel $K$, so umhüllt $\pi_1$ bei veränderlichem P eine Fläche $F_1$ und berührt $F_1$ in $T_1$. Projiciert man nun den Punkt $T_1$ aus $O$ auf $K$, so erhält man schon das gesuchte sphärische Bild $(P)$ von $P$; denn die Polarebene eines Punktes in Bezug auf $K$ steht immer normal zu dem aus $O$ gelegten Radius vector des Punktes; $\pi_1$ und $\tau$ sind aber die Polarebenen von $P$ respective $\tau_1$ bezüglich $K$.

Man bemerkt, dass $F$ und $F_1$ in folgender Beziehung stehen: Sie sind punktweise $(P_1, T_1)$ aufeinander bezogen, und zwar so, dass immer die Normale eines Punktes der einen Fläche parallel ist zu dem Radius vector nach dem entsprechenden Punkte der anderen Fläche.

2. Bewegt sich $P$ unendlich wenig auf F in der Richtung $t$ bis $P_1$, so schneidet bekanntlich die Tangentialebene $\tau_1$ von $P_1$ die Tangentialebene $\tau$ von P in der zu $t$ conjugierten Geraden $t_1$.

Fällt man nun auf $\tau$ und $\tau_1$ die Normalen aus $O$, so erhält man die sphärischen Bilder (P) und $(P_1)$ von P respective $P_1$ und damit die Gerade $(t) \equiv \overline{(P)(P_1)}$. Da offenbar $(t)$ normal zu $t_1$ ist, so ergibt sich der bekannte Satz: »Das sphärische Bild der einen von zwei conjugierten Tangenten steht immer senkrecht auf der anderen«.

Jede Haupttangente in P ist sich selbst conjugiert, ihr sphärisches Bild steht also auf ihr senkrecht. Die Richtung der einen Krümmungslinie durch P ist conjugiert zu der ihr normalen Richtung der zweiten Krümmungslinie durch $P$, daraus ergibt sich bekanntlich: »Das sphärische Bild der Richtung einer Krümmungslinie ist in jedem ihrer Punkte parallel zu dieser Richtung«.

3. Definiert man umgekehrt die Krümmungslinien als Curven, deren Elemente $\overline{PP_1}$ parallel zu ihren sphärischen Bildern $\overline{(P)(P_1)}$ sind, so sieht man daraus leicht ein, dass die Normalen in den aufeinanderfolgenden Punkten einer Krümmungslinie einander schneiden müssen. Da nämlich $\overline{PP_1} \parallel \overline{(P)(P_1)}$ ist und die Normalen in den Punkten $(P)$, $(P_1)$ einander schneiden, so müssen die dazu parallelen Normalen von $F$

4*

in $P$ und $P_1$ einander ebenfalls schneiden, was nicht mehr gilt, wenn $P_1$ nicht einer der durch $P$ gehenden Krümmungslinien angehört; denn dann ist $\overline{(P)(P_1)}$ nicht mehr parallel $\overline{PP_1}$.

## B.

1. Die sphärische Abbildung der Mittelpunktsflächen zweiten Grades gestaltet sich ganz analog für die elliptischen und hyperbolischen Flächen. Um aber die Vorstellung zu fixieren, wollen wir in diesem Abschnitte gewöhnlich ein Ellipsoid $E$ mit den Halbaxen $a, b, c$ ($a > b > c$), mit den Hauptschnitten $s_1, s_2, s_3$ in den Hauptebenen $bc$, $ca$ und $ab$, mit den Kreispunkten $k_1, k_2, k_3, k_4$ voraussetzen, und die orthogonalen Projectionen eines Punktes $P$ auf $ab$, $ac$, $bc$ mit $P'$, respective $P''$ und $P'''$ bezeichnen. Zur sphärischen Abbildung wollen wir eine mit $E$ concentrische Kugel $K$ mit dem Radius $r$ und dem Mittelpunkte $O$ voraussetzen. Die sphärischen Bilder wollen wir immer durch dieselben Buchstaben bezeichnen wie die Originale, aber eingeklammert.

2. Dem Punkte $D$ von $s_3$ z. B. entspricht dann bei unserer Abbildung jener Punkt $(D)$ von $(s_3)$, für welchen die Tangente parallel zur Tangente an $s_3$ in $D$ ist oder für welchen der zugehörige Radius vector $(g)'$ senkrecht steht auf dem zu $g'$ bezüglich $s_3$ conjugierten Durchmesser (Fig. 1).

Damit sind wir schon zu einer Construction gelangt, welche für die sphärische Abbildung der $F^2$ von der größten Wichtigkeit ist: Es handelt sich nämlich sehr oft darum, zu jedem $D$ sein $(D)$ oder zu jedem $g'$ die »entsprechende« $(g)'$ möglich einfach zu construieren. Dies gelingt auf verschiedenem Wege:

α) Construiert man $s_3$ aus den Kreisen $a$, $b$ unter Zuhilfenahme der Linie $h'$ und des Kreises mit dem Radius $a+b$, so ist bekanntlich (Fig. 1) $DG$ schon die Normale in $D$ und $OF$ ($\parallel DG$, weil $\triangle GED \cong OCF$) schon die gesuchte, zu $g'$ entsprechende $(g)'$.

Ist nun $\sphericalangle g'OX = \alpha$, $\sphericalangle h'OX = \omega$, $\sphericalangle (g)'OX = (\alpha)$, so ist offenbar:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg}\omega = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}\alpha. \qquad 1)$$

Aus dieser Gleichung folgt schon die gesuchte Construction von $(g)'$ aus $g'$ und umgekehrt: Zieht man nämlich (Fig. 1) die Hilfsgeraden $m$ und $n$ parallel $OY$, so geschieht der constructive Übergang zu $(g)'$, respective $g'$ mittels der Zickzacklinie $LKJH$.

β) Obwohl die angegebene Construction einfach genannt werden muss, so lässt sich eine zweite geben, welche noch rascher zum Ziele führt:

Zieht man nämlich die Linien $DF$ (Fig. 1), so erhält man die Punkte $R$, $S$, und es lässt sich leicht beweisen, dass $\overline{DS} = \overline{FR} = b$ und $\overline{DR} = a$ sind.

Daraus folgt die praktisch beste Lösung unserer Aufgabe, aus $g'$ die Gerade $(g)'$ zu finden:

Man benützt zu diesem Zwecke einen Papierstreifen $RS = a+b$, auf welchem man die Punkte F und $D$ in dem Abstande $b$ von den Endpunkten $R$, $S$ aufgetragen hat. Legt man diesen Papierstreifen so in die Zeichenfläche, dass $R$ und $S$ in die Axen der Ellipse zu liegen kommen und gleichzeitig $D$ in $g'$, so liegt schon F in $(g)'$; F wird nun markiert und damit $(g)'$ auf das genaueste gefunden.

Die Anwendung dieser Methode ist ungewöhnlich und erfordert daher einige Worte: Dem Beispiele der alten grachischen Geometer folgend ist man vielfach gewöhnt, als zulässige Hilfsmittel der Construction nur den Zirkel und das Lineal anzusehen. Diese Beschränkung ist aber weder nothwendig, noch praktisch genommen zweckmäßig und bewirkt nur, dass manche Constructionen wohl mit dem Munde sehr leicht sich ausführen lassen, ihre thatsächliche Durchführung aber so compliciert wird, dass das constructiv gefundene Resultat, was Genauigkeit anbelangt, oft jeden Wert verliert. Wir glauben daher, dass die nächste Entwickelung der darstellenden Geometrie und des graphischen Calculs überhaupt dahin gehen wird, durch zweckmäßige Erweiterung der Zeichenhilfsmittel die Genauigkeit selbst complicierter Constructionen zu erhöhen und ihre Durchführung zu erleichtern.

Dieser Gedanke[1] scheint sich auch Bahn zu brechen. So construiert S. Finsterwalder (Die geometrischen Grund-

[1] Vergl. A. Adler, »Über die zur Ausführung geometr. Constructionen nothw. Hilfsmittel«. Diese Sitzungsber., 1891.

lagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, VI. Jahrg., 1899, S. 4) den vierten Strahl eines Büschels, welches mit einer gegebenen Punktreihe projectiv sein soll, mittels eines Papierstreifens, auf welchem diese vierpunktige Reihe aufgetragen und welches dann zum Strahlenbüschel in perspective Lage gebracht wird.

3. Die Strahlen des Büschels $O$ sind projectiv einander zugeordnet (Fig. 1), wenn man zwei Strahlen $g'$ und $(g)'$, welche wir immer als »entsprechend« in Bezug auf $s_3''$ bezeichnen wollen, einander zuweist. $OX$ und $OY$ sind die Doppelstrahlen dieser Projectivität. (Art. $A$. 2.)

4. Die unter 2. angegebenen Constructionen setzen uns nun in die Lage, in sehr einfacher Weise zu einem Punkte P von $E$ ($OP \equiv g$) den zugehörigen Punkt (P) der Kugel construieren zu können, und zwar mit Hilfe des folgenden leicht zu beweisenden Satzes: Die Projectionen von $g$ und $(g)$ auf irgendeine Hauptebene bilden zwei in Bezug auf den Hauptkegelschnitt der Projectionsebene entsprechende Gerade; denn den Punkten von $E$ in der Ebene $g'OZ$ z. B. entsprechen jene Punkte von $K$, welche in der Ebene $(g)'OZ$ liegen.

Hat jetzt P auf den Hauptebenen $ab$ und $ac$ die orthogonalen Projectionen P$'$ und P$''$, so sind damit $g'$ und $g''$ gegeben; $(g)'$ und $(g)''$ construiert man nun nach Art 2 und bringt die so erhaltene $(g)$ zum Schnitt mit $K$, wobei man vortheilhaft die Affinität anwendet.

5. Die eben angegebene Construction ist gewiss einfach. Bei häufiger Anwendung derselben würde aber das Zeichenpapier mit Linien überladen werden, was wir durch folgende Bemerkung vermeiden können:

Denken wir uns, um eine der darstellenden Geometrie geläufige Vorstellung zuhilfe zu nehmen, $E$ durch Lichtstrahlen parallel der Tangente in $D$ beleuchtet, ebenso die Kugel durch Lichtstrahlen von derselben Richtung. Schneiden wir dann den Lichtstrahlencylinder, welcher $E$ längs $l$ berührt, durch die Normalebene $(g)'$ des Cylinders, so schneidet diese Ebene $K$ in dem Kreise $(l)$ (Fig. 1$a$). Durch Umlegung dieser Normalebene erhält man $l''''$ und $(l)''''$. Zwei entsprechende Punkte

$P''''$ und $(P)''''$ werden parallele Tangenten haben und $P'$, respective $(P)'$ liefern (Fig. 1 *a*).

Gewöhnlich ist folgende Aufgabe zu lösen: Auf $(g)'$ sind mehrere $(P)'$ gegeben; die entsprechenden $P'$ sind zu construieren. Zu diesem Zwecke zeichnet man $(l)''''$, $(P)''''$ und $(g)''''$ und sucht nun $P''''$ nach Art. 2 entweder mittels des Papierstreifens oder mittels unseres Zickzackzuges.

Es ist auch vortheilhaft, die ganze Figur 1 *a* um $O$ um den Winkel $\alpha$ zu drehen und dann $l''''$ auf $s_3$ affin zu beziehen.

6. Wir wollen nun tiefer in das Wesen der sphärischen Abbildung eindringen und zunächst die Verwandtschaft der Strahlen $g$ und $(g)$ im Bündel $O$ betrachten.

Nach Art. $A$, 1 findet man zu dem gegebenen P von $E$ den entsprechenden (P) von $K$, indem man zu dem durch P gehenden Durchmesser $g$ von $E$ die conjugierte Durchmesserebene $\gamma$ sucht und auf dieselbe durch $O$ die Normale $(g)$ construiert. Weist man zwei so zusammenhängende Strahlen $g$ und $(g)$ einander als entsprechend zu, so sind die beiden conjectiven Bündel $O$ collinear aufeinander bezogen; denn sie sind beide reciprok zu dem Bündel $\gamma$. Die Doppelstrahlen dieser Collineation sind die drei Hauptaxen $OX$, $OY$, $OZ$ von $E$.

Bewegt sich P in einer Curve auf $E$, so kann man nach dem eben Gesagten die entsprechende Curve auf $K$ leicht finden; beschreibt insbesondere P einen Mittelpunktkegelschnitt von $E$, so durchläuft (P) einen größten Kreis von $K$.

Von Vortheil ist es mitunter, die Strahlenbündel von $O$ mit der unendlich fernen Ebene zum Schnitte zu bringen. Sind $u$ und $(v)$ die unendlich fernen Kegelschnitte von $E$ und $K$, P und (P) die Richtungen von $g$, respective $(g)$, so müssen nach Obigem P und (P) in Bezug auf $u$, respective $(v)$ dieselbe Polare haben. Vermöge der sphärischen Abbildung entsprechen also in der unendlich fernen Ebene zwei Punkte einander, wenn sie in Bezug auf $u$, respective $(v)$ dieselbe Polare haben, und zwei Geraden dann, wenn sie in Bezug auf diese beiden Kegelschnitte (in richtiger Weise genommen) denselben Pol haben.

Wir werden davon wiederholt Anwendung machen, gehen aber jetzt darauf nicht näher ein, sondern betrachten die wichtige Verwandtschaft $\varphi$, welche in jeder Hauptebene durch die Projectionen entsprechender Punkte von $E$ und $K$ entsteht.

7. Betrachten wir die Beziehung zwischen P′ und (P)′ in der Ebene $XOY$, so bemerken wir zunächst, dass zu jedem P′ zwei (P)′ gehören, welche symmetrisch in Bezug auf $O$ liegen und umgekehrt zu jedem (P)′ zwei P′ in derselben Lage zu $O$. Die Verwandtschaft $\varphi$ zwischen den beiden ebenen Feldern $\Sigma'$ und $(\Sigma)'$, welche wir als Träger der Punkte P′, respective (P)′ denken wollen, ist demnach eine 2, 2-deutige. Aus irgend zwei entsprechenden Punkten gehen durch Spiegelung an $OX$ und $OY$ also auch an $O$ wieder zwei entsprechende Punkte hervor; die Verwandtschaft $\varphi$ hat demnach zwei Axen und einen Mittelpunkt.

Der Punkt $O$ entspricht sich selbst; beschreibt P′ die Gerade $g'$ aus $O$, so beschreibt (P)′ die entsprechende $(g)'$ (Art. 3).

Beschreibt P′ irgendeine beliebige Gerade $f'$, so bewegt sich (P)′ auf einem Kegelschnitte $(f)'$, der seinen Mittelpunkt in $O$ hat, dessen Axen dann und nur dann in $OX$, respective $OY$ fallen, wenn $f'$ parallel zu einer dieser Axen ist.

Beweis: Wir können $f'$ als Projection eines Kegelschnittes $\varphi^2$ von $E$ betrachten; $\varphi^2$ wird aus $O$ durch den Kegel $\psi^2$ projiciert. Gemäß Art. 6 construieren wir nun zu $\psi^2$ den collinearen Kegel $(\psi^2)$ und bringen denselben mit $K$ zum Schnitte. Wir erhalten so den sphärischen Kegelschnitt $(\varphi^2)$ und seine Projection $(f)'$, welche $f'$ entspricht. Die Ebene $XOY$ ist offenbar Hauptebene von $\varphi^2$, daher $OZ$ eine Axe desselben Kegels; da Ebene $XOY$ und Gerade $OZ$ bei der Collineation sich selbst entsprechen, so sind sie auch Hauptebene und Axe des Kegels $(\psi^2)$. Sie sind aber auch einander conjugiert in Bezug auf die Kugel $K$, und daher wird der sphärische Kegelschnitt $(\varphi^2)$ parallel zu $OZ$ durch einen Cylinder 2. Grades projiciert.

$(f)'$ ist also ein Kegelschnitt mit $O$ als Mittelpunkt, denn die orthogonale Projection irgendeines sphärischen Kegel-

schnittes auf eine seiner Hauptebenen ist ein mit $O$ concentrischer Kegelschnitt.

Ist $f'$ aber parallel zu $OX$ z. B., so sind auch $OX$ und $OY$ Axen von $\psi^2$, also auch von $(\psi)^2$, und demnach müssen die Axen von $(f)'$ dann mit $OX$, respective $OY$ zusammenfallen; q. e. d.

Ganz analog beweist man folgende Sätze, indem man von der Ebene auf $E$, respective $K$ übergeht und die Symmetrieverhältnisse der entstehenden Kegel des Bündels $O$ studiert:

Beschreibt P′ irgendeinen Kegelschnitt mit $O$ als Mittelpunkt, so beschreibt (P)′ ebenfalls einen Kegelschnitt mit $O$ als Mittelpunkt; dieser zweite Kegelschnitt kann auch ein Kreis werden oder in zwei parallele Gerade zerfallen.

Beschreibt (P)′ irgendeine Gerade oder einen Kegelschnitt mit $O$ als Mittelpunkt, so wird P′ immer einen Kegelschnitt mit $O$ als Mittelpunkt beschreiben; dieser Kegelschnitt kann dabei ein Kreis werden oder in zwei Gerade zerfallen.

8. Alle diese Verhältnisse übersieht man auch, wenn man die Verwandtschaft durch Gleichungen ausdrückt.

Bezeichnet man die rechtwinkeligen Coordinaten von P′ mit $\xi$ und $\eta$, die von (P)′ mit $x$ und $y$, so findet man durch einfache Rechnung die gesuchte Gleichung der Verwandtschaft, wobei $r$ den Radius von $K$ bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a^2 c \xi r}{\sqrt{a^4 b^4 - b^4 (a^2 - c^2)\xi^2 - a^4 (b^2 - c^2)}} \\ y &= \frac{a^2 c \eta r}{\sqrt{a^4 b^4 - b^4 (a^2 - c^2)\xi^2 - a^4 (b^2 - c^2)}} \\ \xi &= \frac{a^2 x}{\sqrt{(a^2 - c^2) x^2 + (b^2 - c^2) y^2 + c^2 r^2}} \\ \eta &= \frac{b^2 y}{\sqrt{(a^2 - c^2) x^2 + (b^2 - c^2) y^2 + c^2 r^2}} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich weiter folgende bemerkenswerte Resultate:

»Es gibt in der Ebene $ab$ außer $O$ noch vier in der Verwandtschaft $\varphi$ sich selbst entsprechende Punkte; dieselben liegen auf den Axen $OX$, respective $OY$ in den Abständen $\pm\sqrt{\frac{a^4-c^2r^2}{a^2-c^2}}$ und $\pm\sqrt{\frac{b^4-c^2r^2}{b^2-c^2}}$.

Der Kegelschnitt, welcher $OX$ und $OY$ zu Axen hat und durch diese vier Doppelpunkte hindurchgeht, entspricht in der Verwandtschaft $\varphi$ sich selbst.

Es gibt ferner vier gerade Linien in $\Sigma'$, welchen Kreise in $(\Sigma)'$ entsprechen, und zwar sind diese Geraden paarweise parallel zu den Axen und folgen aus den Gleichungen $x^2=\frac{a^4}{a^2-b^2}$, respective $y^2=-\frac{b^4}{a^2-b^2}$. Die Kreise selbst haben die Gleichungen $x^2+y^2=\frac{c^2r^2}{a^2-c^2}$, respective $x^2+y^2=$ $=-\frac{c^2r^2}{b^2-c^2}$.

In $(\Sigma)'$ gibt es ebenfalls vier Gerade

$$\left[x^2=\frac{b^2c^2r^2}{a^4(b^2-c^2)-b^4(a^2-c^2)}, \text{ respective } y^2=\frac{a^2c^2r^2}{b^4(a^2-c^2)-a^4(b^2-c^2)}\right],$$

welchen Kreise $\left(x^2+y^2=\frac{b^4}{b^2-c^2}, \text{ respective } x^2+y^2=\frac{a^4}{a^2-c^2}\right)$ in $\Sigma'$ entsprechen.

Ferner gibt es einen Kreis $(x^2+y^2=a^2+b^2)$ in $\Sigma'$, welchem ein Kreis $\left(x^2+y^2=\frac{c^2r^2}{c^2[a^2+b^2-a^2b^2]}\right)$ in $(\Sigma)'$ entspricht.«

Von allen diesen constructiv recht verwendbaren Resultaten wollen wir eines in Worten ausdrücken:

Der Polaren eines jeden Brennpunktes von $s_8$ bezüglich $s_3$ entspricht in $(\Sigma)'$ ein Kreis mit $O$ als Mittelpunkt, was man auch unschwer ohne Rechnung nachweisen kann.

9. Aus den Gleichungen 2) können wir noch einige für uns wichtige Resultate ziehen:

Es gibt auf $E$ eine Curve $v$, deren sphärisches Bild der unendlich ferne Kugelkreis $(v)$ ist, ebenso befindet sich auf $K$ eine Curve $(u)$, welche das sphärische Bild

des unendlich fernen Kegelschnittes $u$ von $E$ darstellt. $v$ und $(u)$ sind Curven 4. Ordnung 1. Art; denn die Projection von $v$ aus $O$ auf die unendlich ferne Ebene muss (nach Art. 6) jener Kegelschnitt sein, welcher die Polarfigur von $(v)$ bezüglich $u$ darstellt; die Projection von $(u)$ auf dieselbe Ebene wird gegeben durch jenen Kegelschnitt, welcher $u$ bezüglich $(v)$ polar entspricht.

Die Gleichungen der Projectionen von $(u)$ und $v$ auf die Hauptebenen ergeben sich sofort aus Gleichung 2), und zwar wird die Gleichung von $v'$ sein:

$$a^4 b^4 - b^4(a^2-c^2)x^2 - a^4(b^2-c^2)y^2 = 0. \qquad 3)$$

Denn liegt P′ auf $v'$, genügen also seine Coordinaten $\xi$ und $\eta$ der Gleichung 3), so muss (P)′ (mit den Coordinaten $x$ und $y$) ins Unendliche fallen, was nach Gleichung 2) stimmt. $v'$ ist also auch jener Kegelschnitt, der von P′ beschrieben wird, falls (P)′ die unendlich ferne Gerade durchläuft.

Durch cyclische Vertauschung von $x, y, z$ und $a, b, c$ findet man von $v''$ und $v'''$ nämlich:

$$\left.\begin{aligned} b^4 c^4 - c^4(b^2-a^2)y^2 - b^4(c^2-a^2)z^2 &= 0 \\ c^4 a^4 - a^4(c^2-b^2)z^2 - c^4(a^2-b^2)x^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Aus analogen Betrachtungen folgen die Gleichungen der Projectionen $(u)'$, $(u)''$, $(u)'''$ von $(u)$:

$$\left.\begin{aligned} (a^2-c^2)x^2 + (b^2-c^2)y^2 + c^2 r^2 &= 0 \\ (b^2-a^2)y^2 + (c^2-a^2)z^2 + a^2 r^2 &= 0 \\ (c^2-b^2)z^2 + (a^2-b^2)x^2 + b^2 r^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

$(u)'$ z. B. stellt dabei jenen Kegelschnitt dar, den (P)′ beschreibt, wenn P′ die unendlich ferne Gerade durchläuft.

10. Die besonders wichtige Curve $v$ auf $E$ wollen wir weiter noch auf synthetischem Wege untersuchen. Zunächst müssen wir aber folgenden Hilfssatz vorausschicken:

Sei $F^2$ eine Fläche zweiten Grades, $\omega$ eine Ebene, $O$ ihr Pol bezüglich $F^2$, $(v)$ ein Kegelschnitt in $\omega$ und $u$ der in $\omega$ liegende Kegelschnitt von $F^2$.

»Legt man nun durch irgendeine Tangente $t$ von $(v)$ eine Tangentialebene an $F^2$, welche $F^2$ in B berühren möge, so schneidet die Gerade $OB$ die Ebene $\omega$ in einem Punkte $T$, welcher der Pol von $t$ bezüglich $u$ sein muss; denn $t$ und $OT$ sind reciproke Polaren bezüglich $F^2$. Legt man durch sämmtliche Tangenten von $(v)$ die Tangentialebenen von $F^2$, so werden die Berührungspunkte dieser Tangentialebenen aus $O$ auf $\omega$ in einen Kegelschnitt projiciert, der die Polarfigur von $(v)$ bezüglich $u$ ist.«

11. Ist nun $v$ jene Curve auf $E$, deren sphärisches Bild der unendlich ferne Kugelkreis $(v)$ ist, so sieht man zunächst ein, dass die Tangentialebene von $F^2$ in jedem Punkte von $v$ durch die entsprechende Tangente von $(v)$ gehen muss. Die Tangentialebenen in zwei entsprechenden Punkten P und (P) von $E$, respective $K$ sind nämlich parallel, haben daher dieselbe unendlich ferne Gerade, welche hier eine Tangente von $(v)$ sein wird, da (P) sich auf $(v)$ bewegt.

$v$ kann auch erhalten werden, indem man die gemeinschaftlichen Tangentialebenen an $F^2$ und den unendlich fernen Kugelkreis $(v)$ legt und deren Berührungspunkte mit $F^2$ bestimmt. Die gemeinschaftliche Devellopable von $(v)$ und $F^2$ hat aber bekanntlich noch drei weitere Doppelcurven, nämlich die Focalkegelschnitte von $F^2$. $v$ kann also auch erhalten werden, indem man durch die Tangenten irgendeines dieser Focalkegelschnitte die Tangentialebenen an $F^2$ legt und deren Berührungspunkte sucht. Nach Art. 9 muss also die Projection von $v$ auf die Hauptebene $ab$ die Polarfigur des in dieser Hauptebene befindlichen Focalkegelschnittes bezüglich $s_3$ sein, ein Resultat, welches sich auch aus Gleichung 3) ergibt.

Wir bemerken noch, dass $v$ als Krümmungslinie von $F^2$ angesehen werden kann, worauf wir später noch zurückkommen werden.

$v$ ist für alle reellen $F^2$ imaginär, hat aber trotzdem zwei reelle Projectionen. $(u)$ ist reell bei den Hyperboloiden; beim Ellipsoid ist $(u)$ imaginär, hat aber trotzdem auch zwei reelle Projectionen.

12. Nachdem wir in der Ebene des Hauptschnittes $s_3$ außer $s_3$ und $(s_3)$ noch zwei besonders wichtige Kegelschnitte $v'$ und $(u)'$ kennen gelernt haben, liegt der Gedanke nahe, die Verwandtschaft zwischen P′ und (P)′ mit Hilfe dieser Kegelschnitte zu construieren und dabei die Gleichungen 2) zu benützen.

Durch einfache Rechnung ergibt sich aus diesen Gleichungen Folgendes: Ist $p$ die Polare von P′ (mit den Coordinaten $\xi, \eta$) bezüglich $v'$, sind $\delta$, respective $\Delta$ die Abstände der Punkte P′, respective $O$ von $p$, so sind die Coordinaten $x, y$ des Punktes (P)′ gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cr}{a^2}\xi\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}} \\ y &= \frac{cr}{b^2}\eta\sqrt{\frac{\Delta}{\delta}} \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Sind ferner $q$ die Polare von $P'$ bezüglich $(u)'$, dann $\delta_1$, respective $\Delta_1$ die Abstände der Punkte (P)′, respective $O$ von $q$, so bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{a^2}{cr}x\sqrt{\frac{\Delta_1}{\delta_1}} \\ \eta &= \frac{b^2}{cr}y\sqrt{\frac{\Delta_1}{\delta_1}} \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$\Delta . \Delta_1 = \delta . \delta_1. \qquad 8)$$

13. Die 2, 2-deutige Verwandtschaft $\varphi$ lässt sich noch von einer anderen Seite her betrachten: Quadriert man nämlich die Gleichung 2) beiderseits, so bemerkt man, dass dann nur die Quadrate der Coordinaten der Punkte P′ und (P)′ vorkommen. Bezeichnet man die Coordinaten eines Punktes der Ebene $ab$ mit $u$ und $v$, die Coordinaten eines Punktes einer zweiten Ebene $AB$ mit $U$, $V$, und weist man zwei Punkte von $ab$ und $AB$ einander zu, wenn $U : V = u^2 : v^2$, so ist zwischen den Ebenen $ab$ und $AB$ eine quadratische Verwandtschaft $\psi$ hergestellt, deren nähere Untersuchung leicht fällt.

Stehen nun die Punkte der Ebene $ab$ in der durch die Gleichungen 2) definierten Verwandtschaft $\varphi$, so ist dadurch auch eine Verwandtschaft zwischen den Punkten von $AB$ hergestellt, und zwar offenbar eine collineare; also: Die Verwandtschaft $\varphi$ wird durch die Verwandtschaft $\psi$ in eine collineare übergeführt.

14. Wir können die sphärische Abbildung des Ellipsoides $E$ noch auf eine zweite bemerkenswerte Art construieren (Art. $A$, 1.):

Wir polarisieren $E$ in Bezug auf unser $K$ und erhalten dadurch ein neues Ellipsoid $E_1$. Wenn wir nun jedem Punkte $P$ von $E$ jenen Punkt $P_1$ von $E_1$ zuweisen, in welchem die Polarebene $\pi$ von $P$ bezüglich $K$ das Ellipsoid $E_1$ berührt, so ist dadurch im Raume eine affine Verwandtschaft festgelegt.

Jeder Ebene $\alpha$, welche $E$ nach dem Kegelschnitte $\sigma$ schneidet, entspricht infolge unserer Zuweisung ein Kegelschnitt $\sigma_1$ und damit eine Ebene $\alpha_1$. Dreht sich $\alpha$ um eine Gerade, so dreht sich $\alpha_1$ zufolge der Polareigenschaften auch um eine Gerade. Die beiden Räume sind daher collinear aufeinander bezogen, sie sind aber auch affin, weil $E$ und $E_1$ concentrisch sind, also die unendlich ferne Ebene in dieser Verwandtschaft sich selbst entspricht.

Aus dem affinen Ellipsoide $E_1$ erhält man die sphärische Abbildung von $E$, indem man die Punkte von $E_1$ aus $O$ auf $K$ projiciert.

15. Wir wenden uns jetzt zur sphärischen Abbildung der Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades.

Dieselben sind bekanntlich als Schnitt zweier confocaler Flächen zweiten Grades Curven vierter Ordnung erster Art und werden aus $O$ durch Kegelflächen zweiten Grades projiciert, welche, wie wir sofort nachweisen werden, eine Schar bilden, d. h. welche vier gemeinschaftliche Tangentialebenen besitzen:

Jede Tangente der Krümmungslinie hat nämlich (Art. $A$, 2.) die Eigenschaft, auf ihrer conjugierten Tangente senkrecht zu stehen, und umgekehrt berührt jede Tangente der Fläche, welche auf ihrer conjugierten normal steht, eine Krümmungslinie der Fläche.

In jeder der beiden Scharen geradliniger Erzeugenden einer $F^2$ gibt es nun vier Gerade, welche den unendlich fernen Kugelkreis treffen, also Minimalgerade (Gerade von absoluter Richtung) sind. Dieselben haben bekanntlich die für uns wichtige Eigenschaft, in jedem ihrer Punkte auf sich selbst senkrecht zu stehen, und da sie außerdem als Erzeugende der Fläche sich selbst conjugiert sind, so sind sie also in jedem ihrer Punkte Tangente einer Krümmungslinie der Fläche. Jede Krümmungslinie der Fläche muss daher diese Minimalgeraden berühren. Jede Kegelfläche, welche eine Krümmungslinie von $F^2$ aus $O$ projiciert, muss also die vier Ebenen berühren, welche $O$ mit den unendlich fernen Geraden $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ verbinden, wobei $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ die Tangenten an den unendlich fernen Kegelschnitt $u$ von $F^2$ in seinen Schnittpunkten 1, 2, 3, 4 mit $(v)$ sind.

Die Projectionen der Krümmungslinien aus $O$ auf die unendlich ferne Ebene bilden demnach eine Kegelschnittsschar $S_1$ mit den gemeinsamen Tangenten $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$; $u$ gehört dieser Schar an und kann daher als Krümmungslinie von $F^2$ betrachtet werden.

Um jetzt die sphärischen Bilder der Krümmungslinien zu erhalten, gehen wir nach Art. 6 vor: Wir polarisieren $S_1$ an $u$, erhalten dadurch das Büschel $B$ mit den Basispunkten 1, 2, 3, 4; diesem Büschel gehören $u$ und $(v)$ an. Nun polarisieren wir $B$ an $(v)$, wodurch wir eine Schar $S_2$ mit den gemeinsamen Tangenten $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, $\tau_4$ in 1, 2, 3, 4 an $(v)$ erhalten.

Projiciert man $S_2$ aus $O$ auf $K$, so erhält man schon die sphärischen Bilder der Krümmungslinien der $F^2$; $(v)$ gehört auch $S_2$ an, daher ist $v$ eine Krümmungslinie von $F^2$, wie früher (Art. $B$, 11.) behauptet wurde.

Jeder Schnittpunkt (P′) der vier Tangenten $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$, $\tau_4$ liefert mit $O$ verbunden eine Focalaxe jeder Kegelfläche der Schar $S_2$. Diese Kegelflächen sind also confocal.

Nach Art. 6 ist (P) das sphärische Bild jenes Punktes P, welcher in Bezug auf $u$ dieselbe Polare hat, wie (P) in Bezug auf $(v)$; (P) ist also das sphärische Bild eines Kreispunktes der Fläche. Wir können demnach behaupten: Die sphärischen Bilder der Krümmungslinien einer $F^2$ sind confocale

sphärische Kegelschnitte, deren gemeinschaftliche Brennpunkte die sphärischen Bilder der Kreispunkte darstellen.[1]

Es sei noch bemerkt, dass das Büschel der Kegelflächen, welches $B$ aus $O$ projiciert, concyclisch ist, d. h. von zwei verschiedenen Scharen paralleler Ebenen nach Kreisen geschnitten wird.

16. Der im vorigen Artikel benützte Satz lässt sich auch projectiv verallgemeinern und liefert dann folgenden neuen Satz:

Gegeben sei eine Schar Flächen zweiten Grades mit dem gemeinschaftlichen Poltetraeder $P_1P_2P_3P_4$. Schneidet man eine dieser Flächen $F^2$ mit allen übrigen und projiciert die so entstehenden Schnittcurven aus dem Punkte $P_1$ z. B., so erhält man Kegelflächen zweiten Grades, welche eine Schar bilden. Die vier gemeinsamen Tangentialebenen dieser Schar berühren $F^2$ in ihren Schnittpunkten mit dem in der Ebene $P_2P_3P_4$ liegenden, zur Flächenschar gehörigen Kegelschnitte.

Den Satz sieht man sofort ein, wenn man bedenkt, dass die Schnittlinie der Tangentialebenen in zwei unendlich benachbarten Punkten einer Fläche immer eine Tangente der Fläche ist, geradeso wie die Verbindungslinie von zwei unendlich benachbarten Punkten der Fläche eine Tangente derselben darstellt.

Aus dem eben erwähnten Satze ließe sich auch das Hauptresultat des vorigen Artikels ableiten, ohne Zuhilfenahme der Minimalgeraden.

17. Aus der sphärischen Abbildung der Krümmungslinien ergeben sich unmittelbar viele Sätze über die Krümmungslinien der $F^2$.

Der Winkel zwischen den Normalen zweier Punkte der $F^2$ ist nämlich derselbe wie der Winkel zwischen den Normalen der sphärischen Bilder der Punkte. Die Tangenten der Krümmungslinien von $F^2$ sind parallel zu den Tangenten ihrer

---

[1] Dieser Satz steht schon, analytisch bewiesen, in Darboux, »Surface«, tome 1, p. 237.

sphärischen Bilder (Art. $A$, 2.). Jedem Mittelpunktskegelschnitt von $F^2$ entspricht als sphärisches Bild ein größter Kreis und umgekehrt. Vier Tangenten von $F^2$ bilden ein harmonisches Büschel, wenn ihre entsprechenden Tangenten auf $K$ ein harmonisches Büschel bilden und umgekehrt. Hält man dies fest, so kann man viele Sätze der sphärischen Kegelschnitte sofort auf die Krümmungslinien der $F^2$ übertragen, z. B.:

$\alpha$) Die Summe oder Differenz der Winkel, welche die Normale eines beweglichen Punktes ein und derselben Krümmungslinie mit den Normalen in den Kreispunkten der Fläche bildet, ist für alle Punkte dieser Krümmungslinie constant.

$\beta$) Legt man durch einen beliebigen Punkt P einer Krümmungslinie Mittelpunktskegelschnitte nach den Kreispunkten der Fläche, so halbieren die Krümmungslinien im Punkte P den Winkel zwischen diesen beiden Kegelschnittentangenten.

Wir erwähnen der Kürze halber nur diese zwei Sätze; dieselben scheinen trotz ihrer Einfachheit unbekannt zu sein, wenigstens finden sie sich nicht in dem ausführlichen Lehrbuche der Raumgeometrie von Salmon-Fiedler. Der zweite Satz lässt sich übrigens leicht rein geometrisch beweisen, wie wir im folgenden Artikel kurz zeigen wollen; damit ist unser Hauptsatz über die sphärische Abbildung der Krümmungslinien von neuem erwiesen und außerdem gezeigt, dass man die Krümmungslinien der $F^2$ aus ihrer sphärischen Abbildung definieren und constructiv behandeln kann, ohne die Theorie der confocalen $F^2$ heranzuziehen.

18. Sind nämlich $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zwei Kegelschnitte von $F^2$, so schneiden sie einander in zwei Punkten $A$ und $B$, liegen also doppelt perspectiv, d. h. es gibt zwei Kegelflächen mit den Spitzen $X$ und $Y$, welche sie ineinander projicieren. Sind $x$ und $y$ die durch $A$ gehenden Erzeugenden der Kegelflächen, so sieht man leicht ein, dass $x$ und $y$ nicht nur hinsichtlich $F^2$, sondern auch in Bezug auf das Ebenenpaar $\varkappa_1\varkappa_2$ harmonisch conjugiert sind. Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes alsbald, wenn man eine Gerade $g$ parallel und unendlich nahe der

Tangentialebene in $A$ annimmt und die Involution betrachtet, welche das Flächenbüschel $\varkappa_1\varkappa_2$ auf $g$ ausschneidet.

Sind nun $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ Mittelpunktskegelschnitte von $F^2$, so liegen $X$ und $Y$ unendlich fern. Gehen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ außerdem durch je zwei Kreispunkte $K_1K_3$, respective $K_2K_4$, so beweist man leicht, dass $x$ und $y$ aufeinander senkrecht stehen müssen, also (da sie auch in Bezug auf $F^2$ conjugiert sind) Tangenten der Krümmungslinien durch $A$ sind.

Damit ist Satz β) des vorigen Artikels direct bewiesen; aus demselben folgt aber (Art. $A$, 2, 3) sofort unser Hauptsatz über die sphärische Abbildung der Krümmungslinien.

## C.

1. Für die Hyperboloide gelten die im vorigen Abschnitte für das Ellipsoid entwickelten Formeln ausnahmslos, wenn man statt $a, b, c$ die richtigen, eventuell imaginären Zahlenwerte setzt. Auch die übrigen Sätze über die Curven $(u)$ und $v$, über die Krümmungslinien, die Verwandtschaft im Bündel und ebenen Felde bleiben erhalten, nur die Realitätsverhältnisse sind mitunter andere. Wir wollen daher im folgenden kurz darauf eingehen.

2. Da das Hyperboloid $H$ einen reellen unendlich fernen Kegelschnitt $u$ besitzt, so ist $(u)$ immer reell (Art. $B$, 9); die Projectionen $(u)'$, $(u)''$, $(u)'''$ von $(u)$ zeichnet man entweder nach Gleichung 4) oder gemäß der geometrischen Bedeutung von $(u)$: Man braucht nur in den Hauptebenen von $H$ die Normalen auf die Asymptoten zu zeichnen und mit $K$ zum Schnitte zu bringen, um schon die Axen der Projectionen von $(u)$ zu erhalten.

3. Die sphärischen Bilder der Krümmungslinien von $H$ sind nach Art. $B$, 15 sphärische Kegelschnitte mit gemeinschaftlichen Brennpunkten, welche Bilder der Kreispunkte von $H$ sind. Beim einschaligen Hyperboloid gibt es zwar keine reellen Kreispunkte, wohl aber zwei reelle Verbindungslinien von vier solchen Punkten; diesen Verbindungslinien entsprechen (Art. $B$, 6) im Bündel $O$ collinear zwei reelle Gerade, welche unsere Bildkugel in reellen Punkten schneiden. Diese vier imaginären Kreispunkte von $H$ haben also reelle sphärische Bilder.

Ist überhaupt $g$ eine Gerade durch $O$, so haben die Schnittpunkte von $g$ mit $H$, mögen sie reell sein oder nicht, stets reelle sphärische Bilder.

Das sphärische Bild von $H$ bedeckt also die ganze Kugel, wenn man sich nicht auf den reellen Theil von $H$ allein beschränkt. Betrachtet man aber nur den reellen Theil von $H$, so gilt Folgendes: Die Curve $(u)$ theilt $K$ in drei Theile, in zwei Kugelhauben und eine Kugelzone. Die sphärische Abbildung des zweischaligen Hyperboloids bedeckt nur die beiden Kugelhauben, die sphärische Abbildung des einschaligen Hyperboloids bedeckt die Kugelzone.

Construiert man nun zu dem einschaligen Hyperboloid ein zweischaliges mit demselben Asymptotenkegel, wobei also jede Fläche die Imaginärprojection der anderen für $O$ als Centrum darstellt, so bedeckt die sphärische Abbildung dieser beiden Flächen zusammen die ganze Kugel, und die sphärischen Bilder der Krümmungslinien der beiden Flächen ergänzen einander zu vollständigen sphärischen Kegelschnitten.

4. Jede Erzeugende einer Regelfläche ist Träger eines Tangentialebenenbüschels. Die sphärischen Bilder aller Punkte dieser Erzeugenden, also das sphärische Bild der Erzeugenden selbst ist daher jener größte Kreis von $K$, der auf der Erzeugenden senkrecht steht.

Die sphärischen Bilder der Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids werden also größte Kreise sein, welche $(u)$ in zwei Punkten berühren; letztere Punkte sind dabei Bilder des unendlich fernen Punktes der Erzeugenden. Jede Erzeugende der ersten Schar von $H$ wird dasselbe Bild haben, wie die parallele Gerade der zweiten Schar.

5. Das einschalige Hyperboloid $H$ hat zwei Strictionslinien[1] $S_1$ und $S_2$; es tritt die Aufgabe an uns heran, ihr sphärisches Bild zu construieren. Der Kürze halber wollen wir nur das, übrigens leicht zu beweisende, Resultat angeben:

Zieht man durch $O$ in den Tangentialebenen des Asymptotenkegels $A$ von $H$ Normale auf die zugehörige Erzeu-

[1] Siehe A. Adler, Über Strictionslinien der Regelflächen, diese Sitzungsberichte, 1882 und A. Adler, Über Raumcurven 4. Ordnung 2. Art, diese Sitzungsberichte, 1882.

genden von $A$, so erhält man eine Kegelfläche $K^4$ vierter Ordnung dritter Classe mit drei Doppelinflexionsgeraden in den Axen von $H$. $K^4$ schneidet die Kugel $K$ schon in einer nicht zerfallenden Curve, welche das Bild von $S_1$ und $S_2$ darstellt.

Derselbe Kegel $K^4$ schneidet $H$ in zwei Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art; dieselben sind offenbar die Fußpunktcurven der Normalen, welche man von $O$ auf die Erzeugenden von $H$ fällen kann.

6. Zum Schlusse unserer Betrachtung über die sphärische Abbildung der Hyperboloide müssen wir noch die für constructive Zwecke so wichtige Beziehung zwischen den Projectionen zweier entsprechender Strahlen $g$ und $(g)$ durchnehmen (Art. $B$, 2).

Wir fanden die Beziehung zwischen $g'$ und $(g)'$ (Fig. 1) gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \alpha. \qquad 1)$$

Die Gleichung wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, dass der Hauptschnitt $s_3$ eine Ellipse sei. Die Gleichung gilt aber auch selbstverständlich, wenn $s_3$ eine Hyperbel oder imaginär (nulltheilig) wird; im ersteren Falle ist dann eine der beiden Größen $a, b$ imaginär, im letzteren Falle sind es beide.

Da Gleichung 1) nur die Quadrate von $a^2$ und $b^2$ enthält, so ergibt sich nun folgende Constructionsregel: »Man construiere zunächst die zu $g'$ entsprechende Gerade $(g)'$ geradeso, wie wenn die Ellipse mit den reellen Axen $a, b$ Hauptschnitt wäre (Fig. 1). Ist nun eine der beiden Axen imaginär, so zeichne man zu dem so gefundenen Resultate das Spiegelbild an der reellen Axe und weise erst dieses dem gegebenen $g'$ als entsprechend zu«. Sind beide Axen imaginär, so braucht man an dem zuerst gefundenen Resultate nichts zu ändern.

Analog sucht man $g''$, respective $(g)''$ und bestimmt deren Schnittpunkte mit $H$, respective $K$ unter Benützung affiner Beziehungen.

## D.

Wir wollen nun die Anwendung des Vorgetragenen für die Zwecke der darstellenden Geometrie besprechen. Mit Rücksicht auf das bereits Durchgenommene und den Ort der Publication müssen wir uns aber nur auf Andeutungen beschränken.

1. Zunächst sieht man folgenden Satz unmittelbar ein: Die sphärischen Bilder der Isophoten einer beliebigen Fläche sind bei paralleler Beleuchtung die Isophoten (Lichtgleichen) der Bildkugel bei derselben Beleuchtung also Kreise.

Das Isophotenproblem kann also für alle Flächen leicht gelöst werden, für welche die constructive Durchführung der sphärischen Abbildung nicht compliciert ist. Es kommt dabei noch ein günstiger Umstand hinzu. Die Lichtstrahlen werden nämlich von ganz bestimmter Richtung, gleich geneigt gegen Grundriss, Aufriss und Kreuzriss angenommen. Die Projectionen der Kugelisophoten sind dann in allen drei Projectionsebenen congruente Figuren. Es kann daher ein- für allemal eine derartige Projection $J$ verzeichnet werden und zur Benützung für die verschiedenen Flächen vorliegen.

Bei Mittelpunktsflächen $F^2$ zweiten Grades kann man jetzt so vorgehen: Man zeichne die Axen von $F^2$ in $J$ ein und bestimme nach Fig. 1 zunächst die Isophotenpunkte der Hauptschnitte von $F^2$. Falls dies nicht genügt, so schneide man noch $J$ durch zwei verticale Ebenen in verschiedenen Quadranten (etwa durch den hellsten Punkt von $J$) und construiere die entsprechenden Punkte von $F^2$. Man darf dabei nicht vergessen, dass jedem $P'$ zwei $(P)'$ und umgekehrt entsprechen, wodurch die Construction erleichtert wird. Auch die in Art. $B$, 8 entwickelten Sätze wendet man oft mit Vortheil an. Bei einem vorgelegten Hyperboloide zeichne man $(u)'$ auf $J$, was nach dem Vorgetragenen auf das einfachste geschehen kann; aus $(u)'$ ergeben sich die Lichtgleichen des Asymptotenkegels und damit schon die Asymptoten der Lichtgleichen.

Ist $J$ nicht zur Benützung vorhanden, so wendet man die Collineation im Bündel $O$ (Art. $B$, 6) vortheilhaft an. Es ist

dabei passend, das Bündel $O$ mit einer zur Lichtstrahlenrichtung senkrechten Ebene zum Schnitte zu bringen oder mit einer zu einer Hauptebene parallelen Ebene. Die Vervollständigung der dabei auftretenden collinearen oder affinen Felder geschieht praktisch genommen am besten nach der Art. $B$, 2 erwähnten Methode Finsterwaldners.

Bei Benützung der Tafel $J$ ist unsere Methode beträchtlich kürzer als die gewöhnlich angewendeten. Wendet man $J$ nicht an, so sind unsere Constructionen nicht complicierter als die besten der gebräuchlichen, ja vielfach mit ihnen übereinstimmend, wie es ja anders nicht sein kann.

2. Die Summe, respective die Differenz der sphärischen Entfernungen irgendeines Punktes (P) eines sphärischen Kegelschnittes von seinen Brennpunkten $(K_1)(K_2)(K_3)(K_4)$ ist bekanntlich constant. Aus dieser Definition folgt die constructive Behandlung der sphärischen Kegelschnitte auf das einfachste:

Wird $K$ auf die Ebene der Brennpunkte orthogonal projiciert, so erhält man Fig. 2. Ist nun (P) ein beliebiger Punkt des sphärischen Kegelschnittes, so bestimmt man die wahre Länge der sphärischen Abstände von $(P)$ bis $(K_1)$, respective $(K_2)$ durch Umklappen in die Zeichenfläche, wodurch man die Punkte $(P)_1$ und $(P)_2$ erhält. Es muss dann (Fig. 2):

$$\text{arc}\,(P)_1(K_1) + \text{arc}\,(P)_2(K_2) = \text{Const} = \text{arc}\,(A)(B)$$

sein.

Daraus kann man leicht beliebig viele Punkte unseres Kegelschnittes leicht finden, insbesondere aber jeden der Punkte $(A)(C)(P)(B)$, wenn einer von ihnen gegeben ist.

Man kann aber auch auf eine einfache Art die Tangente in (P) construieren: Zieht man nämlich in $(P)_1$ und $(P)_2$ die Tangenten $t_1$ und $t_2$ an den Umrisskreis, trägt auf denselben die gleichen Strecken $s$ auf und zieht durch die Endpunkte dieser Strecken parallele Geraden zu $\overline{(P)_1(P)}$ und $(P)_2(P)$, wodurch man das Parallelogramm (P) 1 2 3 erhält (Fig. 2), so ist schon die durch (P) gehende Diagonale die gesuchte Tangente, wie man wohl sofort einsieht.

Dies Wenige aus der Theorie der sphärischen Kegelschnitte genügt, um auf Grund des Vorhergehenden sämmtliche Constructionsaufgaben über Krümmungslinien der $F^2$ leicht lösen, insbesondere die ganze Theorie der Krümmungslinien aufbauen zu können. Da z. B. die Projectionen der sphärischen Kegelschnitte auf die Hauptebenen Kegelschnitte sind, so müssen (Art. *B*, 7) auch die Projectionen der Krümmungslinien auf dieselben Ebenen Kegelschnitte sein; die Axen letzterer Kegelschnitte bestimmt man dabei auf das einfachste aus (*A*), (*B*), (*C*).

Viele Aufgaben über die Krümmungslinien der $F^2$ kann man nach unserer Methode besonders einfach lösen, z. B. gleich die folgende Aufgabe: Gegeben sei ein Punkt P von $F^2$. Es sind die Richtungen der Krümmungslinien in diesem Punkte zu bestimmen und die Krümmungslinien selbst zu verzeichnen. Die Tangenten einer Krümmungslinie sind dabei (Art. *A*, 2) parallel zur entsprechenden Tangente ihres Bildes.

Zur Lösung dieser Aufgabe könnte man auch Satz β), Art. *B*, 17 heranziehen oder den Satz: Die Richtungen der Krümmungslinien in P halbieren den Winkel zwischen den Tangenten der reellen Kreisschnitte durch P. Letzteren Satz sieht man leicht ein, wenn man das System berührender Kugeln in P betrachtet; die beiden durch P gehenden Kreisschnitte liegen nämlich auf einer dieser Kugeln.

Damit sind wir zum Schlusse unserer Betrachtungen gekommen. Viele Probleme, die sich uns aufdrängten, haben wir nur ganz kurz besprochen; manche derselben gar nicht, so z. B. die sphärische Abbildung der Kreisschnitte von $F^2$, die Verwertung der stereographischen Projection, Aufgaben im letzten Abschnitte, endlich die Beschreibung eines Mechanismus, der zum Zeichnen entsprechender Punkte P′ und (P)′ benutzt werden kann und dessen Theorie aus Fig. 1 hervorgeht.

Immerhin hoffen wir aber so weit gegangen zu sein, dass die Wichtigkeit der sphärischen Abbildung für so verschieden-

artige Probleme der darstellenden Geometrie hervortritt. Da außerdem die sphärische Abbildung der Flächen an und für sich eine Disciplin ist, deren synthetische Betrachtung als geometrisch leicht zu behandelnde Abbildungsmethode in die darstellende Geometrie gehört, aber in derselben noch nicht durchgeführt wurde, so dürfte obige Arbeit nicht ganz fruchtlos sein. Möge damit die Aufnahme der sphärischen Abbildung in die darstellende Geometrie begründet und gesichert sein.

Adler A.: Sphärische Abbildung.

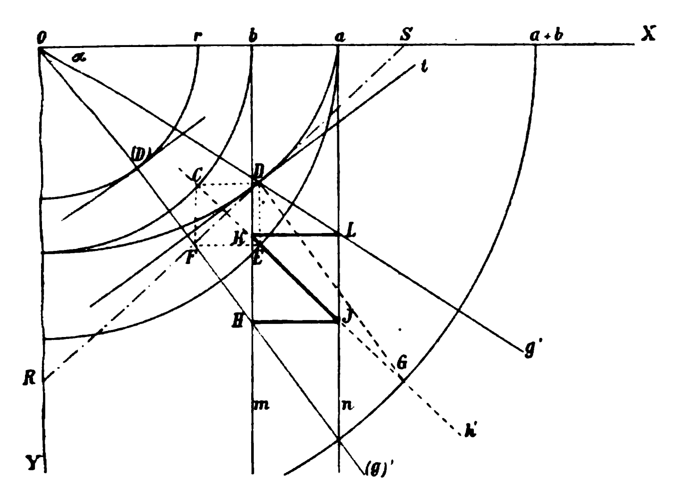



Fig. 1.

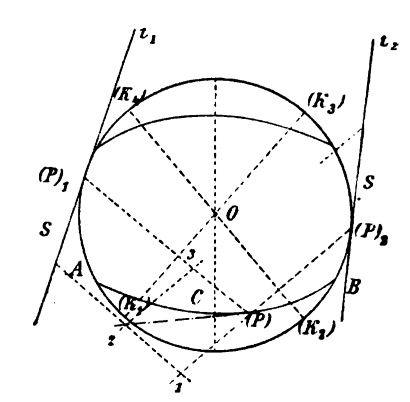



Fig. 2.

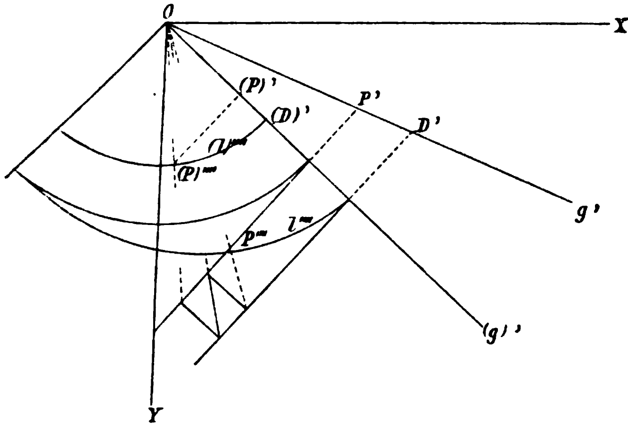
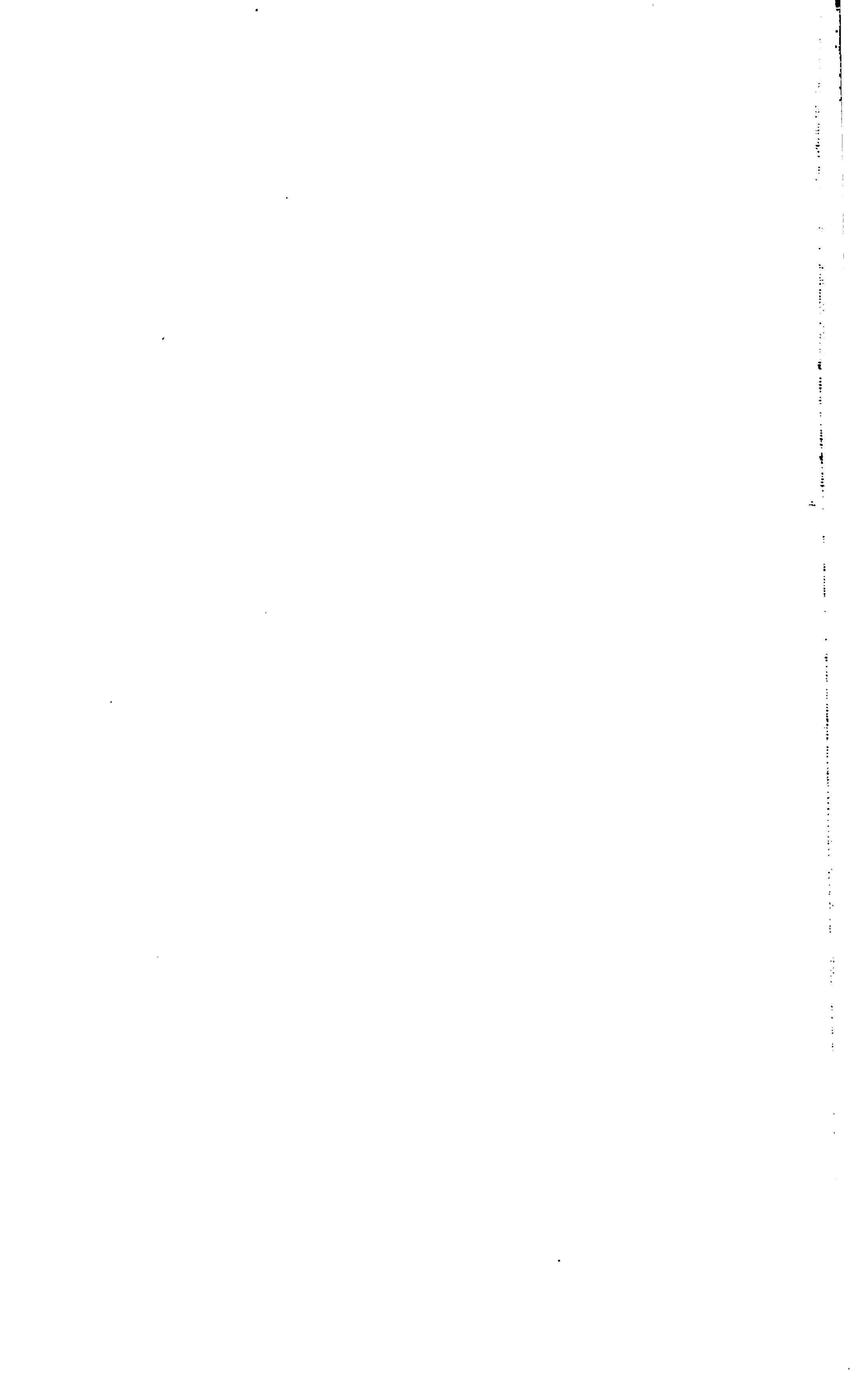



Fig. 1a.



# Zur Genesis der richtigen Erklärung der Scintillationserscheinungen

von

**Karl Exner,**
c. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1901.)

## I.

1. Schon bei Aristoteles (1) finden wir die Beobachtung der Zitterbewegung der Fixsterne und der Nichtscintillation der Planeten.

Ptolemäus wusste, dass die Sterne in der Nähe des Horizontes stärker scintillieren.

Averrhoës (2) sagt, dass die Dichtigkeit der von den Lichtstrahlen durchlaufenen Mittel das Funkeln der Sterne, von denen sie ausgehen, hervorrufen, dass diese in beständiger Bewegung befindlichen Medien die Bilder auf verschiedene Punkte des Auges fallen lassen.

Alhazen und sein Commentator Vitellio betrachten die Scintillation als eine Wirkung der Brechung, welche die Strahlen der Sterne in der Atmosphäre erleiden. Da diese Bewegung — sagen sie — nicht immer die nämliche ist, so müssen die Sterne als in Bewegung befindlich erscheinen.

2. Keppler (3) entdeckte jenes Phänomen, welches das Grundphänomen der Scintillation genannt zu werden verdient. Er berichtet: »Am 19./29. December 1602, gegen Abend, sah ich durch ein Fenster Venus, welche schon im Abnehmen war. ...Der Planet funkelte stark; als ich nach der weißen Wand

blickte, auf welche die Strahlen der Venus fielen, gewahrte ich Undulationen, etwa wie wenn der Rauch zu sehen hindert, und zwar mit großer Schnelligkeit und unregelmäßigen Bewegungen. ... Ich habe bemerkt, dass diese Luftundulation in Beziehung zu der am Planeten erscheinenden Scintillation stand.« Ich nenne dieses Phänomen das Keppler'sche Scintillationsphänomen.

3. Descartes stellt sich vor, dass die Wirbel, welche in seinem Systeme alle Himmelskörper umgeben, aus einer flüssigen Materie bestehen und deshalb an ihrer Oberfläche eine zitternde oder wellenförmige Bewegung besitzen. Sieht man nun die Sterne durch ein solches Medium hindurch, so funkeln sie und erscheinen in zitternder Bewegung; letztere muss nach seiner Meinung sogar eine Vergrößerung ihrer Bilder zur Folge haben, wie dies später Newton in anderer Weise gefolgert und beobachtet hat.

4. Nach Huygens ist das Sternfunkeln die Folge einer zitternden Bewegung der unsere Erde umgebenden Dünste.

5. Hooke machte die Scintillation von den unregelmäßigen Brechungen abhängig, welche die Lichtstrahlen beim Durchgange durch die Atmosphäre erfahren. Er hatte ferner den Gedanken, dass die in der Vertheilung der Wärme vorhandenen Unregelmäßigkeiten einem begrenzten Stück der Atmosphäre, im Vergleiche zu den benachbarten Theilen, möglicherweise die Gestalt einer convexen oder concaven Linse geben könnten. Diese Bemerkung Hookes deckt die wahre Ursache der Scintillation auf.

6. Auch der große Forscher Newton führte die Scintillation auf die unregelmäßigen Brechungen in der Atmosphäre zurück. Von ihm rührt die importante Beobachtung des Scintillations-Zerstreuungskreises und die der Nichtscintillation der Fixsterne bei Beobachtung durch Instrumente mit großer Öffnung her.

Er sagt: »Auch die ... Scintillation der Fixsterne ist den Brechungen zuzuschreiben, welche die Lichtstrahlen ... in der unruhigen Atmosphäre erleiden... Das Zittern der Luft... verursacht, dass die Strahlen leicht abwechselnd... abgelenkt werden... Die Luft, durch welche wir die Gestirne betrachten,

befindet sich in ununterbrochener Bewegung..., doch scintillieren die Sterne nicht, wenn sie durch Fernrohre mit weiten Öffnungen beobachtet werden. Denn indem alsdann die Lichtstrahlen durch verschiedene Punkte der Öffnung hindurch gehen und jeder für seinen Theil tremuliert, so treffen sie mit mannigfaltigen und selbst entgegengesetzten Schwingungen zu gleicher Zeit auf verschiedene Punkte des Auges, wo ihre Bewegungen zu lebhaft und zu unregelmäßig werden, um einzeln einen Eindruck hervorbringen zu können. Indem nun jene vielen schwingenden Punkte infolge ihrer raschen Bewegung und ihrer äußerst kurzen Vibrationen sich untereinander vermischen und unmerklich zusammenfließen, erzeugen alle diese Punkte einen einzigen großen leuchtenden Punkt und bewirken dergestalt, dass das Bild eines Sternes nicht allein größer erscheint, als es eigentlich der Fall ist, sondern auch ohne jede zitternde Bewegung des Ganzen, soweit eine solche durch unsere Sinne wahrgenommen werden kann.«

Bei Betrachtung durch große Instrumente verursacht also die Scintillation eine Vergrößerung des punktförmigen Bildes, einen Scintillations-Zerstreuungskreis. Ich nenne dieses Phänomen das Newton'sche Scintillationsphänomen.

7. Mairan (5) vergleicht die Scintillation mit der wellenförmigen oder oscillatorischen Bewegung, die man wahrnimmt, wenn man den Horizont »über einem weiten, von der Sonne beleuchteten Gefilde« betrachtet, oder auch mit der Bewegung, welche die von einem Gegenstande ausgehenden Strahlen erleiden, wenn sie vor ihrem Eintritte in das Auge sehr nahe an der Oberfläche eines geheizten Ofens vorübergehen.

Saussure (6) erblickt im Funkeln der Sterne ein Schwanken der Lichtstrahlen, hervorgerufen durch alternierende Verdichtungs- und Verdünnungszustände in gewissen Theilen der Atmosphäre.

Young (7) sagt von der Scintillation der Gestirne: »Die Ursache des Funkelns der Sterne ist nicht vollkommen bekannt, doch bringt man diese Erscheinung nicht ohne einige Wahrscheinlichkeit mit den Veränderungen in Verbindung, welche

in der Atmosphäre fortwährend vorgehen und ihr Brechungsvermögen alternieren.«

8. Simon Marius beobachtete zuerst jenes Phänomen, das ich das Marius'sche Scintillationsphänomen genannt habe. Beobachtet man einen scintillierenden Fixstern durch ein Fernrohr, so erscheint das durch Ausziehen oder Einschieben des Oculars erweiterte Bild des Sternes, z. B. der Querschnitt *b* des Strahlenbündels in Fig. 2, nicht gleichförmig hell: In einem gegebenen Momente erscheinen verschiedene Stellen der Scheibe, als welche der Stern wahrgenommen wird, in beträchtlich ungleicher Helligkeit, und die Vertheilung der Helligkeiten wechselt unregelmäßig von einem Momente zum anderen. Es gleicht die Erscheinung dem Lichtspiele der Sonnenstrahlen auf einer Wand, wenn dieselben von einer leicht bewegten Wasserfläche reflectiert worden sind. Bei tiefstehenden Sternen wechselt überdies in dem scheibenförmigen Bilde nicht nur die Helligkeit von Ort zu Ort und von Moment zu Moment, sondern auch die Farbe in sehr lebhafter Weise.

9. Nicholson führt zuerst den Versuch an, bei welchem das Bild des Sirius in einen farbigen Lichtstreifen verwandelt wurde, als dessen Bild rasch auf der Netzhaut des Auges hingeführt wurde.

Biot (8) hält die Scintillation für eine Art von Zittern oder Schwanken der Sterne, verursacht durch häufige Ungleichheiten in den Brechungen, welche die Lichtstrahlen bei ihrem Durchgange durch die Atmosphäre erleiden.

10. So waren die Forscher auf dem richtigen Wege zur Erklärung der Scintillation, als im Jahre 1852 Arago (40) seine berühmte Abhandlung über das Funkeln der Sterne veröffentlichte, in welcher er mit einer ebenso glänzenden als unrichtigen Theorie hervortrat. Gleichwohl enthält seine Abhandlung genug des Behaltenswerten. Arago gab drei Scintillometer an. Das erste besteht in einem größeren Fernrohre, dessen Ocular eingeschoben wird. Man erhält so das oben beschriebene Phänomen des Marius [8], welches gestattet, die Erstreckungen der hellen und dunkeln Theile der einfallenden Lichtwellenflächen angenähert zu bestimmen, die Richtung der Bewegung der Maxima und Minima, wenn eine solche ausgesprochen ist,

wahrzunehmen, und das Vorhandensein der Scintillation an den Helligkeits- und Farbenfluctuationen zu erkennen. »Man könnte auch«, sagt Arago, »ein Scintillometer construieren, indem man nach der Methode von Nicholson das Bild eines Sternes in einen Lichtstreifen verwandelt... Wir wollen annehmen, von einer bestimmten Lage des Fernrohres ausgehend, verrücke man dasselbe in einer Zwanzigstelsecunde dergestalt, dass in diesem kurzen Zeitraume der Stern im Gesichtsfelde eine gerade Linie von 2 Minuten Länge zu beschreiben scheine. Dieses Raumintervall wird dann die verschiedenartigen Bilder enthalten, welche in einer Zwanzigstelsecunde erzeugt werden und sich gedeckt haben würden, wenn das Fernrohr unverrückt geblieben wäre. Man kann nun zählen, wie viele solche verschiedenfarbige Bilder vorhanden sind... Ich habe eine dritte Methode entdeckt, um die Scintillation mit Hilfe des Fernrohres zu untersuchen und will sie im folgenden beschreiben. Seit man Fernrohre anwandte mit kleinen, natürlichen Öffnungen, oder noch besser, mit verkleinerten Öffnungen, indem man vor dem Objective einen mit einem kreisrunden Loche versehenen Deckel anbringt, hätte man bei passender Entfernung vom Focus (verschobenem Oculare) sehen können, dass das vergrößerte Bild des Sternes in der Mitte von einem regelmäßigen dunkeln Loche durchbohrt war. Ich finde jedoch in keiner Schrift eine derartige Beobachtung angeführt. Wenn man vor dem Objective eines ...Fernrohres (von etwa 9 *cm* Öffnung oder mehr) einen mit einer kreisförmigen Öffnung von kleinem Durchmesser, etwa 3 bis 4 *cm* (oder besser noch kleiner), versehenen Schirm oder Deckel anbringt, so sind die Bilder der Sterne im Focus rund, scharf begrenzt und von einer Reihe sehr feiner und dicht gedrängter, abwechselnd heller und dunkler Ringe umgeben... Schiebt man nun... das Ocular ganz allmählich weiter ein, so sieht man das Bild des Sternes nach und nach größer werden, und bald entsteht im Mittelpunkte ein schwarzer, runder, scharf begrenzter Flecken, ein wahres, dunkles Loch. Der Abstand vom Brennpunkte, bei welchem dieser Flecken auftritt, ändert sich mit dem Durchmesser der vor das Objectiv gestellten Öffnung. Eine neue Verschiebung des Oculars in demselben Sinne hat zunächst eine Erweiterung

des dunklen Fleckens zur Folge, und hierauf die Bildung einer kleinen, leuchtenden Scheibe in der Mitte des Loches. Vom Centrum gegen die Peripherie gerechnet, wird also das Bild des Sternes dann bestehen aus der leuchtenden Scheibe, einem breiten, dunkeln Ringe und aus einem breiten Lichtringe. In einer dritten Stellung des Oculars, noch näher dem Objective, wird die Mitte des Bildes wieder dunkel sein; dem breiten, glänzenden Ringe, der dieses Centrum umgibt, folgt alsdann ein dunkler Ring, an den sich seinerseits ein leuchtender Ring anschließt. Nehmen wir für einen Augenblick an, dass das Ocular des Fernrohres sich in einer Lage befinde, wo das Centrum des Sternbildes, noch ganz dunkel, eben im Begriffe ist, bei weiterer Verschiebung leuchtend zu werden. Wenn der Stern nicht scintilliert, so wird alsdann die Gestalt des Bildes constant bleiben; bei leichter Scintillation dagegen erscheint in der Mitte des schwarzen Fleckens von Zeit zu Zeit ein kleiner, leuchtender Punkt, als wenn man in diesem Augenblicke das Ocular ein wenig hineingeschoben hätte. Ist das Funkeln lebhaft, so sind die Veränderungen dieser Art continuierlich.«

Ich habe dieses Phänomen das Arago'sche Scintillationsphänomen genannt. Indem dann Arago die Häufigkeit des Erscheinens des leuchtenden Punktes in der Mitte des schwarzen Fleckens bei eingeschobenem und feststehendem Oculare zur Messung des Grades der Scintillation benützt, gelangt er zu seinem dritten Scintillometer (Arago'sches Scintillometer).

Arago hat auch die Frage aufgeworfen, ob die Scintillation für verschieden gestellte Beobachter dieselbe ist, und zur Beantwortung dieser Frage einen Versuch vorgeschlagen. Dass terrestrische entfernte Lichtpunkte scintillieren, ist zu allen Zeiten beobachtet worden; eine scintilloskopische Beobachtung an dem Sonnenbildchen eines entfernten Thurmknaufes hat aber zuerst Arago gemacht. Wenn ausgedehnte Objecte, wie die Planeten, weder Helligkeits- noch Farbenwechsel zeigen, so rührt dies, wie der Hauptsache nach schon Arago erkannt hat, daher, dass die einzelnen, sehr nahe benachbarten Punkte der leuchtenden Fläche, deren Verbindungslinien mit dem Auge

gleichwohl in der Luft nicht dieselbe Lage haben, unabhängig von einander ihren Ort, ihre Helligkeit und ihre Farbe variieren, und dass alle diese von einander unabhängigen, raschen und unregelmäßigen Veränderungen im Auge, indem sie ihre Eindrücke vermischen, eine gleichmäßige Erhellung hervorbringen. Schließlich hat Arago das Vorhandensein einer Bewegungsrichtung der Fluctuationen in dem durch Verstellung des Oculars erweiterten Bilde des Fixsternes und die Übereinstimmung dieser Richtung mit der Windrichtung bemerkt.

11. Montigny (9) trat, einer Idee Plateaus folgend, gegen die Autorität Aragos mit einer neuen Theorie der Scintillation auf, die ebenfalls unrichtig ist. Gleichwohl bedeutet diese Theorie einen wesentlichen Fortschritt zur Erklärung der Scintillation dadurch, dass die regelmäßige Dispersion des Lichtes beim Durchgange durch die Atmosphäre zur Erklärung der Farbenentwickelung herangezogen wird. Damit war eine der beiden Ursachen aufgedeckt, durch deren Zusammenwirken die Scintillation entsteht.

Verfolgt man das von einem Fixsterne kommende und durch die Pupille des Auges tretende Strahlenbündel vom Auge aus zurück bis zum Sterne, so sieht man, dass nach dem Brechungsgesetze die verschiedenfarbigen Bündel, aus denen sich das weiße Bündel zusammensetzt, in der Atmosphäre infolge der regelmäßigen atmosphärischen Dispersion verschiedene Wege gehen, an der Grenze der Atmosphäre gegenseitige Distanzen bis zu einem Betrage von ungefähr 10 *m* gewinnen [14] und sich im Sterne wieder vereinigen. Indem nun diese verschiedenfarbigen, getrennt gehenden Strahlenbündel in der Atmosphäre unabhängig von einander und verschieden modificiert werden, entsteht nach Montigny das die Scintillation begleitende Farbenspiel.

Nur in Bezug auf die Art dieser Modification irrte Montigny, indem er eine Interception der Strahlen durch Totalreflexion annahm, und wurde so verhindert, zu einer vollständigen Erklärung der Scintillation zu gelangen. Es ist schon erwähnt, dass Arago die Frage stellte, ob die Scintillation für verschiedene Beobachter identisch sei. Indem Montigny die

beiden Hälften eines Fernrohres von 77 *mm* Öffnung derart getrennt wirken ließ, dass ein Doppelbild des Sternes wahrgenommen wurde, und die beiden Bilder auf die bekannte Art [9] in zwei kleine Kreislinien verwandelte, zeigte sich keine Übereinstimmung in der Farbenfolge. Es scintillierten also die durch die beiden Hälften der Objectivöffnung gehenden Strahlenbündel unabhängig von einander. Montigny erinnerte auch daran, dass nach Garcin im persischen Meerbusen die Sterne nur im Winter funkeln, und dass nach Forbes und Necker de Saussure in Schottland die Sterne nicht funkeln, es müsste denn ein Nordlicht am Himmel stehen.

Ferner haben, wie schon früher Arago [10], später Liandier und Poey [10] einen Zusammenhang der Richtung der Fluctuationen in dem durch Einschieben des Oculars erweiterten Bilde des Sternes mit der Windrichtung constatiert.

Wolf und Respighi haben die Scintillation der Sterne unter Anwendung eines Spectroskopes studiert, wie dies Montigny schon früher vorgeschlagen hatte (9); sie fanden im Spectrum der scintillierenden Sterne Fluctuationen, welche vom Zustande der Atmosphäre abhängig waren. Montigny bediente sich bei seinen zahlreichen Beobachtungen eines Scintillometers, das im wesentlichen mit dem zweiten der drei von Arago angegebenen Scintillometer [10] zusammenfällt, welch letzteres selbst wieder auf einem Versuche Nicholsons [9] beruht. Montigny fand die Scintillation in seinem Scintillometer am lebhaftesten in einer bestimmten Himmelsrichtung und in der entgegengesetzten Richtung; nämlich in der Richtung, von welcher der Wind kam, und in jener, nach welcher er gieng.

Schließlich hat Montigny scintillierende Sterne mittels eines Spectroskopes beobachtet; er benützte hiebei ein Fernrohr von nur 2 *cm* Öffnung, wodurch das Eintreten des Newton'schen Phänomens [6] vermieden wird. Er nahm Verlängerungen und Verkürzungen, transversale Oscillationen und Übereinanderlagerungen der einzelnen Theile des Spectrums wahr.

12. Während das Montigny'sche Princip, d. i. die Heranziehung der regelmäßigen atmosphärischen Strahlendispersion zur Erklärung der Scintillation, seit seiner Aufstellung allgemein angenommen wurde, fand Montignys Theorie der Interception der Strahlen durch Totalreflexion alsbald Widerspruch durch Plateau und Donati. Letzterer ersetzte in Montignys Theorie die totalen Reflexionen durch Ablenkungen der Strahlen auf dem Wege der Brechung, erklärte also die Scintillation aus dem Zusammenwirken unregelmäßiger Brechungen und der regelmäßigen Dispersion in der Atmosphäre. In der That führt sich die Scintillation auf diese beiden Ursachen zurück. Indem aber Donati bei seinen Beobachtungen ein Instrument von zu großer Öffnung benutzte, wurde er durch das Newton'sche Phänomen [6] irregeführt und sah sich, um die Helligkeitswechsel erklären zu können, genöthigt, auch noch eine dritte Ursache, hypothetische, unregelmäßige Absorptionen in der Atmosphäre anzunehmen. Donati nahm seinen Ausgangspunkt von der Beobachtung der atmosphärischen Spectra scintillierender Sterne, was allerdings sehr lehrreich sein musste. Die einzelnen Theile des Spectrums zeigen von einander unabhängige Variationen der Gestalt, Größe, Lage und Helligkeit, so dass Farben sich übereinanderschieben oder sich vom Spectrum trennen. Donati beobachtete indessen diese Erscheinungen nur unvollkommen.

Während nämlich die einzelnen Theile des Spectrums sehr beträchtliche Helligkeitsschwankungen zeigen, beobachtete Donati solche nur ausnahmsweise und in geringem Grade. Die Ursache dieser Unvollkommenheit der Beobachtung war der Umstand, dass Donati ein Instrument von zu großer Öffnung, $10^1/_2$ Zoll, benutzte, so dass das Newton'sche Phänomen [6] störend mitwirkte. Die Art, wie Donati aus den Erscheinungen des atmosphärischen Spectrums der scintillierenden Sterne die Farbenwechsel erklärte, ist, wie schon Montigny ausgeführt hat, nicht annehmbar. Ebensowenig Donatis Erklärung der Helligkeitswechsel aus der Annahme wechselnd starker Absorption in der Atmosphäre. Immerhin war Donati wieder auf den richtigen Weg zur Erklärung der

Scintillation zurückgekommen, welcher schon vor Arago von Newton und anderen betreten war.

13. Donati reproducierte zur Widerlegung der Theorie Aragos einen Versuch Amicis, der in mehrfacher Beziehung beachtenswert erscheint. Ein Convexspiegel reflectiert im Freien Sonnenstrahlen theils direct, theils durch ein nahes Prisma nach dem Auge des in größerer Entfernung befindlichen Beobachters, welcher wegen der Größe der Entfernung und der geringen Ausdehnung des Spectrums nebeneinander zwei weiße Punkte sehen sollte. Es erscheint nun das eine, directe Bild stets weiß, während das andere der Reihe nach durch verschiedene Farben geht, so dass es in einem Momente roth und im nächsten etwa blau erscheinen kann, wie ein farbig scintillierender Stern. Donati gibt keine Erklärung dieses Versuches, doch ergibt sich dieselbe unmittelbar aus der richtigen Erklärung der Scintillation (25).

14. Das Montigny'sche Princip [11] musste als fruchtbar in der Erklärung der Scintillation erscheinen.

O. F. Mossotti (11) stellte sich daher die Aufgabe, dieses Princip in Rücksicht auf die quantitative Zulänglichkeit zu prüfen und führte eine Rechnung durch, welche zeigen sollte, ob die verschiedenfarbigen Strahlen, welche von einem Fixsterne ausgehen, um nach ihrem Durchgange durch die Atmosphäre im Auge des Beobachters ein Bild des Sternes hervorzubringen, in der Atmosphäre hinreichend getrennt gehen, um Montignys oder Donatis Erklärungen der bei der Scintillation auftretenden Farbenerscheinungen als möglich erscheinen zu lassen. Mossotti gründete seine Berechnungen auf eine Messung Struves, welcher den Stern Fomalhaut in einer Zenithdistanz gleich 88° 33′ als atmosphärisches Spectrum wahrnahm, und dessen Dimensionen in verticaler und horizontaler Richtung zu 22″ und 8″ bestimmte. Der Stern hätte ohne Dispersion als eine Scheibe von 8″ Durchmesser erscheinen müssen. Es bleiben demnach 14″ für die Ausdehnung des Spectrums. Hieraus berechnete Mossotti, dass der rothe und violette Strahl, welche sich im Punkte des Beobachters trafen, unmittelbar außerhalb der Atmosphäre einen gegenseitigen Abstand von 8·78 *m* haben mussten, und zog hieraus

einen günstigen Schluss in Bezug auf die Möglichkeit der Theorien Montignys und Donatis.

15. Denzlers (12) Beobachtungen bestätigen die Beobachtung Aragos, nach welcher die Bewegungen in der Marius'schen Scheibe vorwiegend die Windrichtung befolgen.

16. R. Clausius (14) schreibt die Wellenbewegung des Randes der Planeten in richtiger Weise derselben Ursache zu, wie die Zitterbewegung der Fixsterne: »Daher werden sie nicht ganz aus ihrer Stelle gerückt, sondern nur am Rande bald erweitert, bald verengt, was man durch ein Fernrohr als ein Zittern des Randes gewahr wird.«

17. Das Marius'sche Phänomen [8] zeigt die Beschaffenheit der durch die verschiedenen Stellen des Objectivs tretenden Strahlenbündel, da sich dieselben noch nicht im Focus vereinigt haben. Man beobachtet dieses Phänomen, indem man das Ocular einschiebt, erhält es aber auch dadurch, dass man bei uneingeschobenem Oculare eine Sammellinse vor das Auge bringt. Ersetzt man die letztere durch eine Cylinderlinse, so nimmt man das Marius'sche Phänomen in unvollkommener Weise wahr, indem sich dann nicht mehr jeder durch das Objectiv tretende Strahl auf eine andere Stelle des kreisflächenförmigen Netzhautbildes projiciert, sondern je alle Strahlen, welche durch eine mit einer fixen Richtung parallele Sehne der Objectivöffnung treten, sich in einem Punkte des alsdann geradlinigen Bildes des Sternes vereinigen. In diesem geradlinigen Bilde des Sternes muss dann auch eine bestimmte Bewegungsrichtung der Helligkeitsfluctuationen zur Erscheinung kommen können, wie in der Marius'schen Scheibe, d. h. es müssen sich die Lichtmaxima und Minima unter Umständen in einer bestimmten Richtung längs des linearen Sternbildes fortbewegen können. Betrachtet man anderseits einen scintillierenden Stern mittels eines Spectroskops, so zeigen die verschiedenen Theile des linearen Spectrums in einem gegebenen Momente sehr verschiedene Helligkeiten. Nun hat C. Wolf (15) die Entdeckung gemacht, dass im allgemeinen auch diese Helligkeits-Maxima und Minima im Spectrum sich in einer bestimmten Richtung bewegen, bald von roth gegen violett, bald um-

gekehrt. Betrachtet man ferner das in der oben beschriebenen Weise mittels einer Cylinderlinse erhaltene lineare Bild eines Sternes auch noch mittels eines Spectroskopes, dessen Dispersionsebene auf der Richtung des linearen Sternbildes senkrecht steht, so hat man ein zweidimensionales Spectrum, und in demselben eine doppelte Bewegung der Maxima und Minima der Helligkeit, in der Dispersionsebene und senkrecht zu derselben. Man sieht leicht, wie sich aus der Zusammensetzung dieser beiden Bewegungen im allgemeinen eine Schaar dunkler Banden ergibt, welche, je nach Umständen longitudinal, transversal oder schräg über das Spectrum laufen. Dieses eben hat Wolf beobachtet.

18. Respighi (16) ging den Weg Donatis, ohne in des letzteren Fehler zu verfallen, und benützte hiebei die Experimente Wolfs, welche er eingehend wiederholte. Er kehrte zu der ursprünglichen, richtigen Hypothese Donatis zurück, nach welcher die Scintillation lediglich durch die regelmäßige Dispersion und unregelmäßige Refraction entsteht. Er fand, dass diese beiden Ursachen zur Erklärung der Wolf'schen Erscheinungen ausreichen. Damit ist freilich die Refractionstheorie noch nicht bewiesen, da die Erscheinungen im Wolf'schen Scintillometer [17] sich zwar aus der Refractionstheorie sehr gut erklären lassen, doch nicht minder aus jeder anderen Theorie, welche nur die Ursache der Scintillation überhaupt in der Atmosphäre sucht (Arago, Montigny), wie denn auch Wolf diese Erscheinungen für die Interferenztheorie Aragos in Anspruch genommen hat. Respighi hat auch eine Beobachtung gemacht, die Wolf entgangen war. Bei Windstille wandern in den Spectren östlicher, d. i. aufsteigender Sterne die Lichtmaxima und Minima vom violetten Ende des Spectrums gegen das rothe, bei den westlichen hingegen umgekehrt. Respighi hat dieses Phänomen auch richtig erklärt.

Befinde sich der Einfachheit wegen sowohl der Beobachter, als der Stern im Äquator. Die gerade Verbindungslinie zwischen Beobachter und Stern dreht sich infolge der täglichen Bewegung des Sternes um den Beobachter, und zwar bewegen sich die entfernteren Theile dieser Verbindungslinie schneller, so zwar, dass ein noch in der Atmosphäre gelegener Punkt

derselben mit einer Geschwindigkeit von 70 *m* in der Secunde fortschreiten kann, wenn der Stern dem Horizonte nahe steht. Befindet sich also in irgend einem Momente an einer östlichen und entfernten Stelle der Atmosphäre eine Ungleichheit, welche geeignet ist, das durchgehende Strahlenbündel in irgend einer Weise zu alterieren, so wird, wenn in demselben Momente die voranschreitenden violetten Strahlen des Sternes diese Stelle passieren, der violette Theil des Spectrums des Sternes eine entsprechende Veränderung zeigen und es kann bei der großen Geschwindigkeit, mit welcher sich die Trajectorien der Strahlen in entfernteren Luftschichten bewegen, geschehen, dass noch ehe jene Ungleichheit der Luft sich beträchtlich verändert hat, die übrigen Farbstrahlen der Reihe nach dieselbe Stelle passieren, so dass sich die Störung im Spectrum von violett gegen roth fortpflanzt. Man sieht leicht, dass das umgekehrte stattfinden muss, wenn der Stern im Westen steht.

19. Jamin (17) war der erste, welcher einen Versuch machte, das Arago'sche Phänomen, d. i. die Erscheinungen in Aragos Scintillometer [10] zu erklären und hiedurch die Vorstellung von der Art der unregelmäßigen Brechungen der Strahlen in der Atmosphäre nicht unwesentlich verbesserte. Er fand nämlich, dass, um die durch die Scintillation verursachten continuierlichen Veränderungen des Bildes in Aragos Scintillometer zu erklären, es hinreichend ist anzunehmen, dass die einfallenden Lichtwellenflächen beständig ihre Gestalt ändern. Indem aber Jamin die Erscheinungen in Aragos Scintillometer, welche schon Babinet (18) als Beugungserscheinungen erkannt hatte, als Interferenzerscheinungen auffasste, wurde er verhindert, zu weiteren Resultaten zu gelangen.

## II.

20. So waren über die Ursachen der Scintillation verschiedene Hypothesen aufgestellt, ohne dass es gelungen wäre, eine derselben vollständig zu begründen.

Bei meinen Studien über diesen Gegenstand fand ich einen sicheren und fruchtbaren Ausgangspunkt in Aragos Scintillationsphänomen, d. i. den Erscheinungen, welche in Aragos

Scintillometer [10] wahrgenommen werden, und deren volles Verständnis dem Entdecker selbst versagt blieb. Von diesen Phänomenen ausgehend, gelangte ich zu Consequenzen, welche die sämmtlichen Scintillationserscheinungen umfassen.

21. Die Lichtbilder, welche man im Arago'schen Scintillometer, d. i. dem dritten der drei von Arago angeführten Scintillometer [10] beim Anvisieren eines entfernten, nicht scintillierenden Lichtpunktes bei verschiedenen Stellungen des Oculars wahrnimmt, hatte wie erwähnt schon Babinet als Beugungsbilder der kreisförmigen Öffnung des Instrumentes erkannt. Thatsächlich ist der Focus des Instrumentes von einem räumlichen Beugungsbilde umgeben, das in roher Weise durch Fig. 1 dargestellt ist.

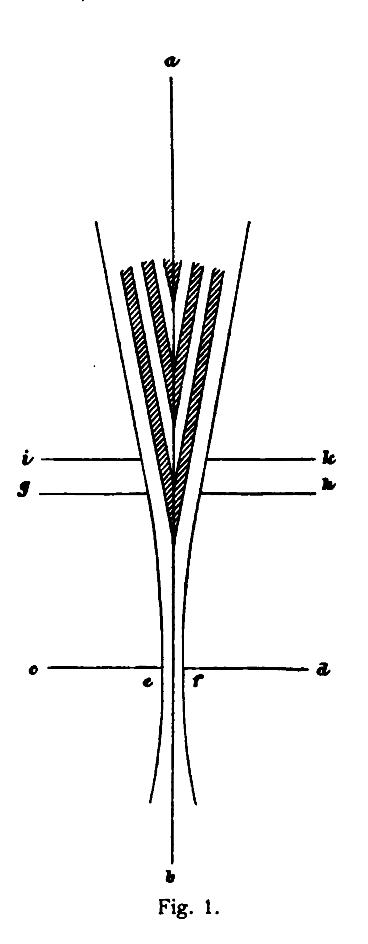


Fig. 1.

Wenn das Ocular auf die Brennebene *cd* eingestellt ist, so nimmt man das Fraunhofer'sche Beugungsbild der Öffnung des Instrumentes wahr; *ef* ist die centrale Aureole, während die Ringe in der Figur nicht angedeutet sind. Schiebt man ferner von dieser Stellung aus das Ocular ein, bis man beispielsweise die Ebene *ik* deutlich sieht, so hat man eine Fresnel'sche Beugungserscheinung der kreisrunden Öffnung und das Phänomen besteht in diesem Falle aus einer centralen hellen Scheibe, welcher ein dunkler und ein heller innerer Ring und die, in der Figur nicht gezeichneten, äußeren Ringe folgen. Wenn man überdies das

Ocular, statt es einzuschieben, auszieht, so erhält man, was Arago entgangen zu sein scheint, dieselben Erscheinungen. Betrachtet man die Variationen der Intensität längs der Axe *ab* des Fernrohres, so hat man eine Folge von Maxima und Minima, welche ich longitudinale Maxima und Minima genannt habe. In jedem Punkte der Axe befindet sich ein transversales Maximum oder Minimum, doch nur an bestimmten Punkten der Axe longitudinale Maxima oder Minima, deren Lage leicht zu berechnen und selbst elementar abzuleiten ist. Nach der elementaren Ableitung sind die longitudinalen Minima sämmtlich Null, und der gegenseitige Abstand zweier benachbarter longitudinaler Minima ist:

$$\Delta = \frac{2\lambda}{\omega^2},$$

wenn $\omega$ der scheinbare Radius der Öffnung, bezogen auf den Focus, ist. Ausgenommen hievon sind die beiden dem Focus, der immer ein Maximum ist, unmittelbar benachbarten Minima, von welchen eines vor, das andere hinter dem Focus liegt. Der gegenseitige Abstand dieser beiden Minima ist doppelt so groß, als es die obige Formel verlangt. Die genauere Theorie gibt für die Lage der Minima dieselben Resultate, jedoch für die Maxima genauere Werte.

Es wurde angeführt [10], in welch merkwürdiger Beziehung diese Beugungsbilder zur Scintillation stehen, und mit Aragos eigenen Worten jenes Phänomen beschrieben, welches ich das Arago'sche Scintillationsphänomen genannt habe.

Um die durch die Scintillation hervorgerufenen continuierlichen Veränderungen der Beugungsbilder in Aragos Scintillometer zu erklären, ist es hinreichend, anzunehmen, dass die einfallenden Wellenflächen beständig ihre Gestalt in sehr geringem Grade verändern, wie schon Jamin [19] zu beweisen versucht hatte. Sei beispielsweise das Ocular auf die Ebene *gh* (Fig. 1) eingestellt, wo das Beugungsbild aus einer centralen, dunkeln Scheibe und einem dieselbe umgebenden hellen Ringe besteht, wenn von den lichtschwachen äußeren Ringen abgesehen wird. Mögen ferner die einfallenden, ursprünglich ebenen Lichtwellenflächen in einem gegebenen Momente eine sehr

kleine sphärische Krümmung angenommen haben, die convexe Seite beispielsweise dem Beobachter zugekehrt. Dann wird hiedurch dieselbe Wirkung hervorgebracht, als wenn der Focus des Instrumentes, und mit ihm das ganze, denselben umgebende räumliche Beugungsbild sich dem Ocular um eine sehr kleine Strecke genähert hätte. Die hiedurch hervorgebrachte Veränderung des wahrgenommenen flächenhaften Beugungsbildes ist dieselbe, als wäre das Ocular um einen sehr kleinen Betrag eingeschoben worden, so dass etwa die Ebene *ik* (Fig. 1) deutlich gesehen wird. Es wird demnach in dem betrachteten Momente in der centralen dunkeln Scheibe plötzlich ein leuchtender Punkt auftauchen, wie dies Arago beschreibt [10]. Ändert sich die Krümmung des einfallenden Stückchens der Wellenfläche continuierlich, indem dieselbe immer sehr klein und sphärisch bleibt, so erhält man das Scintillationsphänomen, wie es Arago beschreibt.

22. Es ist nicht anzunehmen, dass die durch die kleine Öffnung des Instrumentes tretenden Theile der Wellenflächen stets sphärisch gekrümmt sind, sie werden vielmehr im allgemeinen zwei verschiedene Hauptkrümmungen haben. In der That zeigt auch das Arago'sche Scintillationsphänomen nicht jene Regelmäßigkeit, die stets sphärischen Wellenflächen entsprechen würde. Man kann aber die Momente, in denen die Krümmung angenähert sphärisch ist, sehr deutlich an der Figur des Beugungsbildes erkennen.

Die Hypothese, dass die von einem scintillierenden Sterne kommenden Lichtwellenflächen mit stets wechselnden kleinen Abweichungen von der ebenen Gestalt behaftet seien, führt in der That zum Arago'schen Scintillationsphänomen. Daraus folgt aber noch nicht strenge, dass diese Hypothese auch richtig sei, es muss vielmehr das Vorhandensein dieser stets wechselnden Deformationen der Wellenflächen durch Beobachtung nachgewiesen werden. Zu diesem Zwecke habe ich die folgenden drei Experimente angestellt.

23. Man richte ein Instrument von großer Öffnung nach einem nicht zu entfernten scintillierenden Lichtpunkte und bedecke das Objectiv mit einem Schirme, in welchem sich kleine Löcher befinden. Durch diese dringen elementare Strahlen-

bündel ein, und man sieht bei verstelltem Oculare im Fernrohre ebensoviele Lichtpunkte, als Öffnungen vorhanden sind. Würde die Scintillation auf Ausscheidungen elementarer Strahlenbündel durch Totalreflexion an dünneren Luftschichten entstehen, wie Montigny angenommen hatte, so müssten im Fernrohre helle Punkte verschwinden und wieder erscheinen; beruht im Gegentheile die Scintillation auf unregelmäßigen Ablenkungen der Strahlen durch Brechung, so müssen im Fernrohre die hellen Punkte um ihre Ruhelagen schwankende Bewegungen ausführen.

Dieser Versuch wurde am 21. Mai 1886 unter freundlicher Mitwirkung des Herrn Dr. Margules zwischen der Centralanstalt für Meteorologie und der Universitäts-Sternwarte Wiens von mir ausgeführt.

Auf dem Thurme der Centralanstalt wurde mittels eines Steinheil'schen Handheliotropen ein intensiver Lichtpunkt hervorgebracht, ein künstlicher Stern, und in der Nordkuppel der Sternwarte mittels des in derselben befindlichen sechszölligen Refractors beobachtet. Das Ocular war eingeschoben und vor dem Objective befand sich ein Schirm mit zehn unregelmäßig angebrachten kreisrunden Öffnungen von je 9 *mm* Durchmesser. Im Fernrohre erschienen ebensoviele kreisrunde, glänzend intensive Bilder. Da das Heliotropenlicht sehr deutlich scintillierte, befanden sich die im Fernrohre sichtbaren Bilder in continuierlicher schwankender Bewegung, indem sie sehr kleine Excursionen um ihre Ruhelagen ausführten, mehrere an Zahl in der Secunde. Die Intensität der kleinen hellen Scheiben änderte sich hiebei kaum merklich, jede derselben blieb während der halbstündigen Beobachtungszeit unausgesetzt brillant leuchtend. Während dieser Zeit wurde an keinem einzigen der Bilder auch nur ein einziger Fall von Interception durch Totalreflexion bemerkt, hingegen an jedem derselben continuierliche unregelmäßige Ablenkungen durch Brechung. Wenn aber Lichtstrahlen von einem Punkte ausgehen und an beliebigen Flächen Brechungen erleiden, so behalten sie nach dem Gergonne'schen Theorem gleichwohl die Eigenschaft, Normalflächen zu besitzen. Es hatten also auf dem Wege zwischen der Centralanstalt und der Sternwarte die

Lichtwellenflächen thatsächlich sehr kleine, unregelmäßige Verbiegungen durch Brechung erfahren.

24. Bei einem zweiten Versuche wurde eine nicht terrestrische Lichtquelle, der Sirius, benützt. Vor dem Objective des zwölfzölligen Refractors der Wiener Universitäts-Sternwarte wurde ein Schirm angebracht, an welchem sich drei in gerader Linie liegende Öffnungen von je 3·2 *cm* Durchmesser befanden, eine in der Mitte des Objectivs, die beiden anderen am Rande desselben. Wurde das Rohr nach dem Sirius gerichtet und das Ocular etwas eingeschoben, so zeigten sich nahe aneinander drei kreisrunde Bilder des Sternes, die sich in beständiger relativer Bewegung befanden, so dass sie die Ecken eines Dreieckes von vollständig variabler Gestalt bildeten. Die Erscheinung glich jener, die man wahrnimmt, wenn auf dem Grunde eines Bassins drei weiße Kiesel in gerader Linie nahe nebeneinander liegen und die Oberfläche des Wassers leicht bewegt ist.

25. Bei einem dritten Versuche wurden die Erscheinungen in Aragos Scintillometer [10] auf künstliche Weise im Laboratorium hervorgebracht. Der Stern wurde ersetzt durch ein sehr kleines Sonnenbildchen und auf dieses in größerer Entfernung ein Arago'sches Scintillometer gerichtet, dessen Ocular entsprechend eingeschoben war. Wurde nun eine Spiegelglasplatte vor dem Objective des Scintillometers hin- und hergeschoben, so genügten die stets wechselnden, durch die kleinen Unregelmäßigkeiten der Platte verursachten Ablenkungen der Strahlen, um dieselben Erscheinungen hervorzubringen, wie ein scintillierender Stern. Die Wirkung der Atmosphäre ist hier durch die in Bewegung gesetzte Spiegelglasplatte ersetzt.

26. Die beiden ersten Versuche beweisen, dass die besprochenen stets wechselnden Deformationen der Lichtwellenflächen wirklich in der Atmosphäre vorhanden sind.

27. Ich habe ferner gezeigt (24), wie man durch eine Modification des Arago'schen Scintillometers [10] die durch die wechselnden Ungleichheiten der Atmosphäre hervorgebrachten wechselnden Krümmungen der von den Fixsternen kommenden, ursprünglich ebenen Lichtwellenflächen auch messen könne.

Man richte ein Arago'sches Scintillometer auf einen scintillierenden Fixstern und messe den Spielraum $\alpha$, innerhalb dessen das Ocular verschoben werden kann, ohne dass das Arago'sche Phänomen, d. i. der Wechsel zwischen hell und dunkel im Centrum der Erscheinung, aufhört wahrgenommen zu werden. Man hat dann für die größten Krümmungshalbmesser der Wellenflächen während der Zeit der Beobachtung:

$$A = \frac{2p^2}{\alpha},$$

($A$ Krümmungshalbmesser, $p$ Brennweite des Fernrohres).

28. Ich habe die letztere Formel zur Construction eines Scintillometers benützt. Bringt man vor dem Objective eines astronomischen Fernrohres von $1^1/_2$ bis 2 *m* Brennweite einen Schirm mit kreisrunder Öffnung an, so dass die scheinbare Größe des Radius der Öffnung, bezogen auf den Focus, ungefähr gleich 0·01 ist, so wird man das Arago'sche Phänomen [10] deutlich wahrnehmen. Befindet sich nun am Auszuge des Fernrohres eine Längstheilung, so können die Verschiebungen des Oculars längs der Axe des Fernrohres gemessen werden. Dies vorausgesetzt, richte man das Fernrohr auf einen scintillierenden Stern und stelle das Ocular zunächst auf den Focus ein. Hierauf schiebe man das Ocular ein, bis das Centrum constant dunkel erscheint, fahre fort langsam einzuschieben, bis man an eine Stelle gelangt, wo zeitweilig im Centrum ein heller Punkt auftaucht, und mache an dieser Stelle die erste Ablesung am Oculare. Bei fortgesetztem Einschieben gelangt man an Stellen, wo das Centrum öfter hell als dunkel ist und sodann an eine Grenze, an welcher es constant hell erscheint. Hier mache man die zweite Ablesung. Die Differenz der beiden Ablesungen gibt die Größe $\alpha$. Dividiert man diese Größe in das doppelte Quadrat der Brennweite des Fernrohres, so hat man den Radius der größten der Beobachtungszeit entsprechenden Krümmung der einfallenden Wellenflächen. Dieses Scintillometer hat vor dem Arago'schen den wesentlichen Vorzug, dass die erhaltenen Zahlen eine bestimmte physikalische Bedeutung haben, sie messen die durch die unregelmäßigen Brechungen in der

Atmosphäre entstandenen Krümmungen der einfallenden Wellenflächen des Lichtes. Diese, durch die stets wechselnden Ungleichheiten der Atmosphäre (Schlieren) durch Brechung bewirkten Aus- und Einbiegungen der von den Fixsternen kommenden, ursprünglich ebenen Lichtwellenflächen entsprachen bei zahlreichen von mir angestellten Messungen Krümmungsradien, deren kleinste Werte während der Beobachtungszeit 1817 bis 19380, und im Mittel 4733*m* betrugen.

Ich habe ferner angegeben, wie ein solches Scintillometer eingerichtet werden könne, um leicht transportabel und mit mäßigen Kosten herstellbar zu werden. Derlei Scintillometer sind in vorzüglicher Weise von Steinheil in München hergestellt worden (19).

29. Es ist klar, dass zur Bestimmung der Gestalt der einfallenden Lichtwellenflächen außer der Messung der Krümmungen noch eine zweite Messung nöthig ist, z. B. die Messung der Erstreckungen der concaven und convexen Theile der Wellenflächen auf diesen selbst, wobei es sich selbstverständlich auch hier nur um die Größenordnung dieser Erstreckungen handeln kann.

Zu diesem Zwecke habe ich ein weiteres Scintillometer construiert. Man richte ein Fernrohr nach einem scintillierenden Sterne, schiebe das Ocular ein, bis der Stern als eine große Scheibe erscheint, und bringe vor das Objectiv einen Schirm mit geradlinig spaltenförmiger Öffnung. Hiedurch wird das Bild des Sternes streifenförmig. Die Scintillation verursacht nun Abweichungen von der Geradlinigkeit dieses Bildes, welches stets wechselnde Aus- und Einbiegungen zeigt, die sich im allgemeinen längs des streifenförmigen Bildes fortbewegen, das in jedem Momente eine unregelmäßige Wellenlinie von geringen Elongationen bildet. Zählt man, wie viel Wellenberge und Thäler das streifenförmige Bild in einem gegebenen Momente zeigt, so hat man die diesem Momente entsprechende Zahl der Aus- und Einbiegungen der einfallenden Lichtwellenflächen längs der Spaltöffnung. Ich habe in dieser Richtung nur wenige Beobachtungen angestellt mittels des 12zölligen Refractors der

Wiener Universitäts-Sternwarte. Die Erstreckungen der concaven oder convexen Theile betrugen beispielsweise 1 *dm*.

30. Nachdem in der beschriebenen Weise einerseits die Krümmungen, anderseits die Erstreckungen der gekrümmten Theile der einfallenden Wellenflächen der Größenordnung nach bestimmt waren, konnte hieraus auch die Tiefe einer Einbiegung bestimmt werden. So zeigte sich, dass die Tiefe einer Einbiegung sehr gering, beispielsweise mit einer Lichtwellenlänge vergleichbar ist.

31. Es ergab sich also das Resultat: Die ursprünglich ebenen, von den Fixsternen kommenden Wellenflächen gewinnen beim Durchgange durch die Atmosphäre unregelmäßige und mit der Bewegung der Luft stets wechselnde Aus- und Einbiegungen. Die Höhe oder Tiefe einer solchen Verkrümmung ist im allgemeinen von der Größenordnung einer Lichtwellenlänge, der Durchmesser oder die Erstreckung einer Concavität oder Convexität längs der Wellenfläche von der Größenordnung eines Decimeters, und der Minimalwert des Krümmungsradius kann beispielsweise 4000 *m* betragen.

Nachdem dieser Satz erwiesen war, konnten aus demselben Consequenzen gezogen und mit den Beobachtungsthatsachen verglichen werden (24, 25). Die Resultate sind im folgenden in Kürze angegeben.

32. So gering die Krümmungen der Wellenflächen sind, so muss doch während der Fortpflanzung hinter einem nach der Fortpflanzungsrichtung concaven Theile der Wellenfläche eine Sammlung und hinter einem convexen eine Zerstreuung der Strahlen eintreten, und folglich während der Fortpflanzung der Wellenfläche längs dieser die Vertheilung der Intensitäten eine ungleichförmige werden.

Es habe beispielsweise ein Theil einer Wellenfläche eine Krümmung von +6000 *m* Radius und ein benachbarter Theil eine solche von —6000 *m*, wie dies den obigen Zahlen [31] entspricht, und sei auf dieser Wellenfläche die Strahlendichte oder Intensität überall dieselbe; es pflanze sich ferner diese Wellenfläche um 1000 *m* ungestört fort, und seien $J$ die

Intensität der Wellenfläche in ihrer ersten Lage, $J'$ und $J''$ die Intensitäten längs dem concaven und dem convexen Theile der Wellenfläche in ihrer zweiten Lage, nachdem sie sich um 1000 *m* fortgepflanzt hat, dann ergibt sich, die Krümmungen als sphärisch vorausgesetzt, nahezu $J' : J'' = 2 : 1$.

Es werden sich also auf der fortgepflanzten Wellenfläche zwei benachbarte Stellen finden, deren Intensitäten sich wie 2 : 1 verhalten.

Die von einem Fixsterne durch die Atmosphäre nach der Erdoberfläche gelangenden Lichtwellenflächen müssen sonach bei einem Zustande der Atmosphäre, welcher dem Entstehen der Scintillation günstig ist, aus abwechselnd helleren und dunkleren Theilen bestehen; und es muss die Vertheilung der Intensitäten längs den Wellenflächen, wie der Zustand der Atmosphäre, einem beständigen und unregelmäßigen Wechsel unterliegen.

Die Erscheinungen bestätigen diese Consequenz des Satzes [31] durch das Keppler'sche Phänomen.

33. Eine andere Consequenz des Satzes [31] ist die folgende. Da die Strahlen stets auf den Wellenflächen senkrecht stehen, so haben die Krümmungen der Wellenflächen nothwendig Ablenkungen der Strahlen zur Folge. Hat beispielsweise, wie dies dem Satze [31] entspricht, ein annähernd kreisförmig begrenztes Stück der Wellenfläche eine annähernd sphärische Gestalt von 4000 *m* Krümmungsradius, und beträgt der Durchmesser der kreisförmigen Begrenzung, wie dies ebenfalls dem Satze [31] entspricht, 1 *dm*, so ergibt sich hieraus für die Winkelamplitude der oscillatorischen Bewegung der Lichtstrahlen ein mittlerer Wert von nahezu 6 Secunden. Die mir bekannt gewordenen directen Messungen anderer Forscher ergaben für diese Winkelamplitude: 5—$7^1/_2$ Sec., 5—6 Sec., 4 Sec., 4 Sec. Die Übereinstimmung ist eine befriedigende.

Betrachten wir also das Licht eines Fixsternes, nachdem es durch die Atmosphäre gegangen ist, so sehen wir: Die Lichtwellenflächen weichen kaum merklich von der

ebenen Gestalt ab, die Strahlen kaum merklich vom Parallelismus, allein die Lichtwellenflächen bestehen aus dicht nebeneinander liegenden helleren und dunkleren Theilen, der Querschnitt eines dicken Strahlenbündels zeigt an manchen Stellen viele, an anderen wenige Strahlendurchschnitte. Diese Vertheilung der Intensitäten längs der Wellenfläche, sowie die Verdichtungen und Verdünnungen der Strahlenbündel unterliegen überdies mit dem Zustande der Atmosphäre einem beständigen und unregelmäßigen Wechsel.

34. Das Keppler'sche Phänomen [32] ist im allgemeinen so lichtschwach, dass es wohl eines Keppler bedurfte, um auf dasselbe aufmerksam zu werden. Da aber die von einem scintillierenden Fixsterne kommenden Strahlen merklich untereinander parallel durch die Atmosphäre zur Erdoberfläche gelangen [33], so gibt es ein einfaches Mittel, dieses lichtschwache Phänomen beliebig lichtstark zu machen. Statt die Strahlen sich auf eine weiße Wand projicieren zu lassen, sammle man sie mittels einer großen achromatischen Linse und betrachte einen Querschnitt *a* oder *b* (Fig. 2) des durch die Linse gegangenen Bündels durch eine Lupe. Das Phänomen muss dann in demselben Maße lichtstärker erscheinen, als sich der Querschnitt des Bündels verkleinert hat.

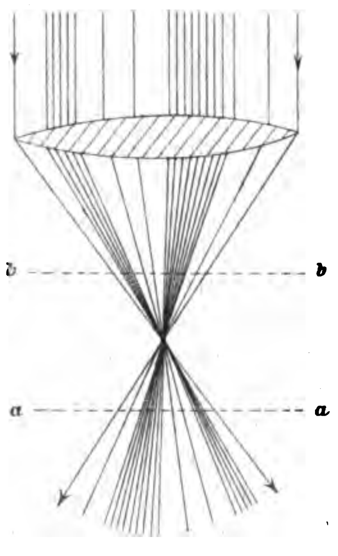


Fig. 2.

Steht überdies der Stern tief, so müssen [14] die Helligkeitsschwankungen für die einzelnen Farben, aus welchen das Licht des Sternes besteht, unabhängig von einander stattfinden, es müssen in jedem Momente die verschiedenen Stellen des

Phänomens nicht nur ungleich hell, sondern auch ungleich gefärbt erscheinen. Hier haben wir das Marius'sche Phänomen [8]. Projiciert man die helleren und dunkleren Theile des Marius'schen Phänomens längs den Lichtstrahlen auf das Objectiv des Fernrohres, so ergibt sich das Resultat, dass die Ausdehnung der Lichtmaxima und Minima des Keppler'schen Phänomens im allgemeinen nach Centimetern oder Decimetern misst.

35. Eine weitere Consequenz aus dem Satze [31] führte mich zu einer weiteren fundamentalen Beobachtungsthatsache. Ist das in die Öffnung des Instrumentes gelangende Strahlenbündel so dünn, dass die Ablenkungen der einzelnen Strahlen des Bündels in jedem Augenblicke als identisch angesehen werden können, beobachtet man beispielsweise einen Stern mit freiem Auge, so resultiert eine zitternde Bewegung des Sternes von beispielsweise 6″ Amplitude [33].

Ist jedoch das in die Öffnung des Instrumentes gelangende Strahlenbündel so dick, dass sein Querschnitt in jedem Augenblicke eine größere Zahl Aus- und Einbiegungen enthält [31], wie dies z. B. bei der Beobachtung durch ein 12zölliges Instrument der Fall ist, so lässt sich das dicke Strahlenbündel in jedem Momente in dünne Strahlenbündel zerlegt denken, welche sich im allgemeinen in sehr verschiedenen, ja entgegengesetzten Phasen ihrer Schwankungen befinden, so dass gleichsam das Bild des Sternes gleichzeitig nach allen Richtungen abgelenkt erscheinen muss: Durch ein Instrument mit großer Öffnung betrachtet, muss das Bild eines scintillierenden Sternes vergrößert und unsicher begrenzt erscheinen, ohne irgend eine zitternde Bewegung zu zeigen.

Das ist eben das Newton'sche Phänomen [6].

36. Aus [32] geht unmittelbar hervor: Die Helligkeit des Bildes eines scintillierenden Sternes muss bei Beobachtung durch ein Instrument von hinreichend kleiner Öffnung oder bei Beobachtung mit freiem Auge einem continuierlichen und unregelmäßigen Wechsel unterliegen. Dass dies wirklich stattfindet, ist allgemein bekannt.

37. Als weitere Consequenzen aus [31] und [14] habe ich die folgenden Sätze abgeleitet:

Die Lebhaftigkeit der Helligkeitsschwankungen eines Sternes muss umso beträchtlicher sein, je kleiner die Öffnung des Instrumentes ist.

Geht man von Instrumenten mit kleineren Öffnungen zu solchen mit größeren über, so muss das Marius'sche Phänomen stets sichtbar bleiben, das Nicholson'sche [9] jedoch bei einer gewissen Größe der Öffnung verschwinden.

Tiefstehende Sterne müssen farbig scintillieren, hochstehende farblos.

Die Planeten müssen eine angenähert gleichmäßige mittlere Helligkeit zeigen.

Alle diese Consequenzen sind durch die Beobachtung bestätigt.

Aus dem Montigny'schen Principe [11, 14] und meinen Vermessungen der Deformationen der Wellenflächen [31] konnte ich weiter folgern:

38. Es muss das Keppler'sche Phänomen [2] auch auftreten, wenn sich der sichtbare Theil der Sonne, wie bei den totalen Finsternissen, auf einen Punkt reduciert. In der That beobachtet man bei den Sonnenfinsternissen in den Augenblicken, wo der sichtbare Theil der Sonnenscheibe punktförmig ist, das Phänomen der »fliegenden Schatten«. Die Flecken bewegen sich im allgemeinen in einer bestimmten Richtung. Dasselbe kann man im Marius'schen Phänomen [8] beobachten [15], das im wesentlichen mit dem Keppler'schen identisch ist [34]. Die Richtung der Bewegung steht in Beziehung zur Windrichtung, wie beim Marius'schen Phänomen [10]. Die Flecken werden bei manchen Sonnenfinsternissen als farblos, bei anderen als farbig bezeichnet. Ebenso sind die Flecken im Marius'schen Phänomen zuweilen farblos, zuweilen farbig: farblos bei hochstehenden, farbig bei tiefstehenden Sternen. Dasselbe muss also auch bei den Sonnenfinsternissen zutreffen. Ich finde in einer Abhandlung Aragos: »Über Sonnenfinsternisse« in Bezug auf die Finsternis vom Juli 1842: »Diese Flecken waren theils roth, theils gelb, blau und weiß.

Die Kinder liefen ihnen nach und suchten sie mit den Händen zu fangen.« In der That befand sich zur Zeit der Beobachtung die Sonne in der Nähe des Horizontes. Anderseits finde ich in den Berichten (20) über die Sonnenfinsternis vom 18. Juli 1860, dass die Fransen »vollkommen farblos« waren, was mit dem zur Beobachtungszeit hohen Stande der Sonne übereinstimmt. Schließlich ist noch die Größe der Flecken zu beachten. Die Ausdehnung der Lichtmaxima und Minima des Keppler'schen Phänomens ist von der Größenordnung eines Centimeters oder Decimeters [34]. Von derselben Größenordnung muss auch die Ausdehnung der Lichtmaxima und Minima des Phänomens der fliegenden Schatten sein. Nun finde ich in den Berichten (20) über die Finsternis von 1860, dass »die Fransen ...... anfangs in Entfernungen von 1 *dm*, später in kleinerer Entfernung......... aufeinandergefolgt sind«. Bergsma (21) berichtete nach der totalen Sonnenfinsternis vom 12. December 1871 über die fliegenden Schatten. Es wurden Streifen von 5 bis 6 *cm* Breite beobachtet, welche in hellen Zwischenräumen von $1^1/_2$ bis 3 *dm* Breite aufeinanderfolgten. In Bezug auf die amerikanischen Beobachtungen der totalen Sonnenfinsternis vom 28. Mai 1900 berichtet Herr S. P. Langley von den in Rede stehenden Streifen: »Ihre Breite und ihr Abstand von einander betrug im Durchschnitte der Schätzungen etwa 5 Zoll« (30). Herr Moye beobachtete in Elche eine Breite von 0·08 *m* bis 0·10 *m* und Zwischenräume von 0·30 *m* bis 0·40 *m*. Die Streifen bewegten sich über den ebenen Boden mit der Geschwindigkeit eines schreitenden Menschen.

Man sieht, die durchschnittlich beobachtete Erstreckung der Maxima und Minima stimmt hinreichend mit jenen der Maxima und Minima in der Marius'schen Scheibe überein, wenn man die letzteren längs den Strahlen auf das Objectiv projiciert. Noch ist zu bemerken, dass schon Arago (22), Fearnley (22), Pinaud und Boisgiraud dieses Phänomen der Scintillation zugeschrieben hatten.

39. Ich legte mir ferner die Frage vor: »Muss, was man bei einer totalen Sonnenfinsternis beobachtet, wenn sich der sichtbare Theil der Sonne auf einen Punkt reduciert hat, nicht auch bei der auf- und unter-

gehenden Sonne bemerkt werden? Und ich fand in der That eine einschlägige Beobachtung Dufours (23) an der aufgehenden Sonne: »Überdies sah ich... im Augenblicke, da der erste Strahl der Sonne erschien, dies Gestirn funkeln wie ein Stern erster Größe, und zugleich gewahrte ich ein oder zwei Secunden lang auf dem Boden meines Zimmers sich eine Art abwechselnd dunkler und heller Wellen bewegen, welche bekanntlich bei totalen Sonnenfinsternissen einige Secunden sowohl vor als nach der Totalität der Finsternis zum Vorschein kommen...«

In besonderer Schönheit konnte ich dieses Phänomen der fliegenden Schatten an den Ufern des Gardasees beobachten, wenn nachts die Scheinwerfer der Finanzorgane ihre kräftigen Lichtkegel meilenweit über den See warfen. Lag das Licht auf der Wand eines Gebäudes, so konnte man auf dem beleuchteten Theile der Wand abwechselnd dunkle und helle Wellen sich in bestimmter Richtung fortbewegen sehen. Die Größe und Geschwindigkeit der Wellen stimmte durchaus mit den Beobachtungen überein, wie sie bei den totalen Sonnenfinsternissen gemacht werden.

Alle diese Beobachtungsthatsachen ergeben sich qualitativ und quantitativ aus dem von mir erwiesenen Satze [31] in Verbindung mit dem ebenfalls erwiesenen Montigny'schen Principe [11, 14], und es ist mir keine Beobachtungsthatsache bekannt, die mit diesen Sätzen im Widerspruche stünde.

Es blieb also zur vollständigen Erklärung der Scintillation nur noch die Frage zu beantworten, wie die unregelmäßigen Ablenkungen der Strahlen entstehen, auf denen die Scintillation beruht.

40. Von besonderer Bedeutung waren folglich meine Versuche über die terrestrische Scintillation (25), weil man da weiß, was auf der Strecke, die von den Strahlen durchmessen wird, vorgeht. Man kann, wie ich gezeigt habe, am Tage und mit künstlichen Lichtquellen alle Erscheinungen der Scintillation der Sterne beobachten, ja besser als an diesen selbst, da die Lichtquellen intensiver und der Zustand der Atmosphäre günstiger sein können. Als

Lichtquelle bei kleinen Distanzen ist das Sonnenbildchen eines Convexspiegels zu verwenden, bei großen Distanzen das Heliotropenlicht (Steinheil'scher Handheliotrop). Dass entfernte terrestrische Lichtpunkte scintillieren, ist zu allen Zeiten bemerkt worden. Eine scintilloskopische Beobachtung an dem Sonnenbildchen eines entfernten Thurmknaufes hat zuerst Arago gemacht. Ich selbst habe viele Versuche über terrestrische Scintillation angestellt. Weit besser, als bei wirklichen Sternen, konnte ich an künstlichen Sternen, welche am Tage durch Reflexion der Sonnenstrahlen am Spiegel des Heliotropen hervorgebracht wurden, sämmtliche Erscheinungen der Scintillation wahrnehmen, mit Ausnahme der Farbenerscheinungen. Um auch diese auf terrestrischem Wege zu erhalten, vergrößerte ich die Distanz auf $1^1/_2$ geographische Meilen, wo dann die Farbenerscheinungen in aller Deutlichkeit in der Marius'schen Scheibe, d. i. in dem durch Einschieben des Oculars erweiterten Bilde der Lichtquelle auftraten. Bei Verkürzung der Distanz zeigten sich die Erscheinungen in Aragos Scintillometer noch bei einer Entfernung von 500 *m* und das Marius'sche Phänomen noch bei einer Entfernung von 20 Schritten über Wiesengrund.

Hier lag die wahre Ursache der Scintillation zutage, ein Durcheinanderfließen kälterer und wärmerer Luftströmchen, oder das Vorhandensein beweglicher Luftschlieren [7]. Blickt man an einem erhitzten Gegenstande vorbei, so zeigen die Umrisse der betrachteten Gegenstände eine wellenförmige Bewegung. Diese ist eine Folge von Brechungen, welche die Strahlen beim Durchgange durch eine Menge durcheinanderfließender kalter und warmer Luftströmchen erfahren, wie u. a. Montigny (9) näher ausgeführt hat. Es bedarf jedoch zur Hervorbringung dieser Erscheinung einer kräftigen localen Wärmequelle nicht, sobald nur die Strahlen eine hinlänglich große Wegstrecke in der Luft zurücklegen. So erscheinen die Contouren entfernter Gebirge durch ein Fernrohr in wellenartiger Bewegung, und ebenso die Ränder der Sonne und des Mondes. Man kann hieraus schließen, dass jenes Durcheinanderfließen kalter und warmer Luftströmchen ein habitueller Zustand der Atmosphäre ist. So verschieden

hievon die Erscheinung des Sternfunkelns zu sein scheint, beruht sie doch genau auf derselben Ursache. Die Verschiedenheit der Wirkung rührt einzig daher, dass man es im ersteren Falle mit ausgedehnten, und im letzteren mit punktförmigen Lichtquellen zu thun hat, wie im Vorstehenden ausgeführt ist.

41. Da schließlich die Erscheinungen der Scintillation durch die unregelmäßigen Brechungen in der Atmosphäre, oder durch das Zusammenwirken dieser mit der regelmäßigen atmosphärischen Strahlendispersion entstehen, lassen sich die Erscheinungen der Scintillation auch mittels einer Fensterglastafel und eines Prisma nachahmen. Die Fensterglastafel (eventuell Spiegelglasplatte) bringt die unregelmäßigen Ablenkungen hervor, das Prisma die regelmäßige Dispersion, und die Wirkung des Windes wird durch Bewegung der Glastafel hervorgebracht. So konnte ich mit diesen einfachen Vorrichtungen im Laboratorium die wellenförmige Bewegung am Rande der Sonne, das Phänomen der fliegenden Schatten, die Helligkeits- und Farbenwechsel der Sterne, die Erscheinungen in der Marius'schen Scheibe, die Erscheinungen in Aragos und Montignys Scintillometer u. s. w. demonstrieren (25).

## III.

Im folgenden soll die neuere Literatur der Scintillationserscheinungen, soweit mir dieselbe zugänglich war, einer Besprechung unterzogen werden.

42. In seiner Abhandlung: »La direction des vents supérieurs déterminée par les ondolations du bord des astres« (26) beschäftigt sich Herr Ventosa mit den Beziehungen zwischen der Windrichtung und der Wellenbewegung des Sonnenrandes. Herr Ventosa richtet ein Fernrohr nach dem Sonnenrande, gewahrt daselbst eine Wellenbewegung in bestimmter Richtung und zieht das Ocular von der Einstellung auf den Brennpunkt so lange aus, bis er die Wellen am deutlichsten sieht. Die Wellen sollen dann an jener Stelle der Atmosphäre entstehen, auf welche das Fernrohr eingestellt ist, und der Wind daselbst eine Richtung haben, die sich der wahrgenommenen Wellenbewegung entnehmen lässt.

Es handelt sich hier um zweierlei: die Beziehung der Wellenbewegung des Sonnenrandes zur Windrichtung, und die Methode zur Bestimmung der Höhe des Windes.

Was den ersten Punkt anlangt, erinnere ich an meine einschlägige Mittheilung vom Jahre 1887 (25), deren Inhalt ich hier in Kürze anführen will.

Richtet man ein Fernrohr von nicht zu großer Öffnung nach dem Sonnenrande, so wird man denselben fast stets in wellenförmiger Bewegung finden. Auch wird man bald erkennen, dass die Bewegung in einer bestimmten Richtung erfolgt. Man wird am Rande der Sonnenscheibe stets zwei diametral einander gegenüberliegende Punkte *a*, *b* finden, an welchen keine Bewegungsrichtung zu erkennen ist, und zwei um 90° abweichende Punkte *c*, *d*, an welchen die Richtung der Bewegung am deutlichsten zu erkennen ist. Man wird ferner finden, dass die Bewegungen bei *c* und *d* in derselben Richtung vor sich gehen. Diese Richtung stimmte, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht, auffallend mit der Windrichtung überein.

| | Windrichtung in Wien bestimmt aus | |
|---|---|---|
| | der Wellenbewegung des Sonnenrandes | der Stellung der Windfahne |
| 31. März 1886 .. | SE | S |
| 23. April .. | S | SSE |
| 3. » .. | SE | SE |
| 25. » .. | SSE | SE |
| 26. » .. | SSE | SSE |
| 8. Mai .. | SE | W |
| 10. » .. | NW oder E | E |
| 14. » .. | SSE | S |
| 19. » .. | (Mond) S | S |
| 26. » .. | SE | SE |
| 11. Juni .. | NE | NE |
| 23. » .. | W | W |
| 24. » .. | NW | W |

Was zweitens Herrn Ventosas Methode der Bestimmung der Windrichtung in verschiedenen Höhen anlangt, so beruht

dieselbe offenbar auf den beiden Voraussetzungen, dass der Erregungsort der wahrgenommenen Wellen sich an einer bestimmten Stelle der Atmosphäre befindet, und dass diese Stelle mit dem Orte zusammenfällt, auf welchen das Fernrohr eingestellt ist. Was die erste Voraussetzung betrifft, nach welcher die Erregung an einer bestimmten Stelle erfolgen soll, so ist dieselbe schwer vereinbar mit meinen Versuchen über terrestrische Scintillation [40]. Richtet man das Fernrohr nach dem Sonnenrande, wo der Strahl die ganze Atmosphäre zu durchsetzen hat, so gewahrt man das Scintillationsphänomen der Wellenbewegung. Dasselbe Phänomen gewahrt man auch noch, wenn man das Fernrohr auf die Contouren sehr entfernter Gebirge einstellt, wo also ein großer Theil der Atmosphäre ausgeschaltet ist. Als ich unter Benützung eines künstlichen, mittels eines Heliotropen hergestellten Sternes die Luftstrecke auf $1^1/_2$ Meilen reduciert hatte, zeigte das durch Verschiebung des Oculars erweiterte Bild des künstlichen Sternes, die Marius'sche Scheibe [8], sowohl die Helligkeits-, als die Farbenfluctuationen. Bei weiterer Verkürzung der Distanz auf 500 *m* und unter Benützung des Sonnenbildchens in einem Convexspiegel als Lichtquelle konnten im Arago'schen Scintillometer die charakteristischen Scintillationserscheinungen wahrgenommen werden. Noch bei Reduction der Entfernung auf 20 Schritte über Wiesengrund zeigten sich Spuren von Helligkeitsfluctuationen im Marius'schen Scintillometer [10].

Diese Beobachtungen weisen deutlich darauf hin, dass der Ort der Erregung der Scintillationserscheinungen, also auch der Wellen am Sonnenrande, nicht an eine bestimmte Stelle der Atmosphäre zu versetzen ist, sondern in die ganze Strecke, die der Lichtstrahl in der Atmosphäre durchmisst. Indem die ursprünglich ebenen Lichtwellenflächen durch die Atmosphäre gehen, erfahren sie daselbst durch unregelmäßige Brechungen beständig kleine Verbiegungen, wie Jamin (17) zuerst erkannt hat; daher erfahren die Strahlen auch beständig kleine Ablenkungen, sie beschreiben eine Art Wellenlinie.

Was die zweite Voraussetzung anlangt, nach welcher sich die Stelle der Erregung der Scintillation wie ein leuchtender Körper verhalten soll, auf den man ein Fernrohr einstellen

kann, so lässt sich dieser Voraussetzung nur durch die Annahme genügen, dass die betreffende Stelle der Atmosphäre in so beträchtlichem Grade ablenkend auf die Strahlen wirkt, als nöthig ist, um in unmittelbarer Nähe ein System von Brennlinien hervorzubringen. Diese Annahme erscheint nun wieder schwer verträglich mit meinen Messungen [28], nach welchen nach dem Durchgange durch die Atmosphäre die Verkrümmungen der Wellenflächen Krümmungshalbmesser zeigten, deren kleinste, der Beobachtungszeit entsprechende Werte zwischen 1817 *m* und 19380 *m* lagen. Wollte man sich auch mit einer solchen Annäherung begnügen, so käme man doch über den Umstand nicht hinaus, dass die Strahlen auf der Strecke zwischen dem anvisierten Punkte und dem Fernrohre beständig neue Ablenkungen erleiden. Übrigens habe ich eine Beobachtung mitgetheilt (27), welche die Unrichtigkeit der in Rede stehenden Methode unmittelbar erkennen lässt.

In einer späteren Publication (28) hat Ventosa neue Versuche für die Richtigkeit seiner Methode beschrieben, die ebenfalls nicht beweisend sind, wie ich a. a. O. eingehend nachgewiesen habe (29). Zugleich berichtete ich daselbst über eine Reihe von mir angestellter Versuche über Scintillation, die mit der allgemeinen Erklärung der Scintillation, wie sie oben gegeben ist, bestens übereinstimmen.

Richtet man ein Fernrohr nach einer entfernten Fläche, die sich aus vielen abwechselnd hellen und dunklen Theilen zusammensetzt (z. B. nach einer entfernten, von der Sonne beschienenen Baumgruppe), und befindet sich zwischen Fernrohr und Object ein Scintillationserreger (z. B. eine unter den wirksamen Strahlen befindliche Weingeistlampe), so wird man auf der betrachteten Fläche, wenn das Fernrohr auf dieselbe eingestellt ist, ein Flimmern wahrnehmen. Verstellt man das Ocular, so nimmt die Bewegung sofort eine bestimmte Richtung an, es gewinnt den Anschein, als flösse ein Bächlein klaren Wassers in bestimmter Richtung über die Baumkronen hinweg. Die vielen Glanzpunkte der Blätter eines Baumes im Sonnenlichte wirken wie ebensoviele Fixsterne und zeigen bei verstelltem Oculare in ihren zu kleinen Scheiben erweiterten

Bildern dieselben Fluctuationen mit bestimmter Bewegungsrichtung, welche, wie oben erwähnt [10], schon Arago bei den Fixsternen in der Marius'schen Scheibe [8] beobachtete. Indem aber hier die vielen nebeneinander liegenden Bilder sich zu einem Gesammtbilde vereinigen, gewinnt das Phänomen eine flächenhafte Ausdehnung und dadurch eine ungemeine Deutlichkeit. Hiebei zeigt das Phänomen zwei Maxima der Deutlichkeit bei zwei Einstellungen des Oculars auf Punkte, von denen der eine etwas vor, der andere etwas hinter der Bildebene liegt, und beim Durchgange durch dieselbe kehrt sich die Bewegungsrichtung der Fluctuation um. Die Erklärung ergibt sich leicht aus der allgemeinen Erklärung der Scintillation. An Stelle der Weingeistlampe kann natürlich irgend ein anderer Scintillationserreger gesetzt werden, beispielsweise eine rotierende Scheibe aus Fensterglas. Dieselben Erscheinungen müssen auch wahrgenommen werden, wenn die Lichtquelle sich auf einen Lichtpunkt reduciert, z. B das Sonnenbildchen in einem Convexspiegel von kurzer Brennweite. Ersetzt man das Sonnenbildchen durch einen Fixstern, die Glasscheibe durch die Atmosphäre und die Bewegung der Scheibe durch die atmosphärische Strömung, so hat man das Marius'sche Phänomen [8, 10], wie es sich bei hochstehenden Sternen zeigt.

Die Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit und Richtung der Fluctuationen von der Stellung des Oculars, wie sich dieselbe bei den eben beschriebenen Versuchen zeigte, ist leicht begreiflich. Schreitet in dem Raume zwischen einer punktförmigen Lichtquelle und dem Objectiv des Fernrohres eine leichte Störung durch das einfallende Lichtbündel beispielsweise in der Richtung von unten nach oben fort, so wird dasselbe auch in dem Raume zwischen dem Objectiv und dem Bilde des Lichtpunktes geschehen, jedoch mit einer Geschwindigkeit, die überall dem Durchmesser des Querschnittes des Bündels proportional ist. Stellt man also das Ocular auf immer kleinere Querschnitte des Bündels ein, so wird sich die wahrgenommene Strömungsgeschwindigkeit beständig verringern und bei Einstellung auf das Bild der Lichtquelle gleich Null werden. Analoges gilt für den Raum jenseits des Bildes. Da

ferner ein Strahl, der sich zwischen Objectiv und Bild im Strahlenbündel beispielsweise oben befindet, nach der Kreuzung der Strahlen sich unten befinden wird, muss sich beim Durchgange durch das Bild der Lichtquelle die Strömungsrichtung umkehren.

Diese Umkehrung der Strömungsrichtung konnte ich am Sirius bei günstigen atmosphärischen Strömungsverhältnissen und Benützung eines Instrumentes von 9 *cm* Öffnungsdurchmesser in aller Deutlichkeit wahrnehmen. Noch besser gelang der Versuch, als ich dasselbe Instrument nach einer entfernten, von der Sonne beschienenen Almwiese richtete.

Ebenso verständlich ist die Entstehung der beiden Maxima der Deutlichkeit, wenn man beachtet, dass die durch den Scintillationserreger hervorgebrachten Ablenkungen der Strahlen als sehr klein zu denken sind, beziehungsweise der Versuch so einzurichten ist, dass sie sehr klein seien; wie denn diese Ablenkungen bei Strahlen, die von einem Fixsterne kommen, nur einige wenige Secunden betragen [33]. Dementsprechend werden in jedem gegebenen Momente die Lichtbilder, die den Einstellungen des Oculars auf verschiedene Querschnitte des Lichtbündels entsprechen, in erster Annäherung untereinander ähnlich, und umso intensiver und zugleich kleiner sein müssen, je näher der betrachtete Querschnitt dem punktförmigen Bilde der Lichtquelle liegt. Die Deutlichkeit, mit der sich das Phänomen zeigt, hängt von verschiedenen Umständen ab. Sei beispielsweise das Ocular auf einen Querschnitt des Strahlenbündels eingestellt, der zwischen Objectiv und Bildpunkt liegt. Der betrachtete Querschnitt darf dem Bildpunkte nicht zu nahe liegen, da dann das Bild zu sehr verkleinert erscheint, um die Maxima und Minima der Helligkeit deutlich unterscheiden zu lassen, und die Strömungsgeschwindigkeit zu gering ist, um einen lebhaften Eindruck hervorzubringen. Der betrachtete Querschnitt des Strahlenbündels darf aber auch nicht zu weit vom Bildpunkte entfernt sein, da dann die Intensität des Bildes zu gering ist und die Strömungsgeschwindigkeit zu groß. Zwischen zwei solchen Lagen, wo das Phänomen nur unvollkommen erscheint, lässt sich nun eine Zwischenlage finden, wo das Phänomen ein Maximum der

Güte zeigt, d. h. verhältnismäßig deutlich und lebhaft erscheint. Genau dasselbe findet aber auch statt, wenn das Ocular auf Querschnitte des Strahlenbündels eingestellt wird, die jenseits des Bildpunktes liegen, wo das Strahlenbündel divergent ist. Es gibt also zwei Maxima der Deutlichkeit des Phänomens, entsprechend der Einstellung des Oculars auf zwei Querschnitte des Strahlenbündels, von denen der eine etwas vor, der andere etwas hinter dem Bilde der Lichtquelle liegt.

Stellt man ein Fernrohr auf einen scintillierenden Fixstern ein und schiebt sodann das Ocular etwas ein, so dass man, Fig. 2, etwa den Querschnitt *b* deutlich wahrnimmt, so wird man das Marius'sche Phänomen [8] wahrnehmen und unter Umständen in demselben eine bestimmte Bewegungsrichtung der Fluctuationen erkennen. Auch wird das Phänomen am deutlichsten bei einem bestimmten Grade des Einschiebens erscheinen. Zieht man das Ocular aus, statt es einzuschieben, stellt es etwa auf den Querschnitt *a* ein, so wird man dieselben Wahrnehmungen machen. Hier hat man die beiden Maxima der Deutlichkeit wieder, von denen die Rede war.

In seiner Abhandlung berichtet Herr Ventosa auch über eine von Herrn Douglass, Astronom des Observatoriums Lowell (Flagstaff, Arizona) angewendete Methode. Douglass beobachtet die Fixsterne mittels eines vom Ocular befreiten Fernrohres oder bei verstelltem Oculare, wo dann der Stern als eine Scheibe erscheint, in welcher Fluctuationen wahrgenommen werden. Man hat hier ersichtlich das Marius'sche Phänomen [8]. Herr Ventosa bemerkt, man müsse die Ursache dieser Erscheinung in unregelmäßigen Brechungen suchen, welche die Strahlen beim Durchgange durch die Atmosphäre erleiden. In der That habe ich schon im Jahre 1881 bewiesen, dass dem so sei [34].

Herr Ventosa berichtet weiter, es habe Herr Douglass von diesem Phänomen Gebrauch gemacht, um die Höhe der atmosphärischen Strömungen zu bestimmen. Es wird hiebei vorausgesetzt, dass die Scintillation in einer Fläche entstehe, in welcher die Strahlen abgelenkt werden, so dass hinter dieser Fläche ein reelles und vor derselben ein virtuelles Netz von Brennlinien entsteht, deren Lage in der Atmosphäre man durch

Einstellung des Fernrohres auf dieselben bestimmen könne. In der Mitte zwischen diesen beiden Netzen von Brennlinien läge dann die erregende Fläche. Nach meinen Messungen [28] müsste die Entfernung eines solchen Netzes von der erregenden Fläche einige Kilometer betragen. Es setzt diese Methode voraus, dass die Ablenkungen der Strahlen in einer gewissen Fläche hervorgerufen werden, vor und hinter welcher geradlinige Fortpflanzung stattfindet. Dem widersprechen aber meine Messungen über terrestrische Scintillation [40]. In der That haben die von Herrn Douglass mittels dieser Methode angestellten Beobachtungen kein befriedigendes Resultat ergeben.

Die helleren und dunkleren Stellen in der Marius'schen Scheibe haben nach Herrn Douglass ihren Grund in Verdichtungen und Verdünnungen der Strahlen durch Brechungen in der Atmosphäre. Dies ist durchaus richtig, wie ich schon im Jahre 1881 bewiesen habe. Ferner hat Herr Douglass die Ausdehnung der helleren und dunkleren Theile der in das Fernrohr gelangenden Lichtwellenflächen gemessen und dieselbe zu $^1/_2$ bis 15 *cm* bestimmt. Dies stimmt gut überein mit meinen schon im Jahre 1887 veröffentlichten Messungen [34].

Weiter berichtet Herr Ventosa, es betrachte Herr See die Ungleichmäßigkeiten in der Atmosphäre, durch welche die Scintillation verursacht wird, als eine Art Biconvexlinsen. In der That hatte schon Hooke den Gedanken ausgesprochen, dass die in der Vertheilung der Wärme vorhandene Ungleichheit einem begrenzten Stücke der Atmosphäre, im Vergleiche zu den benachbarten Theilen, möglicherweise die Gestalt einer convexen oder concaven Linse geben könnte [5], und meine schon im Jahre 1887 veröffentlichten Versuche über terrestrische Scintillation [40] lassen keinen Zweifel darüber bestehen, dass die Scintillation durch derartige Luftschlieren hervorgebracht wird, also durch eine Art Linsenwirkung. Hieher gehören auch meine Versuche mit künstlichen Scintillationserregern [41, 42].

Von Herrn Wadsworth berichtet Herr Ventosa, er habe als Effect dieser atmosphärischen Linsenwirkungen momentane Veränderungen der Brennweite des Fernrohres beobachtet. Es

sind dies jene Schwingungen des Focus längs der Axe des Fernrohres, auf deren Existenz und Bedeutung ich schon im Jahre 1881 aufmerksam machte [21], und auf denen die Construction meines Scintillometers beruht [27].

43. Eine Reihe von Artikeln über die Scintillation hat Herr T. J. J. See veröffentlicht (31). Es soll im folgenden in Kürze auf diese Mittheilungen eingegangen werden. Herr See citiert ein Experiment des Herrn Douglass, welcher mittelst eines künstlichen Scintillationserregers das Marius'sche Phänomen hervorbrachte, wie ich dies in ähnlicher Weise schon im Jahre 1887 gethan hatte [41]. Er führt ferner aus, wie die unregelmäßigen Brechungen der Strahlen in der Atmosphäre die Bilder der Sterne im Fernrohre alterieren, wie dies schon Newton bemerkt und erörtert hatte [6], und führt diese Brechungen zurück auf die kalten und warmen Luftmengen, die in der Atmosphäre in großer Menge vermischt, überall auf der Erde und alle Tage des Jahres vorkommen, wie denn schon Hooke dieselbe Ansicht ausgesprochen hatte [5]. Er macht aufmerksam auf die hiedurch bedingte Verundeutlichung der Bilder der Planeten bei Beobachtung durch große Instrumente, wie ich dies schon früher eingehender ausgeführt hatte (32).

44. Interessant ist Herrn Sees Bemerkung, die Astronomen hätten schon lange erkannt, dass ein großes Instrument oft weniger brauchbar ist als ein Instrument von kleiner Öffnung. Es ist hier zu bemerken, dass im ersteren Falle das Newton'sche Phänomen [6], im letzteren das Phänomen der Zitterbewegung [33] ihre störenden Einflüsse üben.

Auch Herr See berichtet über Messungen des Herrn Douglass, dieser habe auf Grund mehrjähriger Beobachtungen gefunden, dass die Erstreckungen der Helligkeitsmaxima und Minima in der Marius'schen Scheibe [8] zwischen $1^1/_2$ *cm* und 17 *cm* variierten, was durchaus mit meinen im Jahre 1887 veröffentlichten Mittheilungen (25) übereinstimmt, nach welchen die fragliche Größe »im allgemeinen nach Centimetern oder Decimetern misst«.

Schließlich haben die Herren Douglass und See auf dem Lowell Observatory die Amplitude der Zitterbewegung der Fixsterne zu beiläufig $0 \cdot 5''$ bis $2 \cdot 0''$ bestimmt.

45. Da das Bild eines leuchtenden Punktes im Fernrohre infolge der Beugung stets als eine helle, von lichtschwachen Ringen umgebene Scheibe erscheint, so werden zwei leuchtende Punkte offenbar nur dann als getrennt wahrgenommen, wenn ihre scheinbare gegenseitige Entfernung eine gewisse Größe überschreitet. Der reciproke Wert dieser Größe wurde von Foucault das optische Vermögen des Instrumentes genannt. Die Ausdehnung des sichtbaren Theiles des Beugungsbildes hängt von mehreren Umständen ab, namentlich von der Helligkeit der Lichtquelle. Das optische Vermögen eines Instrumentes ist also keine constante Größe; alles übrige jedoch gleich gesetzt, ist das optische Vermögen dem Durchmesser der Öffnung des Instrumentes proportional. Nimmt man an, das Bild des leuchtenden Punktes reduciere sich auf die Aureole und bezeichnet man den scheinbaren Halbmesser derselben durch $\omega$, so ist $\frac{1}{2\omega}$ das optische Vermögen des Instrumentes. Setzt man $\lambda = 0 \cdot 0005$ *mm* und nimmt man den Durchmesser der Öffnung gleich 10 *cm* an, so gibt das $2\omega = 2^1/_4$ Secunden. Versuche, welche Foucault mit einem Fernrohre von 10 *cm* Öffnung anstellte, ergaben etwas kleinere Werte.

Hat man ein Instrument von großer Öffnung und ist der durch dasselbe betrachtete Lichtpunkt ein scintillierender Stern, so wird zwar der eben besprochene, durch Beugung entstehende Zerstreuungskreis mit wachsender Größe der Öffnung beständig abnehmen, doch hat man hier mit einem anderen Zerstreuungskreise zu rechnen, dem Scintillations-Zerstreuungskreise [35], dessen Radius identisch ist mit der Amplitude der Zitterbewegung [33].

Es ist klar, dass dieser letztere Zerstreuungskreis eine Verundeutlichung der Bilder ausgedehnter Objecte, wie des Mondes, zur Folge haben muss, und dass die Störung umso größer sein wird, je größer die Amplitude der Zitterbewegung ist (32).

Man könnte, analog dem Vorgehen Foucaults, die Größe $\frac{1}{2\omega}$, wo hier $\omega$ die mittlere Amplitude der Zitterbewegung an einem gegebenen Orte der Beobachtung bedeutet,

das optische Vermögen des gegebenen Ortes nennen. Für Wien dürfte sich nach meinen scintillometrischen Messungen der Wert $\omega = 6$ Secunden nicht allzuweit von dem Mittelwerte der Amplitude der Zitterbewegung entfernen [33], ebenso für das Lowell Observatory nach den obigen Mittheilungen des Herrn See nicht allzuweit von $\omega = 1^1/_4$ Secunden [44]. Es würde hieraus mit einem gewissen Grade der Genauigkeit folgen, dass das optische Vermögen des Ortes des Lowell Observatory 4·8mal größer ist, als jenes der Sternwarte zu Wien.

46. In seiner Abhandlung: »On the Cause of the Scintillation of the Fixed Stars« sucht Herr See die Ursachen der Scintillationserscheinungen aufzustellen. Er geht aus von jenem Phänomen, das ich nach seinem Entdecker das Marius'sche Phänomen genannt habe [8], und bemerkt, dass dieses Undulationsphänomen von früheren Forschern nicht beachtet worden sei. Allein schon vor Marius wurde dieses Phänomen, obgleich ohne Benützung eines Fernrohres, von Keppler bemerkt [2], Arago hat sein Scintillometer Nr. 1 auf dieses Phänomen gegründet [10], und der Verfasser dieser Abhandlung hat sich eingehendst mit der Beschaffenheit dieses Phänomens, sowie der Erklärung und den Consequenzen desselben beschäftigt (25).

47. Herr See gibt für die Erscheinungen der Scintillation drei Ursachen an: Die irregulären Brechungen der Strahlen in der Atmosphäre, die mit diesen Brechungen verbundene Dispersion, und die gegenseitige Interferenz der durch die Pupille tretenden Strahlen. Ein Beweis dafür, dass die Scintillation in dieser Weise entstehe, ist nicht beigegeben.

Was nun die erste dieser drei Hypothesen betrifft, so ist sie richtig; dieselbe wurde schon vor den Mittheilungen des Herrn See von Alhazen und Vitellio [1], Hooke [5], Newton [6], Mairan [7], Respighi [18] und Jamin [19] aufgestellt, und ihre Richtigkeit vom Verfasser dieser Abhandlung bewiesen [31].

Die zweite der angeführten Hypothesen ist ebenfalls nicht neu. Um die bei der Scintillation auftretende Farbenentwickelung zu erklären, hat schon Hooke daran erinnert, dass, durch

eine gewöhnliche Linse gesehen, die Bilder der Gegenstände jederzeit farbig erscheinen, wenn sie in der Nähe der Ränder des Gesichtsfeldes erzeugt werden. Diese Hypothese Hookes, nach welcher die Farbenerscheinungen durch die mit den unregelmäßigen Brechungen nothwendig verbundene Dispersion entstehen sollen, besteht aber, wie ich schon im Jahre 1887 gezeigt habe (25), eine ernstliche Prüfung a posteriori nicht. Es ist nämlich eine Thatsache, dass die Sterne in der Nähe des Zeniths farblos scintillieren. (Bei 37 zu verschiedenen Zeiten an Sternen erster und zweiter Größe in verschiedenen Höhen mittels des Marius'schen Phänomens angestellten Beobachtungen fand ich unter 34° Höhe stets Farbenentwickelung und ober 51° Höhe niemals.) Jede Erklärung der Farbenscintillation muss von dieser Thatsache Rechenschaft geben können. Hookes Hypothese vermag dies nur unter Zuhilfenahme einer zweiten Hypothese, dass nämlich der von den Strahlen in der Atmosphäre zurückgelegte Weg eben in der Nähe des Zeniths zu klein werde, um das Entstehen der Farbenerscheinungen zu ermöglichen. Diese Hilfshypothese wird aber widerlegt durch jenen meiner Versuche über terrestrische Scintillation, wo eine horizontale Luftstrecke von $1^1/_2$ Meilen genügte, um lebhafte Farbenscintillation hervorzubringen [40]. Hiernach kann nicht angenommen werden, dass hochstehende Sterne deshalb zwar lebhaft, aber farblos scintillieren, weil die zu durchmessende Luftstrecke zu gering ist. Hookes und Herrn Sees Hypothese ist also nicht haltbar. Zwar kann es keinem Zweifel unterliegen, dass die mit der unregelmäßigen Brechung verbundene unregelmäßige Dispersion vorhanden ist, doch ist sie zu gering, um wahrgenommen zu werden, und ist nicht die Ursache der lebhaften Farbenerscheinungen, um welche es sich handelt. Die wahre Ursache der letzteren ist die schon besprochene regelmäßige atmosphärische Dispersion [11].

Die dritte Hypothese des Herrn See ist weder neu noch richtig. Sie fällt zusammen mit jener Hypothese, auf welche Arago seine unrichtige Erklärung der Scintillation gründete. Arago sagt: »Wir nehmen jetzt an, dass die links von der Mitte des Objectivs auffallenden Strahlen auf ihrem Wege von

den oberen Grenzen der Atmosphäre her Schichten durchlaufen sollen, welche ihrer Dichtigkeit, ihrer Temperatur oder ihres hygrometrischen Zustandes wegen ein etwas anderes Brechungsvermögen besitzen, als die Schichten, in welche die zur Rechten liegenden Strahlen gelangen. Die Folge dieser verschiedenen Brechungsverhältnisse kann sein, dass die rothen Strahlen rechts sich mit den gleichnamigen links vollständig (durch Interferenz) aufheben, so dass im Brennpunkte statt des normalen Weiß Grün entsteht, während einen Augenblick später, aus derselben Ursache, die grünen Strahlen gänzlich vernichtet werden und der Brennpunkt folglich roth erscheint« u. s. w.

Der erste, der gegen Aragos Theorie auftrat und sie durch ein schlagendes Experiment widerlegte, war Moigno (33). Dieser constatierte, dass, wenn man im Interferenzrefractor das eine der beiden Bündel gegen das andere verzögert, das Bild eines weißen Lichtpunktes keineswegs Farben zeigt, wie dies bei den scintillierenden Sternen der Fall ist. Ich selbst habe den Versuch Moignos in der folgenden Form angestellt (25).

Vom Heliostaten kommendes Sonnenlicht trat durch eine Linse und brachte ein nahe punktförmiges Sonnenbild hervor. Das von diesem Punkte kommende Licht wurde durch einen Nicol vertical polarisiert. In einer Entfernung von ungefähr 20 *m* beobachtete ich den polarisierten Lichtpunkt, nachdem ich die beiden Hälften meiner Pupille mit zwei, in verticaler Linie aneinander grenzenden $\frac{\lambda}{2}$-Blättchen bedeckt hatte, deren Hauptschnitte bezüglich die verticale und horizontale Lage hatten. Unter diesen Umständen ist die eine Hälfte des Strahlenbündels, genau wie es Arago supponiert, gegen die andere um $\frac{\lambda}{2}$ verzögert. Es zeigte sich nun, dass das Bild des Lichtpunktes nicht ausgelöscht oder gefärbt war, sondern genau so erschien, als wäre die Doppelplatte nicht vorhanden.

Dieser Versuch widerlegt zwar, wie jener Moignos, die von Arago gegebene Erklärung der Scintillation a posteriori, lässt aber die Frage zurück, warum bei diesen Versuchen das

Bild des künstlichen Sternes nicht ausgelöscht oder gefärbt erscheint?

Dies führt auf eine theoretische Überlegung, welche ich in einer früheren Abhandlung (24) gegeben habe, aus welcher hervorgeht, dass es unmöglich ist, das Bild einer punktförmigen homogenen Lichtquelle auf der Netzhaut des Auges dadurch auszulöschen, dass man die eine Hälfte des durch die Pupille tretenden Bündels gegen die andere um eine ungerade Zahl halber Wellen verzögert.

Der Sachverhalt wird durch das folgende, von mir angestellte Experiment (25) zur Anschauung gebracht.

Wenn Licht von einem entfernten Punkte durch die Pupille gelangt, so werden die Strahlen nach den Gesetzen der geometrischen Optik so gebrochen, dass sie sich in einem Punkte der Netzhaut treffen, wonach wir ein punktförmiges Bild wahrnehmen sollen; die genauere Theorie jedoch, welche auf die Beugung durch die Pupille Rücksicht nimmt, ergibt kein punktförmiges Bild, sondern ein Beugungsbild, dessen lichtstärkster Theil aus einer kreisförmigen, hellen Scheibe besteht, deren Centrum mit dem Orte des geometrischen Bildes zusammenfällt. Die Ausdehnung dieser kreisförmigen Scheibe ist jedoch zu gering, um wahrgenommen zu werden, so dass wir das gesammte Beugungsbild eben als einen hellen Punkt wahrnehmen. Will man die Details des Beugungsbildes wahrnehmen, so muss man dasselbe vergrößern. Dies geschieht dadurch, dass man das Auge durch ein Fernrohr gleichsam verlängert und vor dem Objective des letzteren einen Schirm mit kreisförmiger Öffnung etwa von der Größe der Pupille anbringt. Man hat dann das Fraunhofer'sche Beugungsbild einer kreisförmigen Öffnung. Gesetzt nun, man verzögere die eine Hälfte des durch die Öffnung tretenden Strahlenbündels um eine halbe Welle gegen die andere Hälfte in irgend einer Weise. Dann sollte nach der roheren Theorie das Bild vollständig verschwinden. Es zeigt sich jedoch ein Beugungsbild, dessen lichtstärkster Theil aus zwei ovalen, hellen Scheiben besteht, welche durch einen dunkeln, den geometrischen Ort des Bildes enthaltenden Zwischenraum getrennt sind. In Übereinstimmung mit der elementaren Theorie herrscht also an der Stelle des geo-

metrischen Bildes Dunkelheit, die Lichtbewegung ist jedoch nicht zerstört, sondern sie tritt, statt im Centrum, zu beiden Seiten desselben auf. Da nun das Beugungsbild bei Beobachtung mit freiem Auge zu klein ist, um ausgedehnt wahrgenommen werden zu können, so nimmt man dasselbe eben wieder als Lichtpunkt wahr, so dass jene Verzögerung der einen Hälfte des Lichtbündels bei Beobachtung mit freiem Auge nicht, wie Arago glaubte, das Bild zum Verschwinden bringt, sondern es vielmehr völlig ungeändert lässt.

Eine weitere Widerlegung der Theorie Aragos ergibt sich, wie erwähnt, aus der Thatsache, dass tiefstehende Sterne farbig scintillieren, hochstehende farblos. Von dieser importanten Thatsche vermag, wie schon Plateau bemerkt hat, Aragos Theorie durchaus keine Rechenschaft zu geben. Während in verticaler Richtung die ganze Höhe der Atmosphäre nicht hinreicht, um selbst bei lebhafter Scintillation die geringste Spur einer Farbenentwickelung hervorzubringen, genügt in horizontaler Richtung eine Strecke von $1^1/_2$ Meilen, um sehr lebhafte Farbenscintillation zu erzeugen, wie meine Versuche über terrestrische Scintillation ergeben haben.

Herr See nimmt Verzerrungen der Lichtwellenflächen an und folgert aus denselben die Helligkeitsveränderungen und Farbenwechsel. Was die Existenz dieser Verzerrungen anlangt, so habe ich dieselbe schon im Jahre 1881 bewiesen, den Grad der Verzerrungen messend bestimmt und die Helligkeitsveränderungen gefolgert [26, 27, 29, 30, 31, 32].

Was die Folgerung der Farbenwechsel anlangt, so ist sie, wie oben gezeigt, unrichtig.

48. Die Frage, wie der Grad der Scintillation von der Höhe des Beobachtungsortes abhängt, ist noch nicht spruchreif. Ist doch selbst der Begriff des Grades oder der Stärke der Scintillation noch nicht aufgestellt. Mögen in dieser Hinsicht zunächst die verschiedenen Scintillometer betrachtet werden.

Erstes Scintillometer. Dasselbe [10] besteht in einem größeren Fernrohre, dessen Ocular eingeschoben oder ausgezogen wird. Man erhält so das Marius'sche Phänomen [8]. Dasselbe gestattet, die Erstreckungen der hellen und

dunklen Theile der einfallenden Lichtwellenflächen [32] angenähert zu bestimmen, die Richtung der Bewegung der Maxima und Minima, wenn eine solche ausgesprochen ist, wahrzunehmen und das Vorhandensein der Scintillation an den Helligkeits- und Farbenfluctuationen zu erkennen.

Zweites Scintillometer. Das Montigny'sche Scintillometer [11] misst die Zahl der Farbenwechsel eines Fixsternes in einer gegebenen Zeit. Seine Angaben haben gar keine angebbare physikalische Bedeutung.

Drittes Scintillometer. Das Arago'sche Scintillometer (das dritte der von Arago angegebenen Scintillometer [10] liefert ebenfalls Zahlen, denen jede angebbare physikalische Bedeutung fehlt.

Viertes Scintillometer. Das von mir construierte Scintillometer [28] gestattet die Krümmungsradien der einfallenden Lichtwellenflächen der Größenordnung nach zu messen.

Fünftes Scintillometer. Ich habe schon oben [29] eine andere Einrichtung des Fernrohres beschrieben. Vor dem Objective eines Fernrohres von großer Öffnung befindet sich ein spaltförmig ausgeschnittener Schirm, und das Ocular ist eingeschoben. Zählt man in einem gegebenen Momente die vorhandenen Wellenberge und Thäler des unter diesen Umständen linearen Bildes eines scintillierenden Fixsternes, und zieht die Länge der Spalte in Rechnung, so gelangt man zur Größe der Erstreckungen der Aus- und Einbiegungen der einfallenden Lichtwellenflächen, längs diesen Flächen selbst gemessen.

Sechstes Scintillometer. Jedes Fernrohr mit großer Öffnung wird durch Anbringung eines Ocularmikrometers zu einem Scintillometer, soferne der Radius des Scintillationszerstreuungskreises oder die Amplitude der Zitterbewegung gemessen werden kann [6].

Siebentes Scintillometer. Montigny war der erste, welcher die scintillierenden Sterne mittels eines Spectroskopes beobachtete. Man erhält ein lineares Spectrum und kann die Veränderungen des Sternbildes für die einzelnen homogenen Farben getrennt beobachten. Später hat Wolf durch Hinzu-

fügung einer Cylinderlinse dem Spectrum eine zweite Dimension gegeben.

Keines dieser Scintillometer liefert Zahlen, die schlechtweg als Maß des Grades der Scintillation bezeichnet werden könnten. Da aber die Scintillation im wesentlichen durch die irregulären Brechungen der Strahlen hervorgebracht wird, während die Farbenentwickelung eine accessorische Erscheinung ist, so würde es sich empfehlen, das sechste der oben angeführten Scintillometer zur Messung des Grades der Scintillation zu benützen, d. h. die Größe der irregulären Ablenkungen der Strahlen (Amplitude der Zitterbewegung, Radius des Scintillationszerstreuungskreises).

Es würde sich dies umsomehr empfehlen, da eben die Kenntnis dieser Größe es gestattet, die Brauchbarkeit eines Ortes zur Aufstellung astronomischer Instrumente vorherzubestimmen [45]. Es dürfte keiner Schwierigkeit unterliegen, ein hiezu geeignetes Scintillometer zu construieren.

Was nun die Abhängigkeit der Scintillation von der Höhe des Beobachtungsortes anlangt, so stelle ich im folgenden einige Beobachtungen zusammen, die mit diesem Gegenstande in Beziehung stehen. Zunächst weiß man, dass an der unteren Grenze der Atmosphäre im allgemeinen lebhafte Scintillation wahrgenommen wird. Ferner ist es klar, dass eine Verschiebung des Beobachtungsortes vertical aufwärts bis in die Nähe der oberen Grenze der Atmosphäre ein Verschwinden der Scintillation zur Folge haben müsste. Es nimmt also die Scintillation bei einer Erhebung von der Erdoberfläche zur oberen Grenze der Atmosphäre jedenfalls im ganzen ab. Gleichwohl könnten in einem gegebenen Momente zwischen diesen beiden Grenzen Maxima und Minima der Lebhaftigkeit der Scintillation vorhanden sein.

Es haben verschiedene Forscher eine Übereinstimmung der Bewegungsrichtung der scintillatorischen Fluctuationen mit der Windrichtung (Stellung der Windfahne) constatiert. So bemerkte Arago [10] die Übereinstimmung der in der Marius'schen Scheibe wahrgenommenen Bewegungsrichtung mit der Windrichtung. Dieselbe Beobachtung machten später Liandier (13), Poey (10) und Denzler (12). Ich selbst fand die

Richtung der Wellenbewegung am Sonnenrande fast stets in Übereinstimmung mit der Windfahne [42]. Die Erscheinungen, welche sich in der Marius'schen Scheibe zeigen [8], können sich auch ohne Fernrohr direct als Keppler'sches Phänomen [2] oder bei totalen Sonnenfinsternissen als »fliegende Schatten« [38] auf eine Wand projicieren, ja selbst analog der Erscheinung des »Wasserziehens« der Sonne in der Luft beobachtet werden. So berichtet Arago (25): »Herr August Attenour in Salon schrieb mir noch am Tage der Finsternis einen Brief, aus dem ich wörtlich folgendes anführe: »...ein schwacher Nordwest war zu fühlen..., als ich sehr deutlich eine leichte Undulation in der Luft wahrnahm, die um uns der Richtung des Windes folgte... Das auffallend und deutlich wahrnehmbare wellenförmige Schwanken in der Luft erinnerte... an die Bewegung einer in einem großen Bassin demselben Winde ausgesetzten Wasserfläche, auf welcher sich einige langgestreckte Wellen bilden, die schnell aufeinanderfolgen. Dieselbe Erscheinung wiederholte sich nach dem plötzlichen Wiedererscheinen der Sonne und dauerte nur wenige Secunden«.

Diese Abhängigkeit der Bewegungsrichtung der scintillatorischen Fluctuationen von der Stellung der Windfahne beweist zumindestens, dass die unteren Luftschichten bei der Entstehung der Scintillation kräftig mitwirken.

Prof. Pernter führte an zwei aufeinanderfolgenden Tagen mittels des Scintillometers IV, welches die Krümmungsradien der einfallenden Lichtwellenflächen misst, auf dem Hohen Sonnblick (3095 *m*) und am Fuße desselben in Rauris (900 *m*) gleichzeitige Messungen durch, welche das Resultat ergaben, dass die Verkrümmungen der Lichtwellenfläche in der Höhe beträchtlich stärker ausgebildet waren, als in der Tiefe.

Anderseits bemerkt Prof. Pernter (35): »Auch mündliche Mittheilungen von Freunden, welche bei Bergtouren die Scintillation sehr gering gefunden hatten, sprachen für die letztere Auffassung« (Scintillation hauptsächlich durch die unteren Luftschichten erregt).

Einem Referate der »Fortschritte der Physik« entnehme ich, es habe Ch. Dufour (36) aus eigenen Beobachtungen an hoch gelegenen Alpenorten, wie auch aus solchen von

De Saussure gefunden, dass das Funkeln auf den Bergen schwächer ist, als in der Ebene.

Es ist oben bemerkt, dass an der unteren Grenze der Atmosphäre im allgemeinen lebhafte Scintillation der Sterne wahrgenommen wird. Diese Thatsache kann durch die weitere Thatsache ergänzt werden, dass an der unteren Grenze der Atmosphäre auch lebhafte Scintillation entsteht. Dies beweisen meine Studien über terrestrische Scintillation [40].

49. Es ist oben ausgeführt [47], wie Aragos Erklärung der Scintillation zuerst durch Moigno, später durch Plateau und meine eigenen Arbeiten widerlegt wurde. Neuerlich hat Lord Rayleigh (34) eine Widerlegung hinzugefügt, die sich durch besondere Kürze auszeichnet, und so ausgesprochen werden kann: Aragos Theorie ist unrichtig, da sie dem Energieprincipe widerspricht. In der That verlangt Aragos Erklärung [47], dass zwei gleiche Energiemengen sich zu einer Energie gleich Null durch Interferenz vereinigen sollen. Der genauere Sachverhalt ist oben [47] dargelegt. Lord Rayleigh ist der Meinung, es sei die Separation der verschiedenfarbigen, von einem Fixsterne kommenden und in das Auge gelangenden Strahlen in der Atmosphäre hinreichend groß, um die mit der Scintillation verbundenen Farbenerscheinungen hervorzubringen. Dies ist gewiss richtig, wie schon aus Mossottis Berechnung [14] in Verbindung mit meiner Beobachtung [31] hervorgieng. Da nämlich einerseits nach Mossotti der rothe und der violette Strahl innerhalb der Atmosphäre eine gegenseitige Distanz von mehr als 8·78 *m* gewinnen können, und anderseits nach meinen Messungen zwei Strahlen schon bei einer gegenseitigen Distanz von einigen Centimetern in der Atmosphäre merklich unabhängig voneinander scintillatorisch modificiert werden, so muss die Scintillation in der Nähe des Horizontes für die verschiedenen Farben, aus denen sich das Licht des Sternes zusammensetzt, wesentlich unabhängig von einander vor sich gehen, wie ich schon im Jahre 1881 gezeigt habe (24).

Da ferner die Separation der verschiedenfarbigen Strahlen mit der Höhe des Sternes abnimmt und im Zenith gleich Null wird, muss auch das Farbenspiel des Sternes bei wachsender

Höhe abnehmen und in der Nähe des Zeniths unmerklich werden. Der Gang der Strahlen in der Atmosphäre ist in Fig. 3 dargestellt.

Den hauptsächlichen Gegenstand in Lord Rayleighs Abhandlung bildet die Berechnung des Strahlenganges in der

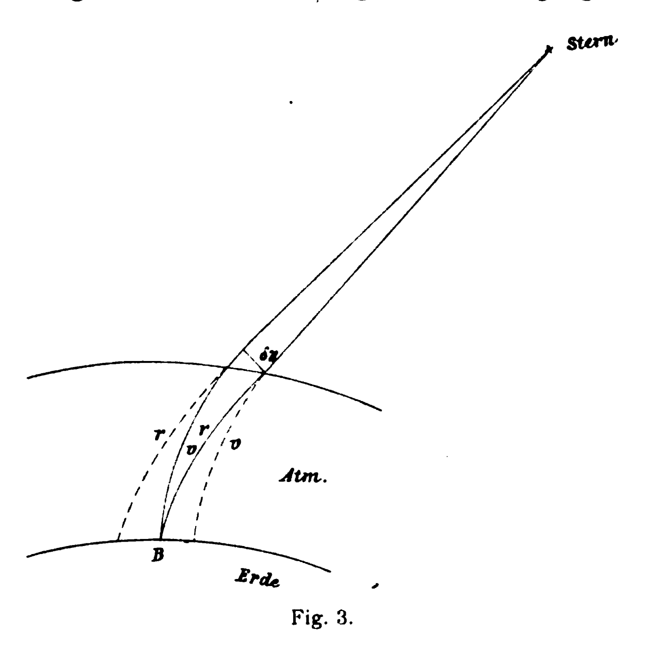



Fig. 3.

Atmosphäre. Hervorzuheben ist insbesondere die sich hiebei ergebende Formel für die Separation der verschiedenfarbigen Strahlen. Sie lautet

$$\delta\eta = \frac{\delta\mu_0 \, l \sin\theta}{\cos^2\theta} \qquad (A)$$

und ist anwendbar bei Höhen größer als 10°.

In dieser Formel bedeutet $\delta\eta$ das an der oberen Grenze der Atmosphäre liegende Maximum des gegenseitigen Abstandes zweier von demselben Sterne kommender und sich im Auge des Beobachters treffender Strahlen verschiedener Farbe; $\delta\mu_0$ den Unterschied der Brechungsexponenten dieser Strahlen an der Erdoberfläche; $\theta$ die scheinbare Zenithdistanz des Sternes; $l = 7 \cdot 990 \times 10^5$ *cm*. Von dieser Formel gänzlich verschieden

ist, wie Lord Rayleigh bemerkt, die von Montigny für dieselbe Größe früher aufgestellte Formel

$$\delta\eta = \delta\mu_0 a \sin\theta, \qquad (B)$$

wo $a$ der Radius der Erde ist. Nach der letzteren Formel müsste für geringe Höhen die Separation der Strahlen nahezu unabhängig von der Höhe sein, was den Thatsachen nicht entspricht.

Aus Formel ($A$) berechnet Lord Rayleigh die Separation der Strahlen $B$ und $H$ an der Grenze der Atmosphäre für einen Stern von der scheinbaren Höhe 10°. Es ergibt sich $\delta\eta = 185\,cm$. Wie erwähnt, hatte Mossotti [14] für einen Stern von der Höhe 1° 27′ die Separation des rothen und violetten Strahles zu $\delta\eta = 878\,cm$ berechnet. Da nach Formel ($A$) bei tieferstehenden Sternen $\delta\eta$ mit zunehmender Höhe rasch abnehmen soll, scheinen die von Mossotti und Lord Rayleigh erhaltenen beiden Zahlen in guter Übereinstimmung zu stehen.

**Citate.**

1. Aristoteles, De Coelo, lib. II, cap. 8.
2. Averrhoës, De Coelo et de Mundo.
3. Keppler, Astronomiae pars optica und Stella nova.
4. Newton, Principia, lib. III. — Optice, lib. I, 1719.
5. Mairan, Mém. de l'Acad. des sciences, 1743.
6. Saussure, Voyage au Col du Géant, IV.
7. Joung, Lectures on Natural Philosophy.
8. Biot, Traité d'Astronomie physique, I.
9. Montigny, Mém. cour. de l'Acad. de Belgique, XXVIII, 1856.
10. Doguin, Traité de phys., IV. — Cosmos, Revue de progrès des sciences, XIX.
11. Mossotti, Il nuovo cimento, 1855.
12. Denzler, Mitth. der naturforsch. Ges. in Zürich, II, 1850 bis 1852.
13. Liandier, Cosmos, XIV, 1856 — XX, 1862.
14. Clausius, Grunerts Beiträge zur Meteorol., Optik, 1850.
15. C. Wolf, C. R. LXVI, p. 792.
16. Respighi, Atti dell' Acc. de nuovi Lincei, XXI, XXII, 1868 bis 1869.
17. Jamin, C. R. LXVII, 938.
18. Babinet, C. R. XXXIII. — Pogg. Ann., LXXXV.
19. K. Exner, Über ein Scintillometer, Sitzungsber. d. k. Akad d. Wissensch. in Wien, 1888.
20. Mannheim, Ann. de chim. (3) LX.
21. Bergsma, Mondes (2), XXX.
22. E. Weiss, Astron. Nachr. LXXVIII.
23. Dufour, Pogg. Ann. 1853.
24. K. Exner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, II. Abth., 1881.
25. K. Exner, Exners Repertorium XXIII, 1887, gesondert erschienen bei F. Tempsky, Wien, 1891.
26. Ventosa, Mémoires de la société royale de géographie d'Anvers, 1895.
27. K. Exner, Meteorol. Zeitschr. April, 1897.

28. Ventosa, Ciel et Terre, Juli 1899.
29. K. Exner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, 1900.
30. Naturwissenschaftliche Rundschau, 21. Juli 1900.
31. T. J. J. See, Astronomische Nachrichten, 1897.
32. K. Exner, Astronomische Nachrichten Nr. 2791, 1887.
33. Moigno, Cosmos, II, 1851.
34. Lord Rayleigh, On the Theory of Stellar Scintillation, Phil. Mag. (5), 36.
35. Prof. Pernter, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien, 1888.
36. Dufour, Arch. sc. nat. 29 (3), p. 545.
37. Naturwissenschaftliche Rundschau, 14. Juli 1900.
38. Respighi, Atti Nuovi Lincei, XXI, 1868.
39. Forel, Arch. des Sc. Phys. et Natur. (3), II, 1879.
40. Arago, L'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1852.

## III. SITZUNG VOM 24. JÄNNER 1901.

Die k. k. Zoologisch-botanische Gesellschaft übersendet eine Einladung zu der am Samstag, 30. März l. J. stattfindenden Jubiläumssitzung ihres fünfzigjährigen Bestandes.

Herr Prof. Dr. Anton Fritsch in Prag übersendet das Schlussheft (IV. Band, Heft 3) seines Werkes: »Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. G. Goldschmiedt legt eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. Hans Meyer »Über Säurechloride der Pyridinreihe« vor.

Das w. M. Herr Hofrath Skraup in Graz legt sieben Mittheilungen aus dem chemischen Institute der Universität in Graz zur Aufnahme in die Sitzungsberichte vor, und zwar:

1. »Zur Kenntnis der Glycose«, von Herrn Dr. Ferd. v. Arlt.
2. »Notiz über das Tautocinchonin«, von Herrn Friedrich Langer.
3. »Über dem Nichin analoge Basen aus Cinchonin«, von Herrn Friedrich Langer.
4. »Über das Allocinchonin«, von Herrn Josef Hlavnička.
5. »Über die Constitution des Mononitrosoorcins«, von Herrn Dr. Ferd. Henrich.
6. »Über die Umlagerung des Cinchonins durch Schwefelsäure«, von Herrn Zd. H. Skraup.

7. »Die Überführung der additionellen Verbindungen von Cinchonin mit Halogenwasserstoff in halogenfreie Basen«, von Herrn Zd. H. Skraup.

Das w. M. Herr Director Prof. R. v. Wettstein legt eine Mittheilung von Herrn Dr. Rudolf Wagner vor, betitelt: »Diagnosen neuer *Polycarpaea*-Arten von Sokotra und Abd el Kûri«.

Herr Ingenieur Franz Rychnowski in Lemberg übersendet folgende zwei Abhandlungen:

I. »Die Aggregatzustände der Materie als Ergebnisse der thätigen Energie«.
II. »Analyse der physikalischen Dynamiden«.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Retzius G., Crania Suecica antiqua. Eine Darstellung der schwedischen Menschenschädel aus dem Steinzeitalter, dem Bronzezeitalter und dem Eisenzeitalter, sowie ein Blick auf die Forschungen über die Racencharaktere der europäischen Völker. (Mit 92 Tafeln in Lichtdruck.) Stockholm, 1900. Groß 4°.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



## IV. SITZUNG VOM 7. FEBRUAR 1901.

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt folgende eingesendete Arbeiten vor:

I. Von Herrn Roman König, Schiffscapitän der Süddeutschen Donau-Dampfschiffahrtsgesellschaft in Budapest: »Kritik der Propulsionslehren und der Schiffsschraube. Ein neuer Propeller«;

II. von Herrn Ingenieur Sieg. Wellisch in Neustift bei Scheibbs (Niederösterreich): »Der dynamische Mittelpunkt der Welt«.

Das c. M. Herr k. und k. Oberst A. v. Obermayer legt eine Abhandlung vor mit dem Titel: »Ein Satz über den schiefen Wurf im luftleeren Raume.«

Ferner überreicht derselbe eine Abhandlung unter dem Titel: »Die Veränderlichkeit der täglichen Barometeroscillation auf dem Hohen Sonnblick im Laufe des Jahres.«

Herr Adolf Hnatek überreicht eine Arbeit unter dem Titel: »Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1898 V (Giacobini)«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei Arbeiten aus seinem Laboratorium:

I. »Über die Condensation der Aldehyde«, von Herrn Ad. Lieben.

II. »Über die Einwirkung von Zinkäthyl auf Anhydride organischer Säuren, auf Oxyde und Lactone«, von den Herren E. Granichstädten und F. Werner.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben eine Arbeit aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium: »Über einige Derivate des Oxyhydrochinontriäthyläthers« von Herrn E. Brezina.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt vor den »Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Lemberg«, eingesendet von Herrn Prof. Dr. Láska.

Derselbe legt ferner eine Arbeit des Herrn Dr. H. Mache vor: »Eine Beziehung zwischen der specifischen Wärme einer Flüssigkeit und der ihres Dampfes«.

Herr Dr. Sigmund Fränkel legt eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Leo Langstein im chemischen Universitätslaboratorium des Herrn Hofrathes A. Lieben in Wien ausgeführte Arbeit vor, welche den Titel führt: »Über die Spaltungsproducte des Eiweißes bei der Verdauung (III. Mittheilung). Über das sogenannte Amphopepton«.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Bauer A., Dr., Johann Natterer. 1821 bis 1900. Wien, 1901. 8⁰.

Ministère de l'Instruction et des Beaux-Arts, Carte photographique du Ciel. Zone +1, 6 feuilles. — Zone 3, 24 feuilles. — Zone +4, 1 feuille. — Zone +5, 25 feuilles. — Zone +7, 5 feuilles. — Zone 9, 10 feuilles. — Zone +22, 6 feuilles. — Zone 24, 18 feuilles. Paris, Groß 4⁰.

Sternwarte zu Leiden, Verslag van den Staat der Sterrenwacht te Leiden van 15. September 1896 tot 19. September 1898.

— — van 20. September 1898 tot 17. September 1900. Leiden. 8⁰.

## V. SITZUNG VOM 14. FEBRUAR 1901.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 109, Abth. I, Heft VII (Juli 1900). — Monatshefte für Chemie, Bd. 22, Heft I (Jänner 1901).

Der Vorsitzende, Herr Präsident E. Suess, macht Mittheilung von dem am 10. Februar l. J. erfolgten Ableben des auswärtigen correspondierenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Geheimrathes Dr. Max Pettenkofer in München.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen ihres Beileides von den Sitzen.

Das Comité des V. Internationalen Zoologen-Congresses in Berlin übersendet die Einladung zu der vom 12. bis 16. August 1901 in Berlin stattfindenden Tagung.

Herr Prof. Anton Fritsch in Prag dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Herausgabe des IV. Bandes seines Werkes über die Fauna der Gaskohle.

Der Secretär, Herr Hofrath Prof. V. v. Lang, legt eine Abhandlung von Herrn Otto Schier in Brünn vor, welche den Titel führt: »Über das formbeständige Derivat einer bestimmten Art von Sehnendreiecken«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Hann überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung unter dem Titel: »Die Meteorologie von Wien nach den Beobachtungen an der k. k. Meteorologischen Centralanstalt 1850 bis 1900«.

Herr Dr. Ludwig Lämmermayr, Assistent an der Lehrkanzel für Botanik der k. k. Hochschule für Bodencultur in Wien, legt eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Wiener Universität von ihm ausgeführte Arbeit vor, betitelt:

»Beiträge zur Kenntnis der Heterotrophie von Holz und Rinde«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Arcidiacono S., Principali fenomeni eruttivi avvenuti in Sicilia e nelle Isole Adiacenti nell' anno 1899. Modena, 1900. 8°.

Fritsche H., Dr., Die Elemente des Erdmagnetismus und ihre säcularen Änderungen während des Zeitraumes 1550 bis 1915. Publication III. St. Petersburg, 1900. 8°.

Inaugurazione del monumento a Francesco Brioschi. Mailand. 8°.

Riccò A., und L. Franco, Stabilità del suole all' Osservatorio Etneo. Catania, 1900. 8°.

Tacchini P., und A. Riccò, Osservazioni della eclisse totale di sole del 28 Maggio 1900. Catania, 1900. 8°.

# VI. SITZUNG VOM 21. FEBRUAR 1901.

Erschienen: Mittheilungen der Prähistorischen Commission, Band I, Nr. 5; 1901.

Herr P. Cottancin in Paris übersendet eine Mittheilung, betreffend ein Gesetz für die Deformation von Eruptiv- und Sedimentgesteinen.

Herr Prof. August Adler in Karolinenthal übersendet eine Arbeit mit dem Titel: »Zur Construction der Flächen zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten«.

Herr Dr. Egon v. Oppolzer überreicht eine vorläufige Mittheilung: »Über Helligkeitsschwankungen des Planetoiden (433) Eros«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt vor: »Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. VII. Über die tägliche Periode der Luftelektricität.«

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

---

**MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.**

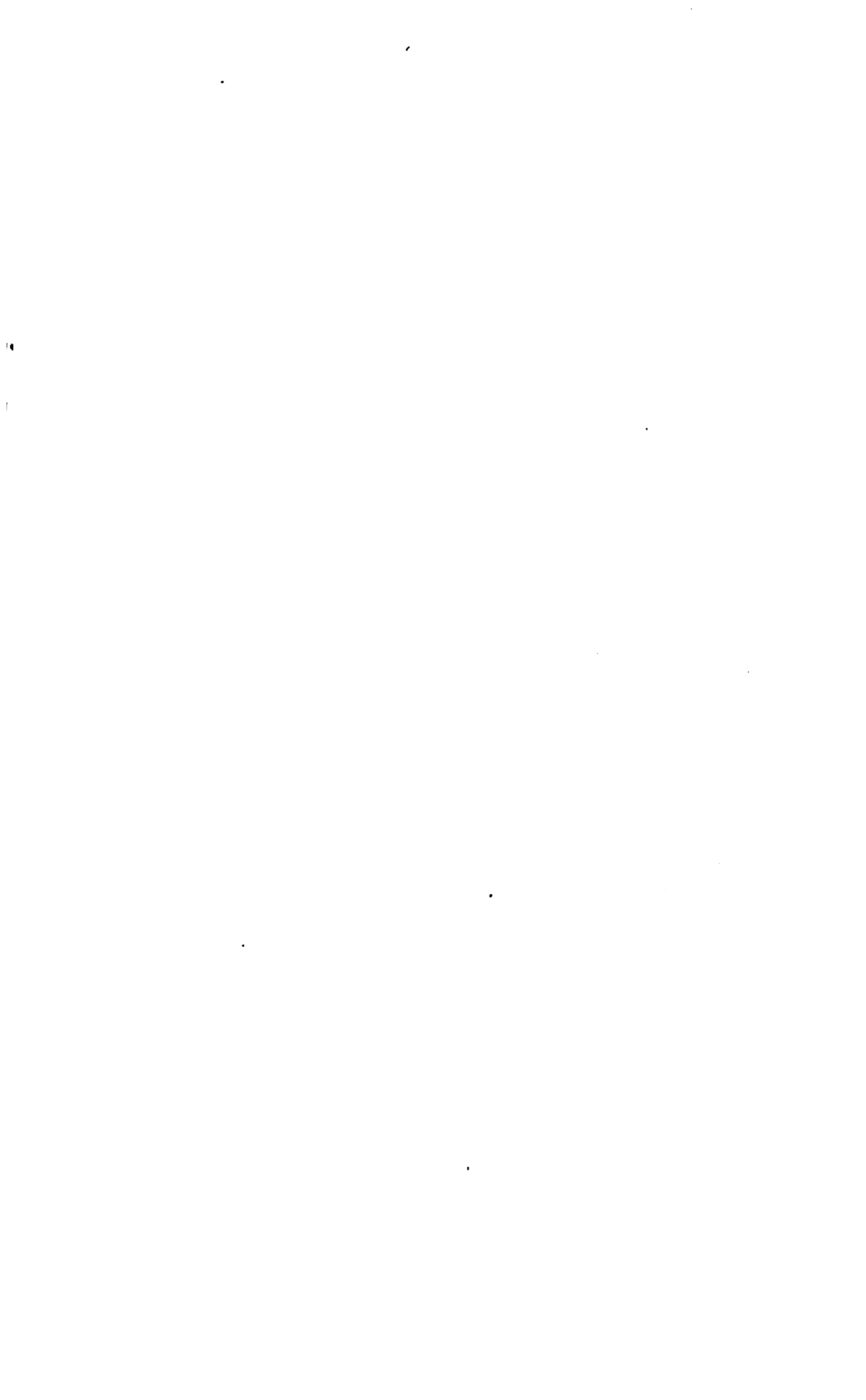
---

CX. BAND. III. HEFT.

---

ABTHEILUNG II. a.

**ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.**



## VII. SITZUNG VOM 7. MÄRZ 1901.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 109, Abth. IIa, Heft VIII und IX (October und November 1900); Abth. IIb, Heft VIII bis X (October bis December 1900); Abth. III, Heft V bis VII (Mai bis Juli 1900).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht zwei Arbeiten aus seinem Laboratorium:

I. »Über die Einwirkung von Jod auf die Silbersalze von Oxysäuren«, vorläufige Mittheilung von den Herren R. O. Herzog und R. Leiser.

II. »Über die Condensation von Propion- und Formaldehyd«, von den Herren H. Koch und Th. Zerner.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung von Herrn Dr. Eduard Haschek aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien vor, welche den Titel führt: »Spectralanalytische Studien (I. Mittheilung)«.

Herr Franz Baron Nopcsa jun. legt eine Arbeit vor, betitelt: »Dinosaurierreste aus Siebenbürgen (Schädelreste von *Mochlodon*). Anhang: Zur Phylogenie der *Ornithopodidae*«.

Herr Emil Pilous in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Neues Princip zur Verbrennung von Gas und Petroleum«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Baratta M., Carta sismica d' Italia (Aree di scuotimento). Voghera, 1901. 4°.

Königl. württemberg. Ministerium des Kirchen- und Schulwesens, Veröffentlichungen der königl. württemberg. Commission für die internationale Erdmessung, IV. Heft: Astronomisches Nivellement durch Württemberg, etwa entlang dem Meridian 9° 4′ östlich von Greenwich, von Dr. E. Hammer. Stuttgart, 1901. 4°.

## VIII. SITZUNG VOM 14. MÄRZ 1901.

Herr Prof. Josef Sterba in Wien übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Über eine Gruppe der Cayley'schen Gleichung analoger Relationen«.

Das w. M. Herr Hofrath V. v. Lang berichtet über einen akustischen Versuch über den directen Nachweis der Schwingungsknoten transversaler Schwingungen mit dem Ohre.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Sokolow S., Corrélations regulières supplémentaires du système planétaire. Moskau, 1901. 8°.

## IX. SITZUNG VOM 21. MÄRZ 1901.

Das w. M. Herr Hofrath Zd. H. Skraup in Graz legt eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn R. Kremann verfasste Untersuchung vor: »Über Acetochlorglucose, Acetochlorgalactose und Acetochlormilchzucker«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. G. Goldschmiedt legt eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. Alfred Kirpal, betitelt: »Das Betaïn der Chinolinsäure«, vor.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Wien übersendet folgende drei Abhandlungen:

I. »Über die Abel'sche Darstellung des größten gemeinsamen Theilers zweier ganzer Functionen«;
II. »Über die Vertheilung der Divisionsreste«;
III. »Über die Congruenzen nach einem primzahligen Modul«.

Das w. M. Herr Hofrath Ad. Lieben legt zwei am Technologischen Gewerbemuseum in Wien zur Ausführung gebrachte Arbeiten von Herrn Dr. Paul Cohn vor:

I. »Über neue Diphenylaminderivate«.
II. »Über die Chlorierung von *o*-Nitrotoluol«.

Herr Dr. Adolf Jolles in Wien legt eine Arbeit vor, welche den Titel führt: »Beiträge zur Kenntnis der Eiweißkörper«.

Das w. M. Herr Hofrath G. v. Escherich überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. O. Biermann in Brünn: »Über die Discriminante einer in der Theorie der

doppelt-periodischen Functionen auftretenden Transformationsgleichung« (II. Mittheilung).

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Groth H., Dr., Zur Dynamik des Himmels. Hamburg, 1901. 8°.

Weinek L., Dr., Erläuterungen zum Prager photographischen Mondatlas. (Mit 4 Abbildungen im Texte.) Prag, 1901, 8°.

# Über Congruenzen nach einem primzahligen Modul

von

**Leopold Gegenbauer** in Wien,

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1901.)

Die Bedingungen für das Vorhandensein einer bestimmten Anzahl von untereinander und von Null verschiedenen Wurzeln einer Congruenz in Bezug auf einen Primzahlmodul wurden bekanntlich zuerst von Julius König ausgesprochen und von G. Rados in seiner im 99. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik enthaltenen Arbeit »Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades« bewiesen. Kronecker hat sodann in der in demselben Bande erschienenen Abhandlung »Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen« für die König'schen Bedingungen andere, ihnen äquivalente aufgestellt, deren Anzahl wesentlich geringer ist, indem er zeigte, dass die Summe aus der Anzahl der genannten Wurzeln und dem Range des Coefficientensystems einer Congruenz bezüglich des Moduls um eins kleiner ist als der als primzahlig vorausgesetzte Modul. Ich habe in meiner im 95. Bande dieser Sitzungsberichte veröffentlichten Note »Die Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl von Wurzeln einer Congruenz« die Kronecker'schen Relationen in möglichst einfacher Weise begründet, hierauf in meiner in demselben Bande enthaltenen Mittheilung »Über Congruenzen« zwei neue, diesen äquivalente Bedingungssysteme aufgestellt und endlich in der im 98. Bande dieser Sitzungsberichte erschienenen Arbeit »Zur Theorie der Congruenzen« die eine der von Kronecker a. a. O. angegebenen zwei Formen derjenigen Congruenz, welcher alle untereinander und von Null

verschiedenen Wurzeln einer vorgelegten Congruenz nach einem Primmodul genügen, neuerdings bewiesen und überdies eine neue (dritte) Form derselben aufgestellt.

Arbeiten über die Anzahl derjenigen Wurzeln einer Congruenz, die gewisse arithmetische Eigenschaften besitzen, sind meines Wissens bisher nicht veröffentlicht worden. Ich will daher in den folgenden Zeilen eine derartige Untersuchung mittheilen. Dieselbe betrifft die Bedingungen für das Vorhandensein einer bestimmten Anzahl von Wurzeln einer primmoduligen Congruenz, welche quadratische Reste, beziehungsweise Nichtreste des Moduls sind, denen, wie sich ergeben wird, eine ganz analoge Gestalt gegeben werden kann, wie die von Kronecker für den allgemeinen Fall ermittelte.

1. Damit die Congruenz

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\mu=p-2} a_\mu x^{p-2-\mu} \equiv 0 \pmod{p}$$

durch einen quadratischen Rest $r_\lambda$ $\left(\lambda = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ befriedigt werden kann, muss das Product

$$\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\mu=p-2} a_\mu r^{p-2-\mu}$$

durch $p$ theilbar sein, und dies reicht auch hiefür vollkommen aus. Wegen der für alle $r_\lambda$ bestehenden Congruenz

$$r_\lambda^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \qquad \ldots 1)$$

ist dasselbe dem Producte

$$\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-3}{2}} \left(a_\mu + a_{\mu+\frac{p-1}{2}}\right) r_\lambda^{\frac{p-3}{2}-\mu}$$

nach dem Modul $p$ congruent, welches, da die Congruenz 1) so viele Wurzeln hat, als ihr Grad anzeigt, nach einem bekannten Satze modulo $p$ der Resultante der zwei Gleichungen

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-3}{2}} (a_\mu + a_{\mu+\frac{p-1}{2}}) x^{\frac{p-3}{2}-\mu} = 0$$

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 0,$$

also der doppeltorthosymmetrischen Determinante

$$\left| a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right| \left(i, \mu = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right) \quad (a_\varkappa \equiv a_{\varkappa+\lambda(p-1)} \pmod{p})$$

congruent ist. Daher hat man das Theorem:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Congruenz

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=p-2} a_\mu x^{p-2-\mu} \equiv 0 \pmod{p}$$

mit primzahligem Modul $p$ ein quadratischer Rest des Moduls genügt, besteht darin, dass die doppeltorthosymmetrische Determinante

$$\left| a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right| \left(\mu, i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right) \quad (a_\varkappa \equiv a_{\varkappa+\lambda(p-1)} \pmod{p})$$

durch $p$ theilbar ist.

Auf demselben Wege findet man ferner den Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die primmodulige Congruenz

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=p-2} a_\mu x^{p-2-\mu} \equiv 0 \pmod{p}$$

einen quadratischen Nichtrest des Moduls zur Wurzel hat, besteht darin, dass die doppeltorthosymmetrische Determinante

$$\left| a_{\mu+i} - a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right| \left(\mu, i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right) \quad (a_\varkappa \equiv a_{\varkappa+\lambda(p-1)} \pmod{p})$$

durch den Modul theilbar ist.

Als Corrolare folgen hieraus auf Grund des Kronecker-schen und zweier von mir in den zwei zuletzt angeführten Arbeiten aufgestellten Sätze die Theoreme:

Der Rang des Systems $a_{i+\varkappa}(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2;$ $a_{\varkappa+\lambda(p-1)} \equiv a_\varkappa \pmod{p})$ in Bezug auf den Modul $p$ ist höchstens gleich $p-3$, wenn die Circulanten

$$\left|a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}}\right|, \quad \left|a_{\mu+i} - a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}}\right| \left(p, i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right)$$

durch die Primzahl $p$ theilbar sind.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Congruenz

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=p-2} a_\mu x^{p-2-\mu} \equiv 0 \pmod{p}$$

mit primzahligen Modul genau $\frac{p-1}{2} - r$ verschiedene quadratische Reste des Moduls zu Wurzeln hat, bestehen darin, dass die doppeltorthosymmetrische Determinante

$$\left|a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}}\right| \left(\mu, i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right) \quad (a_\varkappa \equiv a_{\varkappa+\lambda(p-1)} \pmod{p})$$

nebst ihren $\frac{p-3}{2} - r$ successiven Ableitungen noch $a_{\frac{p-3}{2}} + a_{p-2}$ den Factor $p$ besitzt, während die $\left(\frac{p-1}{2} - r\right)^{\text{te}}$ zu dieser Primzahl theilerfremd ist. Diese Reste genügen der Congruenz

$$\left(x \frac{\partial}{\partial\left(a_1 + a_{\frac{p-1}{2}+1}\right)} - \frac{\partial}{\partial\left(a_0 + a_{\frac{p-1}{2}}\right)}\right)^{\left(\frac{p-1}{2} - r\right)} \cdot$$

$$\cdot \left|a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}}\right| \left(\mu, i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p},$$

in welcher die $\nu$te Potenz des Ableitungszeichens die $\nu$te Ableitung vorstellt.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die primmodulige Congruenz

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=p-2} a_\mu x^{p-2-\mu} \equiv 0 \pmod{p}$$

genau $\frac{p-1}{2}-r$ verschiedene quadratische Nichtreste des Moduls zu Wurzeln hat, bestehen darin, dass die doppeltorthosymmetrische Determinante

$$\left| a_{\mu+1} - a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right| \left(\mu, i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right) \quad (a_\varkappa \equiv a_{\varkappa+\lambda(p-1)} \pmod{p})$$

nebst ihren $\frac{p-3}{2}-r$ successiven Ableitungen nach $a_{\frac{p-3}{2}}+a_{p-2}$ den Modul als Theiler besitzt, während die $\left(\frac{p-1}{2}-r\right)^{\text{te}}$ zu ihm theilerfremd ist; diese quadratischen Nichtreste genügen der Congruenz

$$\left(x\frac{\partial}{\partial\left(a_1+a_{\frac{p-1}{2}+1}\right)} - \frac{\partial}{\partial\left(a_0+a_{\frac{p-1}{2}}\right)}\right)^{\left(\frac{p-1}{2}-r\right)} .$$

$$.\left| a_{\mu+i} - a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right| \left(\mu, i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right) \pmod{p},$$

in welcher die $\nu$te Potenz des Ableitungszeichens die $\nu$te Ableitung vorstellt.

Ist der Rang des Größensystems $a_{\mu+i}+a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}}$ $\left(\mu, i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2};\ a_\varkappa \equiv a_{\varkappa+\lambda(p-1)} \pmod{p}\right)$ in Bezug auf den primzahligen Modul $p$ gleich $\varkappa$, der des Systems $a_{\mu+i}-a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}}$ aber gleich $\lambda$, so ist der Rang des Systems $a_{i_1+\mu_1}(i_1, \mu_1 = 0, 1, \ldots, p-2)$ gleich $\varkappa+\lambda$.

2. Es soll nun ein anderes System von Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl von Congruenzwurzeln,

die quadratische Reste, beziehungsweise Nichtreste sind, aufgestellt werden. Multipliciert man die Congruenz

$$f(r_\lambda) \equiv \sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-3}{2}} (a_\mu + a_{\mu+\frac{p-1}{2}}) r_\lambda^{\frac{p-3}{2}-\mu} \pmod{p}$$

der Reihe nach mit $r_\lambda, r_\lambda^2, \ldots, r_\lambda^\varkappa \left(\varkappa < \frac{p-1}{2}\right)$ und beachtet hiebei die Congruenz 1), so erhält man die Beziehungen

$$r_\lambda f(r_\lambda) \equiv \sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-3}{2}} (a_{\mu+1} + a_{\mu+1+\frac{p-1}{2}}) r_\lambda^{\frac{p-3}{2}-\mu} \pmod{p}$$

$$r_\lambda^2 f(r_\lambda) \equiv \sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-3}{2}} (a_{\mu+2} + a_{\mu+2+\frac{p-1}{2}}) r_\lambda^{\frac{p-3}{2}-\mu} \pmod{p}$$

.........................................

$$r_\lambda^\varkappa f(r_\lambda) \equiv \sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-3}{2}} (a_{\mu+\varkappa} + a_{\varkappa+\mu+\frac{p-1}{2}}) r_\lambda^{\frac{p-3}{2}-\mu} \pmod{p},$$

aus denen, falls man sie (einschließlich der ursprünglichen) der Reihe nach mit den Adjuncten der Elemente der letzten Verticalreihe der doppeltorthosymmetrischen Determinante

$$\left| a_{i+\mu} + a_{i+\mu+\frac{p-1}{2}} \right|_{(i,\mu=0,1,2,\ldots,\varkappa)}$$

multipliciert, die Beziehung

$$\varphi_\varkappa(r_\lambda) f(r_\lambda) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\tau=\varkappa}^{\tau=\frac{p-3}{2}} \left| a_{i+\mu} + a_{\mu+i+\frac{p-3}{2}} \right|_{(i=0,1,2,\ldots,\varkappa-1,\varkappa;\ \mu=0,1,2,\ldots,\varkappa-1,\tau)} r_\lambda^{\frac{p-3}{2}-\tau}$$

folgt, in welcher $\varphi_\varkappa(x)$ eine ganze ganzzahlige Function von $x$ vom Grade $\varkappa$ ist, in der nicht alle Coefficienten durch $p$ theilbar

sind, wenn die oben angegebene Determinante zu $p$ theilerfremd ist. Dieselbe zeigt, dass $f(x)$ für nicht mehr als $\frac{p-3}{2}-\varkappa$ quadratische Reste des Moduls $p$ durch den Modul theilbar werden kann, wenn die eben genannte doppeltorthosymmetrische Determinante zu diesem theilerfremd ist.

Haben alle doppeltorthosymmetrischen Determinanten

$$\left| a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right|_{(\mu=0,1,2,\ldots,\varkappa,\tau;\ i=0,1,2,\ldots,\varkappa,\varkappa+1)}$$

für $\tau = \varkappa+1, \varkappa+2, \ldots, \frac{p-3}{2}$ den Factor $p$, so besteht, wie man auf dem oben eingeschlagenen Wege findet, die Convergenz

$$\varphi_{\varkappa+\lambda}(r_\lambda) f(r_\lambda) \equiv 0 \pmod{p}$$

für jeden Wert von $\lambda$ $\left(\lambda = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$. Da nun der Coefficient von $x^\varkappa$ in $\varphi_{\varkappa+1}(x)$ die Circulante

$$\left| a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right|_{(i=0,1,2,\ldots,\varkappa-1,\varkappa;\ \mu=0,1,2,\ldots,\varkappa-1,\varkappa)}$$

und demnach der Voraussetzung nach zu $p$ theilerfremd ist, so kann $\varphi_{\varkappa+1}(x)$ nicht für mehr als $\varkappa+1$ untereinander verschiedene Werte von $x$ durch $p$ theilbar werden, und demnach genügen der Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ mindestens $\frac{p-3}{2}-\varkappa$ quadratische Reste von $p$. Man hat daher den Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die primmodulige Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

genau $\frac{p-3}{2}-\varkappa$ untereinander verschiedene quadratische Reste des Moduls zu Wurzeln hat, bestehen darin, dass die doppeltorthosymmetrischen Determinanten

$$\left| a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right|_{(\mu=0,1,2,\ldots,\varkappa,\tau;\ i=0,1,2,\ldots,\varkappa,\varkappa+1)}$$

für $\tau = \varkappa+1, \varkappa+2, \ldots, \frac{p-3}{2}$ durch den Modul theilbar sind, während die Circulante

$$\left| a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right|_{(i,\mu=0,1,2,\ldots,\varkappa-1,\varkappa)}$$

zu ihm theilerfremd ist. Die der vorgelegten Congruenz genügenden quadratischen Reste des Moduls sind Wurzeln der Congruenz

$$\sum_{\tau=\varkappa}^{\tau=\frac{p-1}{2}} \left| a_{\mu+i} + a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right|_{(i=0,1,2,\ldots,\varkappa;\ \mu=0,1,2,\ldots,\varkappa-1,\tau)} x^{\frac{p-3}{2}-\tau} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Auf demselben Wege findet man das Theorem:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die primmodulige Congruenz

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=p-2} a_\mu x^{p-2-\mu} \equiv 0 \pmod{p}$$

genau $\frac{p-3}{2} - \varkappa$ untereinander verschiedene quadratische Nichtreste des Moduls zu Wurzeln hat, bestehen darin, dass die doppeltorthosymmetrischen Determinanten

$$\left| a_{\mu+i} - a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right|_{(i=0,1,2,\ldots,\varkappa,\varkappa+1;\ \mu=0,1,2,\ldots,\varkappa,\tau)}$$

für $\tau = \varkappa+1, \varkappa+2, \ldots, \frac{p-3}{2}$ durch den Modul theilbar sind, während die Circulante

$$\left| a_{\mu+i} - a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right|_{(i=0,1,2,\ldots,\varkappa;\ \mu=0,1,2,\ldots,\varkappa)}$$

zu ihm theilerfremd ist. Die dieser Congruenz genügenden quadratischen Nichtreste des Moduls sind Wurzeln der Congruenz

$$\sum_{\tau=\varkappa}^{\tau=\frac{p-3}{2}} \left| a_{\mu+i} - a_{\mu+i+\frac{p-1}{2}} \right|_{(i,\mu=0,1,2,\ldots,\varkappa)} x^{\frac{p-3}{2}-\tau} \equiv 0 \pmod{p}.$$

# Über die Vertheilung der Divisionsreste

von

**Leopold Gegenbauer** in Wien,

c. M. k. Akad.

**(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1901.)**

1. Lejeune Dirichlet hat in seiner in den Abhandlungen der königl. preußischen Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1849 enthaltenen Arbeit: »Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie« gezeigt, dass bei der Division einer sehr großen ganzen Zahl $n$ durch alle nicht größeren ganzen Zahlen der Rest weit öfter (beiläufig $0 \cdot 614n$-mal) unter dem halben Divisor liegt, als er denselben übertrifft oder ihm gleich wird (ungefähr $0 \cdot 386n$-mal), sowie dass die Summe der $n$ Quotienten aus Divisionsrest und zugehörigem Divisor ungefähr den Wert $(1-C)n$ (d. i. $0 \cdot 423n$) hat, wo $C$ die Euler-Mascheroni'sche Constante $0 \cdot 57721566\ldots$ ist. Wären die Divisionsreste innerhalb der genannten zwei Intervalle gleichmäßig vertheilt, so wäre diese Summe beiläufig gleich $0 \cdot 443n$, und daher liegt die Vermuthung nahe, dass sie sich gegen den Nullpunkt hin anhäufen, und dies wird auch durch eine genauere Untersuchung bestätigt. Man könnte eine solche auf Grund der von mir in der im 49. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien veröffentlichten Abhandlung: »Arithmetische Theoreme« abgeleiteten Relation

$$\sum_{x=1}^{x=n} [\varkappa r_x] = \left(\varkappa \log \varkappa + \varkappa - 1 - \varkappa \sum_{y=1}^{y=\varkappa-1} \frac{1}{y}\right) n + \alpha \sqrt{n},$$

in welcher

$$r_x = \frac{n}{x} - \left[\frac{n}{x}\right]$$

und $\alpha$ eine für alle $n$ endliche Größe ist, führen. Diese Relation kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa} (\lambda-1) A_{n,x}\left(\frac{\lambda-1}{\varkappa}, \frac{\lambda}{\varkappa}\right) =$$

$$= \left(\varkappa \log \varkappa + \varkappa - 1 - \varkappa \sum_{y=1}^{y=\varkappa-1} \frac{1}{y}\right) n + \alpha \sqrt{n}, \qquad 1)$$

wenn mit $A_{n,x}(\alpha,\beta)$ die Anzahl derjenigen Größen $r_x$ $(x = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnet wird, welche der Bedingung

$$\alpha \leqq r_x < \beta$$

genügen. Es mag bemerkt werden, dass der Coefficient von $n$ auf der rechten Seite dieser Gleichung für $\varkappa = 2, 3, 4, 6, 8$ der Reihe nach die Werte $0 \cdot 386\ldots$, $0 \cdot 821\ldots$, $1 \cdot 211\ldots$, $2 \cdot 038\ldots$, $2 \cdot 874\ldots$ annimmt. Subtrahiert man unter Vernachlässigung der Größen von der Ordnung $\sqrt{n}$ das Doppelte der aus 1) für $\varkappa = 2$ entstehenden Formel

$$A_{n,x}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = A_{n,x}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) + A_{n,x}\left(\frac{2}{3}, 1\right) = 0 \cdot 386 n \qquad 2)$$

von der aus ihr für $\varkappa = 3$ sich ergebenden

$$A_{n,x}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) + 2 A_{n,x}\left(\frac{2}{3}, 1\right) =$$

$$= A_{n,x}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) + A_{n,x}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) + 2 A_{n,x}\left(\frac{2}{3}, 1\right) = 0 \cdot 821 n,$$

so erhält man die Beziehung

$$A_{n,x}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = 0 \cdot 049 n + A_{n,x}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right),$$

deren Verbindung mit

$$A_{n,x}\left(0, \frac{1}{2}\right) - A_{n,x}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 0\cdot 228n \tag{3}$$

die Gleichung

$$A_{n,x}\left(0, \frac{1}{3}\right) = 0\cdot 179n + A_{n,x}\left(\frac{2}{3}, 1\right) \tag{4}$$

liefert.

Man hat daher den Satz:

Dividiert man eine sehr große ganze Zahl $n$ durch alle nicht kleineren, so liegen von den Quotienten aus Divisionsrest und zugehörigem Divisor um $0\cdot 179n$ mehr zwischen 0 und $\frac{1}{3}$ (excl.), als zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 und um $0\cdot 049n$ mehr zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ (excl.) als zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ (excl.).

Subtrahiert man von der aus 1) für $x = 4$ sich ergebenden Gleichung

$$A_{n,x}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + 2A_{n,x}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + 3A_{n,x}\left(\frac{3}{4}, 1\right) = 1\cdot 211n$$

das Dreifache von 2), so entsteht die Relation

$$A_{n,x}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 0\cdot 053n + A_{n,x}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right),$$

aus welcher wegen 3) folgt

$$A_{n,x}\left(0, \frac{1}{4}\right) = 0\cdot 175n + A_{n,x}\left(\frac{3}{4}, 1\right).$$

Es liegen also von den in dem vorigen Theoreme angeführten $0\cdot 179n$ Verhältnissen aus dem Intervalle $0\ldots\frac{1}{3}$ (excl.) $0\cdot 175n$ zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ (excl.) und nur $0\cdot 004n$ zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$.

Auf demselben Wege findet man, dass von den eben angeführten Verhältnissen des Intervalles $0 \ldots \frac{1}{4}$ $0{\cdot}169\,n$ zwischen 0 und $\frac{1}{6}$ (excl.) liegen u. s. f.

Ich will es unterlassen, aus meiner Formel weitere Sätze abzuleiten, da Herr Berger in seiner in den »Nova Acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis (III. s., vol. XI) enthaltenen Arbeit: »Sur quelques applications de la fonction $\Gamma$ à la théorie des nombres« für die Anzahl $B(\alpha, \beta)$ derjenigen von den oft genannten Verhältnissen, welche zwischen $\alpha$ und $\beta$ liegen, die allgemeine Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{B(\alpha, \beta)}{n} = \frac{d \log \Gamma(1+\beta)}{d\beta} - \frac{d \log \Gamma(1+\alpha)}{d\alpha}$$

ermittelt und aus ihr eine Reihe von interessanten speciellen Formeln hergeleitet hat.

2. Es drängt sich nun sofort die Frage auf, ob die ermittelte Vertheilung der Divisionsreste von der Beschaffenheit der Divisoren unabhängig ist oder nicht, d. h. ob man dasselbe Vertheilungsgesetz erhält, wenn man als Divisoren nicht alle ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$, sondern nur solche nimmt, welche eine bestimmte arithmetische Eigenschaft besitzen. Mit einer derartigen Untersuchung hat sich schon Lejeune Dirichlet in seiner im 47. Bande des Crelle'schen Journals erschienenen Arbeit: »Über ein die Division betreffendes Problem« beschäftigt, in welcher er bewies, dass die Anzahl derjenigen unter den Divisoren $1, 2, \ldots, p \leqq n$, denen ein Rest entspricht, dessen Verhältnis zum Divisor unter einem gegebenen echten Bruch $\alpha$ liegt, sich zu $p$ verhält, wie $\alpha$ zu 1 oder wie

$$\frac{n}{p}\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi - \frac{n}{p}\sum_{s=1}^{s=\left[\frac{n}{p}\right]} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{n}{p}\,\frac{1}{\left[\frac{n}{p}\right]+\alpha}\right)\left\{\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p} - \alpha\right]\right\}$$

zu 1, je nachdem $\frac{n}{p}$ mit $n$ über jede Grenze hinaus wächst oder endlich bleibt, wobei aber in beiden Fällen vorausgesetzt ist, dass $p$ von einer höheren Ordnung als $\sqrt{n}$ ist. Einen weiteren Beitrag zur Beantwortung der eben erwähnten Frage zu liefern, sind die folgenden Zeilen bestimmt.

3. Es mögen zunächst als Divisoren nur die durch eine gegebene Zahl $\lambda$ theilbaren ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$, deren Anzahl $\left[\frac{n}{\lambda}\right]$ ist, benützt werden. Aus der Relation

$$r_{\lambda x} = \frac{n}{\lambda x} - \left[\frac{n}{\lambda x}\right]$$

folgt sofort für jedes ganzzahlige positive $\varkappa$ die Beziehung

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\lambda}\right]} [\varkappa r_{\lambda x}] = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]} \left[\frac{\varkappa n}{\lambda x}\right] - \varkappa \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\lambda}\right]} \left[\frac{n}{\lambda x}\right] - \sum_{x=\left[\frac{n}{\lambda}\right]+1}^{x=\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]} \left[\frac{\varkappa n}{\lambda x}\right],$$

welche sich unter Benützung der bekannten Formel

$$\sum_{x=1}^{x=m} \left[\frac{m}{x}\right] = m(\log m + 2C - 1) + \beta\sqrt{m},$$

in der $\beta$ eine für alle $m$ endliche Größe ist, in die folgende verwandeln lässt:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\lambda}\right]} [\varkappa r_{\lambda x}] = \frac{\varkappa n}{\lambda} \log \varkappa - \sum_{x=\left[\frac{n}{\lambda}\right]+1}^{x=\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]} \left[\frac{\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]}{x}\right] + \delta\sqrt{n}.$$

Nun ist

$$\sum_{x=\left[\frac{n}{\lambda}\right]+1}^{x=\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]} \left[\frac{\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]}{x}\right] = \sum_{y=1}^{y=\alpha} \sum_{x=\left[\frac{n}{\lambda}\right]+1}^{x=\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]} \varepsilon\left(\frac{\varkappa n}{\lambda x y}\right),$$

wo

$$\alpha = \left[\frac{\varkappa n}{\lambda\left\{\left[\frac{n}{\lambda}\right]+1\right\}}\right]$$

ist, woraus unmittelbar folgt, dass $\alpha < \varkappa$ ist. Fügt man nun auf der rechten Seite dieser Gleichung für jeden Wert von $y$, die den Werten $x = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{\lambda}\right]$ entsprechenden Functionswerte von $\varepsilon(a)$, die wegen $a \geqq 1$ sämmtlich gleich 1 sind, hinzu und beachtet, dass

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]} \varepsilon\left(\frac{\varkappa n}{\lambda y . x}\right) = \left[\frac{\varkappa n}{\lambda y}\right]$$

ist, sowie dass für $y = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \varkappa - 1$

$$\left[\frac{\varkappa n}{\lambda y}\right] = \left[\frac{n}{\lambda}\right]$$

wird, so erhält man die Gleichung

$$\sum_{x=\left[\frac{n}{\lambda}\right]+1}^{x=\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]} \left[\frac{\left[\frac{\varkappa n}{\lambda}\right]}{x}\right] = -(\varkappa - 1)\left[\frac{n}{\lambda}\right] + \sum_{y=1}^{y=\varkappa-1} \left[\frac{\varkappa n}{\lambda y}\right]$$

und daher ist

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\lambda}\right]} [\varkappa r_{\lambda x}] = \left(\varkappa \log \varkappa + \varkappa - 1 - \varkappa \sum_{y=1}^{y=\varkappa-1} \frac{1}{y}\right)\frac{n}{\lambda} + \varepsilon\sqrt{n},$$

wo $\varepsilon$ für alle Werte von $n$ endlich ist.

Es befolgt daher auch in diesem Falle die Vertheilung der Divisionsreste dasselbe Gesetz, wie im allgemeinen. Speciell hat man den Satz:

Dividiert man eine sehr große ganze Zahl durch alle nicht größeren geraden (ungeraden) ganzen Zahlen, so verhält sich die Anzahl derjenigen Divisionsreste, welche unterhalb des halben Divisors liegen, zur Anzahl der übrigen wie 307 zu 193.

Es mag an dieser Stelle nur bemerkt werden, dass sich auf dem eingeschlagenen Wege dasselbe Gesetz auch für die ganzzahligen Divisoren der Form $\lambda x + \mu$ herleiten lässt.

4. Zu einem etwas anderen Resultate gelangt man, wenn man als Divisoren nur jene ganzen Zahlen $\xi$ des Intervalles $1 \ldots n$ nimmt, welche durch kein Quadrat (außer 1) theilbar sind. In diesem Falle hat man nämlich zunächst die Gleichung

$$\sum_{1}^{n}{}_{\xi}[\varkappa r_{\xi}] = \sum_{1}^{\varkappa n}{}_{\xi}\left[\frac{\varkappa n}{\xi}\right] - \varkappa \sum_{1}^{n}{}_{\xi}\left[\frac{n}{\xi}\right] - \sum_{n+1}^{\varkappa n}{}_{\xi}\left[\frac{\varkappa n}{\xi}\right].$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{m}{}_{\xi}\left[\frac{m}{\xi}\right] &= \sum_{y=1}^{y=m}\sum_{1}^{m}{}_{\xi}\,\varepsilon\left(\frac{m}{\xi y}\right)\\ &= \sum_{r=1}^{r=m}\bar{\psi}_0(r),\end{aligned}$$

wo $\bar{\psi}_{\varkappa}(r)$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler der ganzen Zahl $r$ ist, welche durch kein Quadrat (außer 1) theilbar sind. Da nun nach einem von Herrn Mertens gefundenen Satze

$$\sum_{r=1}^{r=m}\bar{\psi}_0(r) = \frac{6m}{\pi^2}\left(\log m + \frac{12f}{\pi^2} + 2C - 1\right) + \zeta\sqrt{n}\log n$$

ist, wo $\zeta$ für alle Werte von $n$ endlich ist und

$$f = \sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^2} = 0\cdot 9375482543\ldots$$

ist, so hat man zunächst die Beziehung

$$\sum_{1}^{n}{}_{\xi}[\varkappa r_{\xi}] = \frac{6n}{\pi^2}\varkappa\log\varkappa - \sum_{n+1}^{\varkappa n}{}_{\xi}\left[\frac{\varkappa n}{\xi}\right] + \eta\sqrt{n}\log n \quad (\lim_{n=\infty}\eta \text{ endlich}).$$

Man hat ferner

$$\sum_{n+1}^{\varkappa n}{}_{\xi}\left[\frac{\varkappa n}{\xi}\right] = \sum_{y=1}^{y=\rho}\sum_{n+1}^{\varkappa n}{}_{\xi}\,\varepsilon\left(\frac{\varkappa n}{\xi y}\right),$$

wo

$$\rho = \left[\frac{\varkappa n}{n+\tau}\right]$$

ist, wenn $n+\tau$ die erste durch kein Quadrat (außer 1) theilbare ganze Zahl zwischen $n$ (excl.) und $\varkappa n$ (incl.) ist. Schreibt man für die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Doppelsumme

$$\sum_{y=1}^{y=\rho}\left[\frac{\varkappa n}{y}\right]=\sum_{x=1,\,y=1}^{x=\varkappa n,\,y=\rho}\varepsilon\left(\frac{\varkappa n}{xy}\right),$$

so hat man für $y=1$ die Werte $x=1,2,\ldots,n$ und $x$ gleich den zwischen $n$ (excl.) und $\varkappa n$ (incl.) gelegenen ganzen Zahlen mit quadratischen Factoren (außer 1) also im ganzen $\varkappa n-\mathfrak{Q}(\varkappa n)+\mathfrak{Q}(n)$ Werte von $x$ hinzugefügt, wo mit $\mathfrak{Q}(\mu)$ die Anzahl der ganzen Zahlen von 1 bis $\mu$ bezeichnet wird, die keinen quadratischen Theiler (außer 1) besitzen. Da alle Producte aus den genannten Wertepaaren $x, y$ $\varkappa n$ nicht übertreffen, so ist für jedes derselben $\varepsilon\left(\frac{\varkappa n}{xy}\right)$ gleich 1. Analog hat man für $y=2$ für $x$ die Werte $1, 2, \ldots, n$ und die ganzen Zahlen des Intervalles $n$ (excl.) $\ldots\left[\frac{\varkappa n}{2}\right]$ (incl.) und demnach zur Summe die Zahl $\left[\frac{\varkappa n}{2}\right]-\mathfrak{Q}\left(\frac{\varkappa n}{2}\right)+\mathfrak{Q}(n)$ addiert u. s. f., so dass also

$$\sum_{n+1}^{\varkappa n}\xi\left[\frac{\varkappa n}{\xi}\right]=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\rho}\mathfrak{Q}\left(\frac{\varkappa n}{\lambda}\right)-\rho\,\mathfrak{Q}(n)$$

ist. Beachtet man nun, dass

$$\mathfrak{Q}(m)=\frac{6m}{\pi^2}+\vartheta\sqrt{n}\quad(\lim_{n=\infty}\vartheta \text{ endlich}),$$

so kann man die folgenden Beziehungen aufstellen:

$$\sum_{1}^{n}\xi[\varkappa r_\xi]=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa}(\lambda-1)A_{n,\xi}\left(\frac{\lambda-1}{\varkappa},\frac{\lambda}{\varkappa}\right)=$$

$$=\left(\varkappa\log\varkappa+\rho-\varkappa\sum_{y=1}^{y=\rho}\frac{1}{y}\right)\frac{6n}{\pi^2}+\alpha_1\sqrt{n}\log n\quad(\lim_{n=\infty}\alpha_1 \text{ endlich})$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa}(\lambda-1)A_{n,\xi}\left(\frac{\lambda-1}{\varkappa},\frac{\lambda}{\varkappa}\right)}{\mathfrak{Q}(n)}=\varkappa\log\varkappa+\rho-\sum_{y=1}^{y=\rho}\frac{1}{y}.$$

Da die ganze Zahl $\rho$, welche selbstverständlich nicht größer als $\varkappa-1$ sein kann, den Wert $\varkappa-\alpha$ hat, wenn $\tau$ der Bedingung

$$\frac{\alpha n}{\varkappa-\alpha} \geqq \tau > \frac{(\alpha-1)n}{\varkappa-\alpha+1}$$

genügt, so folgt zunächst aus dem Bertrand'schen Lemma, dass auch in dem Falle, in welchem $n$ durch alle nicht kleineren ganzen Zahlen ohne quadratischen Theiler (außer 1) dividiert wird, die Vertheilung der Divisionsreste nach dem Dirichlet'schen Gesetze erfolgt. Für andere Intervalle, als die von Dirichlet untersuchten $\left(0 \ldots \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \ldots 1\right)$ wird das Vertheilungsgesetz dann, aber auch nur dann, von dem durch die Gleichung 1) gegebenen allgemeinen verschieden sein können, wenn auf $n$ in der Reihe der natürlichen Zahlen unmittelbar eine sehr große Anzahl von ganzen Zahlen mit quadratischem Theiler (außer 1) folgt. Die auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende Summe ist in einem solchen Falle stets größer, als der Ausdruck des allgemeinen Vertheilungsgesetzes; so ist z. B. die Differenz aus diesen zwei Größen für $\alpha = 2$, d. i. wenn auf $n$ mehr als $\frac{n}{\varkappa-1}$ und weniger als $\frac{2n}{\varkappa-2}+1$ ganze Zahlen ohne quadratischen Divisor (außer 1) unmittelbar folgen, gleich $\frac{1}{\varkappa-1}$, für $\alpha = 3$ $\frac{3\varkappa-4}{(\varkappa-1)(\varkappa-2)}$ u. s. f. Es haben also die Divisoren ohne quadratischen Theiler (außer 1) in den Fällen, in denen sie eine Abänderung des allgemeinen Vertheilungsgesetzes der Divisionsreste herbeiführen, die Tendenz, die Reste von der Null abzurücken.

5. Es sollen endlich als Divisoren alle ganzen Zahlen des Bereiches $1 \ldots n$ genommen werden, welche $s^{\text{te}}$ Potenzen sind.

Alsdann wird:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s]{n}]} [\varkappa r_{x^s}] = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s]{\varkappa n}]} \left[\frac{\varkappa n}{x^s}\right] - \varkappa \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s]{n}]} \left[\frac{n}{x^s}\right] - \sum_{x=[\sqrt[s]{n}]+1}^{x=[\sqrt[s]{\varkappa n}]} \left[\frac{\varkappa n}{x^s}\right].$$

Nun ist:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s]{m}]}\left[\frac{m}{x^s}\right]=\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s+1]{m}]}\left[\frac{m}{x^s}\right]+\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[s+1]{m}]-\alpha}\ \sum_{x=[\sqrt[s+1]{m}]+1}^{x=[\sqrt[s]{m}]}\varepsilon\left(\frac{m}{x^s y}\right),$$

wo $\alpha$ durch die Relation

$$\left[\sqrt[s+1]{m}\right]-\alpha+1>\frac{m}{\left[\sqrt[s+1]{m}\right]+1}\geqq\left[\sqrt[s+1]{m}\right]-\alpha$$

definiert ist. Lässt man in der letzten Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung $x$ von 1 an laufen, so vermehrt man sie für jeden Wert von $y$ um $\left[\sqrt[s+1]{m}\right]$, beachtet man ferner, dass für jedes Wertepaar $x,y$, welches die Beziehung $\frac{m}{x^s y}\gtreqless 1$ erfüllt, auf $\frac{\sqrt[s]{\frac{m}{y}}}{x}\gtreqless 1$ ist, und bedenkt, dass $\left[\sqrt[s]{\frac{m}{y}}\right]$ für $y=\left[\sqrt[s+1]{m}\right]-\alpha+1$, $\left[\sqrt[s+1]{m}\right]-\alpha+2,\ldots,\left[\sqrt[s+1]{m}\right]$ den Wert $\left[\sqrt[s+1]{m}\right]$ hat, so erhält man die Relation

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s]{m}]}\left[\frac{m}{x^s}\right]=\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s+1]{m}]}\left[\frac{m}{x^s}\right]+\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s+1]{m}]}\left[\sqrt[s]{\frac{m}{x}}\right]-\left[\sqrt[s+1]{m}\right]^2=$$

$$=m\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s+1]{m}]}\frac{1}{x^s}-\sqrt[s]{m}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s+1]{m}]}\frac{1}{\sqrt[s]{x}}-m^{\frac{2}{s+1}}+\beta_1\sqrt[s+1]{m}$$

$$(\lim_{m=\infty}\beta_1 \text{ endlich}),$$

die ich hier nur der Vollständigkeit wegen abgeleitet habe, obwohl sie durch Specialisierung aus einer allgemeineren Formel erhalten werden kann, die ich in meiner im 87. Bande dieser Sitzungsberichte enthaltenen Arbeit: »Über einige zahlentheoretische Functionen« aufgestellt habe. Dieselbe rührt übrigens meines Wissens von Herrn Lipschitz her.

Nun ist bekanntlich:

$$\sum_{x=1}^{x=r} \frac{1}{x^s} = \zeta(s) - \frac{r^{1-s}}{s-1} + \frac{A}{r^s} \qquad (s > 1, \lim_{r=\infty} A \text{ endlich})$$

$$\sum_{x=1}^{x=r} \frac{1}{\sqrt[s]{x}} = C_s + \frac{r^{1-\frac{1}{s}}}{1-\frac{1}{s}} + \frac{B}{\sqrt[s]{r}} \qquad (s > 1, \lim_{r=\infty} B \text{ endlich}),$$

wo $C_s$ eine für jedes in Betracht kommende $s$ endliche Constante ist, die so bestimmt werden muss, dass die rechte Seite der letzten Gleichung, falls für $B$ sein Wert gesetzt wird, für $r=1$ den Wert 0 annimmt. Daher verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[s+1]{m}\right]} \left[\frac{m}{x^s}\right] = m\zeta(s) + C_s \sqrt[s]{m} + A' \sqrt[s+1]{m} \qquad (\lim_{m=\infty} A' \text{ endlich}).$$

Durch Benützung dieser Gleichung ergibt sich endlich die Formel

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[s]{n}\right]} [\varkappa r_{x^s}] = C_s(\sqrt[s]{\varkappa} - \varkappa)\sqrt[s]{n} + A'' \sqrt[s+1]{n} - \sum_{x=\left[\sqrt[s]{n}\right]+1}^{x=\left[\sqrt[s]{\varkappa n}\right]} \left[\frac{\varkappa n}{x^s}\right]$$

$$(\lim_{n=\infty} A'' \text{ endlich}).$$

Man hat nun weiter

$$\sum_{x=\left[\sqrt[s]{n}\right]+1}^{x=\left[\sqrt[s]{\varkappa n}\right]} \left[\frac{\varkappa n}{x^s}\right] = \sum_{y=1,\; x=\left[\sqrt[s]{n}\right]+1}^{y=\alpha,\; x=\left[\sqrt[s]{\varkappa n}\right]} \varepsilon\left(\frac{\varkappa n}{x^s y}\right),$$

wo

$$\alpha = \left[\frac{\varkappa n}{\left(\left[\sqrt[s]{n}\right]+1\right)^s}\right],$$

also höchstens $\varkappa - 1$ ist. Lässt man in der auf der rechten Seite stehenden Doppelsumme $x$ von 1 bis $\left[\sqrt[s]{n}\right]$ laufen und fügt überdies noch alle Glieder hinzu, welche entstehen, wenn

man als Factor von $y$ alle ganzen Zahlen von 1 bis $\varkappa n$ nimmt, welche keine $s^{\text{ten}}$ Potenzen sind $\left(\text{und für welche das Argument von } \varepsilon\left(\frac{\varkappa n}{xy}\right) \text{ nicht kleiner als 1 ist}\right)$, so hat man für $y = 1$ zu derselben hinzugefügt $\varkappa n - \left[\sqrt[s]{\varkappa n}\right] + \left[\sqrt[s]{n}\right]$, für $y = 2$ $\left[\frac{\varkappa n}{2}\right] - \left[\sqrt[s]{\frac{\varkappa n}{2}}\right] + \left[\sqrt[s]{n}\right]$ u. s. f., und daher wird wegen

$$\left[\sqrt[s]{\frac{\varkappa n}{y}}\right] = \left[\sqrt[s]{n}\right] \text{ für } y = \alpha+1, \alpha+2, \alpha+3, \ldots, \varkappa-1$$

schließlich

$$\sum_{x=[\sqrt[s]{n}]+1}^{x=[\sqrt[s]{\varkappa n}]} \left[\frac{\varkappa n}{x^s}\right] = -(\varkappa-1)\left[\sqrt[s]{n}\right] + \sum_{y=1}^{y=\varkappa-1} \left[\sqrt[s]{\frac{\varkappa n}{y}}\right] =$$

$$= \left(-\varkappa++1\sqrt[s]{\varkappa} \sum_{y=1}^{y=\varkappa-1} \frac{1}{\sqrt[s]{y}}\right)\sqrt[s]{n} + A''' \sqrt[s+1]{n}$$

$$\left(\lim_{n=\infty} A''' \text{ endlich}, \lim_{n=\infty} \frac{\varkappa}{\sqrt[s]{n}} = 0\right).$$

Man hat demnach die Relationen

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s]{n}]} [\varkappa r_{x^s}] = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa} (\lambda-1) A_{n,x^s}\left(\frac{\lambda-1}{\varkappa}, \frac{\lambda}{\varkappa}\right) =$$

$$= \left\{C_s(\sqrt[s]{\varkappa}-\varkappa) + \varkappa - 1 - \sqrt[s]{\varkappa} \sum_{y=1}^{y=\varkappa-1} \frac{1}{\sqrt[s]{y}}\right\} \sqrt[s]{n} + A'''' \sqrt[s+1]{n}$$

$$\left(\lim_{n=\infty} A'''' \text{ endlich}\right)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[s]{n}]} [\varkappa r_{x^s}]}{Q(n)} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa} (\lambda-1) A_{n,x^s}\left(\frac{\lambda-1}{\varkappa}, \frac{\lambda}{\varkappa}\right)}{Q(n)} =$$

$$= C_s(\sqrt[s]{\varkappa}-\varkappa) + \varkappa - 1 - \sqrt[s]{\varkappa} \sum_{y=1}^{y=\varkappa-1} \frac{1}{\sqrt[s]{y}},$$

wo $Q(n)$ die Anzahl derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots n$ ist, welche $s^{te}$ Potenzen sind.

Für $\frac{1}{s}=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ erhält $C_s$ nach einer nicht sonderlich genauen Rechnung die Werte $-1\cdot46\ldots$, $-0\cdot97\ldots$, $0\cdot85\ldots$, und daher werden für $\varkappa=2$ die rechten Seiten der letzten Gleichung ungefähr gleich $0\cdot4472\ldots$, $0\cdot4505\ldots$, $0\cdot5003\ldots$ Man hat daher folgende Sätze:

Dividiert man eine sehr große ganze Zahl durch alle sie nicht übertreffenden Quadratzahlen, so verhält sich die Anzahl derjenigen Divisionsreste, welche kleiner sind als die Hälfte des zugehörigen Divisors zur Anzahl der übrigen, wie 691 zu 559.

Dividiert man eine sehr große ganze Zahl durch alle sie nicht übertreffenden Cubikzahlen, so verhält sich die Anzahl derjenigen Divisionsreste, welche kleiner sind als der halbe Divisor zur Anzahl der übrigen beiläufig wie 1099 zu 901.

Dividiert man eine sehr große ganze Zahl durch alle nicht größeren Biquadrate, so verhält sich die Anzahl derjenigen Divisionsreste, welche kleiner sind als die Hälfte des zugehörigen Divisors, zur Anzahl der übrigen wie 4997 zu 5003.

Die allerdings mit ziemlich roher Annäherung geführten Rechnungen scheinen zu dem Ergebnisse zu führen, dass mit dem Wachsen des Potenzexponenten eine Verschiebung der Divisionsreste zu Gunsten des Intervalles $\frac{1}{2}\ldots1$ verbunden ist.

Auch die leicht zu findenden Relationen

$$A_{n,x^2}\left(0, \frac{1}{3}\right) = 0\cdot1046\sqrt{n}+A_{n,x^2}\left(\frac{2}{3}, 1\right)$$

$$A_{n,x^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = 0\cdot001\sqrt{n}+A_{n,x^2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

u. s. f.

scheinen darauf hinzudeuten, dass die Potenzen als Divisoren das Bestreben haben, die Divisionsreste von der Null gegen 1 hinzudrängen.

Ich behalte mir übrigens vor, über diese Verhältnisse genauere numerische Untersuchungen anstellen zu lassen.

---

# Über die Abel'sche Darstellung des größten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Functionen

von

**Leopold Gegenbauer** in Wien,

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1901.)

§. 1. Abel hat in seiner im 17. Bande der »Annales de Mathématiques pures et appliquées« von Gergonne enthaltenen Mittheilung »Recherche de la quantité qui satisfait à deux équations algébriques données« (Abel, Oeuvres complètes, T. I, p. 212 ss. Nouvelle édition) für eine rationale Function $F(x_1)$ der den zwei ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ gemeinsamen Wurzel $x_1$ unter der Voraussetzung, dass dieselben keine mehrfachen Wurzeln besitzen und nur diese einzige Wurzel gemein haben, die Formel aufgestellt

$$F(x_1) = \frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} F(x_\lambda)\theta(x_\lambda) R_{g(x), f_1(x; x_\lambda)}}{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \theta(x_\lambda) R_{g(x), f_1(x, x_\lambda)}},$$

in welcher $\theta(x)$ eine beliebige, für alle inbetracht kommenden Werte des Argumentes endliche, rationale Function von $x$ ist, mit $R_{g(x), h(x)}$ die Resultante der zwei Gleichungen $g(x) = 0$, $h(x) = 0$ bezeichnet wird, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades $f(x) = 0$ sind und

$$\frac{f(x)}{(x-x_{\lambda_1})(x-x_{\lambda_2})\ldots(x-x_{\lambda_\varkappa})}=f_\varkappa(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_\varkappa})$$

gesetzt ist. Aus derselben ergibt sich, falls man $\theta(x)$ gleich 1 nimmt, für den größten gemeinsamen Theiler $Th(f(x),g(x))$ von $f(x)$ und $g(x)$ die Formel

$$Th(f(x),g(x))=\frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n}(x-x_\lambda)R_{g(x),f_1(x;x_\lambda)}}{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n}R_{g(x),f_1(x;x_\lambda)}},$$

welche in theoretischer Hinsicht deshalb von besonderem Interesse ist, weil durch sie wenigstens für den von Abel behandelten speciellen Fall die Theorie des größten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Functionen auf die Theorie der symmetrischen Functionen zurückgeführt wird. L. Kronecker hat daher auch in den Vorlesungen über Algebra, welche er an der Berliner Universität in jedem zweiten Jahre zu halten pflegte, wiederholt eine Verallgemeinerung der Abel'schen Formel, in welcher der Grad des größten gemeinsamen Theilers der zwei ganzen Functionen beliebig ist, nebst den Bedingungen für das Vorhandensein eines solchen von vorgeschriebenem Grade abgeleitet. Die Kronecker'sche Formel lautet bei Benützung der sie einfacher und durchsichtiger gestaltenden obigen Bezeichnungsweise

$$Th(f(x),g(x))=$$

$$=\frac{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(x-x_{\lambda_1})(x-x_{\lambda_2})\ldots(x-x_{\lambda_r})R_{g(x),f_r(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_r})}}{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}R_{g(x),f_r(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_r})}},$$

wo die Summationen nach $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ über alle Combinationen $r$ter Classe ohne Wiederholung der Elemente $1,2,3,\ldots,n$ zu erstrecken sind. Die Kronecker'schen Bedingungen für die Existenz eines größten gemeinsamen Theilers vom Grade $r$,

beziehungsweise von genau $r$ gemeinsamen Wurzeln der zwei ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ sind

$$R_{g(x),f(x)} = 0$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} R_{g(x),f_1(x;\,x_\lambda)} = 0$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2} R_{g(x),f_2(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})} = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-1}} R_{g(x),f_{r-1}(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_{r-1}})} = 0$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r} R_{g(x),f_r(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_r})} \neq 0,$$

wo die Summationen in der $\varkappa^{\text{ten}}$ Relation über die Combinationen $\varkappa^{\text{ter}}$ Classe ohne Wiederholung der Elemente $1, 2, \ldots, n$ auszudehnen sind.

Diese Relationen bilden den gedanklich einfachsten Ausdruck der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass der größte gemeinsame Theiler der zwei ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ den Grad $r$ hat. Sie sind nämlich der Reihe nach bis zur letzten hin nothwendig und hinreichend, damit $f(x)$ und $g(x)$ überhaupt einen gemeinsamen Theiler haben, sodann dass keines der Functionenpaare $g(x)$, $f_1(x;x_\lambda)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ theilerfremd ist, also der größte gemeinsame Theiler von $f(x)$ und $g(x)$ mindestens den Grad 2 hat, u. s. f., endlich dass dieser Theiler mindestens den Grad $r$ hat. Da nun die letzte beim Bestehen der früheren besagt, dass unter den Functionen $f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})$ eine zu $g(x)$ theilerfremd ist, so sagt die Vereinigung aller, dass $f(x)$ und $g(x)$ einen größten gemeinsamen Theiler genau vom Grade $r$ haben.

Da weder $(x-x_{\lambda_1})(x-x_{\lambda_2})\ldots(x-x_{\lambda_r})$, noch $f_\varkappa(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})$ sich ändert, wenn $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r}$ irgendwie permutiert werden, so braucht man in den angeführten Ausdrücken, um symmetrische Functionen der $n$ Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und demnach

im Rationalitätsgebiete der Coefficienten von $f(x)$ und $g(x)$ liegende Darstellungen, beziehungsweise Bedingungen zu erhalten, die einzelnen Combinationen der bezüglichen Classe nur ohne Wiederholung und ohne Versetzung bei den Summationen zu nehmen.

Der Abel-Kronecker'schen Darstellung des größten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Functionen kann man eine ganz analoge für den Quotienten aus einer dieser Functionen und dem größten gemeinsamen Theiler an die Seite stellen. Dieselbe lautet unter der Voraussetzung, dass der Coefficient der höchsten Potenz von $x$ in $f(x)$ gleich 1 ist,

$$\frac{f(x)}{Th(fx), g(x))} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} (x - x_{\lambda_{r+1}})(x - x_{\lambda_{\lambda+2}}) \ldots (x - x_{\lambda_n}) R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}}{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}},$$

wo die Summationen nach $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ über alle Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auszudehnen sind. Dieses Resultat ist unmittelbar einleuchtend; denn sind $x_1, x_2, \ldots, x_r$ alle gemeinsamen Wurzeln von $f(x)$ und $g(x)$, so ist jede der Größen $R_{g(x), f_r(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_r})}$, in welcher unter den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ auch nur eine von $1, 2, \ldots, r$ verschiedene vorkommt, gleich 0, während dieselbe in allen anderen Fällen den von 0 verschiedenen Wert $R_{g(x), f_r(x; x_1, x_2, \ldots, x_r)}$ besitzen. Bei der Ausführung der Summationen könnte man sich, wie man sofort erkennt, auf die eben genannten Combinationen bezüglich $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ beschränken und für $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n$ jedesmal eine beliebige Anordnung derjenigen von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ nehmen, welche von den für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ in dem betreffenden Gliede genommenen Werten verschieden sind.

§. 2. Den Entwickelungen Abels und auch Kroneckers liegt die Annahme zugrunde, dass $f(x)$ keine mehrfache Wurzel besitzt, die aufgestellten Relationen werden daher auch im allgemeinen falsch, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist.

So verschwindet beispielsweise der Nenner der Abel'schen Formel, wenn $f(x)$ $x_1$ als Doppelwurzel, $g(x)$ diese Größe aber nur als einfache Wurzel hat, und es zeigen in diesem Falle die Kronecker'schen Relationen die Existenz von zwei gemeinsamen Wurzeln von $f(x)$ und $g(x)$ auch dann an, wenn diese Functionen außer $x_1$ keine Wurzel gemein haben. Hat in diesem Falle $g(x)$ keine mehrfache Wurzel, so kann diesem Übelstande natürlich durch Vertauschung von $g(x)$ mit $f(x)$ abgeholfen werden. Es wäre daher möglich, dass die Abel-Kronecker'schen Relationen namentlich in dem weitaus interessantesten Falle, d. i. wenn die zur Ermittelung des größten gemeinsamen Theilers von $f(x)$ und $f'(x)$ beim Vorhandensein mehrfacher Wurzeln von $f(x)$ und zur Aufstellung der Bedingungen für dieses Vorhandensein verwendet werden, versagen. Dieser Umstand hat mich schon vor mehr als 10 Jahren veranlasst, in meinen algebraischen Vorlesungen an der Universität in Innsbruck meinen Hörern diesbezügliche Erörterungen über diese Relationen mitzutheilen und für den eben hervorgehobenen speciellen Fall andere Relationen aufzustellen, die in naturgemäßester Weise zu den Resultaten führen, welche L. Baur in seiner im 50. Bande der »Mathematischen Annalen« veröffentlichten, im wesentlichen auch in Webers Algebra aufgenommenen Arbeit »Über die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung« abgeleitet hat. Diese Auseinandersetzungen sollen in den folgenden Zeilen angegeben werden.

Es möge jede gemeinsame Wurzel von $f(x)$ und $g(x)$ in $f(x)$ keinen höheren Grad der Vielfachheit haben als in $g(x)$. Ist nun $x_1$ eine solche für $f(x)$ $\lambda'_1$-fache Wurzel, so dass also

$$x_1 = x_2 = \ldots x_{\lambda'_1}$$

ist, so haben die Functionen $f(x)$, $f_1(x; x_i)$, $f_2(x; x_{i_1}, x_{i_2}), \ldots,$ $f_{\lambda'_1-1}(x; x_{i_1}, x_{i_2}), \ldots, x_{i_{\lambda'_1-1}})$, $f_{\lambda'}(x; x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{\lambda'_1}})$ $(i, i_1, i_2, \ldots, i_{\lambda'_1} = 1, 2, \ldots, n;\ i_\mu \neq i_\rho$ für $\mu \neq \rho)$ außer $f_{\lambda_1}(x; x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda'_1}) = \dfrac{f(x)}{(x-x_1)^{\lambda'_1}}$ den Factor $x - x_1$ und demnach mit $g(x)$ die Wurzel $x_1$ gemeinsam. Es sind daher $R_{g(x), f(x)}$ und alle Resultanten

$R_{g(x);f_\varkappa(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_\varkappa})}$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, \lambda_1'$ außer $R_{g(x),\frac{f(x)}{(x-x)^{\lambda_1'}}}$ sicher gleich 0, so dass also die $\lambda_1'$ ersten Kronecker'schen Relationen erfüllt sind, während die $(\lambda_1'+1)^{\text{te}}$ wird

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\lambda_1'}} R_{g(x),f_{\lambda_1'}(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_{\lambda_1'}})} = R_{g(x),\frac{f(x)}{(x-x)^{\lambda_1'}}}.$$

Ist nun $x_{\lambda_1'+1}$ eine von $x_1$ verschiedene gemeinsame Wurzel von $f(x)$ und $g(x)$, die für $f(x)$ eine $\lambda_2'$-fache und nach der gemachten Voraussetzung für $g(x)$ mindestens eine $\lambda_2'$-fache Wurzel ist, so dass also

$$x_{\lambda_1'+1} = x_{\lambda_1'+2} = \ldots = x_{\lambda_1'+\lambda_2'}$$

wird, so hat jede der Functionen $f_{\lambda_1'+1}(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'+1}})$, $f_{\lambda_1'+2}(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'+2}}) \ldots f_{\lambda_1'+\lambda_2'-1}(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'+\lambda_2'-1}})$, $f_{\lambda_1'+\lambda_2'}(x; x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'+\lambda_2'}})$ $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\lambda_1'+\lambda_2'} = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda_\mu \neq \lambda_\rho$ für $\mu \neq \rho)$ außer $f_{\lambda_1'+\lambda_2'}(x; x_1, x, \ldots, x_{\lambda_1'+\lambda_2'}) = \dfrac{f(x)}{(x-x_1)^{\lambda_1'}(x-x_{\lambda_1'+1})^{\lambda_2'}}$ entweder die Wurzel $x_1$ oder die Wurzel $x_2$ oder beide mit $g(x)$ gemein, und daher ist in diesem Falle nicht nur die auf der rechten Seite der eben aufgeschriebenen Gleichung stehende Summe gleich Null, sondern es verschwinden auch noch die im Kronecker'schen Schema unmittelbar darauf folgenden $\lambda_2'-1$ weiteren Relationen, während die $(\lambda_1'+\lambda_2'+1)^{\text{te}}$ Formel übergeht in

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\lambda_1'+\lambda_2'}} R_{g(x),f_{\lambda_1'+\lambda_2'}(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_1'+\lambda_2'})} = \frac{f(x)}{(x-x_1)^{\lambda_1'}(x-x_{\lambda_1+1})^{\lambda_2'}}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man, wie man leicht erkennt, zu dem Resultate, dass die Kronecker-schen Relationen und damit auch seine Darstellung des größten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Functionen, sowie die oben angegebene Darstellung des Quotienten aus einer dieser Functionen und dem größten gemeinsamen Theiler auch noch

für den Fall bestehen bleibt, dass die beiden Functionen mehrfache Wurzeln besitzen, wenn nur eine der beiden Functionen keine gemeinsame Wurzel öfter enthält als der größte gemeinschaftliche Theiler. Sie gelten also namentlich auch für den Fall, als die eine der beiden Functionen die Ableitung der anderen ist, in welchem Falle sich die Summationen auf die Wurzeln der Ableitung beziehen.

Aus diesen Auseinandersetzungen folgen die zwei Theoreme:

Kommt *jede* gemeinsame Wurzel der ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ in $f(x)$ nicht öfter vor als in $g(x)$, so ist der Grad des größten gemeinschaftlichen Theilers der beiden Functionen um eine Einheit kleiner als die Zahl, welche angibt, die wievielte von den symmetrischen Functionen der Wurzeln derselben

$$R_{g(x),f(x)}, \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} R_{g(x,f_1(x;x_\lambda)}, \quad \sum_{\lambda_1,\lambda_2} R_{g(x),f_2(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})},$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} R_{g(x),f_3(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},x_{\lambda_3})} \ldots (f(x_1)=0, \lambda=1,2,\ldots,n)$$

die erste nicht verschwindende ist.

Die Anzahl der untereinander *verschiedenen* Wurzeln einer ganzen Function $f(x)$ einer Veränderlichen ist gleich der Differenz aus dem Grade der Function und der Zahl, welche angibt, die wievielte von den symmetrischen Functionen der Wurzeln $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$ ihrer ersten Ableitung

$$R_{f(x),f'(x)}, \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} R_{f(x),f'_1(x;x_\lambda)}, \quad \sum_{\lambda_1,\lambda_2} R_{f(x),f'_1(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})},$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} R_{f(x),f'(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},x_{\lambda_3})}, \ldots$$

die erste nicht verschwindende ist.

§. 3. Bei der vorstehenden Entwicklung in Bezug auf den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier ganzen Functionen wurden ausschließlich Resultanten verwendet. Da die Resultante, falls eine der zwei Functionen die Ableitung der anderen ist, in die Discriminante übergeht, so liegt die Vermuthung nahe, dass in diesem Falle die Benützung von Discriminanten ein tieferes Eindringen in den Gegenstand ermöglichen wird, weil sie sachgemäßer ist — und dies bestätigen auch die folgenden Erörterungen.

Hat $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ zwei gleiche Wurzeln $x_1$ und $x_2$, so haben alle Functionen $f_1(x; x_\lambda)$, in denen $\lambda$ von 1 und 2 verschieden ist, $x_1$ als Doppelwurzel, und daher ist nicht nur die Discriminante $D_{f(x)}$ von $f(x)$ gleich Null, sondern es verschwinden auch alle Discriminanten $D_{f_1(x; x_\lambda)}$, in denen $\lambda > 2$ ist, und es ist

$$D_{f_1(x; x_1)} = D_{f_1(x; x_2)}.$$

Man hat daher in diesem Falle die Beziehungen

$$D_{f(x)} = 0$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} D_{f_1(x; x_\lambda)} = 2 D_{f_1(x; x_1)}.$$

Besitzt $f(x)$ außer der Doppelwurzel $x_1$ keine mehrfache Wurzel, so ist $D_{f_1(x; x_1)}$ und demnach auch die zuletzt aufgeschriebene Summe von Null verschieden, und umgekehrt, wenn $D_{f(x)}$ verschwindet und diese Summe von Null verschieden ist, so hat $f(x)$ nur eine Doppelwurzel und außerdem lauter ungleiche Wurzeln. Daher sind die Relationen

$$D_{f(x)} = 0$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} D_{f_1(x; x_\lambda)} \neq 0$$

für die eben erwähnte Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung $f(x)$ nothwendig und hinreichend.

Ist $x_1$ eine dreifache Wurzel von $f(x)$, also

$$x_1 = x_2 = x_3$$

so ist auch

$$D_{f_1(x;x_1)} = 0,$$

und es verschwinden alle Discriminanten $D_{f_2(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})}$, in denen auch nur eine der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2$ von 1, 2, 3 verschieden ist, weil die betreffenden Functionen $x_1$ als mehrfache Wurzel besitzen. Die übrigen von diesen Discriminanten sind in diesem Falle gleich $D_{f(x;x_1,x_2)}$, so dass folgende drei Relationen bestehen:

$$D_{f(x)} = 0$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} D_{f_1(x;x_\lambda)} = 0$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2} D_{f_2(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})} = 3 D_{f_2(x;x_1,x_2)}.$$

Auf diesem Wege gelangt man, falls $x_1$ eine $\lambda_1'$-fache Wurzel, also

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{\lambda_1'}$$

ist, leicht zu folgenden Gleichungen:

$$D_{f(x)} = 0$$

$$\sum_{\lambda_1.\lambda_2}^{\lambda=n} D_{f_1(x;x_\lambda)} = 0$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2} D_{f_2(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})} = 0$$

.............................................

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_{\lambda_1'-2}} D_{f_{\lambda_1'-2}(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_1'-2})} = 0$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_{\lambda_1'-1}} D_{f_{\lambda_1'-1}(x;x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_{\lambda_1'-1}})} = \lambda_1' D_{f_{\lambda_1'-1}(x;x_1,x_2,\ldots,x_{\lambda_1'-1})}$$

$$= \lambda_1' D_{\frac{f(x)}{(x-x_1)^{\lambda_1'-1}}},$$

wo die letzte Summe von Null verschieden ist, wenn $f(x)$ außer der $\lambda_1'$-fachen Wurzel $x_1$ nur einfache Wurzeln besitzt.

Besitzt $f(x)$ aber außer der $\lambda_1'$-fachen Wurzel $x_1$ die $\lambda_2'$-fache Wurzel $x_{\lambda_1'+1}$, so dass also

$$x_{\lambda_1'+1} = x_{\lambda_1'+2} = \ldots = x_{\lambda_1'+\lambda_2'}$$

ist, so haben außer den bisher angeführten Functionen auch noch $f_{\lambda_1'-1}(x;\, x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda_1'-1})$ und sämmtliche Functionen

$$f_{\lambda_1'}(x;\, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'}}), f_{\lambda_1'+1}(x;\, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'+1}}), \ldots$$
$$\ldots, f_{\lambda_1'+\lambda_2'-3}(x;\, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'+\lambda_2'-3}})$$

den Wert 0, während von den Functionen

$$f_{\lambda_1'+\lambda_2'-2}(x;\, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'+\lambda_2'-2}})$$

nur diejenigen etwa einen von Null verschiedenen Wert, und zwar $D_{f_{\lambda_1'+\lambda_2'-2}(x;\, x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda_1'-1}, x_{\lambda_1'+1}, x_{\lambda_1'+2}, \ldots, x_{\lambda_1'+\lambda_2'-1})}$ haben können, in denen unter den Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\lambda_1'+\lambda_2'-2}$ genau $\lambda_1'-1$ von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \lambda_1'$ und genau $\lambda_2'$ von den Zahlen $\lambda_1'+1, \lambda_1'+2, \ldots, \lambda_1'+\lambda_2'$ vorkommen. Es treten daher zu den bereits aufgeschriebenen Gleichungen, in deren letzter die linke Seite durch Null zu ersetzen ist, noch die folgenden hinzu:

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\lambda_1'}} D_{f_{\lambda_1'}(x;\, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'}})} = 0$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\lambda_1'+1}} D_{f_{\lambda_1'+1}(x;\, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'+1}})} = 0$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\lambda_1'+2}} D_{f_{\lambda_1'+2}(x;\, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\lambda_1'+2}})} = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\lambda'_1+\lambda'_2-3}} D_{f_{\lambda'_1+\lambda'_2-3}(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda'_1+\lambda'_2-3})} = 0$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\lambda'_1+\lambda'_2-2}} D_{f_{\lambda'_1+\lambda'_2-2}(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda'_1+\lambda'_2-2})} =$$

$$= \lambda'_1\lambda'_2 D_{f_{\lambda'_1+\lambda'_2-2}(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},x_{\lambda_3},\ldots,x_{\lambda'_1-1},x_{\lambda'_1+1},x_{\lambda'_1+2},\ldots,x_{\lambda'_1+\lambda'_2-1})}$$

$$= \lambda'_1\lambda'_2 D_{\frac{f(x)}{(x-x_1)^{\lambda'_1-1}(x-x_{\lambda'_1+1})^{\lambda'_2-1}}}\,.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man schließlich zu dem Satze:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine ganze Function $f(x)$ vom Grade $n$ $r$ untereinander verschiedene Wurzeln besitzt, besteht darin, dass die $(n-r)$te von den symmetrischen Functionen

$$D_{f(x)},\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} D_{f_1(x;\,x_\lambda)},\ \sum_{\lambda_1,\lambda_2} D_{f_2(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2})},\ \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3} D_{f_3(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},x_{\lambda_3})},\ldots$$

der Wurzeln dieser Function die erste nicht verschwindende unter ihnen ist. Dieselbe ist gleich dem Producte aus den Ordnungszahlen der untereinander verschiedenen Wurzeln der Function und der Discriminante derjenigen Gleichung, welcher diese Wurzeln genügen (Stammgleichung).

Man sieht sofort auch, dass

$$Th(f(x),f'(x)) =' $$

$$= \frac{\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r}} (x-x_{\lambda_1})(x-x_{\lambda_2})\ldots(x-x_{\lambda_{n-r}})\, D_{f_{n-r}(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_{n-r}})}}{\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r}} D_{f_{n-r}(x;\,x_{\lambda_1},x_{\lambda_2},\ldots,x_{\lambda_{n-r}})}}$$

und

$$\frac{f(x)}{Th(f(x),f'(x))} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} (x-x_{\lambda_{n-r+1}})(x-x_{\lambda_{n-r+2}})\ldots(x-x_{\lambda_n})\, D_{f_{n-r}}(x;\, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots x_{\lambda_{n-r}})}{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} D_{f_{n-r}}(x;\, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{n-r}})}$$

ist. Bezüglich der in diesen zwei Gleichungen ausgeführten Summationen kann eine analoge Bemerkung gemacht werden, wie am Schlusse des §. 1.

§. 4. Die Discriminante einer ganzen Function $n^{\text{ten}}$ Grades ist bekanntlich gleich der aus den Potenzsummen $s_\varkappa$ ihrer Wurzeln gebildeten Determinante

$$|s_{i+\lambda}|_{(i,\lambda=0,1,2,\ldots,n-1)},$$

man kann daher, wenn man mit $s_{i+\lambda}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\varkappa-1})}$ die $(i+\lambda)^{\text{te}}$ Potenzsumme der von $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_{\varkappa-1}}$ verschiedenen Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet, die $\varkappa^{\text{te}}$ von den eben angegebenen symmetrischen Functionen in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\varkappa-1}} \left|s_{i+\lambda}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\varkappa-1})}\right|_{(i,\lambda=0,1,2,\ldots,n-\varkappa)}.$$

Diese Summe ist aber, wie sich mit Hilfe des Cauchy-Binet'schen Determinantensatzes leicht zeigen lässt, gleich

$$|s_{i+\lambda}|_{(i,\lambda=0,1,2,\ldots,n-\varkappa)}$$

und daher sind die in dem letzten Satze angeführten Bedingungen mit den oben erwähnten Baur'schen identisch.

Es wird ferner bei der eben eingeführten Bezeichnungsweise

$$Th(f(x),f'(x)) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r}} (x-x_{\lambda_1})(x-x_{\lambda_2})\ldots(x-x_{\lambda_{n-r}})\left|s_{i+\lambda}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r})}\right|}{\sum\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r}} \left|s_{i+\lambda}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r})}\right|_{(i,\lambda=0,1,2,\ldots,r-1)}}$$

$$\frac{f(x)}{Th(f(x), f'(x))} = \frac{\sum\limits_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}} (x - x_{\lambda_{n-r+1}})(x - x_{\lambda_{n-r+2}}) \ldots (x - x_{\lambda_n}) \left| s_{i+\lambda}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r})} \right|_{(i, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, r-1)}}{\left| s_{i+\lambda} \right|_{(i, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, r-1)}},$$

wo $\lambda_{n-r+1}, \lambda_{n-r+2}, \ldots, \lambda_n$ in jedem einzelnen Gliede eine beliebige Anordnung der von den betreffenden Werten von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$ ist.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_r$ die untereinander verschiedenen Wurzeln von $f(x)$, $f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, \ldots, f_r^{(r)}$ ihre elementar-symmetrischen Functionen, so ist

$$(-1)^{r-\mu} f_{r-\mu}^{(r)} \left| x_i^{\alpha} \right|_{(i = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots, r-1)} = \left| x_i^{\alpha} \right|_{(i = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \mu+2, \ldots, r-1, r)}$$

und daher zeigt die letzte Formel, dass die Gleichungen bestehen

$$f_{r-\mu}^{(r)} = \frac{\left| s_{\rho+\sigma} \right|_{(\rho, \sigma = 0, 1, 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, r)}}{\left| s_{i+\lambda} \right|_{(i, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, r-1)}}$$

Dieselben führen unmittelbar zum Baur'schen Ausdruck für die sogenannte Stammgleichung einer gegebenen Gleichung, d. i. zu jener Gleichung, der nur die verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung genügen.

Es mag bei dieser Gelegenheit noch der folgende, auf die Stammgleichung bezügliche Satz Platz finden: Ist $s_\varkappa$ die Summe der $\varkappa$ten Potenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade

$$n = r\varkappa - \mu = 3s - \nu \, (\mu = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\ \nu = 0, 1, 2),$$

welche $r$ unter einander verschiedene Wurzeln besitzt, so ist der Quotient aus $\left| s_{i+\lambda} \right|_{(i,\lambda=0,1,2,\ldots,r-1)}^{2r-1}$ und der Discriminante der Stammgleichung sowohl kleiner als

$$(\varkappa-1)^{\mu}\varkappa^{r-\mu}+1,$$

als auch kleiner als

$$2^{\nu}3^{\left[\frac{n+\nu}{3}\right]-\nu}+1.$$

# Eine Beziehung zwischen der specifischen Wärme einer Flüssigkeit und der ihres Dampfes

von

Dr. **Heinrich Mache.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Februar 1901.)

Herr Prof. L. Boltzmann hat im II. Theile seiner »Vorlesungen über Gastheorie«[1] auf S. 101 einen für die kinetische Theorie der Flüssigkeiten sehr bedeutungsvollen Satz abgeleitet. Es wird dort eine Schar gleichbeschaffener mechanischer Systeme betrachtet, die ausschließlich unter dem Einflusse conservativer, innerer Kräfte stehen und in denen ein jedes Element eines jeden Systems unter diesem Einflusse einfache Sinusschwingungen ausführt. Es ist dann für den stationären Zustand der Mittelwert aus den potentiellen Energien der Systeme gleich dem aus ihren kinetischen.

Man hat sich über die Constitution der Flüssigkeiten Vorstellungen gebildet, die ohneweiters gestatten, das Boltzmann'sche Theorem auf sie anzuwenden. Hienach besteht nämlich jeder Flüssigkeitskern aus hunderten von Dampfmolekeln, die innerhalb des Kernes unter dem Einflusse innerer Kräfte durcheinander schwingen.[2] Specialisieren wir unsere Vorstellung im Sinne des Boltzmann'schen Bildes, so können wir behaupten, dass die potentielle und die kinetische Energie einer Flüssigkeit einander gleich sind.

[1] L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie. J. A. Barth. Leipzig, 1898.

[2] Die lebendige Kraft der Progressivbewegung des ganzen Kernes wird vernachlässigt.

Es hat nun schon Clausius den Satz aufgestellt, dass die wahre Wärmecapacität eines Körpers durchaus constant sei, gleichviel in welchem Aggregatzustand sich der Körper befindet. Es ist aber die wahre Wärmecapacität eines Körpers im Arbeitsmaß ausgedrückt nichts anderes als seine kinetische Energie. Da somit sowohl die potentielle, wie auch die kinetische Energie einer Flüssigkeit gleich ist der kinetischen Energie ihres Dampfes, so ist ihre Gesammtenergie einfach doppelt so groß, oder es ist mit anderen Worten der Wärmeinhalt einer Flüssigkeit doppelt so groß, wie der des Dampfes. Da diese Beziehung für alle Temperaturen gilt, so gilt das Gleiche auch für ihre Wärmecapacitäten.

Es ergibt sich somit als unmittelbare Folge des Boltzmann'schen Theorems der Satz:

Die specifische Wärme einer Flüssigkeit ist gleich der doppelten wahren specifischen Wärme ihres Dampfes.

Es sei mir gestattet, noch einen zweiten Weg anzugeben, auf dem man ebenfalls zu dieser einfachen Beziehung gelangt. Es haben nämlich Lord Kelvin[1] und Prof. G. Jäger[2] die Flüssigkeitsmolekel wiederholt mit Erfolg als kleine Flüssigkeitströpfchen behandelt. Die potentielle Energie, bedingt durch die zwischen den Molekeln im Flüssigkeitskern wirkenden inneren Kräfte, scheint hienach ersetzbar zu sein durch eine über die Oberfläche der Kerne wirkende capillare Tension. Über Flüssigkeitskügelchen vom Radius $r$ besteht aber nach Kelvin ein Überdruck $\Delta p$, der durch $\omega$ das specifische Volumen der Flüssigkeit, $w$ das des Dampfes, $\alpha$ die Constante der betreffenden capillaren Spannung, endlich durch $r$ gegeben ist. Es gilt nämlich

$$\Delta p = \frac{2\omega\alpha}{(w-\omega)r} \text{ oder angenähert } \Delta p \doteq \frac{2\omega\alpha}{wr}.$$

Da für den absoluten Nullpunkt $r$ sehr groß und der Dampfdruck sehr klein wird, so lässt sich dieser capillare Überdruck auch direct dem beobachteten Dampfdrucke gleich

[1] Nature, 28 (1883).

[2] Diese Sitzungsber., 100, S. 1233 (1891).

setzen. Es ist dann angenähert $pw \doteq \frac{2\omega\alpha}{r} = \frac{c^2}{3}$, wo $c^2$ das mittlere moleculare Geschwindigkeitsquadrat des Dampfes bezeichnet.[1]

Es ist nun einerseits die potentielle Energie der Flüssigkeit gegeben durch den Ausdruck

$$V = N.4r^2\pi.\alpha,$$

wo $N$ die Zahl der Flüssigkeitsmolekeln in der Masseneinheit bedeutet. Da $N\frac{4}{3}r^3\pi = \omega$ ist, so wird auch

$$V = \frac{3\omega\alpha}{r}.$$

Anderseits ist aber die kinetische Energie des Dampfes

$$L = \frac{c^2}{2} = \frac{3}{2}pw \doteq \frac{3\omega\alpha}{r}.$$

Es ist also die potentielle Energie einer Flüssigkeit gleich der kinetischen ihres Dampfes. Hieraus ergibt sich aber wieder ohneweiters der oben ausgesprochene Satz, dass die specifische Wärme einer Flüssigkeit doppelt so groß ist, wie die ihres Dampfes bei constantem Volumen.

Ich versuchte diese einfache Beziehung an Hand des vorhandenen Beobachtungsmateriales zu prüfen. Das Resultat ist die nachfolgende Tabelle. $C$ bedeutet hier die specifische Wärme der Flüssigkeit, $c_v$ diejenige des Dampfes. Die Regnault'schen Werte für $c_v$ wurden auf den Mittelwert des von ihm verwendeten Temperaturintervalles bezogen. Die beigedruckten Buchstaben bedeuten die Beobachter: R. = Regnault, H. = Hirn, W. = E. Wiedemann, M. = Milthaler, K. u. Wg. = Kundt und Warburg, d. H. = P. de Heen, L. u. St. = Ludekind und Strass.

---

[1] Es ist also auch der Radius der Flüssigkeitsmolekel $r = \frac{6\omega\alpha}{c^2} = \frac{6\alpha}{\rho c^2}$, wo $\rho$ die sogenannte wahre Dichte der Flüssigkeit bedeutet. Dies ist ein Ausdruck, der sich in der Form völlig mit dem von Prof. Jäger l. c. gegebenen deckt. Es ergibt sich so für den Durchmesser einer Wassermolekel $\sigma = 2r = 50.10^{-9}\,cm$. Hiebei ist $\rho = 4\cdot 9$ gesetzt.

| Substanz | Formel | Temperatur | $C$ | Temperatur | $2c_v$ | $\frac{C}{c_v}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Schwefelkohlenstoff | $CS_2$ | 0 | R. 0·2352 | 0 | W. 0·2108 | 2·23 |
| | | 0 | H. 0·2296 | | | 2·18 |
| | | 140 | H. 0·2766 | 66—229 | R. 0·2624 | 2·11 |
| Chloroform | $CHCl_3$ | 0 | W. 0·2323 | 0 | W. 0·2356 | 1·97 |
| | | 177 | W. 0·2503 | 117—238 | R. 0·2806 | 1·78 |
| Bromäthyl | $C_2H_5Br$ | 5—20 | R. 0·2151 | 0 | W. 0·2336 | 1·84 |
| Aceton | $C_3H_6O$ | 0 | W. 0·5064 | 0 | W. 0·5272 | 1·92 |
| | | 181 | W. 0·6499 | 129—233 | R. 0·7566 | 1·72 |
| Essigäther | $C_4H_8O_2$ | 0 | W. 0·5274 | 0 | W. 0·5006 | 2·11 |
| | | 167 | W. 0·7021 | 115—219 | R. 0·7562 | 1·86 |
| Quecksilber | Hg | 200 | M. 0·03143 | 275—356 | K. u. Wg. 0.0295 | 2·13 |
| | | 315 extrap. | 0·03038 | | | 2·06 |
| Amylen | $C_5H_{10}$ | 170 | d. H. 1·500 | 175 | d. H. 1·546 | 1·94 |
| Äthyläther | $C_4H_{10}O$ | 0 | W. 0·5290 | 0 | W. 0·6910 | 1·53 |
| | | 0 | H. 0·5640 | | | 1·63 |
| | | 147 | d. H. 0·857 | 70—224 | R. 0·9080 | 1·89 |
| | | 180 | d. H. 1·041 | 185 | d. H. 1·094 | 1·90 |
| Ammoniak | $NH_3$ | 20 | L. u. St. 0·8857 | 20 | R. 0·7748 | 2·29 |
| Benzol | $C_6H_6$ | 0 | W. 0·3798 | 0 | W. 0·3962 | 1·92 |
| | | 167 | W. 0·6203 | 116—218 | R. 0·6934 | 1·79 |

Wasser verhält sich anomal. Es ergibt nach Regnault für $\frac{C}{c_v}$ den Wert 2·84. Alle anderen Substanzen zeigen für die Größe dieses Verhältnisses eine bemerkenswerte Annäherung an den Wert 2. Es ist dies umso auffallender, als es auch noch für Substanzen zutrifft, welche eine mit der Temperatur stark veränderliche specifische Wärme aufweisen. Es mag dies davon herrühren, dass, wie E. Wiedemann bemerkt hat, die specifischen Wärmen in beiden Aggregatzuständen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur annähernd parallel laufen. Auch ist es vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass die oben gegebene Ableitung in voller Strenge nur für Flüssigkeiten gilt, welche, wie das Quecksilber, auch bei niederen Temperaturen einatomige Dämpfe liefern oder für die doch zum mindesten die Gesammtenergie der Dampfmolekel sowohl in der gasförmigen, wie auch innerhalb der flüssigen Phase denselben Theilbetrag an kinetischer und an innerer Energie aufweist.

# Spectralanalytische Studien

(I. Mittheilung)

von

**Dr. Eduard Haschek.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. März 1901.)

## I. Die Berechnung des Funkendruckes aus Linienverschiebungen.

W. J. Humphreys und J. F. Mohler[1] haben theils allein, theils gemeinsam in einer Reihe von Arbeiten den Einfluss des Druckes auf die Wellenlänge der Bogenlinien bei einer großen Zahl von Elementen untersucht. Als hauptsächliche Resultate haben sich dabei folgende ergeben: Bei Steigerung des Druckes im Gas, innerhalb dessen der Flammenbogen erzeugt wird, verschieben sich einzelne Bogenlinien nach Roth, und zwar so, dass die Vergrößerung der Wellenlänge dem Druck des umgebenden Gases proportional ist. Die Verschiebung der Linien variiert von Element zu Element, sie ist eine periodische Function des Atomgewichtes. Aber auch innerhalb eines Spectrums sind die Verschiebungen variabel. Sie sind proportional der Wellenlänge der Linie, so dass sie für eine gewisse Anzahl von Linien, bezogen auf die gleiche Wellenlänge, constant ist. Vergleicht man Linien verschiedener Serien beim gleichen Elemente, so ergeben sich die relativen Verschiebungen in den Verhältnissen 1:2:4.

---

[1] Astroph. Journ. 1896, 1897.

Es ist naheliegend, auf Grund der oben angeführten Resultate von Humphreys und Mohler in allen jenen Fällen auf Druck innerhalb des leuchtenden Dampfes zu schließen, in denen Linienverschiebungen zur Beobachtung kommen. Weiters wird man die Größe des Druckes aus der Linienverschiebung berechnen dürfen, solange nicht andere Ursachen bekannt sind, die eine Variation der Wellenlängen bedingen. Beide Schlüsse sind gezogen worden. Es haben nämlich F. Exner und E. Haschek[1] gelegentlich ihrer Messungen der ultravioletten Funkenspectra der Elemente beträchtliche Verschiebungen der Funkenlinien gegen die analogen im Bogen beobachtet, sie durch Druck im Funken erklärt und aus dem absoluten Betrag derselben die Größe dieses Funkendruckes berechnet. Der Druck in der Bahn der elektrischen Entladung wurde dann von E. Haschek und H. Mache[2] direct beobachtet und seine Abhängigkeit von den Versuchsbedingungen messend verfolgt. Die Werte, die sich so ergaben, sind wesentlich größer, als die aus den Verschiebungen berechneten, die Differenz lässt sich nicht einfach aus Ungenauigkeiten der Beobachtung erklären. Endlich hat J. F. Mohler,[3] wieder aus den Linienverschiebungen, den Druck im Funken eines Inductoriums bestimmt und, entsprechend den geringen Verschiebungen, kleine Werte erhalten. Es ist aber bemerkenswert, dass die Verhältnisse zwischen dem direct bestimmten und dem gerechneten Druck für das Inductorium sowohl, wie für den Transformator, mit dem E. Haschek und H. Mache hauptsächlich arbeiteten, nahe dieselben sind, und zwischen 2 und 2·5 liegen.

Diese Verschiedenheiten zwischen der Messung und der indirecten Bestimmung des Funkendruckes lassen an der Giltigkeit einer directen Übertragung der Resultate von Humphreys und Mohler auf den Funken zweifeln. Es wird im folgenden gezeigt werden, dass für die Linienverschiebungen im Funken andere Gesetze gelten, als für den Bogen, dass also eine Berechnung des Funkendruckes aus der Linienverschiebung unzulässig ist. Dazu ist die Kenntnis der Verschiebung

---

[1] Diese Sitzungsber. (1897) ff.

[2] Diese Sitzungsber. (1898).

[3] Astroph. Journ. (1899).

für eine größere Zahl von Linien des Funkenspectrums nöthig, für die auch in der zusammenfassenden Arbeit von W. J. Humphreys die entsprechenden Zahlen im Bogenspectrum vorliegen. Es ist ja offenbar nicht gestattet, den Funkendruck aus der Verschiebung von Linien zu berechnen, die im Bogenspectrum nicht untersucht sind. Für die meisten Elemente ist die Zugehörigkeit der Linien zu Serien unbekannt, eine Anwendung des oben zuletzt angeführten Resultates von Humphreys also ausgeschlossen.

Darf man aus der Verschiebung der Linien auf einen Druck im Funken zurückschließen, so ist klar, dass die Verschiebung für alle Linien den gleichen Wert des Druckes ergeben muss, wenn nicht noch andere Umstände von Einfluss sind. Ist letzteres der Fall, so werden im allgemeinen die Zahlen verschieden ausfallen. Es lassen sich ja immerhin Fälle denken, dass gewisse äußere Umstände manche Linien oder Liniengruppen anders beeinflussen als andere. Es ist dann auch nicht nöthig, dass die empirisch gegebene Zusammenfassung der Linien in Serien in allen Fällen erhalten bleibt.

Unsere erste Aufgabe wird also sein, für eine größere Anzahl von Linien verschiedener Elemente, die alle unter nahe gleichen äußeren Umständen gewonnen sind, die Verschiebungen zu bestimmen und aus ihnen den Funkendruck zu berechnen. Dann werden wir andere Ursachen aufzusuchen haben, welche Linienverschiebungen bedingen und die Gesetze zu bestimmen suchen, nach denen dann die Variationen der Wellenlängen verlaufen.

Das Material für den ersten Theil liefern uns die Messungen der ultravioletten Funkenspectra der Elemente von Prof. F. Exner und E. Haschek, die alle unter denselben Verhältnissen und mit der gleichen Genauigkeit ausgeführt sind. Die angeführten Zahlen entstammen zum Theile den Publicationen, zum Theile auch einer Neubestimmung der Spectren, die demnächst veröffentlicht werden soll. Um allzu umfangreiche Tabellen zu vermeiden, sollen nur jene Linien angeführt werden, die eine deutliche Verschiebung aufweisen. Als untere Grenze dafür dient uns der Wert von 0·03 AE. Die Messungen der Funkenspectren weisen im Mittel eine Genauigkeit von

0·015 AE auf, wir werden also Abweichungen von 0·02 AE noch als Beobachtungsfehler deuten. Größere Fehler werden aber wohl sehr selten auftreten.

Um die Verschiebung der Funkenlinien zu bestimmen, verwenden wir die Zahlen des Bogenspectrums zum Vergleiche. Wo es möglich ist, werden nur Angaben von Rowland theils aus dem Bogenspectrum, theils aus dem Sonnenspectrum benützt. Da die Werte der Linien in den beiden Fällen nicht vollständig übereinstimmen, sind die Zahlen auf zwei Decimalen abgerundet.

Die ersten drei Colonnen der folgenden Tabellen sind ohneweiters klar. In der vierten ist mit $\Delta(\lambda_F—\lambda_B)$ die Verschiebung der Funkenlinie bezeichnet, in der fünften mit $\Delta\lambda$ die Verschiebung der Bogenlinie [1] für eine Atmosphäre Druck im umgebenden Gas. Das Verhältnis $\frac{\Delta(\lambda_F—\lambda_B)}{\Delta\lambda}$ gibt uns den Druck im Funken, der in der sechsten Colonne unter $P$ in Atmosphären angegeben ist.

| Element | $\lambda_{Bogen}$ | $\lambda_{Funken}$ | $\Delta(\lambda_F—\lambda_B)$ | $\Delta\lambda$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Al | 3092·82 | 3092·89 | 0·07 | 0·0049 | 14 |
| | 3944·16 | 3944·22 | 0·06 | 0·0043 | 14 |
| | 3961·68 | 3961·74 | 0·06 | 0·0047 | 13 |
| Ge | 3269·63 | 3269·70 | 0·07 | 0·0026 | 27 |
| | 4226·72 | 4226·76 | 0·04 | 0·0043 | 9 |
| Zn | 3302·72 | 3302·75 | 0·03 | 0·0031 | 9 |
| | 3345·16 | 3345·20 | 0·04 | 0·0029 | 14 |
| | 3282·46 | 3282·49 | 0·03 | 0·0030 | 10 |
| | 4680·32 | 4680·43 | 0·11 | 0.0064 | 17 |
| | 4722·34 | 4722·50 | 0·16 | 0·0057 | 28 |
| Ca | 3159·00 | 3159·11 | 0·11 | 0·0052 | 21 |
| | 3179·45 | 3179·60 | 0·15 | 0·0046 | 33 |

[1] Berechnet aus allen Einzelbeobachtungen.

| Element | $\lambda_{Bogen}$ | $\lambda_{Funken}$ | $\Delta(\lambda_F - \lambda_B)$ | $\Delta\lambda$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Si | 2516·21 | 2516·26 | 0·05 | 0·0014 | 35 |
| | 2881·70 | 2881·73 | 0·03 | 0·0025 | 12 |
| | 3905·66 | 3905·71 | 0·05 | 0·0035 | 14 |
| Zr | 3958·36 | 3958·39 | 0·03 | 0·0014 | 21 |
| | 3999·12 | 3999·18 | 0·06 | 0·0027 | 22 |
| | 4029·80 | 4029·88 | 0·08 | 0·0026 | 31 |
| Cr | 3886·93 | 3886·97 | 0·04 | 0·0022 | 18 |
| | 3919·31 | 3919·36 | 0·05 | 0·0018 | 28 |
| | 3963·83 | 3963·88 | 0·05 | 0·0026 | 19 |
| | 3984·06 | 3984·09 | 0·03 | 0·0032 | 9 |
| | 4280·56 | 4280·59 | 0·03 | 0·0024 | 13 |
| Ti | 3200·03 | 3200·07 | 0·04 | 0·0026 | 15 |
| | 3234·64 | 3234·72 | 0·08 | 0·0017 | 47 |
| | 3242·13 | 3242·19 | 0·06 | 0 0014 | 43 |
| | 3254·31 | 3254·41 | 0·10 | 0·0020 | 50 |
| | 3326·91 | 3326·99 | 0·08 | 0·0016 | 50 |
| | 3341 97 | 3342·00 | 0·03 | 0·0018 | 17 |
| | 3349·04 | 3349·14 | 0 10 | 0·0014 | 71 |
| | 3361·33 | 3361·40 | 0·07 | 0·0011 | 64 |
| | 3380·40 | 3380·45 | 0·05 | 0·0019 | 26 |
| | 3900·68 | 3900·81 | 0·13 | 0·0020 | 65 |
| | 3904 93 | 3904·98 | 0·05 | 0·0018 | 28 |
| | 3913·61 | 3913·72 | 0·11 | 0·0018 | 61 |
| | 3924·67 | 3924·72 | 0·05 | 0·0015 | 33 |
| | 3958·36 | 3958·39 | 0·03 | 0·0018 | 17 |
| | 3981·92 | 3981·96 | 0·04 | 0·0020 | 20 |
| | 3989·91 | 3989·95 | 0·04 | 0·0015 | 27 |
| | 3998·79 | 3998·86 | 0·07 | 0·0016 | 44 |
| | 4009·08 | 4009·11 | 0·03 | 0·0015 | 20 |

| Element | $\lambda_{Bogen}$ | $\lambda_{Funken}$ | $\Delta(\lambda_F-\lambda_B)$ | $\Delta\lambda$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Ce | 3895·22 | 3895·29 | 0·07 | 0·0031 | 23 |
| | 3896·92 | 3896·98 | 0·08 | 0·0021 | 29 |
| | 3921·86 | 3921·90 | 0·04 | 0·0034 | 12 |
| La | 3929·36 | 3929·40 | 0·04 | 0·0026 | 15 |
| | 4043·05 | 4043·18 | 0·13 | 0·0036 | 36 |
| | 4086·86 | 4086·90 | 0·04 | 0·0026 | 15 |
| Sc | 4314·25 | 4314·32 | 0·07 | 0·0025 | 28 |
| | 4320·91 | 4321·01 | 0·10 | 0·0022 | 45 |
| Y | 4309·78 | 4309·81 | 0·03 | 0·0011 | 27 |
| | 4422·76 | 4422·80 | 0·04 | 0·0020 | 20 |
| Cs | 4555·44 | 4555·80 | 0·36 | 0·0201 | 18 |
| | 4593·34 | 4593·50 | 0·16 | 0·0133 | 12 |
| Va[1] | 3922·56 | 3922·63 | 0·07 | 0·0016 | 44 |
| | 3925·35 | 3925·40 | 0·05 | 0·0017 | 29 |
| | 3934·11 | 3934·19 | 0·08 | 0·0006 | 133 |
| | 3990·71 | 3990·80 | 0·09 | 0·0028 | 32 |
| | 3992·97 | 3993·00 | 0·03 | 0·0019 | 16 |
| | 4051·20 | 4051·25 | 0·05 | 0·0020 | 25 |
| | 4051·49 | 4051·60 | 0·11 | 0·0024 | 46 |
| | 4092·82 | 4092·92 | 0·10 | 0·0013 | 77 |
| | 4105·32 | 4105·40 | 0·08 | 0·0029 | 28 |
| | 4123·54 | 4123·74 | 0·20 | 0·0023 | 87 |
| | 4128·25 | 4128·30 | 0·05 | 0·0024 | 21 |
| | 4132·10 | 4132·21 | 0·11 | 0·0016 | 69 |
| | 4134·60 | 4134·72 | 0·12 | 0·0028 | 43 |

[1] Die Angaben des Bogenspectrums von H. A. Rowland und C. N. Harrison (Astroph. Journ. 7, 1898) sind offenbar zu tief, wie sich aus den Wellenlängen der Ca-Linien, die mitgemessen und im Spectrum belassen wurden, ergibt. Die Abweichung ist keine constante und lässt sich daher nur schwer corrigieren. Obige Zahlen entstammen dem Sonnenspectrum.

Eine Betrachtung der vorstehenden Tabellen zeigt sofort, dass nur in den seltensten Fällen der berechnete Druck annähernd constant für alle Linien ist. Doch hat dies nicht viel zu sagen. Es sind ja in die Tabelle nur Linien mit beträchtlicher Verschiebung aufgenommen. Alle jene, für die $\Delta(\lambda_F - \lambda_B) = 0$ ist, ergeben ja den Druck Null. Ja, es kommt sehr vereinzelt auch vor, dass die Wellenlängen im Funkenspectrum kleiner sind als im Bogenspectrum.[1] Die Verschiebung und damit auch der Druck fallen dann negativ aus. Im allgemeinen sind die berechneten Drucke so stark von einander verschieden, dass man nicht daran zweifeln wird, dass noch andere Ursachen für die Linienverschiebung bestimmend sind. Durch Ungenauigkeit der Beobachtung sind die Differenzen nicht erklärbar, wenn auch zugegeben werden muss, dass die absoluten Werte der Linienverschiebung im Funkenspectrum nicht die Genauigkeit haben, wie im Bogenspectrum. Doch können Beobachtungsfehler das Resultat nur bei den kleinen Verschiebungen wesentlich beeinflussen.

Die Zahlen zeigen noch mehr. Nach den Angaben von Humphreys lassen sich die Linien ordnen nach der Verschiebung, die sie erfahren. Linien mit gleicher Verschiebung können in zusammengehörige Gruppen zusammengefasst werden und es zeigt sich, dass gerade die Linien, die auch von Kayser und Runge in Serien eingeordnet sind, sich auch durch relativ gleiche Linienverschiebung auszeichnen. Bei einer allgemeinen Giltigkeit der Humphreys'schen Resultate müsste diese Beziehung auch für den Funken bestehen bleiben. Ein Vergleich der beobachteten Verschiebungen lehrt aber, dass vielfach Linien, für die Humphreys starke Verschiebungen beobachtet hat, ihre Wellenlänge im Funken wenig ändern und umgekehrt. Besonders Ti und Va zeigen dieses Verhalten. Die Linien 4051·2 und 4051·5 (Va) weisen im Bogen nahe gleiche Verschiebungen auf, während diese sich im Funken wie 1:2 verhalten. Im Gegensatze dazu stehen die Linien 4132·1 und 4134·6 (Va), die bei annähernd gleicher Verschiebung im

[1] Vergl. F. Exner und E. Haschek, Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente, XI. Mittheilung. Diese Sitzungsber., Bd. 107 (1898).

Funken starke Verschiedenheit in dieser Hinsicht im Bogen zeigen. Analoge Beispiele ließen sich noch mehr anführen. Besonders auffallend ist das Verhalten von Ca. Humphreys hat für eine große Zahl von Linien dieses Elementes zum Theil beträchtliche Verschiebungen beobachtet. Im Funken erweisen sich nur zwei als verschoben, alle anderen aber sind es nicht, trotzdem eine Verschiebung leicht beobachtbar wäre.

Sollen wir die Resultate zusammenfassen, die sich bisher ergeben haben, so sind es folgende:

1. Im Funkenspectrum treten beträchtliche Verschiebungen von Linien im Sinne einer Vergrößerung der Wellenlänge auf, die analog sind den von Humphreys und Mohler im Bogen unter Druck beobachteten, aber höhere Werte erreichen.

2. Fasst man diese Linienverschiebungen als nur von einem im Funken herrschenden Druck bedingt auf, der experimentell bestimmt ist, und rechnet aus der Verschiebung im Funken und der im Bogen den Funkendruck, so bekommt man beim selben Elemente, je nach der gewählten Linie, sehr variierende Werte.

3. Linien gleicher Verschiebung im Bogen erweisen sich im Funken verschieden stark verschoben und umgekehrt. Die Regel, dass die Linien der Serien von Kayser und Runge relativ gleiche Verschiebung zeigen, bestätigt sich für den Funken nicht.

## II. Über die Abhängigkeit der Wellenlänge von der Dichte des leuchtenden Dampfes.

Wir haben bisher die Linienverschiebungen immer als bedingt durch Druck in der Funkenbahn aufgefasst und den Funkendruck als einzige Ursache angesehen. Versuche, die angestellt wurden, lehren aber, dass noch andere Ursachen aufgefunden werden können. Allerdings ist es schwer, immer die gleichen Versuchsbedingungen einzuhalten. Es hat ja die Untersuchung von E. Haschek und H. Mache:[1] »Über den Druck im elektrischen Funken« ergeben, dass der Funkendruck

[1] E. Haschek und H. Mache, diese Sitzungsber., Bd. 107, Abth. II a. (1898).

in hohem Maße von der Versuchsanordnung abhängt. Es sei uns gestattet, in Kürze die Resultate dieser Arbeit hier wiederzugeben. Sie wurde angestellt unter Benützung eines Hochspannungstransformators, der primär mit Wechselstrom von 100 Volt Spannung gespeist wurde. Im secundären Kreis konnten gemessene Capacitäten parallel zur Funkenstrecke eingeschaltet werden. Es ergab sich, dass der Funkendruck von der Natur der verwendeten Elektroden, von dem Druck und der Natur des umgebenden Gases, von der Größe der verwendeten Capacität, hingegen nicht von der Funkenlänge abhängt. Die unter Verwendung des Hochspannungstransformators erhaltenen Drucke sind ganz bedeutende. Benützt man ein Inductorium, so sind die Druckunterschiede zwischen Funken und Umgebung wesentlich kleiner, was durch die Messungen von Mohler[1] qualitativ bestätigt erscheint. Allgemein kann man sagen, dass der Druck umso größer wird, je größer die im Einzelfunken übergehende elektrische Energie ist.

Eine Erklärung für die Entstehung des Funkendruckes lässt sich finden durch die Versuche von H. Schuster,[2] der beobachtete, dass sich die von den Elektroden abgelösten Theilchen des Metalldampfes mit großer Geschwindigkeit bewegen, die mit wachsendem Abstand von den Elektroden stark abnimmt. Daraus folgt, dass gegen die Mitte der Funkenbahn sich die Theilchen ansammeln, dass der Druck mit dem Abstand von der Elektrode wächst. Eine Vorstellung, wie der Druck die Wellenlänge des emittierten Lichtes beeinflusst, bekommen wir durch die Überlegung, dass bei genügender Annäherung der Theilchen aneinander sie gegenseitige Kräfte ausüben müssen. Es schwingen dann die Lichterreger nicht mehr frei, sondern unter dem Einflusse einer Dämpfung, die eine Vergrößerung der Wellenlänge zur Folge hat.

Ist diese Überlegung richtig, so müssen in allen jenen Fällen, in denen wir die Zahl der lichterregenden Theilchen in der Volumeneinheit, also die Dichte des leuchtenden Dampfes

---

[1] J. F. Mohler, Astroph. Journ. 10 (1899).

[2] Nature, 57 (1899); 59 (1899). — A. Schuster und G. Hemsalech, Phil. Trans. 193, *A* (1899).

erhöhen, Vergrößerungen der Wellenlängen, also Verschiebungen der Linien nach Roth auftreten. Dabei müssen natürlich die den Druck in der Bahn der Entladung beeinflussenden Größen nach Thunlichkeit constant gehalten werden, also namentlich Stromstärke und Capacität im secundären Kreise.

Die Versuche über den Einfluss der Dampfdichte auf die Wellenlänge der Linien wurden an Kalium gemacht, das eine beträchtliche Verschiebung aufweist. Die Anordnung war folgende. Es wurden 0·2, respective 2, 20 und 200 *g* KOH in je 100 $cm^3$ Wasser gelöst und auf Kohle aufgetragen. Um diese poröser zu machen, wurde sie durch einige Secunden im Bogen erwärmt. Die verwendete Flüssigkeitsmenge betrug in allen Fällen 0·75 $cm^3$, so dass die Mengen des aufgetragenen K sich wie 1 : 10 : 100 : 1000 verhielten. Es dürfte wohl gestattet sein anzunehmen, dass auch die Zahlen der in die Funkenbahn eintretenden K-Theilchen in demselben Verhältnis standen. Die Funken- und Bogenspectra der so präparierten Kohlen wurden photographisch fixiert mit einem Rowland'schen Concavgitter von 15 Fuß Radius und 20.000 Linien pro Zoll. Die Kohlen selbst wurden für jede Aufnahme erneuert, die Expositionszeit betrug für den Bogen 5, für den Funken 150 Secunden. Zur Erzeugung des Funkens diente ein Hochspannungstransformator, der mit 12 Ampère und 100 Volt primär betrieben wurde. Er transformiert auf etwa 10.000 Volt. In den Secundärkreis war parallel zur Funkenstrecke eine Condensatorenbatterie von 625 *m* Capacität eingeschaltet. Die Bogenspectren wurden mit Gleichstrom von 110 Volt Spannung und etwa 8 Ampère Stromstärke erzeugt. Die äußeren Versuchsbedingungen wurden für alle Aufnahmen gleichgehalten. Als Standards für die Messung dienten in allen Fällen Linien des Bogenspectrums des Eisens, das mit einer Expositionszeit von 3 Secunden einphotographiert wurde. Zur Messung wurden die Spectren in etwa 30facher Vergrößerung projiciert und die Stellung der Linien auf einer Scala abgelesen. Bezüglich der Messmethode selbst sei auf die Arbeiten von F. Exner und E. Haschek[1] verwiesen.

[1] F. Exner und E. Haschek, diese Sitzungsber., Bd. 104, Abth. IIa. ff.

Die folgenden Tabellen geben die Resultate der Messungen an den zwei violetten Kaliumlinien 4044 und 4047 wieder. Bemerkt sei dazu, dass jede Zahl das Mittel aus wenigstens 10, wenig von einander abweichenden Werten ist, und dass die mitgetheilten Wellenlängen bei den geringeren Concentrationen auf mindestens 0·002 AE, bei den höheren auf 0·003 AE sicher sind.

| Concentration | Bogen | Funken | Bogen | Funken |
|---|---|---|---|---|
| *A.* **Linien nicht umgekehrt** | | | | |
| 0·2 | 4044·313 | 4044·300 | 4047·374 | 4047·360 |
| 2·0 | 4044·332 | 4044·320 | 4047·387 | 4047·382 |
| 20·0 | — | 4044·382 | — | 4047·450 |
| 200·0 | — | — | — | 4047·655 |
| *B.* **Linien umgekehrt** | | | | |
| 20·0 | 4044·310 | — | 4047·365 | — |
| 200·0 (*a*) | 4044·392 | 4044·321 | 4047·392 | 4047·418 |
| 200·0 (*b*) | 4044·392 | 4044·360 | 4047·392 | — |

Infolge einer Ungleichmäßigkeit im Befeuchten der Elektroden ergab sich bei der höchsten Concentration im Funkenspectrum eine Dissymmetrie zwischen den beiden Enden der Linien. Zwischen Funken und Spalt ist zur Erhöhung der Lichtstärke ein Quarzcondenser eingeschaltet, der ungefähr paralleles Licht liefert. Es entsprechen im Spectrum die Enden der Linien immer den Partien des Funkens, die den Elektroden anliegen, während die Mitte der Linie auch der Funkenmitte entspricht. Zeigt also der Funken Ungleichförmigkeiten in seiner Richtung, so werden diese in gewissem Grade in den Linien abgebildet. In unserem Falle war durch Abtropfen der Lösung von der oberen zur unteren Elektrode die Menge des

aufgetragenen und daher auch des in die Funkenbahn gelangenden Kaliums an den beiden Enden verschieden, am oberen kleiner, am unteren größer. Die Folge ist, dass an dem einen Ende entsprechend der geringeren Dichte des leuchtenden Kaliumdampfes nur die Linie 4044 umgekehrt erscheint, am anderen hingegen beide. Die Umkehrungen selbst waren im Bogen sowohl, als auch im Funken nicht genau symmetrisch, im letzteren Falle war auch die rothe Componente regelmäßig stärker als die violette.

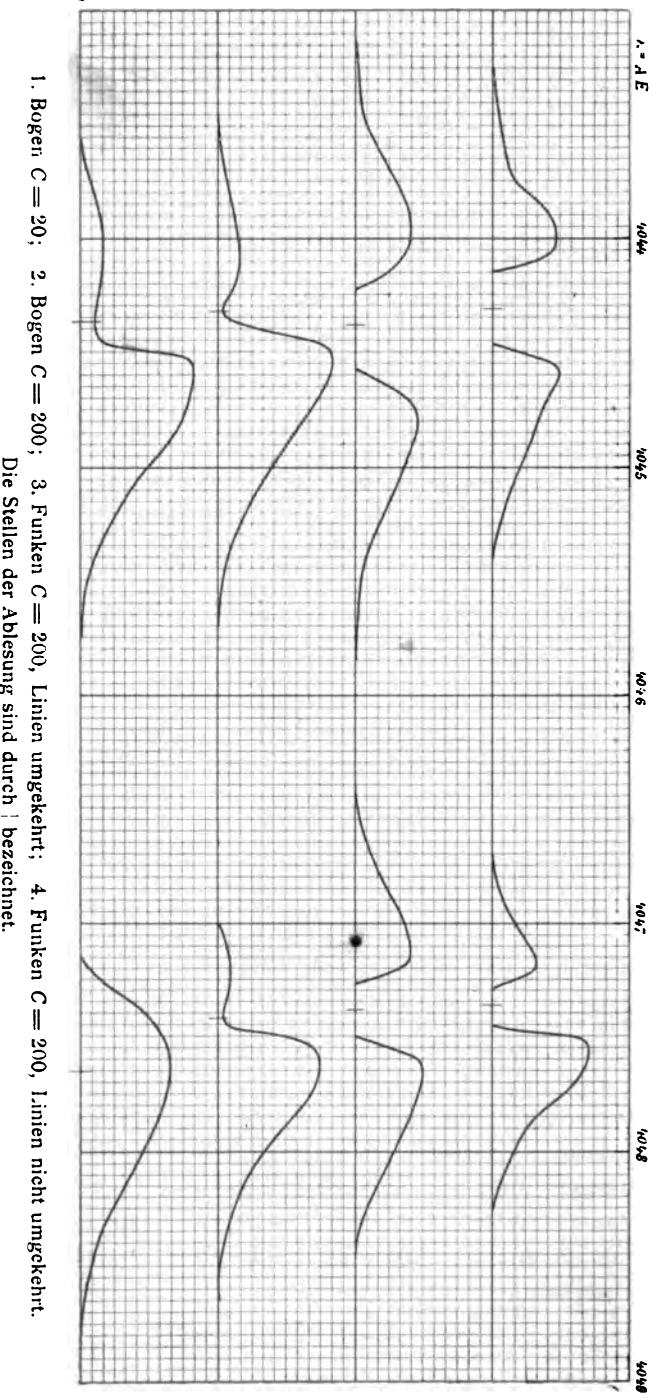
Was nun die Wellenlängen selbst anlangt, so zeigt die Tabelle zunächst das überraschende Resultat, dass bei der tiefsten Concentration von 0·2 *g* KOH auf 100 $cm^3$ Wasser die Wellenlänge der Linien im Funken kleiner ist, als im Bogen. Gemäß den Resultaten von Humphreys hätte man anzunehmen, dass in diesem Falle im Bogen ein um etwa 1·3 Atmosphären größerer Druck herrscht, als im Funken. Auch bei den nächsthöheren Concentrationen bleibt die Wellenlänge der Bogenlinien zunächst noch größer als die der Funkenlinien, doch wird die Differenz kleiner. Was die Variabilität der Wellenlänge mit der Dichte anlangt, so zeigt die Tabelle ein stetiges Wachsen derselben mit der zunehmenden Concentration. Es gilt dies ebenso für die Linien, wie für ihre Umkehrungen. Auch diese verschieben sich. Es zeigt sich, dass die Wellenlänge der Umkehrung bei der kritischen Dichte kleiner ist, als bei der kleinsten angewendeten Dichte des Kaliumdampfes und ferner, dass diese für den Funken höher liegt als für den Bogen.

Als kritische Dichte ist dabei jene bezeichnet, bei der eben Linienumkehrung eintritt.

Es dürfte die Vermuthung ihre Berechtigung haben, dass die Wellenlänge der Umkehrung bei der kritischen Dichte vollkommen mit der kleinsten möglichen Wellenlänge der Linie übereinstimmt.

Besonders interessant ist wieder das Verhalten der Linien bei der höchsten Concentration im Funken. Infolge der oben erläuterten Ungleichmäßigkeit im Befeuchten der Elektroden bei diesem Versuche und der dadurch bedingten Dichtevertheilung im Kaliumdampfe erscheinen an dem einen Ende (*a*) beide Linien umgekehrt. Doch ist die Umkehrung bezüglich der

Wellenlängen- und Intensitätsvertheilung innerhalb der Linie vollkommen unsymmetrisch. Sie erscheint nach Violett von der Mitte abgerückt. Die violette Componente ist schwach und verwaschen, die rothe hingegen ist kräftig und setzt scharf von der Umkehrung ab, um dann gegen die Seite der längeren Wellen langsam abzuklingen. Es gilt dies für beide Linien. Bei der geringeren Dichte, die für die Linie 4044 ziemlich gleich der kritischen sein dürfte, während sie für 4047 noch beträchtlich tiefer liegt, ist nur die erstere Linie umgekehrt. Doch ist der Ort der Umkehrung nicht scharf bestimmbar, da die Absorption noch nicht genügt, um einen beträchtlichen Intensitätsunterschied zwischen der Stelle der Umkehrung und der violetten Componente hervorzubringen. Die Linie 4047 hingegen zeigt gar keine Umkehrungserscheinung. Das Maximum ist wenig ausgesprochen, die Linie breit und stark, besonders nach Roth, verwaschen. Diese Linie zeigt auch die größte Verschiebung, 0·295 AE gegen die tiefste verwendete Concentration. Entsprechend diesem Verhalten zeigt sie auch im Bogenspectrum bei einer die kritische Dichte nur wenig übersteigenden eine ziemlich bedeutende Unsymmetrie in der Einstellung der Umkehrung in die Linienmitte und in dem Intensitätsverhältnis der beiden Componenten. Eine bildliche Darstellung der hier erwähnten Eigenthümlichkeiten ist zur Versinnlichung nothwendig. Eine Reproduction der Linien selbst ist aber, selbst in ziemlich starker Vergrößerung, unthunlich und wertlos, da bei dem nothwendigen weiten Weg von der Originalaufnahme bis zum Cliché die feineren Details der Linien verloren gehen. Wir haben es daher versucht, den Charakter der Linien in den hier reproducierten Curven wiederzugeben. Sie leisten freilich nicht dasselbe, wie die directe Vergrößerung der Originalaufnahme. Selbst bei der größten Vorsicht kann man ja die Darstellung nicht von subjectiven Auffassungen freimachen, die sich vielleicht weniger auf die Ablesungen der Ränder, Intensitätsmaxima u. dergl. beziehen, als auf die Schätzung der Intensität. Messungen sind bei der geringen Breite kaum möglich. Auch würden sie wohl kein genaueres Bild liefern, weil die Änderungen der Intensität mit der Wellenlänge innerhalb der Linie sehr beträchtliche sind.




1. Bogen C = 20; 2. Bogen C = 200; 3. Funken C = 200, Linien umgekehrt; 4. Funken C = 200, Linien nicht umgekehrt.
Die Stellen der Ablesung sind durch | bezeichnet.

Die Curven sind vor dem Schirme nach Lage der Maxima, Rändern der Umkehrungen und Linien construiert. Die Höhe der Ordinaten aber, die die Linienintensität wiedergeben, beruhen auf bloßer Schätzung. Es sind also die verschiedenen Concentrationen entsprechenden Curven in dieser Hinsicht nicht miteinander vergleichbar, dagegen wohl die derselben Dampfdichte zugehörigen, namentlich 3. und 4. Sie entstammen ja denselben Platten. Bezüglich der Anordnung sei noch bemerkt, dass die Curven bezüglich der Wellenlängen nach Thunlichkeit orientiert sind. Der Ort der Ablesung ist durch einen verticalen Strich markiert.

Wir wollen im folgenden versuchen, eine Erklärung für die beobachteten Thatsachen zu finden. Wir müssen uns dazu eine Vorstellung von der Constitution des leuchtenden Dampfes zu bilden trachten. Beschäftigen wir uns zunächst mit dem Bogen. Es ist klar, dass wir bezüglich der Temperatur und der Dichte zu unterscheiden haben zwischen dem Mantel des Bogens und seinem Kern. Es ist dieser jedenfalls heißer als die Randschichten, da diese mit der kühleren Umgebung in Berührung stehen und durch Strömungen und Strahlung einen Theil ihrer Wärmemenge abgeben. Die inneren Schichten sind hingegen geschützt und bleiben auf hoher Temperatur. Wir haben also ein, wenn auch vielleicht kleines Temperaturgefälle vom Inneren des Bogens nach außen. Gleichzeitig ist aber auch die Dampfdichte in einer zur Richtung des Bogens senkrechten variabel. In den Schichten an der Mantelfläche diffundieren Theilchen aus dem Bogen heraus, kühlen sich ab und tragen zur Strahlung wenig oder nichts bei. Namentlich bei geringen Dichten wird sich dies von Einfluss zeigen, so dass wir fast nur Licht aus dem Inneren des Bogens beobachten. In allen Fällen besteht aber die Linie aus unendlich vielen, deren jede einer anderen Temperatur und Dichte des leuchtenden Dampfes entspricht.

Die Intensitätscurven superponieren sich zu der beobachteten, und diejenigen werden den Charakter der Linie am meisten beeinflussen, die mit geringen Variationen am häufigsten vorkommen. Es sind dies die den Durchschnittswerten entsprechenden. Steigern wir die Concentration, also die Dichte

des leuchtenden Dampfes, so wird zunächst die Intensität der Linie steigen, da die Zahl der strahlenden Centren gewachsen ist. Gleichzeitig nimmt auch die Linienbreite zu. Es gelangen noch Wellenlängen zur Beobachtung, die bei geringerer Temperatur die Schwelle noch nicht erreichen. Auch die Wellenlänge steigt, da infolge der größeren Dichte und der dadurch bedingten Annäherung der Theilchen aneinander die Kräfte wachsen, die diese auf einander ausüben. Diese Dämpfung ist naturgemäß im Inneren des Dampfes größer als außen. Da nun infolge der höheren Temperatur des Kernes die Energie der aus dem Inneren stammenden Strahlung größer ist, als der äußeren, so beobachten wir in der Linie eine Wellenlänge, die einer Partie des Kernes entspricht. Die Verhältnisse ändern sich aber bei der kritischen Dichte.

Es ist ja klar, dass wir die resultierende Intensitätscurve als aus zwei entstanden auffassen können, aus der Emissions- und der Absorptionscurve. Licht aus dem Inneren des leuchtenden Dampfes erfährt beim Passieren desselben in allen Schichten eine der Emission derselben proportionale Absorption. Steigt diese soweit, dass Selbstumkehrung beobachtet wird, so haben wir über die Emissionscurve der stark verschobenen Linie, die der centralen Strahlung entspricht, die Absorptionscurve der peripheren gelagert, die infolge der hier herrschenden tieferen Temperatur und kleineren Dichte eine geringere Verschiebung aufweist. Es erscheint also die Umkehrung excentrisch und ist schmal, entsprechend der verhältnismäßig geringen Emission der peripheren Strahlung. Je höher die Dichte steigt, desto tiefere Schichten betheiligen sich noch an der Umkehrung, desto breiter wird diese und desto weiter rückt sie nach Roth. Schon bei Dichten, die unterhalb der kritischen liegen, beobachten wir natürlich Absorption, nur sprechen wir noch nicht von Selbstumkehrung der Linie. Es lagert sich in diesem Falle die Absorptionscurve entsprechend ihrer geringeren Verschiebung hauptsächlich über dem violetten Theile der Emissionscurve, der also gegen den rothen geschwächt wird. Die Linie erscheint dadurch, wie man sofort einsieht, nach Roth verwaschen. Infolge der Absorption, die auch im Falle der Umkehrung sich selbstverständlich nicht nur auf diese beschränkt,

sinken die Intensitäten der Componenten, ein Schluss, der auch von der Erfahrung bestätigt erscheint. Die maximale Intensität beobachtet man in der Nähe der kritischen Dichte.

Auffallender noch als beim Bogen, liegen die Verhältnisse beim Funken, bei dem auch noch der Druck eine gewisse Rolle spielt. Es sind hier offenbar die Temperatur- und Dichteunterschiede zwischen dem Inneren und der Peripherie noch größere als beim Bogen.

Ich habe an anderer Stelle[1] auf Grund der Versuche von Schuster eine Ansicht entwickelt, der entsprechend der Druck und die Temperatur im Funken wesentlich von der Geschwindigkeit der Theilchen abhängt. Es ist nun klar, dass an der Peripherie des Funkens die translatorische Geschwindigkeit der Theilchen wegen der Reibung an dem umgebenden Gas beträchtlich kleiner sein muss als im Inneren, wo alle Theilchen im wesentlichen parallele Bahnen beschreiben. Es kommt also zu der auch beim Bogen stattfindenden Abkühlung des Mantels durch die Strömungen noch der Umstand dazu, dass aus den angegebenen Gründen die Temperatur schon anfangs einen kleineren Wert hat als im Inneren. Es ist daher das Temperaturgefälle ein größeres als beim Bogen. Infolge des im Inneren herrschenden hohen Druckes ist die Verschiebung der dem Kern entstammenden Linie eine größere als beim Bogen. Da jedoch auch das Dichtegefälle beim Funken ein größeres ist, so beobachten wir als resultierende Wellenlänge eine solche, die einer geringeren Dichte entspricht, als bei der gleichen eingetragenen Menge beim Bogen, da ja beim Funken der Mittelwert, bei dem wir beobachten, für Temperatur und Dichte tiefer liegt, als beim Bogen, gleiche Verhältnisse des Kernes vorausgesetzt.

Bei den angestellten Versuchen dürfte diese Voraussetzung angenähert zutreffen. Es erklärt sich daraus, warum bei den geringen Concentrationen die Wellenlänge im Funken kleiner ist als im Bogen.

Steigern wir nun die Dichte, so prävalieren in der Intensitätscurve immer tiefere Schichten durch ihre rascher

[1] E. Haschek, Druck und Temperatur im elektrischen Funken. Diese Sitzungsber., Bd. 109, Abth. II a. (1900).

steigende Emission. Es wächst ja die Intensität im Inneren proportional der Zahl der leuchtenden Theilchen, während an der Peripherie Strömungen und Diffusion gleich bleiben, dagegen die Reibung mit ihrem abkühlenden Einfluss wächst. Wegen des im Inneren herrschenden Druckes treten nun kräftigere Verschiebungen auf, als im Bogen, da zur Annäherung der Theilchen nicht nur die gesteigerte Dichte, sondern auch der Druck beiträgt. Die Emission des Kernes steigt also rascher als die der Peripherie. Es wird also auch die Absorption der Randpartien erst später zur Geltung kommen, d. h. die kritische Dichte höher liegen, was durch die Erfahrung bestätigt erscheint. Bevor aber diese noch erreicht ist, werden wir beim Funken, analog wie beim Bogen, die Absorption am violetten Rande der Linie bemerken. Da nun das Maximum beim Funken weiter nach Roth liegt, werden wir stark verwaschene Linien bekommen, die aus denselben Gründen wie beim Bogen nach Roth abschattiert sind. Diese Absorption am violetten Rande bleibt auch bei der kritischen und den höheren Dichten bestehen. Es muss also außer der Umkehrung noch eine Schwächung der violetten Componente beobachtet werden, wie es auch die Erfahrung lehrt.

Die im vorhergehenden erhaltenen Resultate sind in Kürze folgende:

Bei steigender Dichte des leuchtenden Dampfes treten sowohl im Bogen-, als auch im Funkenspectrum Verschiebungen auf. Diese betreffen sowohl die Linien, als auch ihre Umkehrungen, eine Erscheinung, die durch die Constitution des leuchtenden Dampfes bedingt ist.

## III. Über die Abhängigkeit der Wellenlängen von der Erzeugungsart des leuchtenden Dampfes.

Schon im vorigen Abschnitte haben wir bei der Besprechung des Einflusses der Dichte auf die Wellenlänge den Unterschied zwischen Bogen- und Funkenspectren hervorgehoben. Wir sahen dort, dass die Verschiebung bei gleicher Concentrationszunahme für das Funkenspectrum größer ausfällt, als für das Bogenspectrum. Den Grund hiefür fanden wir einerseits in dem im Funken auftretenden Druck, anderseits in

dem größeren Temperatur- und Dichtegefälle gegenüber dem Bogen. Es ist nun klar, dass alle Variationen in der Erzeugung des leuchtenden Dampfes begleitet sein werden von entsprechenden Änderungen in der Wellenlänge der emittierten Linien. Von den Änderungen des Gesammtcharakters des Spectrums wollen wir dabei ganz absehen.

Einen Fingerzeig für die Untersuchung bietet uns die bereits oben erwähnte Arbeit über den Druck im elektrischen Funken. Alle Umstände nämlich, die diesen ändern, müssen auch einen Einfluss auf die Wellenlänge ausüben. Am auffallendsten nun ist der Unterschied im Drucke zwischen dem Transformator und dem Rhumkorff'schen Inductorium, was sich durch den verschiedenen Energieverbrauch erklärt. Aber auch beim gleichen Apparat ergeben sich dadurch Unterschiede, namentlich mit variabler Capacität und auch mit dem Drucke und der Natur des umgebenden Gases.

Der Einfluss dieser letzterwähnten Größen ist klargelegt durch die Arbeit von J. F. Mohler.[1] »Pressure in the electric spark«. Ich will seine Resultate in Kürze referieren. Mohler arbeitete mit einem Inductorium, das ohne Capacitäten etwa 20 *cm* Funkenlänge gab. Bei den Aufnahmen der Spectren wurden gemessene Capacitäten (von 11·1 *m* bis 70·2 *m*) eingeschalten und mit 3 *mm* oder weniger Funkenlänge gearbeitet. Als Elektroden diente Cadmiummetall, so dass in allen Fällen die maximale Dampfdichte erreicht war. Es zeigte sich nun, dass die Wellenlänge mit der verwendeten Capacität wuchs, und zwar von 0·026 AE bei 11·1 *m* bis 0·088 AE bei 70·2 *m*. Leider sind die Messungen nicht für die gewählten Linien [5086·001, 4800·097, 4678·339] getrennt angeführt, sondern es ist aus den gefundenen, auf $\lambda = 4000$ reducierten Werten das Mittel genommen. Es ist also nicht zu ersehen, ob alle Linien in gleicher Weise afficiert wurden. Bemerkenswert ist, dass die Verschiebung erst rascher, dann langsamer mit der Capacität steigt, also offenbar einem Maximum zustrebt, genau so wie E. Haschek und H. Mache es für den Funkendruck fanden. Es scheint also, dass dieser allein maßgebend ist.

[1] J. F. Mohler, Astroph. Journ. 10 (1899).

Bei constant gehaltener Capacität untersuchte Mohler auch den Einfluss des Druckes und der Natur des umgebenden Gases. Im ersteren Falle findet er eine Steigerung der Verschiebung, die proportional ist der Drucksteigerung im umgebenden Medium. Verwendete er Kohlendioxyd statt Luft, so stieg die Verschiebung im Verhältnis von 1·38 : 1.

Hieher zu zählen sind auch die Versuche von J. Wilsing,[1] der den Funken unter Wasser übergehen ließ. Die dabei beobachteten Verschiebungen sind sehr beträchtliche, sie erreichen in einzelnen Fällen den Wert mehrerer Einheiten.

Von Wichtigkeit ist noch der Vergleich der Spectren, die man beim Rhumkorff'schen Inductorium erhält, wenn man verschiedene Unterbrecher verwendet. Ich benützte eine Inductionsspule, die ohne Condensatoren zwischen Kugeln eine Funkenlänge von etwa 12 *cm* gibt, mit dem gewöhnlichen Hammerinterruptor, respective dem elektrolytischen Unterbrecher nach Wehnelt. In den secundären Kreis war dabei eine Condensatorenbatterie von circa 60 *m* Capacität eingeschaltet. Die Versuche wurden mit 20procentiger Lösung von KOH unter Beobachtung der oben angegebenen Vorsichtsmaßregeln gemacht. Die gemessenen Wellenlängen enthält die folgende Tabelle. Bemerkt sei, dass im Gegensatze zum Transformator die Linien schwach und sehr verwaschen sind, so dass der mögliche Fehler 0·02 AE betragen kann; es sind daher auch die oben bereits mitgetheilten Zahlen für den Hochspannungstransformator auf zwei Decimalen abgekürzt.

| | Inductorium | |
|---|---|---|
| Transformator | Wehnelt-Unterbrecher | Hammer |
| 4044·38 | 4044·36 | 4044·44 |
| 4047·45 | 4047·41 | 4047·47 |

Es zeigen sich die Linien also auch hier stark verschoben, und zwar beim Wehnelt'schen Unterbrecher ziemlich gleich wie beim Transformator, beim Hammerunterbrecher dagegen stärker. Der Grund dafür mag darin liegen, dass bei der geringen Zahl der Funken (etwa 150 pro Minute) die Luft in der Nähe

[1] J. Wilsing, Berl. Ber. (1899).

der Funkenbahn sich vollständig wieder abkühlt, so dass ein starkes Temperaturgefälle vorhanden ist. Analog mag es auch mit den Druckverhältnissen sein. Die Entladung muss sich immer wieder ihre Bahn durch das Medium neu brechen, die Theilchen an der Peripherie werden sehr stark gehemmt. Man beobachtet also eine starke Verschiebung, die nahe dem Druckmaximum entspricht, während der Mitteldruck tief liegt. Für diese Erklärung spricht auch der Umstand, dass die Linien sehr stark verwaschen, ohne besonders deutliches Intensitätsmaximum sind.

Bemerkt sei schließlich noch, dass die Expositionszeiten beim Inductorium sehr beträchtliche sind; sie betrugen beim Hammerunterbrecher 400″, beim Wehnelt trotz der größeren Zahl der Funken 500″. Es ist also auch aus diesem Grunde von einer Verwendung dieses Unterbrechers bei Aufnahmen von Spectren abzurathen.

Es zeigen jedoch die mitgetheilten Zahlen, dass man die mit Benützung des Hochspannungstransformators erhaltenen Wellenlängen mit großer Berechtigung auf das Inductorium übertragen kann.

Aus den Ergebnissen dieses und der vorhergehenden Abschnitte lässt sich ein wertvoller Schluss für die Genauigkeitsgrenze der Messungen ziehen. Wir haben gesehen, dass die Linienverschiebungen dem Bogen- und Funkenspectrum gemeinsam sind und unter Umständen beträchtliche Größe erreichen. Namentlich das Funkenspectrum weist starke Verschiebungen auf, die bei den linienreichen Elementen bis zu 0·2 AE, bei den linienarmen aber bis 0·7 AE betragen. Der beobachtete Wert der Wellenlänge ist, wie gezeigt wurde, in hohem Grade von den momentanen Versuchsbedingungen abhängig, und diese werden sich in vielen Fällen nicht einmal controlieren lassen. Es bezieht sich dies namentlich auf die Dichte des leuchtenden Dampfes. Man wird sich also in den meisten Fällen, namentlich wenn es sich um Identification von Linien handelt, mit einer Messgenauigkeit begnügen können, bei der der Einfluss der Verschiebung noch zu vernachlässigen ist, **wenigstens** solange nicht für jede Linie jedes Elementes die

möglichen Variationen bekannt sind. Und diese Aufgabe ist kaum lösbar. Soll nun eine Genauigkeit angegeben werden, so dürften sich 0·03 AE bei linienreichen, 0·1 AE bei linienarmen Elementen als Fehlergrenze gut eignen. Die ersteren Spectren weisen einerseits leicht mit der Genauigkeit von etwa 0·03 messbare Linien auf, die in den meisten Fällen auch geringe Verschiebungen zeigen, während eben Elemente mit hohen Linienverschiebungen wenige und sehr starke breite, nicht leicht messbare Linien geben. Diese Ausführungen gelten natürlich nur, wenn man die gesammten Spectren für Identificationszwecke, also chemische Analyse mit Hilfe des Spectrums, misst. Man zieht ja in solchen Fällen seine Schlüsse aus der Übereinstimmung einer Reihe von Linien. Handelt es sich aber um das Studium von Veränderungen der Wellenlänge durch äußere Einflüsse, Untersuchungen der Homogenität von Linien u. dergl., kurz um das Studium der Linie als solcher, so ist eine möglichst genaue Wellenlängenmessung anzustreben. Doch auch in diesen Fällen wird meist eine ungefähre Wellenlängenangabe genügen, wenn nur die Änderungen mit genügender Schärfe bestimmt sind. Und diese Aufgabe ist die ungleich leichtere.

Es tritt noch die Frage auf, inwieweit die Wellenlängenangaben, die für das Transformatorspectrum gelten, auf Funkenspectren mit dem Rhumkorff'schen Inductorium übertragbar sind, eine Frage, die sich allgemein nicht beantworten lässt. Wie die vorhergehenden Untersuchungen zeigen, ist die Wellenlänge der Linien von der verbrauchten Energie in hohem Grade abhängig. Der Energieverbrauch ist aber gerade beim Transformator ein sehr großer, einzelne Linien also stark nach Roth verschoben. Eine nahe gleiche Verschiebung gab auch der Rhumkorff unter den angeführten Versuchsbedingungen. Es ist aber der Schluss unstatthaft, dass in allen Fällen mit dem Inductorium die gleichen Verschiebungen erhalten werden, wie mit dem Transformator, zum Beispiel gewiss nicht bei kleinen Instrumenten, die mit Batterie- oder Accumulatorenstrom gespeist werden. Es werden dann für die verschobenen Linien, die übrigens die Minderzahl bilden, tiefere Wellenlängenangaben gelten, als für den Transformator. Als Regel kann man übrigens annehmen, dass Linien eines Elementes, das als Verunreinigung

auftritt, unverschoben sind; oder genauer gesagt, wählt man als Genauigkeit der Messung eine solche, bei der der Fehler in den Hunderteln AE liegt, so ist die Verschiebung kleiner als der Messfehler, wird also verdeckt. Man wird also, allerdings mit einiger Vorsicht, die mit dem Transformator erhaltenen Wellenlängen als giltig für das Rhumkorffspectrum nehmen können, und nur bei kleineren Apparaten und nur bei wenigen Linien beträchtliche Differenzen bekommen. Irrthümer in der Identification der Linien werden aber trotzdem kaum auftreten können, da man ja nie eine einzelne Linie, sondern immer eine ganze Reihe verwendet.

# Zur Construction der Flächen zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten

von

**August Adler,**

*k. k. Professor an der deutschen Staats-Realschule in Karolinenthal.*

**(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Februar 1901.)**

Bekanntlich gibt es eine große Zahl Methoden, eine Fläche zweiten Grades $F_2$ aus neun ihrer Punkte zu construieren. Derlei Methoden wurden von Hesse, Chasles, Steiner, Seydewitz, Schröter, Reye, Rohn und anderen angegeben; die wenigsten derselben sind aber vom Standpunkte der darstellenden Geometrie aus praktisch.

Im Nachfolgenden soll eine auch praktisch brauchbare Lösung der Aufgabe gegeben werden; die Methoden von Chasles (Comptes-rendus, 24 Dec. 1855), Steiner (Journal für Mathematik, Bd. 68, S. 191) und Rohn (Berichte der sächs. Akademie, XLVI, 1884) stehen zu ihr in einiger Beziehung.

1. Zunächst müssen wir an einen später gebrauchten Satz erinnern: »Legt man durch die Punkte $A, B, C$ und durch je zwei zusammengehörige Punkte einer Involution $J_1$ auf der Geraden $f$ Kegelschnitte, so bilden dieselben ein Büschel.« Sind nämlich $\alpha$ und $\beta$ zwei dieser Kegelschnitte, so bestimmen dieselben ein Büschel, welches $f$ in einer Involution $J_2$ schneidet, und $J_2$ ist mit $J_1$ identisch, da beide zwei entsprechende Elementenpaare gemein haben.

2. Wir wollen auch eine Constructionsaufgabe erledigen, die wir später benöthigen werden:

»Eine Collineation im ebenen Felde sei gegeben durch einen ihrer Doppelpunkte $S'$ und durch zwei entsprechende Punktetripel $T_1 T_2 T_3$, $T_1' T_2' T_3'$; es ist die dem Punkte $S'$ gegenüberliegende Doppellinie $s$ der Collineation zu construieren.«

Zu diesem Zwecke verbinde man $S'$ mit $T_1$ und bringe diese Linie zum Schnitte mit $\overline{T_2 T_3}$ im Punkte $R_1$, ebenso verbinde man $S'$ mit $T'$ und erhalte analog $R_1'$. Der Schnittpunkt der Geraden $T_1 T_1'$ mit $R_1 R_1'$ liefert schon einen Punkt der gesuchten Doppellinie. Einen zweiten Punkt von $s$ erhält man, indem man $S'$ mit $T_2$, respective $T_2'$ verbindet, die Punkte $R_2$, $R_2'$ erhält und $\overline{T_2 T_2'}$ mit $R_2 R_2'$ zum Schnitte bringt; aus $T_3$, $T_3'$ erhält man endlich ganz analog $R_3$, $R_3'$ und damit einen dritten Punkt von $s$.

Die Richtigkeit der Construction sieht man unmittelbar ein, wenn die beiden Dreiecke $T_1 T_2 T_3$, $T_1' T_2' T_3'$ ähnlich sind und ähnlich zu $S'$ liegen; $s$ befindet sich in diesem Falle unendlich fern; die Doppelpunkte der Collineation sind dann außer $S'$ noch die unendlich fernen Kreispunkte. Der allgemeine Fall lässt sich nun durch Collineation immer auf diesen speciellen Fall bringen.

Damit haben wir nicht nur eine für das Folgende wichtige Construction gezeigt, sondern auch einen sehr allgemeinen Satz über zwei Dreiecke derselben Ebene nachgewiesen, einen Satz, von dem der bekannte Desargues'sche über perspectiv liegende Dreiecke nur ein sehr specieller Fall ist.

3. Wir haben nun die Mittel gewonnen, unsere Hauptaufgabe rasch erledigen zu können.

Wir theilen wie Chasles, Steiner, Rohn die gegebenen neun Punkte in drei Gruppen 123, 456, 789 und legen durch jedes Tripel eine Ebene; dadurch entsteht ein Dreikant mit $S$ als Spitze und $a, b, c$ als Kanten.

Nun nehmen wir auf der Kante $b$ zwei Punkte $P$ und $P'$ an, legen durch dieselben und durch 1, 2, 3 einen Kegelschnitt $K_1$, ferner durch die Schnittpunkte von $K_1$ mit $c$ und durch 4, 5, 6 den Kegelschnitt $K_2$, endlich durch die Schnittpunkte von $K_2$ mit $a$ und durch 7, 8, 9 den Kegelschnitt $K_3$, welcher $b$ in $Q$ und $Q'$ schneiden möge.

Jedem Punktepaare $PP'$ von $b$ entspricht auf diese Weise ein Punktepaar $QQ'$ derselben Geraden und umgekehrt. Gehört insbesondere $S$ einem dieser Punktepaare an, so gehört $S$ auch dem anderen entsprechenden Punktepaare an, wie man aus der Construction von $K_1$, $K_2$, $K_3$ sofort einsieht.

4. Fällt das Punktepaar $PP'$ mit dem entsprechenden $QQ'$ in $X$, $Y$ zusammen, dann sind schon $K_1, K_2, K_3$ drei Kegelschnitte der gesuchten $F^2$. Unsere Aufgabe reduciert sich also wie bei Chasles auf die Bestimmung der Punkte $X, Y$.

5. Dies erreichen wir einfach auf folgendem Wege: Wir nehmen in der Zeichenebene (die ganze Figur denken wir uns auf dieselbe projiciert) einen Kreis $K$ an und auf demselben einen Punkt $O$. Projicieren wir nun die sich ergebenden Punktepaare $PP'$, $QQ'$ aus $O$ auf $K$, so erhalten wir die Punktepaare $P_1P_1'$, $Q_1Q_1'$ und damit die Geraden $p \equiv P_1P_1'$, $q \equiv Q_1Q_1'$.

Weisen wir immer $p$ und $q$ einander zu, so ist in der Zeichenebene eine Collineation festgelegt. Jedem $p$ entspricht nämlich nur ein einziges $q$ und umgekehrt, dreht sich aber eine dieser beiden Geraden um einen Punkt, so dreht sich aber die entsprechende ebenfalls um einen Punkt, wie man leicht beweist. Beschreibt $p$ ein Strahlenbüschel, so sind dadurch die Punkte von $K$ und auch von $b$ involutorisch gepaart; diese Involution auf $b$ bestimmt mit 1, 2, 3 ein Kegelschnittsbüschel (Artikel 1), welches auf $c$ eine Involution $J_c$ ausschneidet, $J_c$ bestimmt mit 4, 5, 6 ein Kegelschnittsbüschel und eine Involution $J_a$ auf $a$ und $J_a$ mit 7, 8, 9 endlich eine Involution $J_b$ auf $b$. Projiciert man $J_b$ aus $O$ auf $K$, so sind die Punkte von $K$ wieder involutorisch gepaart, d. h. $q$ dreht sich um einen Punkt, wenn $p$ ein Strahlenbündel beschreibt.

Die collineare Beziehung zwischen $p$ und $q$ ist damit bewiesen.

6. Ein Doppelpunkt dieser Collineation ist die Projection $S'$ von $S$ aus $O$ auf $K$; denn jeder durch $S'$ gehenden Geraden $p$ oder $q$ entspricht (Artikel 3) eine ebenfalls durch $S'$ gehende Gerade.

Zwei collineare ebene Felder haben bekanntlich drei Doppelpunkte und drei sich selbst entsprechende Gerade, welche zusammen Ecken und Seiten eines Dreieckes bilden. Die dem Punkte $S'$ gegenüberliegende Doppellinie $s$ unserer Collineation liefert offenbar die Lösung unserer Aufgabe; $s$ schneidet nämlich $K$ in zwei Punkten $X'$ und $Y'$, welche aus $O$ auf $b$ projiciert, schon die gesuchten Punkte $X, Y$ ergeben.

Unsere Methode gewährt übrigens noch einen tieferen Blick in die ganzen Verhältnisse: Außer $s$ hat unsere Collineation noch zwei Doppellinien $d_1$ und $d_2$ durch $S'$; projiciert man deren Schnittpunkte ($D_1'$ und $D_2'$) mit $K$ aus $O$ auf $b$, so erhält man $D_1$ und $D_2$. Jeder dieser letzten Punkte bestimmt offenbar mit den gegebenen neun Punkten und $S$ drei Kegelschnitte, welche zusammen durch alle neun gegebenen Punkte, außerdem aber noch durch $S$ gehen und sich in den Kanten $a$, $b$, $c$ treffen.

Diese Kegelschnitte liefern jedoch keine durch die gegebenen neun Punkte gehende $F^2$, da die Tangenten dieser Kegelschnitte im Punkte $S$ im allgemeinen nicht in einer und derselben Ebene liegen.

7. Bei der constructiven Durchführung unserer Aufgabe nach obiger Methode muss man drei Ketten von unseren Kegelschnitten $K_1 K_2 K_3$ durch die neun Punkte legen; es ist dabei sehr wichtig, dass man die Kegelschnitte $K_1$ und $K_2$ jedesmal als zerfallende annehmen kann.

Sind nämlich $C$, $D$, $E$ die Schnittpunkte der Seiten des Dreieckes 123 mit $c$ (dabei ist: $C \equiv 23 \times c$, $D \equiv 31 \times c$), $F$, $G$, $H$ die Schnittpunkte des Dreiseits 456 mit $c$ ($F \equiv 56 \times c$, $G \equiv 64 \times c$), so wählen wir als Kegelschnitte $K_1$ und $K_2$ das erstemal die Geradenpaare 23, $1H$, respective 45, $6C$, das zweitemal die Geradenpaare 31, $2F$, respective 56, $4D$, endlich das drittemal 12, $3G$, respective 61, $5E$. Die Schnittpunkte der drei Kegelschnitte $K_3$ mit $b$ bestimme man mit Hilfe von $K$.

Auf $K$ entstehen drei Paare entsprechender Punkte, wie $P_1 P_1'$ und $Q_1 Q_1'$, also drei Paare Linien $p$, $q$. Von unserer Collineation kennt man jetzt außer dem Doppelpunkte $S'$ noch zwei entsprechende Dreiecke; die dem Punkte $S'$ gegenüberliegende Doppellinie $s$ kann nach Artikel 2 einfach construiert werden.

8. Für den praktischen Wert einer Construction ist die Anzahl der dazu nöthigen Linien im allgemeinen von entscheidender Bedeutung. Wir wollen daher noch die Anzahl der Linien angeben, welche die Aufsuchung der Punkte $X$ und $Y$ nach unserer Methode und nach den verwandten von Chasles und Rohn erfordert.

Nach der Chasles'schen Methode, welche keine zerfallenden Kegelschnitte benützt, sind mehr als 200 gerade Linien nöthig außer einem Kreise $K$; dabei wurde noch angenommen, dass nicht imaginäre Elemente in die Construction eintreten, wodurch die Anzahl der Constructionslinien sich noch beträchtlich erhöhen würde.

Die mehrmals erwähnte Rohn'sche Methode beruht auf der Construction der Polarebene von $S$ in Bezug auf die gesuchte $F^2$; sie ist jedenfalls eine der elegantesten und praktisch besten Methoden für unseren Zweck; sie erfordert außer einem Kreise noch über 80 Linien.

Unser Constructionsverfahren verlangt außer dem Kreise noch 83 gerade Linien.

Für die beiden letzten Methoden bedeutet das Eintreten imaginärer Elemente keine Vermehrung der Constructionslinien. Das Rohn'sche Verfahren verlangt übrigens nicht das Aufsuchen der Punkte $X$ und $Y$.

# Über eine Gruppe der Cayley'schen Gleichung analoger Relationen

von

Prof. **Josef Sterba** in Wien.

**(Vorgelegt in der Sitzung am 14. März 1901.)**

Cayley hat für die elliptischen Functionen zuerst die merkwürdige Gleichung hergeleitet:

$$k^2k'^2 \operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{sn}(r)\operatorname{sn}(s)+k'^2 =$$
$$\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)\operatorname{dn}(r)\operatorname{dn}(s)-k^2\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{cn}(r)\operatorname{cn}(s),$$
$$\text{Bedingung: } u+v = -(r+s);$$

die Bezeichnung sn, cn, dn ist der Kürze wegen für sinam, cosam, $\Delta$am gewählt, $k$ ist der Modul der elliptischen Function, $k'$ sein Supplement.

Hermite hat in den Acta Math., Bd. I diese Relation aus den Integralen zweiter Gattung und Schroeter ebenda Bd. V aus dem Fundamentaltheorem der $\vartheta$-Functionen hergeleitet; Schroeter geht dabei von den für $\vartheta$-Functionen fundamentalen Substitutionen

$$w' = \frac{1}{2}(w+x+y+z).$$

$$x' = \frac{1}{2}(w+x-y-z),$$

$$y' = \frac{1}{2}(w-x+y-z),$$

$$z' = \frac{1}{2}(w-x-y+z),$$

$$w'^2+x'^2+y'^2+z'^2 = w^2+x^2+y^2+z^2$$

aus, setzt $w = 0$, also wie es die Cayley'sche Gleichung erfordert, $w+x = -(y+z)$ und gelangt durch Einführung der elliptischen Functionen an Stelle der $\vartheta$-Quotienten zur Cayley-schen Formel.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass die Cayley-sche Gleichung auch unter der Bedingung $u+v = -(r-s)$ gilt und dass sich ihr noch vier analoge Relationen zur Seite stellen lassen. Man betrachte die Größen $w, x, y, z$ und $w', x', y', z'$, zwischen denen die vorhin erwähnten Beziehungen

$$w' = \frac{1}{2}(w+x+y+z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bestehen, als Argumente der $\vartheta$-Functionen $\vartheta_0(w), \vartheta_1(w)\ldots$; dann gelten zwischen letzteren bekanntlich 16 Fundamental-relationen. Man wähle nun die Argumente $w, x, y, z$ derart, dass $w', x', y', z'$ mit ihnen identisch werden, wozu erforderlich ist, dass

$$w-x = y+z$$

sei; dann hat jedes Glied der $\vartheta$-Formeln dieselben Argumente, und die Einführung der elliptischen Functionen liefert die der Cayley'schen analogen Gleichungen.

Ein Wertesystem, welches der Forderung $w-x = y+z$ entspricht und auch sonst bei der Herleitung elliptischer Formeln von Nutzen ist (siehe meine Abhandlung in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Band CXXII, Heft 3), ist offenbar das folgende:

$$w = \alpha+\beta,\ x = \alpha-\beta,\ y = \beta+\gamma,\ z = \beta-\gamma.$$

Von den 16 $\vartheta$-Relationen (siehe Enneper, Elliptische Functionen) bleiben dann nur mehr fünf nicht identische übrig; wir führen dieselben an, ohne die Argumente anzumerken, deren Reihenfolge in jedem Producte $\alpha+\beta, \alpha-\beta, \beta+\gamma, \beta-\gamma$ ist:

$$\begin{aligned}
&1.\quad \vartheta_0\vartheta_0\vartheta_0\vartheta_0+\vartheta_1\vartheta_1\vartheta_1\vartheta_1 = \vartheta_3\vartheta_3\vartheta_3\vartheta_3-\vartheta_2\vartheta_2\vartheta_2\vartheta_2,\\
&2.\quad \vartheta_0\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_3-\vartheta_1\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_2 = \vartheta_3\vartheta_3\vartheta_0\vartheta_0+\vartheta_2\vartheta_2\vartheta_1\vartheta_1,\\
&3.\quad \vartheta_0\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_2-\vartheta_1\vartheta_1\vartheta_3\vartheta_3 = \vartheta_2\vartheta_2\vartheta_0\vartheta_0+\vartheta_3\vartheta_3\vartheta_1\vartheta_1,\\
&4.\quad \vartheta_3\vartheta_3\vartheta_2\vartheta_2-\vartheta_2\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_3 = \vartheta_1\vartheta_1\vartheta_0\vartheta_0+\vartheta_0\vartheta_0\vartheta_1\vartheta_1.\\
&5.\quad \vartheta_3\vartheta_2\vartheta_0\vartheta_1+\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1\vartheta_0 = \vartheta_1\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3-\vartheta_0\vartheta_1\vartheta_3\vartheta_2.
\end{aligned}$$

Dividiert man nun die Gleichungen 1) bis 5) durch $\vartheta_0\vartheta_0\vartheta_0\vartheta_0$, so erhält man, da

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_0(x)} = \sqrt{k}.\operatorname{sn} x, \quad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_0(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot \operatorname{cn} x, \quad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_0(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \operatorname{dn} x$$

ist, folgende fünf Relationen:

$$\text{I.}\quad \operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)\operatorname{dn}(\beta+\gamma)\operatorname{dn}(\beta-\gamma)-k'^2 = k^2\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta)\operatorname{cn}(\beta+\gamma)\operatorname{cn}(\beta-\gamma) + k^2k'^2\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma);$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{dn}(\beta+\gamma)\operatorname{dn}(\beta-\gamma)-\operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta) = k^2\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{cn}(\beta+\gamma)\operatorname{cn}(\beta-\gamma)\\ +\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\end{array}\right\};$$

$$\text{III.}\quad \operatorname{cn}(\beta+\gamma)\operatorname{cn}(\beta-\gamma)-\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta) = \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{dn}(\beta+\gamma)\operatorname{dn}(\beta-\gamma) + \operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma);$$

$$\text{IV.}\quad \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)+\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma) = \frac{1}{k'^2}\left\{\begin{array}{l}\operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)\operatorname{cn}(\beta+\gamma)\operatorname{cn}(\beta-\gamma)\\ -\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta)\operatorname{dn}(\beta+\gamma)\operatorname{dn}(\beta-\gamma)\end{array}\right\};$$

$$\text{V.}\quad \operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)+\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma) = \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\beta+\gamma)\operatorname{dn}(\beta-\gamma)-\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{dn}(\beta+\gamma)\operatorname{dn}(\beta-\gamma).$$

Die erste dieser Gleichungen stimmt in der Form mit der Cayley'schen überein. Bemerkt mag noch werden, dass auch das Wertesystem

$$w = \alpha+\beta+\gamma \quad x = \alpha+\beta-\gamma, \; y = \beta+\gamma-\alpha, \; z = \gamma+\alpha-\beta$$

der Bedingung $w-x=y+z$ genügt; somit behalten die Gleichungen I) bis V) auch für diese Argumente ihre Giltigkeit.



Preis des ganzen Heftes: 3 K 90 h = 3 Mk. 90 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie, Erdbeben und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerolds Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.

# SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

### CX. BAND. IV. HEFT.

**JAHRGANG 1901. — APRIL.**

### ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 3 TAFELN UND 26 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1901.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

# INHALT

des 4. Heftes April 1901 des CX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.



**Preis des ganzen Heftes: 5 K 60 h = 5 Mk. 60 Pfg.**

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

## X. SITZUNG VOM 25. APRIL 1901.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 109, Abth. III, Heft VIII (October 1900). — Monatshefte für Chemie, Bd. 21, Register; Bd. 22, Heft II (Februar 1901); Heft III (März 1901).

Herr Dr. Konrad Helly in Wien dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Ausführung entwickelungsgeschichtlicher Arbeiten über das Pankreas.

Herr Prof. Dr. O. Tumlirz in Czernowitz übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Compressibilität und Cohäsion der Flüssigkeiten«.

Das c. M. Herr Prof. Rudolf Hoernes in Graz übersendet eine Mittheilung: »Über *Limnocardium Semseyi* Halav. und verwandte Formen aus den oberen pontischen Schichten von Königsgrad (Királykegye)«.

Herr Dr. Anton Wassmuth, ord. Professor der mathematischen Physik an der Universität Graz, übersendet eine Arbeit, betitelt: »Das Restglied bei der Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten«.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Hans Molisch übersendet eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von Herrn Leopold Ritter v. Portheim ausgeführte Arbeit: »Über die Nothwendigkeit des Kalkes für Keimlinge, insbesondere bei höherer Temperatur«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. F. Lippich in Prag übersendet eine Abhandlung aus dem physikalischen Institute der

k. k. deutschen Universität Prag von Privatdocent Herrn Dr. Josef v. Geitler, betitelt: »Über die durch Kathodenstrahlen bewirkte Ablenkung der Magnetnadel«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. G. Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der Prager deutschen Universität ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. Hans Meyer: »Über eine allgemein anwendbare Methode zur Darstellung von Chloriden der organischen Säuren«.

Das w. M. Herr Director Prof. R. v. Wettstein übersendet eine Abhandlung von Frau Emma Lampa, betitelt: »Über die Entwickelung einiger Farn-Prothallien«.

Herr Julius A. Reich übersendet ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Neue Beiträge zur Frage der Constitution und Bildungsweise des Chlorkalkes«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner überreicht zwei Abhandlungen aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck von Herrn Prof. I. Klemenčič, betitelt:

I. »Über die Beziehung zwischen Permeabilität und magnetischer Nachwirkung«.

II. »Über den Einfluss der Härtungsnachwirkungen auf die Abnahme des magnetischen Momentes«.

Derselbe legt ferner eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Franz Hlavati vor: »Eine experimentelle Prüfung der Clausius-Mosotti'schen Formel«.

Das w. M. Herr Hofrath Dr. Edm. v. Mojsisovics legt folgende Abhandlungen für die »Mittheilungen der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften« vor:

XXIII. (Neue Folge II.) »Allgemeiner Bericht und Chronik der im Jahre 1900 im Beobachtungsgebiete eingetretenen Erdbeben«.

XXIV. (Neue Folge III.) »Bericht über die seismischen Ereignisse des Jahres 1900 in den deutschen Gebieten Böhmens«, von Herrn Dr. V. Uhlig, c. M. k. Akad.

XXV. (Neue Folge IV.) »Bericht über die Erdbebenbeobachtungen in Kremsmünster im Jahre 1900«, von Herrn Prof. P. Franz Schwab.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht vier in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

I. »Über Einwirkung von Baryumhydroxyd und von Natrium auf einige Aldehyde«, von Herrn Anton Lederer.
II. »Über Einwirkung von Schwefelsäure auf das Glycol aus Isobutyr- und Isovaleraldehyd«, von den Herren V. Löwy und F. Winterstein.
III. »Über Condensationsversuche von Isobutyraldol mit Anilin«, von den Herren E. Friedjung und G. Mossler.
IV. »Zur Kenntnis der aliphatischen Carbylamine und Nitrokörper«, von den Herren F. Kaufler und C. Pomeranz.

Das w. M. Herr Prof. F. Becke legt einen Bericht über den Staubschnee vom 11. März 1901 vor.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Foveau de Courmelle, Dr., L'année électrique, électrothérapique et radiographique. Revue annuelle des progrès électriques en 1900. Paris, 1901. 8°.

Ministère de l'Instruction et des Beaux-Arts in Paris, Carte photographique du Ciel. Zone +1, feuille 99; zone +3, feuilles 105, 112, 122, 123, 127, 155, 176, 178; zone +5, feuilles 102, 180; zone +7, feuille 101; zone +9, feuilles 100, 101, 103, 112, 119. 126. Paris. 4°.

Neuzeit C. E., Die Schöpfung oder das Walten der Natur. Leipzig, 1901. 8°.

Oechsner de Coninck M., La Chimie de l'Uranium. Historique comprenant les recherches principales effectuées sur

l'Uranium et ses composés de 1872 à 1901. Montpellier, 1901. 8⁰.

Queensland Museum, Annals, No 5. Occasional notes. Brisbane, 1900. 8⁰.

Sante Pini, Beschreibung, wie die Messungen der Wassergeschwindigkeit mit Hilfe des Ein- und Mehr-Düsen-Instrumentes »Injector« (System Pini) ausgeführt werden und welche Regeln hiebei zu befolgen sind. Wien, 1900. 8⁰.

---

# Über die Discriminante einer in der Theorie der doppeltperiodischen Functionen auftretenden Transformationsgleichung

(zweite Mittheilung)

von

**Otto Biermann** in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1901.)

In einer ersten Mittheilung, Bd. CIX, Abth. II. a, Juli 1900, wurde die Form der Discriminante derjenigen Transformationsgleichung aufgestellt, deren Lösungen die Verhältnisse des transformierten Integralmoduls $k$ und Multiplicators $M$ sind. Hier soll es sich darum handeln, nach dem Vorgange von Krause[1] Nullstellen der Discriminante zu finden, die als Product einer rationalen Function des ursprünglichen Integralmoduls $c$ und gewisser angegebener Potenzen von $c$ und $c^2-1$ bezeichnet war, die aber zufolge der Form der Coefficienten in der Transformationsgleichung auch als Product derselben Potenz von $c^2-1$, einer geänderten Potenz von $c$ und einer ganzen Function von $c$ aufzufassen ist.

Die genannte Aufgabe wird sich, soweit sie hier behandelt ist, einfacher gestalten als die Bestimmung all der Nullstellen der Discriminante einer Modulargleichung und bietet darum einiges Interesse, wenn es auch schließlich an dieser Stelle unentschieden bleibt, ob man in den hier angegebenen Nullstellen alle besitzt oder nicht. —

Die Discriminante $D(c)$ wird dann Null sein, wenn zwei Lösungen der genannten Transformationsgleichung

[1] Math. Annal., Bd. VIII, IX.

$$\frac{k_u}{M_u} = (-1)^{\frac{u_1-1}{2}} u \frac{\vartheta_2^2\left(o, \frac{u\tau-16x}{u_1}\right)}{\vartheta_3^2(o,\tau)}$$

und

$$\frac{k_t}{M_t} = (-1)^{\frac{t_1-1}{2}} t \frac{\vartheta_2^2\left(o, \frac{t\tau-16\xi}{t_1}\right)}{\vartheta_3^2(o,\tau)}$$

einander gleich werden. Doch eine Gleichung der Form

$$\vartheta_2^2(o,\tau) = (-1)^{\frac{u_1-t_1}{2}} \frac{u}{t} \vartheta_2^2(o,\tau), \qquad \ldots A)$$

wie sie also bestehen soll, wenn

$$\tau_1 = \frac{t\tau-16\xi}{t_1}, \quad \tau_2 = \frac{u\tau-16x}{u_1}$$

gesetzt ist, wird erfüllt sein, wenn erstens eine Beziehung

$$\tau_1 = \frac{b_0-a_0\tau_2}{a_1\tau_2-b_1}$$

besteht, wo die ganzen Zahlen $a_0, b_0, a_1, b_1$ der Gleichung genügen

$$a_0b_1-a_1b_0 = 1$$

und entweder

$$a_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 1,\ a_1 \equiv 0,\ b_0 \equiv 0 \pmod 2$$

oder

$$a_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 1,\ a_1 \equiv 0,\ b_0 \equiv 1 \pmod 2$$

ist; denn in diesem ersten, beziehungsweise fünften Falle der linearen Transformation wird eine $\vartheta_2$-Function wieder in eine solche übergeführt. Doch weil hiebei

$$\vartheta_2^2(o,\tau_1) = C^2 e^{-\frac{2\pi i a_0 b_0}{4}} \vartheta_2^2(o,\tau_2)$$

gilt, wo

$$C^2 = e^{-\frac{\pi i}{4}(2a_0-2)}(b_1-a_1\tau_2)$$

ist,[1] so unterwerfe man, damit die Gleichung *A)* bestehe, $\tau$ nicht bloß der Gleichung zweiten Grades

$$\frac{t\tau-16\xi}{t_1} = \frac{b_0 - a_0 \dfrac{u\tau-16x}{u_1}}{a_1 \dfrac{u\tau-16x}{u_1} - b_1}, \qquad \ldots 1)$$

sondern zweitens auch noch der Gleichung

$$e^{-\frac{\pi i}{4}(2a_0b_0+2a_0-2)}(b_1-a_1\tau_2) = (-1)^{\frac{u_1-t_1}{2}} \frac{u}{t}.$$

Führt man hier den Wert für $\tau_2$ ein, multipliciert dann die Gleichung mit $u_1$ und beachtet, dass

$$uu_1 = tt_1 = n,$$

dem ungeraden Transformationsgrade ohne quadratischen Theiler gleich ist, so wird übersichtlicher

$$a_1u\tau - b_1u_1 - a_1 16x + (-1)^{\frac{u_1-t_1}{2}} t_1 e^{\frac{\pi i}{4}(2a_0b_0+2a_0-2)} = 0. \ldots 2)$$

Hiermit sind hinreichende Bedingungen für die Existenz der Gleichung *A)* angegeben; doch dass diese Bedingungen auch nothwendig sind, oder dass sie es nicht sind, vermochte ich nicht zu zeigen. Sie enthalten möglicherweise zu viele Beschränkungen an $\tau$, doch für einen unseren Bedingungen genügenden $\tau$-Wert erhält $c$ einen solchen Wert, dass $D(c)$ verschwindet. Es gilt daher, die Gleichungen 1) und 2) zu gewinnen, denen zugleich $\tau$-Werte genügen, aber nur $\tau$-Werte, die einen positiven imaginären Bestandtheil besitzen, sonst würden ja die zugehörigen $\vartheta$-Functionen nicht convergieren. Darum muss zunächst die Determinante der Gleichung 1) des zweiten Grades, welche von der Form ist

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0, \qquad \ldots 1')$$

wobei

$$P = a_1ut,$$
$$2Q = u(a_0t_1 - a_1 16\xi) - t(b_1u_1 + a_1 16x),$$
$$R = a_1 16\xi . 16x + b_1 16\xi u_1 - a_0 16x t_1 - b_0 u_1 t_1$$

---

[1] Krause, Theorie der doppeltperiodischen Functionen, S. 111.

bedeutet, das ist somit

$$Q^2 - PR = \Delta,$$

kleiner als Null sein. Es kann also weder $P$ noch $R$ verschwinden, und $P$ und $R$ müssen von gleichem Zeichen — sagen wir dem positiven — sein. Führt man die Größe ein

$$2a = u a_0 t_1 - a_1 16\xi + t b_1 u_1 + a_1 16 x,$$

so gestattet die Determinante die Schreibweise:

$$\Delta = a^2 - n^2,$$

und man schließt — nebenbei bemerkt —, dass, im Falle $a = 0$ ist, ein gemeinsamer Theiler von $P$ und $n$ Theiler von $Q$ sein muss.

Der aus der Gleichung 2) sich ergebende $\tau$-Wert soll auch einen positiven Bestandtheil besitzen; zu diesem Zwecke hat man nur die vierte Wurzel entsprechend den Fällen, dass $a_0, b_0, a_1, b_1$ Transformationszahlen des ersten oder fünften Falles sind, passend zu wählen. Immer ergibt sich aus der Gleichung 2) bei positivem $a_1$, das einem positiven $P$ zugehört, der $\tau$-Werth:

$$\tau = \frac{1}{a_1 u}(b_1 u + a_1 16 x + i t_1).$$

Weil derselbe Wert auch durch

$$-\frac{Q}{P} + \frac{i}{P}(n^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

dargestellt sein soll, hat man zu setzen:

$$(b_1 u_1 + a_1 16 x) P + a_1 u Q = 0. \qquad \ldots 3)$$

$$(n^2 - a^2) a_1^2 u^2 - t_1^2 P^2 = 0. \qquad \ldots 4)$$

Setzt man in der letzten Gleichung:

$$P = a_1 u t,$$

so erhält man, es müsse

$$a a_1 = 0$$

sein. Wäre die gerade Zahl $a_1 = 0$, so wäre es auch $P$, was ausgeschlossen war; es muss also $a = 0$ und die Determinante der Gleichung 1')

$$\Delta = -n^2$$

sein.

Durch Substitution der Werte für $P$ und $Q$ wird die Gleichung 3) zur folgenden:

$$a_1 u[t(b_1 u_1 + a_1 16x) + u(a_0 t_1 - a_1 16\xi)] = 0.$$

Es muss die Klammergröße Null sein, und damit ergibt sich

$$Q = u(a_0 t_1 - a_1 16\xi) = -t(b_1 u_1 + a_1 16x).$$

Wenn also $P$ durch die Theiler von $n$, durch $u$ und $t$, aber auch durch $ut$ theilbar ist, so hat nicht allein $Q$ die Theiler $u$ und $t$, sondern weil

$$t\frac{Q}{u} = a_0 n - \frac{P}{u} 16\xi,$$

$$u\frac{Q}{t} = -b_1 n - \frac{P}{t} 16x$$

ist, so folgt noch, dass der gemeinsame Theiler von $\frac{P}{u}$ und $n$ auch Theiler von $t\frac{Q}{u}$, und der gemeinsame Theiler von $\frac{P}{t}$ und $n$ auch Theiler von $u\frac{Q}{t}$ ist. Endlich hat man wegen der Beziehung

$$Q^2 + n^2 = PR$$

$$R = a_1 16x\, 16\xi + b_1 16\xi u_1 - a_0 16x t_1 - b_0 u_1 t_1.$$

Man ersieht ferner, dass im ersten Falle der linearen Transformation

$$P \equiv 0, \; Q \equiv 1, \; R \equiv 0 \pmod 2,$$

im fünften Falle aber

$$P \equiv 0, \; Q \equiv 1, \; R \equiv 1 \pmod 2$$

werden soll. Doch beachtet man, dass die Summe der Quadrate zweier ungerader Zahlen $Q^2 + n^2$ nicht durch 4 theilbar ist, so können $P$ und $R$ nicht gleichzeitig gerade sein, und $a_0, b_0, a_1, b_1$

können bloß dem fünften Falle der linearen Transformationen angehören. Es ist nothwendig

$$P \equiv 0,\ Q \equiv 1,\ R \equiv 1 \pmod 2.$$

Hiemit sind die nothwendigen Bedingungen an die Gleichungen 1′) für die hier in Betracht gezogenen $\tau$-Werte angegeben, zu denen Nullstellen der Discriminante $D$ gehören. Man hat jetzt zu zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichende sind, d. h. man soll, wenn $\tau$ einer Gleichung

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

von der Determinante $\Delta = -n^2$ genügt, und

$$P = a_1 u t \equiv 0 \pmod 2$$
$$Q = u(a_0 t_1 - a_1 16\xi) = -t(b_1 u_1 + a_1 16x) \equiv 1 \pmod 2$$
$$R = a_1 16x 16\xi + b_1 16\xi u_1 - a_0 16x t_1 - b_0 u_1 t_1 \equiv 1 \pmod 2$$

ist, die Zahlen $u, u_1, t, t_1, \xi, x, a_0, b_0, a_1, b_1$ als ganze Zahlen bestimmen können.

Besitzt nun $P$ die Theiler von $n$: $u$ und $t$ und den Theiler $ut$, so wird

$$u_1 = \frac{n}{u}, \quad t_1 = \frac{n}{t},$$

$$a_1 = \frac{P}{ut},$$

$$n a_0 = t\frac{Q}{u} + \frac{P}{u} 16\xi,$$

$$n b_1 = -u\frac{Q}{t} - \frac{P}{t} 16x,$$

und man hat darnach die ganzen Zahlen $\xi$ und $x$ — beide kleiner als $n$ — derart zu rechnen, dass beziehungsweise

$$t\frac{Q}{u} + \frac{P}{u} 16\xi \equiv 0 \pmod n,$$

$$u\frac{Q}{t} + \frac{P}{t} 16x \equiv 0 \pmod n$$

wird. Die Transformationszahl $b_0$ wird durch den Ausdruck gegeben

$$\frac{a_0 b_1 - 1}{a_1},$$

und mit Hilfe der früher gerechneten Werte für $a_0$, $b_1$, $a_1$ zu einer ganzen Zahl.

Ferner ist aber auch zu sehen, dass $a_0$, $a_1$, $b_0$, $b_1$ dem fünften Falle der linearen Transformation angehören, denn es wird

$$a_1 \equiv 0 \pmod 2,$$

und

$$t\frac{Q}{u} + \frac{P}{u} 16\xi \quad \text{und} \quad u\frac{Q}{t} + \frac{P}{t} 16x$$

können nur ungeradzahlige Vielfache des ungeraden $n$ sein, weil $Q$ ungerade ist.

Die früher nothwendigen Bedingungen an die Determinante und die Coefficienten einer Form

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R$$

erweisen sich also auch als hinreichend, und man kann entsprechend einer den Bedingungen genügenden Gleichung

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

die zwei gleichen Lösungen $\frac{k_u}{M_u}$ und $\frac{k_t}{M_t}$ der Transformationsgleichung für die Verhältnisse $\frac{k}{M}$ angeben, und zwar ist das zu verwendende $\tau$ diejenige Lösung dieser Gleichung, der ein positiver imaginärer Bestandtheil zukommt.

Nun handelt es sich um die Herstellung dieser Gleichungen, welchen die in Betracht zu ziehenden $\tau$-Werte genügen. Die $\tau$-Werte, für welche die in der Discriminante heraustretenden Potenzen von $c$ und $c^2 - 1$ verschwinden, kann man außeracht lassen.

Die Formen

$$a\tau^2 + 2b\tau + c$$

von bestimmter negativer Determinante

$$\Delta (= -n^2),$$

welche symbolisch durch $(a, b, c)$ bezeichnet seien, zerfallen in eine endliche Anzahl von Classen, deren jede durch eine reducierte Form repräsentiert werden soll, d. h. eine solche, wo

$$2|b| \leqq a \leqq c \text{ ist.}$$

Der Vollständigkeit wegen sei in Erinnerung gebracht, dass diese reducierten Formen dadurch zu gewinnen sind, dass man die größte in

$$\sqrt{-\frac{\Delta}{3}}$$

enthaltene ganze Zahl $\lambda$ aufsucht, ferner $b$ der Reihe nach die Werte

$$0, \pm 1, \ldots \pm \lambda$$

beilegt,

$$b^2 - \Delta (= b^2 + n^2)$$

auf alle möglichen Arten in zwei positive ganzzahlige Factoren zerlegt $p_\nu q_\nu$ und die Formen zusammensetzt

$$(p_\nu, 0, q_\nu), (p_\nu, \pm 1, q_\nu), \ldots (p_\nu, \pm \lambda, q_\nu),$$

unter denen die Formen der Gestalt

$$\left(a, -\frac{a}{2}, c\right), \ (a, -b, a)$$

als äquivalent mit

$$\left(a, \frac{a}{2}, c\right), \ (a, b, a)$$

auszuschließen sind, und auch diejenigen, deren Coefficienten die früher genannten Eigenschaften nicht besitzen, so dass in den Fällen $n = 3, 5, 7$, beziehungsweise die reducierten Formen heißen:

$$(1, 0, 9), \ (3, 0, 3), \ (2, 1, 5)$$

und

$$(1, 0, 25), \ (5, 0, 5), \ (2, 1, 13)$$

und

$$(1, 0, 49), \ (7, 0, 7), \ (2, 1, 25).$$

Darnach ist die einzige Classe von Formen von der Determinante $\Delta = -n^2$, deren Coefficienten durch $n$ theilbar sind, durch die Form

$$(n, 0, n)$$

repräsentiert.

Greift man nun eine beliebige der gewonnenen reducierten Formen von der Determinante $\Delta = -n^2$

$$(P, Q, R)$$

heraus, so ist sie von einer der durch die folgenden Eigenschaften definierten drei Arten:

$$\alpha)\quad P \equiv 1,\ Q \equiv 0,\ R \equiv 1 \pmod 2$$
$$\beta)\quad P \equiv 1,\ Q \equiv 1,\ R \equiv 0 \pmod 2$$
$$\gamma)\quad P \equiv 0,\ Q \equiv 1,\ R \equiv 1 \pmod 2;$$

denn die vierte denkbare Art mit einem ungeraden $Q$, aber geraden $P$ und $R$ ist aus früher genanntem Grunde nicht möglich.

Im dritten der genannten Fälle haben die Coefficienten der reducierten Form bereits die Eigenschaft, welche denen unserer charakteristischen Gleichung zukommen; in den anderen Fällen bedarf man erst einer Umformung.

Wendet man auf eine Form $(P, Q, R)$ eine lineare Transformation an, so geht eine Form $(P', Q', R')$ hervor, wo

$$P' = Pb_1^2 + 2Qb_1a_1 + Ra_1^2,$$
$$Q' = Pb_0b_1 + Q(b_0a_1 + b_1a_0) + Ra_0a_1,$$
$$R' = Pb_0^2 + 2Qb_0a_0 + Ra_0^2$$

ist. Ist die Transformation eine des dritten oder sechsten Falles, also

$$a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1 \pmod 2$$

oder

$$a_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 1 \pmod 2,$$

so wird aus einer Form der ersten Art eine der dritten; und ist die Transformation eine des vierten Falles, also

$$a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_0 \equiv 0 \pmod 2,$$

so wird eine Form der zweiten Art zu einer der dritten. Darnach gibt es in allen durch die beizubehaltenden reducierten Formen repräsentierten Classen Formen, deren Coefficienten die verlangten Bedingungen erfüllen.

Die reducierten Formen der dritten Art und aus den reducierten Formen der ersten beiden Arten in genannter Weise abgeleitete Formen, deren Coefficienten unsere Bedingungen erfüllen, mögen von jetzt ab als Repräsentanten der Classen hingestellt werden. Zum Beispiel sei der Repräsentant der zu der reducierten Form $(n, 0, n)$ gehörenden Classe $(2n, -n, n)$, welche Form aus der ersten durch diejenige Transformation des sechsten Falles hervorgeht, wo

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ b_0 = -1,\ b_1 = 1$$

ist.

Nun ist aber die Frage zu beantworten, wie viele voneinander verschiedene Formen von den angegebenen Eigenschaften in der einzelnen Classe existieren, und zu wie viel verschiedenen Nullstellen der Discriminante $D$ sie führen.

Eine den Bedingungen genügende Form wird aber nur durch eine lineare Transformation des ersten oder fünften Falles in eine ebensolche übergeführt.

Die Formen, welche aus einem Repräsentanten durch Transformationen des fünften Falles abgeleitet werden, führen nur zu einer Nullstelle von $D$, weil dabei stets dieselbe Wurzel unserer Transformationsgleichung in sich selbst übergeht.

Doch wenn man durch eine Transformation des ersten Falles von einer unseren Bedingungen genügenden Form

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

zu einer denselben Bedingungen genügenden Form

$$P'\tau^2 + 2Q'\tau + R' = 0$$

übergeht, so wird der ihr entsprechende $c$-Wert von dem der ersten Form zukommenden $c$-Wert verschieden sein, wenn die Formen nicht identisch sind. Vorderhand abgesehen von diesem Falle, findet man also in jeder Classe unendlich viele Formen, die allen Bedingungen genügen, aber sie führen nur zu zwei $\tau$-Werten, denen Nullstellen von $D$ entsprechen. Denn die aus einem Repräsentanten durch verschiedene Transformationen des ersten Falles erreichten Formen, sowie die aus einem Repräsentanten durch verschiedene Transformationen des

fünften Falles erreichte Formen sind durch Transformationen des fünften Falles ineinander überzuführen.

Man hat daher in einer Classe nur zwei Formen zu beachten, die repräsentierende und eine durch eine lineare Transformation des ersten Falles aus ihr gebildete Form.

Jetzt ist noch der genannte Ausnahmsfall zu erledigen, wo eine Form in sich selbst übergeführt wird.

Eine beliebige Form $(P, Q, R)$ wird durch die dem ersten Falle der linearen Transformation angehörenden Transformationen

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \; b_0 = 0, \; b_1 = -1,$$
$$a_0 = -1, \; a_1 = 0, \; b_0 = 0, \; b_1 = -1$$

in sich selbst übergeführt, hingegen der Repräsentant der durch die besondere reducierte Form $(n, 0, n)$ definierten Classe, nämlich

$$2n\tau^2 - 2n\tau + n$$

wird außerdem noch durch die Transformationen

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \; b_0 = -1, \; b_1 = -1$$
$$a_0 = -1, \; a_1 = -2, \; b_0 = 1, \quad b_1 = 1$$

des fünften Falles in sich selbst übergeführt.

Es wird also auch in der durch die letztgenannte Form repräsentierten Classe von Formen ein Paar von Formen geben, denen $\tau$ und $c$-Werte zugehören, welche zu verschiedenen Nullstellen von $D$ führen.

Damit sind die Vorschriften zur Lösung der Gleichung $D = 0$ insoweit gegeben, als es sich um diejenigen Lösungen handelt, die $\tau$-Werten entsprechen, welche die für die Existenz der Gleichung *A)* als hinreichend bezeichneten Bedingungen erfüllen. Es kann zutreffen, dass schon alle Lösungen angegeben sind, was sich ohne Kenntnis der nothwendigen Bedingungen für die Existenz der Gleichung *A)* dadurch feststellen lässt, dass man die Anzahl der gefundenen Lösungen, jede in der ihr zukommenden, aber erst zu bestimmenden Vielheit, gleich dem Grade der von dem Factor in $c$ und dem in $c^2-1$ befreiten Discriminante $D$ findet. Doch wenn nicht alle Lösungen gefunden sind, bedarf man der nothwendigen

Bedingungen, unter denen die Gleichung *A)* besteht und hat darauf die diesen Bedingungen genügenden $\tau$-Werte anzugeben.

Hier wurde also zunächst eine Classe von Lösungen der Gleichung $D = 0$ — wenn nicht alle — nach dem Vorgange von Krause ermittelt.

Es mag an dieser Stelle nur noch die Bemerkung platzfinden, dass dann, wenn die zu einem Transformationsgrade $n$ gehörende Modulargleichung und unsere Transformationsgleichung für einen und denselben der hier gefundenen $\tau$-Werte gleiche Wurzeln hätte, dasselbe auch von den Wurzeln der zu $n$ gehörenden Multiplicatorgleichung gälte. Doch aus den nothwendigen Bedingungen dafür, dass zu der Wurzel $\tau$ einer Gleichung

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

mit positivem imaginären Bestandtheil eine Hermite'sche Function $\varphi(\tau)$ gehöre, die Nullstelle der Discriminante der Modulargleichung ist, kann man sehen, dass es unter den hier betrachteten $\tau$-Werten solche nicht gibt.

# Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1898 V (Giacobini)

von

**Adolf Hnatek.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Februar 1901.)

## §. 1.

Der Komet 1898 V wurde am 18. Juni 1898 von Giacobini, einem Astronomen der Sternwarte zu Nizza, entdeckt. Während der ganzen Zeit seiner Sichtbarkeit erreichte er wohl nie eine größere Helligkeit, als die eines Sternes der 10. Größe. Schon am 29. Juni, also etwa zehn Tage nach seiner Entdeckung, passierte der Komet seine Erdnähe und nahm von diesem Zeitpunkte an ziemlich rasch an Helligkeit ab. Angaben über das Aussehen und die Helligkeit des Kometen sind von mehreren Beobachtern in ausreichendem Maße gemacht worden. Ganz abgesehen davon, dass derartige Notizen schon aus dem Grunde wünschenswert sein müssen, weil sie uns Aufschlüsse über die Vorgänge geben können, welche in diesen Gebilden vor sich gehen, so sind solche Bemerkungen in unserem Falle noch deswegen von ungleich größerer Wichtigkeit, weil der Vergleich der Beobachtungen mit der Ephemeride gezeigt hat, dass die Rectascensionen weit weniger untereinander übereinstimmen, wie die Declinationen, welch letztere in den einzelnen Beobachtungen meist nur um wenige Bogensecunden von einander abweichen. Wenn es gestattet wäre, aus der Übereinstimmung der Beobachtungen untereinander die Gestalt des Kometen zu deducieren, so würde man wohl zu dem Schlusse kommen müssen, dass dieser Himmelskörper, welcher sich während der

ganzen Zeit seiner Sichtbarkeit fast genau in einem größten Kreise bewegt hat, der nur um ein Geringes von der Ekliptik abweicht, wahrscheinlich eine geringe Schweifentwickelung in der Richtung der letzteren gezeigt hat, welche bei dem verwaschenen und lichtschwachen Charakter des Objectes vielleicht weniger auffiel, aber immerhin geeignet war, die Übereinstimmung in den Rectascensionen durch die Möglichkeit verschiedener Auffassung von Seiten der Beobachter nicht unwesentlich zu stören.

Ganz besonders auffällig wird diese Discordanz unter den beobachteten Rectascensionen in dem Zeitraume von Juni 24 bis Juli 12. Die oft ziemlich stark verschiedenen Tagesmittel, welche wegen ihres unregelmäßigen Ganges auch wenig Anhaltspunkte dafür bieten konnten, wie die Normalorte am besten zu vertheilen waren, lassen fast die Vermuthung aufkommen, dass der verdichtete Kern des Kometen seine Lage innerhalb der Coma verändert oder aber Lichtausströmungen erzeugt habe, durch welche die Fixpunkte, auf die pointiert werden konnte, verändert wurden. Späterhin war der Komet wohl schon so schwach geworden, dass sich größere Beobachtungsfehler vollständig aus diesem Umstande erklären lassen.

Die soeben hervorgehobene Folgerung, dass der Kometenkern Lichtausströmungen erzeugt und seine Lage innerhalb der Coma verändert habe, gewinnt ganz bedeutend an Wahrscheinlichkeit, wenn die Notizen über das Aussehen des Kometen, wie sie von einigen Beobachtern gemacht worden sind, mit einander verglichen werden. Während Bigourdan am 19. Juni den Kometen als 13·2. Größe schätzte und in demselben eine centrale Verdichtung bemerkte, fand Hartwig in Bamberg schon zwei Tage später, also am 21. Juni, dass das Object ungefähr wie ein Stern der 10. Größe leuchte und eine excentrische Verdichtung besitze. Auch der Durchmesser der Coma hatte während derselben Zeit von 30″ (Bigourdan) auf 2′ (Hartwig) zugenommen. Allerdings muss bei diesem letzteren Umstande bedacht werden, dass Bigourdan in der Nähe einer Millionenstadt, wie Paris, beobachtet und wahrscheinlich nicht von den allerbesten Luftverhältnissen

begünstigt wird, während Hartwig in Bamberg wohl unter bedeutend vortheilhafteren Verhältnissen zu beobachten in der Lage ist. Am 23. Juni war der Komet nach Angabe von Stephan in Marseille viel heller als drei Tage vorher und zeigte eine ziemlich helle Nebelhülle um einen kleinen Kern. Die totale Helligkeit war damals ungefähr die eines Sternes der 10. Größe. Leider wurde nun bereits das Mondlicht störend und schon am 28. Juni konnte Abetti in Arcetri den Kometen nur mehr an der äußersten Grenze der Sichtbarkeit wahrnehmen. Am 30. Juni wurde der schwache Nebel in Padua wegen des Mondlichtes überhaupt nicht mehr gefunden. Als die Beobachtungen ungefähr eine Woche später wieder aufgenommen werden konnten, war der Komet, der nun von der Erde ungefähr ebenso weit entfernt stand, wie zur Zeit seiner Entdeckung, bereits so lichtschwach geworden, dass sich alle Beobachter in der übereinstimmenden Klage treffen, dass das Object sehr schwer zu pointieren sei. Kobold in Straßburg gelang noch am 18. Juli eine Beobachtung des Kometen, der damals wieder eine excentrische Verdichtung in der vorderen Hälfte der Coma zeigte und im ganzen ungefähr von der 15. Größe war.

Nunmehr blieb Javelle in Nizza der alleinige Beobachter des immer unscheinbarer werdenden Kometen und es gelang ihm, dank der durchsichtigen Luft Nizzas und der ausgezeichneten Hilfsmittel, welche ihm zugebote stehen, den Kometen noch bis zum 16. August zu verfolgen.

Wenn oben erwähnt wurde, dass der Komet während seines ganzen geocentrischen Laufes fast genau in der Ekliptik gestanden ist, so weist diese Bemerkung von selbst darauf hin, dass irgend drei beliebig gewählte geocentrische Örter jedesmal ein ausgezeichnetes Beispiel für den Ausnahmefall der Olbers'schen Methode liefern müssen, da der durch die zwei äußeren Örter gelegte größte Kugelkreis stets nur wenige Grade vom mittleren Sonnenorte entfernt verläuft. Die Schwierigkeit, unter diesen Umständen einen hinreichend genauen Näherungswert für das Verhältnis der Distanzen zu finden, mag vielleicht die Ursache sein, warum die ersten Bahnbestimmungen so differente Resultate ergeben haben. Prof. Weiß hat in mehreren

Arbeiten an dieser Stelle[1] gezeigt, wie man gleich anfangs unter einigermaßen veränderten Annahmen auch beim Ausnahmefall einen ziemlich nahe an die Wahrheit herankommenden Wert von $M$ finden kann. Da gerade dieser Komet ein äußerst schönes Beispiel für den Ausnahmefall genannt werden kann, und solche Bahnformen wohl nicht allzuhäufig vorkommen, so schien es nicht unziemlich, die Weiß'schen Formeln auf den vorliegenden Fall anzuwenden, um ihre universelle Bedeutung darzuthun. Die in Längen und Breiten umgesetzten Positionen des I., IV. und VI. Normalortes sind:

| | I. | IV. | VI. |
|---|---|---|---|
| $\lambda$....... | 298° 18′ 38″6 | 222° 40′ 56″5 | 205° 46′ 24″0 |
| $\beta$....... | − 1 31 29·9 | + 6 24 16·0 | + 7 8 24·7 |

Berechnet man damit die Weiß'schen $q$- und $Q$-Größen, so erhält man für dieselben:

$$q_1 = 9\cdot 520609 \qquad Q_1 = 283° \, 58' \, 49''9$$
$$q_2 = 0\cdot 678249 \qquad Q_2 = 106 \;\; 12 \;\; 49\cdot 3$$
$$q_3 = 0\cdot 034832 \qquad Q_3 = 286 \;\; 4 \;\; 6\cdot 5$$

Das auffallende Zusammenfallen der Winkelwerte $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, welche der Reihe nach die ☊ derjenigen größten Kugelkreise bedeuten, welche durch den IV. und VI., den I. und VI. und den I. und IV. Normalort gelegt werden, zeigt zur Genüge, wie wenig die geocentrische Bahn von einem größten Kreise abweicht. Der Näherungswert für $M$, welcher sich aus der Formel

$$M_0 = \frac{\theta_1 q_3}{\theta_3 q_1}; \quad \log M = \log M_0 \pm 0\cdot 04(Q_1 - Q_3)$$

ergibt, wird unter der Berücksichtigung, dass das zweite Glied rechter Hand in dem Ausdrucke für $M$ negativ wird:

$$\log M = 0\cdot 430706,$$

[1] Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen, von Prof. Dr. E. Weiß, Denkschriften der k. Akad. der Wissensch. in Wien, Bd. LX, 1893. — Über die Bestimmung von $M$ bei Olbers' Methode der Berechnung einer Kometenbahn, mit besonderer Rücksicht auf den Ausnahmefall, von Prof. Dr. E. Weiß. Diese Sitzungsber., Bd. XCII, 1885.

während der wahre Wert, wie er aus der definitiven Bahnbestimmung hervorgeht, ist:

$$\log M = 0{\cdot}424\,386.$$

Diese bedeutende Annäherung wird bei der Oppolzer'schen Methode, ganz abgesehen davon, dass der Wert für das Correctionsglied $m$ erst später im Verlaufe der Rechnung ermittelt werden kann, in diesem Falle überhaupt nicht erreicht.

Die Weiß'sche Formel

$$M = M_0 \pm 0{\cdot}04 (Q_1 - Q_3)^\circ$$

ist eigentlich eine Näherung, welche sich aus dem etwas genaueren Ausdrucke

$$M = M_0 \frac{\sin[\alpha + (Q_1 - Q_3)]}{\sin \alpha}$$

unter der Annahme

$$\alpha = 10^\circ$$

ergibt. Dieser letztere Wert wird natürlich nicht in jedem gegebenen Falle den Verhältnissen genau entsprechen können, weil er ein Mittelwert ist, welcher sich an die meist ziemlich viel von einander verschiedenen Umstände der Bahnbestimmungen gleich gut anpassen soll. Wie glücklich aber die Wahl gerade dieses Winkelwertes für $\alpha$ war, zeigt der Umstand, dass es nur der geringfügigen Änderung von

$$+1^\circ\ 4'\ 16''2$$

bedarf, um mit dem so corrigierten Werte

$$\alpha = +11^\circ\ 4'\ 16''2$$

sofort den wahren Wert von $M$ zu erhalten.

Die erste Bahnbestimmung versuchte Prof. H. Kreutz auf Grund der Beobachtungen:

Nizza (Javelle) ........ Juni 19
Straßburg (Kobold)..... Juni 20
München (Villiger)..... Juni 21

Sie ergaben als provisorische Elemente (»Astronomische Nachrichten«, Bd. 146, S. 360):

$$T = 1898 \text{ Juli } 6\cdot238 \text{ mittl. Z. Berlin}$$
$$\left.\begin{aligned} \omega &= 7^\circ\ 36'4 \\ \Omega &= 278\ \ 31\cdot0 \\ i &= 166\ \ 44\cdot8 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Äqu. } 1898\cdot0$$
$$\log q = 0\cdot20042.$$

Wie Prof. Kreutz selbst bemerkt, konnten diese Elemente schon wegen des Umstandes, als sie die Darstellung des mittleren Ortes in der Länge nur bis auf +0'8 erreichen, bloß als rohe Annäherung betrachtet werden. Thatsächlich weichen dieselben von den definitiven Elementen in einigen Bestimmungsstücken ganz beträchtlich ab.

Aus den Beobachtungen:

Paris (Bigourdan).......... Juni 19
Paris (Bigourdan).......... Juni 21
Paris (Fayet) .............. Juni 23

leitete J. Lagarde folgendes neue Elementensystem ab (Comptes-rendus, 1898, Nr. 26):

$$T = 1898 \text{ Juli } 26\cdot1523 \text{ mittl. Z. Paris}$$
$$\left.\begin{aligned} \omega &= 22^\circ\ 56'\ 24'' \\ \Omega &= 278\ \ 17\ \ 21 \\ i &= 166\ \ 51\ \ 1 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Äqu. } 1898\cdot0$$
$$\log q = 0\cdot17536.$$

Dasselbe ergab eine recht befriedigende Darstellung des mittleren Ortes von

$$\cos\beta\, d\lambda = +3''$$
$$d\beta = -1$$

Einen schon weitaus größeren Bogen umfassen die Elemente, welche Javelle in den »Astronomische Nachrichten«

Bd. 147, S. 13, veröffentlicht hat. Sie beruhen auf den Beobachtungen Javelles vom 19., 24. und 29. Juni und lauten:

$$T = 1898 \text{ Juli } 24\cdot894 \text{ mittl. Z. Paris}$$
$$\left.\begin{aligned} \omega &= \phantom{0}21^\circ\ 54'6 \\ \Omega &= 278\ \ \ 17\cdot2 \\ i &= 166\ \ \ 51\cdot0 \end{aligned}\right\} \text{mitttl. Äqu. } 1898\cdot0$$
$$\log q = 0\cdot17734.$$

Die letzten Elemente hat Dr. A. Stichtenoth berechnet (»Astronomische Nachrichten«, Bd. 147, S. 123) aus den Beobachtungen:

Paris (Bigourdan) und Toulouse (Rossard)... Juni 19
Besançon (Chofardet) ..................... Juni 29
Straßburg (Kobold)... ..................... Juli 18

$$T = 1898 \text{ Juli } 25\cdot55046 \text{ mittl. Z. Berlin}$$
$$\left.\begin{aligned} \omega &= \phantom{0}22^\circ\ 24'\ 35''4 \\ \Omega &= 278\ \ \ 17\ \ \ \ 9\cdot8 \\ i &= 166\ \ \ 51\ \ \ \ 1\cdot2 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Äqu. } 1898\cdot0$$
$$\log q = 0\cdot176460.$$

Die Darstellung des mittleren Ortes

$$\cos\beta d\lambda = +0''4$$
$$d\beta = -2\cdot3$$

muss eine ausnehmend gute genannt werden und thatsächlich bedeutet dieses Elementensystem eine so bedeutende Annäherung an die wahre Bahn, dass es ohneweiters der Berechnung der Ephemeride zur Bildung der Normalorte zugrunde gelegt werden konnte.

Zum Schlusse dieser Einleitung gestatte ich mir, allen Astronomen, welche mich durch Übersendung von Vergleichsternörtern oder Beobachtungen des Kometen unterstützt haben, sowie insbesondere Herrn Hofrath Prof. Dr. E. Weiß für seine freundlichen Rathschläge, meinen besten Dank auszusprechen.

§. 2.

Im Anhange zu seinen oben angesetzten Elementen gibt Dr. A. Stichtenoth für die rechtwinkeligen, heliocentrischen Äquatorcoordinaten des Kometen folgende Ausdrücke:

$$x = [0\cdot 165\,166] \sin (v + 193° \, 54' \, 14''0) \sec^2 \frac{v}{2},$$

$$y = [0\cdot 146\,770] \sin (v + 278° \, 49' \, 48''0) \sec^2 \frac{v}{2},$$

$$z = [9\cdot 802\,241] \sin (v + 313° \, 37' \, 17''5) \sec^2 \frac{v}{2}.$$

Mit Hilfe dieser Werte, in welchen die eingeklammerten Coefficienten logarithmisch zu verstehen sind, wurden die rechtwinkeligen, geocentrischen Coordinaten für jede mittlere Mitternacht Berliner Zeit des ganzen Beobachtungszeitraumes: Juni 19 bis August 16 sechsstellig gerechnet, wobei die Werte für die rechtwinkeligen Sonnencoordinaten dem »Berliner astronomischen Jahrbuche« entlehnt wurden. Die Ephemeride gibt sofort die jeweiligen wahren Örter des Kometen. Da die höheren Differenzen bis zum 26. Juli ziemlich beträchtlich blieben, so wurde die Ephemeride für den Zeitraum: Juni 19 bis Juli 26 in die Mitte interpoliert. Die Aberrationszeit ist in der vorletzten Columne angegeben, und zwar in Tages-Bruchtheilen. In der letzten Columne ist für jeden vierten Tag der Helligkeitscoefficient $\frac{1}{r^2 \Delta^2}$ numerisch angesetzt.

## Ephemeride.

| Datum | wahre $AR$ | I. Differenz | wahre $D$ | I. Differenz | $\Delta$ | $r$ | Aberrationszeit in Tages-Bruchtheilen | $\frac{1}{r^2\Delta^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni 18·5 | 20h 37m 56s88 | | —21° 6' 50"3 | | 9·82141 | 0·20086 | —0·00383 | 0·90 |
| | | — 5m 18s00 | | — 9' 54"5 | | | | |
| 19·0 | 32 38·88 | | 16 44·8 | | | | | |
| | | — 5 30·15 | | — 9 37·0 | | | | |
| 19·5 | 27 8·73 | | 26 21·8 | | 9·80710 | 0·19964 | —0·00370 | |
| | | — 5 42·49 | | — 9 15·4 | | | | |
| 20·0 | 21 26·24 | | 35 37·2 | | | | | |
| | | — 5 54·97 | | — 8 49·1 | | | | |
| 20·5 | 15 31·27 | | 44 26·3 | | 9·79330 | 0·19844 | —0·00358 | |
| | | — 6 7·53 | | — 8 17·7 | | | | |
| 21·0 | 9 23·74 | | —21 52 44·0 | | | | | |
| | | — 6 20·10 | | — 7 40·8 | | | | |
| 21·5 | 20 3 3·64 | | —22 0 24·8 | | 9·78025 | 0·19727 | —0·00348 | |
| | | — 6 32·59 | | — 6 58·2 | | | | |
| 22·0 | 19 56 31·05 | | 7 23·0 | | | | | |
| | | — 6 44·92 | | — 6 9·8 | | | | |
| 22·5 | 49 46·13 | | 13 32·8 | | 9·76811 | 0·19612 | —0·00338 | 1·18 |
| | | — 6 57·02 | | — 5 15·5 | | | | |
| 23·0 | 42 49·11 | | 18 48·3 | | | | | |
| | | — 7 8·71 | | — 4 15·1 | | | | |
| 23·5 | 35 40·40 | | 23 3·4 | | 9·75715 | 0·19500 | —0·00330 | |
| | | — 7 19·92 | | — 3 8·7 | | | | |
| 24·0 | 28 20·48 | | 26 12·1 | | | | | |
| | | — 7 30·49 | | — 1 56·6 | | | | |

| Datum | wahre $AR$ | I. Differenz | wahre $D$ | I. Differenz | $\Delta$ | $r$ | Aberrationszeit in Tages-Bruchtheilen | $\frac{1}{r^2\Delta^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni 24·5 | 19ʰ 20ᵐ 49ˢ99 | | −22° 28′ 8″7 | | 9·74751 | 0·19393 | −0·00323 | |
| | | − 7ᵐ 40ˢ33 | | − 0′ 38″8 | | | | |
| 25·0 | 13 9·66 | | 28 47·5 | | | | | |
| | | − 7 49·28 | | + 0 43·8 | | | | |
| 25·5 | 19 5 20·38 | | 28 3·7 | | 9·73937 | 0·19286 | −0·00317 | |
| | | − 7 57·25 | | + 2 11·2 | | | | |
| 26·0 | 18 57 23·13 | | 25 52·5 | | | | | |
| | | − 8 4·10 | | + 3 42·1 | | | | |
| 26·5 | 49 19·03 | | 22 10·4 | | 9·73298 | 0·19184 | −0·00312 | 1·41 |
| | | − 8 9·80 | | + 5 16·4 | | | | |
| 27·0 | 41 9·23 | | 16 54·0 | | | | | |
| | | − 8 14·15 | | + 6 52·2 | | | | |
| 27·5 | 32 55·08 | | 10 1·8 | | 9·72858 | 0·19084 | −0 00309 | |
| | | − 8 17·11 | | + 8 29·3 | | | | |
| 28·0 | 24 37·97 | | −22 1 32·5 | | | | | |
| | | − 8 18·69 | | +10 5·7 | | | | |
| 28·5 | 16 19·28 | | −21 51 26·8 | | 9·72622 | 0·18987 | −0·00307 | |
| | | − 8 18·94 | | +11 41·0 | | | | |
| 29·0 | 18 8 0·34 | | 39 45·8 | | | | | |
| | | − 8 17·48 | | +13 13·7 | | | | |
| 29·5 | 17 59 42·86 | | 26 32·1 | | 9·72597 | 0·18893 | −0·00307 | |
| | | − 8 14·82 | | +14 42·7 | | | | |
| 30·0 | 51 28·04 | | −21 11 49·4 | | | | | |
| | | − 8 10·72 | | +16 7·1 | | | | |
| 30·5 | 43 17·32 | | −20 55 42·3 | | 9 72784 | 0·18802 | −0·00308 | 1·47 |
| | | − 8 5·30 | | +17 26·2 | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juli | 1·0 | 17ʰ 35ᵐ 12ˢ02 | | 20° 38' 16"1 | | | | | |
| | | | −7ᵐ 58ˢ69 | | +18' 39"0 | | | | |
| | 1·5 | 27 13·33 | | −20 19 37·1 | | 9·73176 | 0·18714 | −0·00311 | |
| | | | −7 50·91 | | +19 44·6 | | | | |
| | 2·0 | 19 22·42 | | −19 59 52·5 | | | | | |
| | | | −7 42·18 | | +20 44·3 | | | | |
| | 2·5 | 11 40·24 | | 39 8·2 | | 9·73762 | 0·18629 | −0·00315 | |
| | | | −7 32·50 | | +21 34·7 | | | | |
| | 3·0 | 17 4 7·74 | | −19 17 33·5 | | | | | |
| | | | −7 22·14 | | +22 17·6 | | | | |
| | 3·5 | 16 56 45·60 | | −18 55 15·9 | | 9·74525 | 0·18548 | −0·00321 | |
| | | | −7 11·08 | | +22 53·0 | | | | |
| | 4·0 | 49 34·52 | | 32 22·9 | | | | | |
| | | | −6 59·54 | | +23 20·8 | | | | |
| | 4·5 | 42 34·98 | | −18 9 2·1 | | 9·75446 | 0·18470 | −0·00328 | 1·32 |
| | | | −6 47·56 | | +23 41·4 | | | | |
| | 5·0 | 35 47·42 | | −17 45 20·7 | | | | | |
| | | | −6 35·33 | | +23 55·3 | | | | |
| | 5·5 | 29 12·09 | | −17 21 25·4 | | 9·76504 | 0·18395 | −0·00336 | |
| | | | −6 22·93 | | +24 2·5 | | | | |
| | 6·0 | 22 49·16 | | −16 57 22·9 | | | | | |
| | | | −6 10·44 | | +24 4·0 | | | | |
| | 6·5 | 16 38·72 | | 33 18·9 | | 9·77677 | 0·18324 | −0·00345 | |
| | | | −5 57·94 | | +23 59·8 | | | | |
| | 7·0 | 10 40·78 | | −16 9 19·1 | | | | | |
| | | | −5 45·52 | | +23 51·0 | | | | |
| | 7·5 | 16 4 55·26 | | −15 45 28·1 | | 9·78943 | 0·18256 | −0·00355 | |
| | | | −5 33·24 | | +23 37·6 | | | | |
| | 8·0 | 15 59 22·02 | | −15 21 50·5 | | | | | |
| | | | −5 21·11 | | +23 20·6 | | | | |
| | 8·5 | 54 0·91 | | −14 58 29·9 | | 9·80283 | 0·18192 | −0·00366 | 1·07 |
| | | | −5 9·26 | | +23 0·2 | | | | |

| Datum | wahre $AR$ | I. Differenz | wahre $D$ | I. Differenz | $\Delta$ | $r$ | Aberrationszeit in Tages-Bruchtheilen | $\frac{1}{r^2\Delta^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juli 9·0 | 15ʰ 48ᵐ 51ˢ65 | | —14° 35' 29"7 | | | | | |
| | | — 4ᵐ 57ˢ65 | | +22' 37"1 | | | | |
| 9·5 | 43 54·00 | | —14 12 52·6 | | 9·81679 | 0·18131 | —0·00378 | |
| | | — 4 46·36 | | +22 11·7 | | | | |
| 10·0 | 39 7·64 | | —13 50 40·9 | | | | | |
| | | — 4 35·39 | | +21 44·4 | | | | |
| 10·5 | 34 32·25 | | 28 56·5 | | 9·83115 | 0·18072 | —0·00391 | |
| | | — 4 24·76 | | +21 15·6 | | | | |
| 11·0 | 30 7·49 | | —13 7 40·9 | | | | | |
| | | — 4 14·48 | | +20 45·5 | | | | |
| 11·5 | 25 53·01 | | —12 46 55·4 | | 9·84576 | 0·18017 | —0·00405 | |
| | | — 4 4·56 | | +20 14·7 | | | | |
| 12·0 | 21 48·45 | | 26 40·7 | | | | | |
| | | — 3 54·99 | | +19 43·3 | | | | |
| 12·5 | 17 53·46 | | —12 6 57·4 | | 9·86051 | 0·17966 | —0·00419 | 0·83 |
| | | — 3 45·79 | | +19 11·7 | | | | |
| 13·0 | 14 7·67 | | —11 47 45·7 | | | | | |
| | | — 3 36·94 | | +18 39·9 | | | | |
| 13·5 | 10 30·73 | | 29 5·8 | | 9·87531 | 0·17919 | —0·00433 | |
| | | — 3 28·45 | | +18 8·2 | | | | |
| 14·0 | 7 2·28 | | —11 10 57·6 | | | | | |
| | | — 3 20·31 | | +17 36·5 | | | | |
| 14·5 | 3 41·97 | | —10 53 21·1 | | 9·89007 | 0·17876 | —0·00448 | |
| | | — 3 12·50 | | +17 5·1 | | | | |
| 15·0 | 15 0 29·47 | | 36 16·0 | | | | | |
| | | — 3 5·02 | | +16 34·1 | | | | |

| Datum | α | Δα | δ | Δδ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juli 15·5 | 14ʰ 57ᵐ 24ˢ45 | | —10° 19' 41"9 | | 9·90473 | 0·17837 | —0 00463 | |
| | | — 2ᵐ 57ˢ85 | | +16' 3"5 | | | | |
| 16·0 | 54 26·60 | | —10 3 38·4 | | | | | |
| | | — 2 50·98 | | +15 33·4 | | | | |
| 16·5 | 51 35·62 | | — 9 48 5·0 | | 9·91922 | 0·17801 | —0·00479 | 0·64 |
| | | — 2 44·41 | | +15 3·9 | | | | |
| 17·0 | 48 51·21 | | 33 1·1 | | | | | |
| | | — 2 38·12 | | +14 35·4 | | | | |
| 17·5 | 46 13·09 | | 18 25·7 | | 9·93353 | 0 17769 | —0·00495 | |
| | | — 2 32·11 | | +14 7·8 | | | | |
| 18·0 | 43 40 98 | | — 9 4 17·9 | | | | | |
| | | — 2 26·35 | | +13 40·8 | | | | |
| 18·5 | 41 14·63 | | — 8 50 37·1 | | 9·94761 | 0·17740 | —0·00511 | |
| | | — 2 20·85 | | +13 14·4 | | | | |
| 19·0 | 38 53·78 | | 37 22·7 | | | | | |
| | | — 2 15·58 | | +12 49·2 | | | | |
| 19·5 | 36 38·20 | | 24 33·5 | | 9·96144 | 0·17715 | —0·00528 | |
| | | — 2 10·54 | | +12 24·6 | | | | |
| 20 0 | 34 27·66 | | 12 8·9 | | | | | |
| | | — 2 5·72 | | +12 0·8 | | | | |
| 20·5 | 32 21·94 | | — 8 0 8·1 | | 9·97499 | 0·17694 | —0·00545 | 0·50 |
| | | — 2 1·11 | | +11 37·6 | | | | |
| 21·0 | 30 20·83 | | — 7 48 30·5 | | | | | |
| | | — 1 56·69 | | +11 15·1 | | | | |
| 21·5 | 28 24·14 | | 37 15·4 | | 9·98826 | 0·17677 | —0·00562 | |
| | | — 1 52·47 | | +10 53·3 | | | | |
| 22·0 | 26 31·67 | | 26 22·1 | | | | | |
| | | — 1 48·41 | | +10 32·2 | | | | |
| 22·5 | 24 43·26 | | 15 49·9 | | 0·00125 | 0·17664 | —0·00579 | |
| | | — 1 44·54 | | +10 11·8 | | | | |

| Datum | wahre $AR$ | I. Differenz | wahre $D$ | I. Differenz | $\Delta$ | $r$ | Aberrationszeit in Tages-Bruchtheilen | $\frac{1}{r^2\Delta^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juli 23·0 | 14h 22m 58s72 | | — 7° 5' 38"1 | | | | | |
| | | — 1m 40s82 | | + 9' 52"2 | | | | |
| 23·5 | 21 17·90 | | — 6 55 45·9 | | 0·01397 | 0·17654 | —0·00596 | |
| | | — 1 37·26 | | + 9 33·3 | | | | |
| 24·0 | 19 40·64 | | 46 12·6 | | | | | |
| | | — 1 33·85 | | + 9 15·0 | | | | |
| 24·5 | 18 6·79 | | 36 57·6 | | 0·02639 | 0·17648 | —0·00613 | 0·39 |
| | | — 1 30·58 | | + 8 57·2 | | | | |
| 25·0 | 16 36·21 | | 28 0·4 | | | | | |
| | | — 1 27·44 | | + 8 40·0 | | | | |
| 25·5 | 15 8·77 | | 19 20·4 | | 0·03851 | 0·17646 | —0·00631 | |
| | | — 1 24·43 | | + 8 23·4 | | | | |
| 26·0 | 13 44·34 | | 10 57·0 | | | | | |
| | | — 1 21·54 | | + 8 7·2 | | | | |
| 26·5 | 14 12 22·80 | | — 6 2 49·8 | | 0·05033 | 0·17648 | —0·00648 | |
| August 5·5 | 13 52 53·98 | | — 4 3 7·8 | | 0·15379 | 0·17872 | —0·00822 | 0·22 |
| | | — 1 20·41 | | + 8 29·7 | | | | |
| 6·5 | 51 33·57 | | — 3 54 38·1 | | 0·16278 | 0·17915 | —0·00840 | |
| | | — 1 15·48 | | + 8 1·3 | | | | |
| 7·5 | 50 18·09 | | 46 36·8 | | 0·17156 | 0·17962 | —0·00857 | |
| | | — 1 10·87 | | + 7 34·6 | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| August 8·5 | 13h 49m 7s22 | | — 1° 39' 2"2 | | 0·18012 | 0·18012 | —0·00874 | |
| | | — 1m 6s54 | | + 7' 9"6 | | | | |
| 9·5 | 48 0·68 | | 31 52·6 | | 0·18848 | 0·18066 | —0·00891 | 0·18 |
| | | — 1 2·47 | | + 6 45·9 | | | | |
| 10·5 | 46 58·21 | | 25 6·7 | | 0·19663 | 0·18124 | —0·00908 | |
| | | — 0 58·64 | | + 6 23·7 | | | | |
| 11·5 | 45 59·57 | | 18 43·0 | | 0·20458 | 0·18185 | —0·00924 | |
| | | — 0 55·03 | | + 6 2·8 | | | | |
| 12·5 | 45 4·54 | | 12 40·2 | | 0·21235 | 0·18249 | —0·00941 | |
| | | — 0 51·62 | | + 5 43·3 | | | | |
| 13·5 | 44 12·92 | | 6 56·9 | | 0·21993 | 0·18316 | —0·00958 | 0·16 |
| | | — 0 48·41 | | + 5 25·0 | | | | |
| 14·5 | 43 24·51 | | — 3 1 31·9 | | 0·22732 | 0·18387 | —0·00974 | |
| | | — 0 45·39 | | + 5 7·8 | | | | |
| 15·5 | 42 39·12 | | — 2 56 24·1 | | 0·23454 | 0·18461 | —0·00990 | |
| | | — 0 42·56 | | + 4 51·6 | | | | |
| 16·5 | 13 41 56·56 | | — 2 51 32·5 | | 0·24159 | 0·18538 | —0·01006 | |

§. 3.

Um die Positionen soweit als möglich mit dem System der Zonen der »Astronomischen Gesellschaft« in Einklang zu bringen, wurden alle jene Sternwarten, welche an der »Südlichen Durchmusterung« der astronomischen Gesellschaft betheiligt sind, um Überlassung wenigstens vorläufiger Positionen für die Vergleichsterne ersucht. Die Rechnungen waren aber nur an den Sternwarten zu Cambridge U. S., Straßburg, Washington und Wien (Ottakring) soweit gediehen, dass ihnen die Positionen für die in Frage kommenden Sterne entnommen werden konnten. Seitens der »v. Kuffner'schen Sternwarte« zu Wien (Ottakring) sind die endgiltigen Positionen sogar schon publiciert und konnten die Örter für die in dieser Zone —6° bis —10° liegenden Sterne daher sofort dem III. und IV. Bande der Publicationen dieses Institutes entlehnt werden.

Die Sternwarte zu Algier, in deren Zone leider eine ziemlich beträchtliche Anzahl von Vergleichsternen fällt, war bei dem derzeitigen Stande der Reductionsarbeiten nicht in der Lage, mir Positionen aus der »Südlichen Durchmusterung« zu überlassen. Gerade unter diesen Sternen finden sich einige, welche wegen ihrer geringen Helligkeit nur im Argelander-Weiß-Kataloge zu finden waren. Von einigen derselben fanden sich in den Meridianbeobachtungen der Sternwarte zu Bordeaux genaue Positionen.

An alle Sternörter wurden die von Auwers in den »Astronomischen Nachrichten«, Bd. 134 und 143, gegebenen Correctionen zur Reduction der Positionen auf das System des Fundamentalkataloges der astronomischen Gesellschaft, welche in einigen Fällen ziemlich hohe, nicht zu vernachlässigende Werte erreichten, angebracht, so dass — abgesehen von den wenigen Sternen, welche nur im Kataloge von Argelander-Weiß zu finden und in die seitens der Bordeauxer Sternwarte veranstalteten Nachbeobachtungen der Sterne dieses Kataloges nicht aufgenommen worden waren — wohl alle Vergleichsterne einerseits durch die Zonenbeobachtungen aus der »Südlichen Durchmusterung« der astronomischen Gesellschaft oder anderseits durch eine größere Anzahl guter, auf das System des Fundamentalkataloges reducierter Katalogpositionen vollkommen gesichert erscheinen.

In der folgenden Zusammenstellung ist neben den *AR* und *D* auch die jeweilige Epoche, welcher der Ort entspricht, sowie die Anzahl der Beobachtungen (Zonen bei den Positionen aus der »Südlichen Durchmusterung«), aus denen er abgeleitet wurde und endlich das Gewicht beigefügt, mit welchem er bei der Bildung des angenommenen Ortes eingeführt wurde. Von mehreren Sternen konnten Eigenbewegungen abgeleitet werden und sind bei diesen die angenommenen Positionen bereits für die erhaltenen Werte der Eigenbewegungen corrigiert. Die Grundlagen für die Bestimmung der Eigenbewegungen, sowie andere Anmerkungen folgen am Schlusse der Tabelle und sind die betreffenden Sterne in der letzteren durch ein Asterisk gekennzeichnet.

Für die Kataloge wurden folgende Abkürzungen verwendet:

AWe ....... Katalog der Argelander'schen Zonen von —15 bis —31, von Dr. Edm. Weiß.
BB VI....... Bonner Beobachtungen, Bd. VI.
$Cap_{50}$ ....... Catalogue of 4810 stars for the epoch 1850.
$Cap_{85}$ ....... Catalogue of 1713 stars for the epoch 1885.
Cinc ........ Zone-catalogue of 4050 stars for the epoch 1885.
Cord........ The Argentine General catalogue.
$Gött_2$ ....... Zweites Göttinger Sternverzeichnis.
Lal ......... A catalogue of those stars in the Histoire céléste française of Jerôme Deslandres, for wich tables of Reduction to the epoch 1800 have been published by Prof. Schumacher.
$M_1$ ......... Erstes Münchener Sternverzeichnis, enthaltend die mittleren Örter von 13200 Sternen.
$M_2$ ......... Zweites Münchener Sternverzeichnis, enthaltend die mittleren Örter von 33082 Sternen.
Par ......... Catalogue de l'observatoire de Paris.
$Rad_3$........ Radcliffe-catalogue of 6424 stars for the epoch 1890.
San Fern .... Anales del Instituto y Observatorio de Marina de S. Fernando. 1893.
Schj ........ Schjellerup: Verzeichnis von 10000 Fixsternen.
Si .......... Santini: Posizioni medie di 2246 stelle.
Weisse ...... Positiones mediae stellarum fixarum in Zonis Regiomontanis a Besselio inter —15 et +15 Declinationis observatarum.
Wm ........ Zones of stars observed at the United States Naval observatory with the meridian transit-instrument in the years 1846, 1847, 1848 and 1849.
Wt ......... Zones of stars observed at the United States Naval observatory with the mural circle in the years 1846, 1847, 1848 and 1849.
Yarn........ Yarnall: Catalogue of stars observed at the United States Naval observatory during the years 1845 to 1877.

| Nummer | Autorität | Mag. | AR (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Lal 25350 | 8·0 | $13^h$ $39^m$ $54^s55$ | — 4·7 | | 0 |
| | Par 16807 | 8·9 | 54·24 | +41·3 | 1 | 1 |
| | $M_1$ 9481 | 8·0 | 54·05 | +45·86 | 2 | 1 |
| | Par 16807 | | 53·84 | +59·4 | 1 | 0 |
| | Schj 4905 | 8·5 | 54·05 | +63·33 | | 1 |
| | Par 16807 | | 54·02 | +75·8 | 4 | 1 |
| | Cord 18699 | 8·5 | 54·04 | +79·47 | 3 | 1 |
| | Straßburg | | 54·07 | +90·26 | 2 | 1 |
| 2 | $M_1$ 9534 | 10·0 | 13 43 36·44 | +43·36 | 1 | 1 |
| | $M_2$ 5044 | 9·0 | 36·63 | +84·36 | 3 | 1 |
| | Straßburg | | 36·52 | +91·88 | 2 | 2 |
| 3* | $M_1$ 9576 | 10·0 | 13 46 33·81 | +43·36 | 1 | 0 |
| | Schj 4949 | 8·5 | 34·37 | +63·35 | | 1 |
| | Straßburg | | 34·43 | +90·26 | 2 | 2 |
| 4 | Weisse XIII, 762 | 9·0 | 13 47 4·06 | | 2 | 0 |
| | $M_1$ 9583 | 10·0 | 4·02 | +43·36 | 1 | 0 |
| | Straßburg | | 4·18 | +91·36 | 2 | 1 |
| 5* | BD —3° 3545 | | 13 47 13·18 | +98·60 | | |
| 6 | Lal 25581 | 8·0 | 13 49 24·74 | — 1·7 | | 0 |
| | $M_1$ 9617 | 7·0 | 24·74 | +45·86 | 2 | 0 |
| | Par 17038 | 8·0 | 24·40 | +59·4 | 1 | 2 |
| | Schj 4968—69 | 8·0 | 24·45 | +63·36 | | 2 |
| | Warschau | 8·0 | 24·57 | +81·39 | | 2 |
| | Straßburg | | 24·48 | +92·31 | 2 | 2 |
| 7 | Lal 26198 | 6·5 | 14 14 31·70 | — 1·7 | | 0 |
| | Par 17565 | 6·0 | 31·90 | +42·1 | 6 | 0 |
| | » » | | 31·66 | +57·4 | 1 | 1 |
| | » » | | 31·67 | +72·4 | 2 | 1 |
| | Cord 19399 | 6·6 | 31·59 | +77·50 | 3 | 1 |
| | $Rad_3$ 3711 | 7—6 | 31·65 | +85·42 | 3 | 1 |
| | Ott. Z. 49, 249 | 6·7 | 31·58 | +93·36 | 2 | 1 |
| 8 | Schj 5126 | 9·0 | 14 20 57·67 | +63·40 | | 1 |
| | $M_2$ 5305 | 8·8 | 57·71 | +84·40 | 3 | 1 |
| | Ott. Z. 49, 255 | 8·5 | 57·58 | +93·39 | 2 | 1 |

| D (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht | Angenommene Position | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | AR (1898·0) | Red. ad l. app. | D (1898·0) | Red. ad l. app. |
| — 2°48' 7"1 | — 4·7 | | 0 | 13h 39m 54s08 | +2s44 | —2° 48' 8"6 | —13"2 |
| 1·1 | +45·86 | 2 | 0 | | | | |
| 9·0 | +58·3 | 1 | 1 | | | | |
| 7·4 | +63·33 | | 1 | | | | |
| 8·7 | +75·8 | 5 | 1 | | | | |
| 9·3 | +79·47 | 3 | 1 | | | | |
| 8·4 | +90·26 | 2 | 1 | | | | |
| — 3 39 51·8 | +43·36 | 1 | 0 | 13 43 36·53 | +2·56 | —3 39 55·2 | —13·5 |
| 55·1 | +84·36 | | 1 | | | | |
| 55·2 | +91·88 | 2 | 1 | | | | |
| — 3 10 12·4 | +43·36 | 1 | 0 | 13 46 34·41 | +2·52 | —3 10 15·1 | —13·3 |
| 14·0 | +63·35 | | 1 | | +2·50 | | —13·3 |
| 15·7 | +90·26 | 2 | 2 | | | | |
| — 3 19 37·0 | | 2 | 0 | 13 47 4·18 | +2·54 | —3 19 35·1 | —13·4 |
| 34·6 | +43·36 | 1 | 1 | | | | |
| 35·4 | +91·36 | 2 | 2 | | | | |
| — 3 27 14·9 | +98·60 | | | 13 47 13·18 | +2·55 | —3 27 14·9 | —13·4 |
| — 3 57 25·0 | — 1·7 | | 0 | 13 49 24·48 | +2·60 | —3 57 21·1 | —13·8 |
| 18·4 | +45·86 | 2 | 1 | | | | |
| 21·1 | +58·3 | 1 | 2 | | | | |
| 21·0 | +63·36 | | 2 | | | | |
| 22·8 | +81·39 | | 2 | | | | |
| 20·6 | +92·31 | 2 | 2 | | | | |
| — 6 16 31·0 | — 1·7 | | | 14 14 31·63 | +2·93 | —6 16 34·7 | —14·4 |
| 34·9 | +57·4 | 1 | 1 | | | | |
| 35·3 | +72·4 | 1 | 1 | | | | |
| 34·7 | +77·50 | 3 | 1 | | | | |
| 34·3 | +85·42 | 3 | 1 | | | | |
| 34·4 | +93·36 | 2 | 1 | | | | |
| — 6 51 59·0 | +63·40 | | 1 | 14 20 57·65 | +3·02 | —6 52 1·2 | —14·5 |
| 52 0·8 | +84·40 | | 1 | | | | |
| 2·0 | +93·39 | 2 | 3 | | | | |

| Nummer | Autorität | Mag. | AR (1898·0) | | | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | $M_2$ 5320 | 10·0 | 14h | 22m | 56s08 | +84·40 | 3 | 1 |
| | Ott. Z. 51, 254 | | | | 56·07 | +93·39 | 2 | 1 |
| 10 | Cord 19772 | 8·0 | 14 | 30 | 22·38 | +79·55 | 3 | 1 |
| | $Rad_3$ 3776 | 7—8 | | | 22·49 | +85·34 | 3 | 1 |
| | Ott. Z. 53 | 7·0 | | | 22·42 | +92·40 | 1 | 1 |
| 11 | Ott. Z. 51, 254 | 9·3 | 14 | 34 | 37·69 | +93·39 | 2 | |
| 12 | Par 18104 | 9·0 | 14 | 37 | 42·19 | +64·9 | | 1 |
| | Ott. Z. 45, 139 | 8·8 | | | 42·15 | +92·88 | 2 | 1 |
| | San Fern II 590 | | | | 42·23 | +93·49 | 4 | 1 |
| 13 | Weisse XIV, 682 | 9·0 | 14 | 39 | 39·70 | | | 0 |
| | Schj 5224 | 9·0 | | | 39·32 | +63·35 | | 1 |
| | Ott. Z. 55, 140 | 8·8 | | | 39·38 | +92·89 | 2 | 1 |
| 14* | Lal 26983 | 8 | 14 | 44 | 19·19 | — 4·7 | | 0 |
| | $M_1$ 10605 | 7·0 | | | 19·00 | +43·43 | 1 | 1 |
| | Par 18254 | 8·0 | | | | | | |
| | » » | | | | 18·85 | +75·4 | 3 | 1 |
| | $M_2$ 5474 | 8·0 | | | 18·83 | +85·40 | 4 | 1 |
| | $Rad_3$ 3832 | 8—7 | | | 18·72 | +92·39 | 3 | 1 |
| | Ott. Z. 45, 140 | 7·4 | | | 18·70 | +92·88 | 2 | 1 |
| | San Fern II, 599 | | | | 17·72 | +93·45 | 6 | 0 |
| 15 | Lal 27146 | | 14 | 50 | 1·53 | — 4·7 | | 0 |
| | Weisse XIV, 894 | 8·0 | | | 0·86 | | 2 | 0 |
| | AN 1637, 388 | | | | 1·19 | | 2 | 1 |
| | Par 18381 | 8·0 | | | 1·39 | +59·3 | 3 | 0 |
| | » » | | | | 1·16 | +78·4 | 2 | 1 |
| | San Fern II, 606 | | | | 1·13 | +93·37 | 4 | 1 |
| | Ott. Z. 55, 255 | 8·0 | | | 1·08 | +93·39 | 2 | 1 |
| 16 | $M_1$ 10815 | 9·0 | 14 | 55 | 6·53 | +43·43 | 2 | 0 |
| | $M_2$ 5558 | 10·0 | | | 6·18 | +84·40 | 2 | 0 |
| | Cambridge | | | | 6·70 | +90·94 | 2 | 1 |
| 17 | $M_1$ 10821 | 10·0 | 14 | 55 | 23·77 | +45·94 | 2 | 0 |
| | Cambridge | | | | 24·24 | +91·44 | 2 | 1 |

| D (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht | Angenommene Position AR (1898·0) | Red. ad l. app. | D (1898·0) | Red. ad l. app. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 7°21′ 28″4 | +84·40 | 1 | | 14h 22m 56s07 | +3s07 | —7° 21′ 29″6 | —14″5 |
| 30·0 | +93·39 | 3 | | | | | |
| — 8 7 46·4 | +79·55 | 3 | 1 | 14 30 22·43 | +3·15 | —8 7 45·3 | —14·5 |
| 44·5 | +85·34 | 3 | 1 | | | | |
| 45·2 | +92·40 | 1 | 1 | | | | |
| — 7 31 38·7 | +93·39 | 2 | | 14 34 37·69 | +3·11 | —7 31 38·7 | —14·5 |
| — 8 54 34·1 | +64·7 | | 1 | 14 37 42·19 | +3·19 | —8 54 34·2 | —14·8 |
| 34·8 | +92·88 | 2 | 1 | | | | |
| 33·7 | +93·49 | 4 | 1 | | | | |
| — 8 29 52·4 | | | 0 | 14 39 39·35 | +3 19 | —8 29 53·2 | —14·6 |
| 53·0 | +63·35 | | 1 | | | | |
| 53·4 | +92·89 | 2 | 1 | | | | |
| — 8 46 38·5 | — 4·7 | | 0 | 14 44 18·73 | +3·23 | — 8 46 43·9 | —14·6 |
| 39·8 | +40·43 | 1 | 0 | | | | |
| 42·0 | +58·4 | 1 | 1 | | | | |
| 42·5 | +75·4 | 3 | 1 | | | | |
| 43·6 | +85·40 | | 1 | | | | |
| 44·1 | +92·39 | 3 | 1 | | | | |
| 42·9 | +92·88 | 2 | 1 | | | | |
| 43·9 | +93·44 | 7 | 1 | | | | |
| — 9 52 3·0 | — 4·7 | | 0 | 14 50 1·14 | +3·30 | — 9 52 3·0 | —14·7 |
| 3·5 | | 2 | 1 | | | | |
| 1·7 | | 2 | 1 | | | | |
| 2·9 | +60·3 | 1 | 1 | | | | |
| 2·7 | +78·4 | 2 | 1 | | | | |
| 3·5 | +93·37 | 5 | 1 | | | | |
| 3·5 | +93·39 | 2 | 1 | | | | |
| —10 16 9·4 | +43·43 | 2 | 1 | 14 55 6 70 | +3·35 | —10 16 9·1 | —14·6 |
| 10·2 | +84·40 | | 1 | | | | |
| 8·5 | +90·94 | 2 | 2 | | | | |
| —10 25 51·1 | +45·94 | 2 | 0 | 14 55 24·24 | +3·35 | —10 25 56·1 | —14·7 |
| 56·1 | +91·44 | 2 | 1 | | | | |

| Nummer | Autorität | Mag. | AR (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | Weisse XIV, 1095 | 9·0 | $15^{h}\ 0^{m}\ 41^{s}01$ | | 1 | 0 |
| | $M_1$ 10925 | 9·0 | 41·08 | +40·41 | 2 | 0 |
| | $M_2$ 5597 | 9 0 | 40·75 | +86·38 | 4 | 0 |
| | Cambridge | | 41·14 | +90·43 | 3 | 1 |
| 19* | BD —12° 4244 | 9·2 | 15 16 56·64 | +98·53 | | |
| 20 | Lal 28036 | 6·5 | 15 18 16·61 | —20·8 | | 0 |
| | Par 19069 | 6 0 | 16·47 | +43·2 | 6 | 0 |
| | » » | | 16·39 | +57·5 | 2 | 1 |
| | Cord 20855 | 6·2 | 16·37 | +77·61 | 4 | 1 |
| | Par. 19069 | | 16·30 | +79·4 | 2 | 1 |
| | Cambridge | | 16·36 | +89·93 | 2 | 1 |
| 21* | $M_1$ 11476 | 10·0 | 15 27 27·78 | +46·46 | 1 | 1 |
| | $Gött_2$ 3736 | | 27·57 | +58·43 | | 1 |
| | $M_2$ 5756 | 10·0 | 27·17 | +87·74 | 4 | 1 |
| 22 | Weisse XV, 458 | 8·0 | 15 27 36·64 | | 1 | 0 |
| | $Rad_3$ 4011 | 7—8 | 37·01 | +89·41 | 3 | 1 |
| | Cambridge | | 37·17 | +90·80 | 3 | 2 |
| 23 | Weisse XV, 789 | 8·9 | 15 43 52·12 | | 1 | 0 |
| | Yarn. 6628 | 8·5 | 52·56 | +47·3 | 3 | 1 |
| | $M_1$ 11765 | 9·0 | 52·10 | +47·45 | 1 | 0 |
| | Si 1441 | 8·9 | 52·33 | +59·49 | 2 | 3 |
| | Washington | 9·0 | 52·37 | +94·95 | 2 | 3 |
| 24 | Weisse XV, 845 | 9·0 | 15 46 15·26 | | 1 | 0 |
| | $M_1$ 11816 | 10·0 | 14·76 | +47·45 | 1 | 0 |
| | Yarn 6649 | 9·0 | 15·07 | +61·0 | 2 | 1 |
| 25 | $M_2$ 5907 | 9·3 | 15 52 47·32 | +86·44 | 3 | 0 |
| | Washington | 8·9 | 47·47 | +94·98 | 2 | 1 |
| 26 | $M_1$ 11951 | 10·0 | 15 52 47·58 | +47·45 | 1 | |
| 27 | Lal 29296 | 7·5 | 16 1 5·24 | — 1·7 | | 0 |
| | Par 20109 | 8·0 | 5·35 | +59·1 | 3 | 1 |
| | » » | | 5·36 | +79·4 | 1 | 1 |
| | $Rad_3$ 4165 | 8·0 | 5·50 | +92·11 | 3 | 1 |

| *D* (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht | Angenommene Position | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | *AR* (1898·0) | Red. ad l. app. | *D* (1898·0) | Red. ad l. app. |
| —10°19′ 54″4 | | 1 | 0 | 15ʰ 0ᵐ 41ˢ14 | +3ˢ38 | —10°19′ 53″9 | —14″3 |
| 51·4 | +40·41 | 2 | 0 | | | | |
| 53·6 | +86·38 | | 1 | | | | |
| 54·5 | +90·43 | 3 | 1 | | | | |
| —12 16 14·5 | +98·53 | | | 15 16 56·64 | +3·56 | —12 16 14·5 | —13·5 |
| —12 0 18·8 | —20·8 | | 0 | 15 18 16·35 | +3·54 | —12 0 19·3 | —14·0 |
| 18·7 | +43·4 | 4 | 1 | | | | |
| 17·1 | +56·4 | 1 | 0 | | | | |
| 20·2 | +77·61 | 4 | 1 | | | | |
| 18·7 | +79·4 | 2 | 1 | | | | |
| 19·8 | +89·93 | 2 | 1 | | | | |
| —12 44 33·3 | +46·46 | 1 | 0 | 15 27 26·96 | +3·62 | —12 44 37·3 | —13·7 |
| 37·0 | +58·43 | | 1 | | | | |
| 37·5 | +87·47 | | 1 | | | | |
| —12 40 6·1 | | 1 | 0 | 15 27 37·12 | +3·61 | —12 40 5·8 | —13·7 |
| 6·0 | +89·41 | 3 | 1 | | | | |
| 5·6 | +90·80 | 3 | 1 | | | | |
| —14 13 42·6 | | 1 | 2 | 15 43 52·38 | +3·76 | —14 13 42·6 | —13·1 |
| 42·4 | +47·3 | 3 | 1 | | | | |
| 41·7 | +47·45 | 1 | 2 | | | | |
| 44·6 | +59·49 | 2 | 2 | | | | |
| 42·5 | +94·95 | 2 | 2 | | | | |
| —14 19 48·7 | | 1 | 1 | 15 46 15·07 | +3·77 | —14 19 46·6 | —13·0 |
| 48·1 | +47·45 | 1 | 1 | | | | |
| 44·8 | +61·0 | 5 | 2 | | | | |
| —14 56 46·3 | +86·44 | | 0 | 15 52 47·47 | +3·84 | —14 56 43·9 | —12·0 |
| 43·9 | +94·98 | 2 | 1 | | | | |
| —14 57 10·3 | +47·45 | | | 15 52 47·58 | | —14 57 10·3 | |
| —15 52 14·9 | — 1·7 | | 0 | 16 1 5·43 | +3·91 | —15 52 14·0 | —11·6 |
| 14·1 | +65·4 | 1 | 1 | | | | |
| 13·1 | +79·4 | 1 | 1 | | | | |
| 14·7 | +92·11 | 3 | 1 | | | | |

| Nummer | Autorität | Mag. | AR (1898·0) | | | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | AWe 12496 | 9·0 | 16h | 7m | 2s27 | +49·28 | | 0 |
| | Washington | 9·0 | | | 2·49 | +94·96 | 2 | 1 |
| | Bordeaux | 8·9 | | | 2·56 | +87·3 | | 1 |
| 29 | AWe 12579 | 8·9 | 16 | 13 | 45·95 | +50·40 | | 0 |
| | Bordeaux | 9·0 | | | 45·27 | +84·45 | | 1 |
| 30 | Lal 30030 | 8·0 | 16 | 25 | 45·26 | — 2·6 | | 0 |
| | AWe 12681 | 7·8 | | | 45·41 | +49·89 | | 1 |
| | Par 20705 | 8·9 | | | 45·46 | +55·4 | 1 | 1 |
| | » » | | | | 45·45 | +73·2 | 3 | 1 |
| | Bordeaux | 8·5 | | | 45·30 | +84·8 | | 1 |
| 31* | Wm 257 | | 17 | 45 | 6·60 | +49·46 | 1 | 1 |
| | Wm 265 | | | | 6·80 | +49·44 | 2 | 1 |
| 32 | Cord 24616 | 8·5 | 18 | 0 | 3·29 | +82·70 | 2 | 1 |
| | Cinc 2939 | 8·7 | | | 3·29 | +86·18 | 3 | 1 |
| 33 | Lal 33164 | 7·5 | 18 | 1 | 4·71 | — 4·5 | | 0 |
| | Par 23344 | 7·0 | | | 4·27 | +42·0 | 10 | 1 |
| | » » | | | | 4·28 | +58·6 | 1 | 1 |
| | Yarn 7776 | 6·8 | | | 4·68 | +65·5 | 5 | 1 |
| | Cord 24638 | 6·7 | | | 4·32 | +74·64 | 4 | 1 |
| | Par 23344 | | | | 4·23 | +79·5 | 2 | 1 |
| | $Cap_{(85)}$ 1275 | 6·7 | | | 4·25 | +80·66 | 2 | 1 |
| | $Rad_3$ 4732 | 7—6 | | | 4·21 | +83·53 | 3 | 1 |
| | Cinc 2944 | 7·0 | | | 4·31 | +85·52 | 3 | 1 |
| 34 | Lal 33210 | 7 | 18 | 2 | 31·58 | — 4·5 | | 0 |
| | $Cap_{(50)}$ 3475 | 7 | | | 31·48 | +52·64 | 2 | 1 |
| | Cord 24684 | 7·0 | | | 31·49 | +77·60 | 4 | 1 |
| | $Rad_3$ 4739 | 7—6 | | | 31·40 | +83·51 | 2 | 1 |
| | Cinc 2950 | 7·0 | | | 31·50 | +85·52 | 3 | 1 |
| 35 | $M_1$ 15928 | 9·0 | 18 | 13 | 42·88 | +47·58 | 1 | 1 |
| | Wm 181, 18 | 10·0 | | | 43·06 | +48·54 | 1 | 1 |
| | $M_2$ 7269 | 9·5 | | | 42·80 | +84·60 | 3 | 1 |
| 36* | Anonyma | | 18 | 15 | 2·44 | +98·49 | | |

| $D$ (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht | Angenommene Position | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $AR$ (1898·0) | Red. ad l. app. | $D$ (1898·0) | Red. ad l. app. |
| −15°45′ 11"1 | +49·28 | | 0 | $16^h$ $7^m$ $2^s52$ | $+3^s92$ | −15°45′ 15"7 | −11"8 |
| 15·9 | +94·96 | 2 | 1 | | | | |
| 15·5 | +87·3 | | 1 | | | | |
| −16 40 2·1 | +50·40 | | 0 | 16 13 45·27 | +3·98 | −16 40 6·1 | −11·2 |
| 6·1 | +84·45 | | 1 | | | | |
| −17 29 32·2 | − 2·6 | | 0 | 16 25 45·41 | +4·05 | −17 29 33·8 | −10·8 |
| 31·5 | +49·89 | | 0 | | | | |
| 34·3 | +73·2 | 3 | 1 | | | | |
| 33·3 | +84·8 | | 1 | | | | |
| −20 56 7·8 | +49·46 | 1 | 1 | 17 45 6·70 | +4·39 | −20 56 6·4 | − 3·9 |
| 5·0 | +49·44 | 2 | 1 | | | | |
| −21 28 12·8 | +82·70 | 2 | 1 | 18 0 3·29 | +4·42 | −21 28 11·6 | − 2·3 |
| 10·4 | +86·18 | 3 | 1 | | | | |
| −21 27 15·9 | − 4·5 | | 0 | 18 1 4·32 | +4·42 | −21 27 15·6 | − 2·2 |
| 15·3 | +40·2 | 3 | 1 | | | | |
| 17·0 | +58·6 | 1 | 1 | | | | |
| 14·7 | +71·6 | 3 | 1 | | | | |
| 16·0 | +74·64 | 4 | 1 | | | | |
| 14·8 | +79·5 | 1 | 1 | | | | |
| 15·5 | +80·66 | 2 | 1 | | | | |
| 14·7 | +83·53 | 3 | 1 | | | | |
| 16·8 | +85·52 | 3 | 1 | | | | |
| −21 27 48·2 | − 4·5 | | 0 | 18 2 31·47 | +4·42 | −21 27 48·5 | − 2·1 |
| 48 2 | +51·29 | 3 | 1 | | | | |
| 48·2 | +77·60 | 4 | 1 | | | | |
| 48·8 | +83·54 | 3 | 1 | | | | |
| 49·0 | +85·52 | 3 | 1 | | | | |
| −21 46 25·8 | +47·58 | 1 | 1 | 18 13 42·91 | +4·43 | −21 46 29·2 | − 0·9 |
| 29·3 | +48·54 | 1 | 2 | | | | |
| 30·8 | +84·60 | 1 | 2 | | | | |
| −21 51 17·8 | +98·49 | | | 18 15 2·44 | +4·43 | −21 51 17·8 | − 0·8 |

| Nummer | Autorität | Mag. | AR (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | BB 18, 51 | 8·0 | $18^h$ $15^m$ $48^s 60$ | +53·43 | | 3 |
| | $M_1$ 16016 | 7·0 | 48·43 | +47·61 | 1 | 1 |
| | Wm 181, 19 | 9·0 | 48·21 | +48·54 | 1 | 0 |
| | Cinc 3000 | 8·0 | 48·67 | +85·88 | 3 | 3 |
| 38 | $M_1$ 16103 | 8·0 | 18 17 39·09 | +47·61 | 1 | 1 |
| | $M_2$ 7334 | 9·0 | 38·97 | +87·64 | 2 | 1 |
| 39 | $M_1$ 16119 | 8·0 | 18 17 59·69 | +47·61 | 1 | |
| 40 | AWe 14329 | 9·0 | 18 18 27·38 | +50·49 | | |
| 41 | AWe 14572 | 9·0 | 18 32 7·61 | +50·49 | | |
| 42 | Wm 181, 32 | | 18 33 21·55 | +48 54 | 1 | 0 |
| | AWe 14587 | 8·9 | 22·39 | +50·01 | | 0 |
| | Cinc 3062 | 7·8 | 22·51 | +85·56 | 3 | 1 |
| 43 | AWe 14635 | 9·0 | 18 36 30·68 | +50·01 | | |
| 44 | $M_1$ 17719 | 7·0 | 18 46 30·16 | +47 61 | 1 | 1 |
| | BB 18, 130 | 8·0 | 29·97 | +54 55 | | 1 |
| 45 | AWe 14836 | 9·0 | 18 49 22·96 | +49·53 | | |
| 46 | $M_1$ 19091 | 7 | 19 6 30·04 | +47·61 | | 1 |
| | AWe 15134 | 9·0 | 29·94 | +49·65 | | 1 |
| 47* | BD —22° 5099 | 9·0 | 19 19 29·62 | +98 48 | | |
| 48 | Lal 36562 | 7·5 | 19 19 36·82 | — 4·40 | | 0 |
| | Cord 26605 | 7·0 | 36·56 | +76·21 | 4 | 1 |
| | $Rad_3$ 5155 | 7·0 | 36·60 | +88·34 | 3 | 1 |
| 49 | BB 19, 69 | 8·0 | 19 33 51·52 | +52·77 | | 1 |
| | $M_1$ 21167 | 6·0 | 51·25 | +47·61 | 1 | 0 |
| | Yarn 8614 | 7·5 | 51·49 | +60·6 | 2 | 1 |
| | $Rad_3$ 5244 | 8—7 | 51·48 | +86·95 | 3 | 1 |
| 50 | $M_1$ 22054 | 8·0 | 19 46 36·25 | +47·61 | 1 | |
| 51 | Yarn 8767 | 9·8 | 19 49 51·53 | +69·6 | 2 | |
| 52* | Anonyma | | 19 53 11·03 | +98·47 | | |

| D (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht | Angenommene Position | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | AR (1998·0) | Red. ad l. app. | D (1898·0) | Red. ad l. app. |
| —22° 4' 1"0 | +53·43 | | 0 | 18h 15m 48s61 | +4s43 | —22° 4' 4"7 | — 0"7 |
| 0·2 | +47·61 | 1 | 0 | | | | |
| 4·2 | +48·54 | 1 | 1 | | | | |
| 5·2 | +85·88 | 3 | 1 | | | | |
| —21 58 9·55 | +47·61 | 1 | 1 | 18 17 39·03 | +4·44 | —21 58 11·0 | — 0·6 |
| 12·45 | +87·64 | | 1 | | | | |
| —21 52 14·3 | +47·61 | 1 | | 18 17 59·69 | +4·43 | —21 52 14·3 | — 0·8 |
| —21 53 50·6 | +50·49 | | | 18 18 27·38 | +4·43 | —21 53 50·6 | — 0·4 |
| —22 9 37·1 | +50·49 | | | 18 32 7·61 | +4·43 | —22 9 37·1 | + 0·4 |
| —22 3 18·0 | +48·54 | 1 | 1 | 18 33 22·51 | +4·42 | —22 3 17·5 | + 1·1 |
| 17·2 | —50·01 | | 1 | | | | |
| 17·5 | +85·56 | 3 | 1 | | | | |
| —22 16 2·3 | +50·01 | | | 18 36 30·68 | +4·43 | —22 16 2·3 | + 1·5 |
| —22 25 22·2 | +47·61 | 1 | 1 | 18 46 30·06 | +4·41 | —22 25 24·4 | + 2·4 |
| 26·6 | +54·55 | | 1 | | | | |
| —22 23 43·6 | +49·53 | | | 18 49 22·96 | +4·40 | —22 23 43·6 | + 3·0 |
| —22 21 28·1 | +47·61 | | 1 | 19 6 29·99 | +4·37 | —22 21 29·8 | + 4·6 |
| 31·5 | +49·65 | | 1 | | | | |
| —22 31 33·6 | +98·48 | | | 19 19 29·62 | +4·36 | —22 31 33·6 | + 5·9 |
| —22 38 50·4 | — 4·40 | | 0 | 19 19 36·58 | +4·36 | —22 39 4·3 | + 5·9 |
| 39 3·3 | +76·21 | 4 | 1 | | | | |
| 0·2 | +88·34 | 3 | 1 | | | | |
| —22 17 43·9 | +52·77 | | 1 | 19 33 51·50 | +4·27 | —22 17 43·7 | + 7·3 |
| 43·7 | +47·61 | 1 | 1 | | | | |
| 43·7 | +59·7 | 6 | 1 | | | | |
| 43·6 | +86·95 | 3 | 1 | | | | |
| —22 28 34·1 | +47·61 | 1 | | 19 46 36·25 | +4·26 | —22 28 34·1 | + 8·5 |
| —22 14 16·0 | +55·8 | 2 | | 19 49 51·53 | +4·20 | —22 14 16·0 | + 8·8 |
| —22 11 55·1 | +98·47 | | | 19 53 11·03 | +4·19 | —22 11 55·1 | + 9·1 |

| Nummer | Autorität | Mag. | AR (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 53* | Lal 38357 | 8·0 | $20^h$ $0^m$ $35^s55$ | — 4·40 | | 0 |
| | AWe 15910 | 7·8 | 34·52 | +50·77 | | 1 |
| | Cord 27518 | 8·5 | 33·91 | +79·75 | 3 | 1 |
| | Cinc 3336 | 8·0 | 33·90 | +85·92 | 3 | 1 |
| 54 | $M_1$ 23179 | 8·0 | 20 3 55·12 | +47·61 | 1 | 0 |
| | AWe 15947 | 9·0 | 55·69 | +49·72 | | 1 |
| | Yarn 8917 | | 55·32 | +68·7 | 3 | 2 |
| | Cinc 3346 | 8·5 | 55·53 | +86·28 | 2 | 2 |
| 55 | Wm 181, 93 | 8·0 | 20 15 36·46 | +48·54 | 3 | 1 |
| | Wt 182, 56 | 11·0 | 36·69 | +48·60 | 2 | 0 |
| | AWe 16076 | 8·0 | 36·42 | +49·72 | | 1 |
| | $M_1$ 24009 | 9·0 | 36·22 | +74·69 | 1 | 2 |
| | Cinc 3382 | 8·2 | 36·25 | +85·67 | 3 | 2 |
| 56* | Cinc 3388 | 8·7 | 20 17 34·17 | +86·12 | 4 | 1 |
| | $M_2$ 10166 | 8·5 | 34·05 | +88·66 | 6 | 1 |
| | $Rad_3$ 5474 | 8—9 | 34·12 | +91·04 | 3 | 1 |
| 57* | Lal 39350 | 7·5 | 20 23 5·46 | — 4·40 | | 0 |
| | Yarn 9110 | 7·0 | 4·70 | +72·3 | 3 | 0 |
| | Cord 28074 | 7·0 | 4·46 | +78·22 | 2 | 1 |
| | Cinc 3412 | 7·2 | 4·42 | +85·65 | 4 | 1 |
| 58 | $M_1$ 24645 | 9·0 | 20 23 40·51 | +47·63 | 2 | 1 |
| | Wm 181, 98 | 10·0 | 40·41 | +48·54 | 1 | 1 |
| | AWe 16167 | 9·0 | 41·63 | +49·72 | | 0 |
| | $M_2$ 10342 | 8·8 | 40·78 | +85·71 | 3 | 2 |
| | Cinc 3413 | 8·7 | 40·89 | +85·98 | 3 | 2 |
| 59* | BD —21° 5743 | | 20 26 4·93 | +98·46 | | |
| 60 | Wt 180, 37 | | 20 27 30·78 | +48·56 | 3 | 0 |
| | Yarn 9146 | 8·2 | 30·96 | +69·1 | 3 | 1 |
| | Cinc 3428 | 8·8 | 31·01 | +85·98 | 3 | 1 |
| 61 | AWe 16268 | 7·8 | 20 32 30·32 | +49·64 | | 1 |
| | Yarn 9183 | 6·3 | 30·33 | +68·7 | 2 | 1 |
| | Cinc. 3446 | 7·7 | 30·42 | +85·65 | 4 | 2 |
| | $Rad_3$ 5545 | 7—8 | 30·46 | +86·68 | 3 | 2 |

| *D* (1898·0) | Epoche 1800+ | Zahl d. Beob. | Gewicht | Angenommene Position *AR* (1898·0) | Red. ad l. app. | *D* (1898·0) | Red. ad l. app. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| —21°57′ 40·5 | — 4·40 | | 0 | 20h 0m 33s60 | +4s12 | —21°57′ 58″3 | + 9″8 |
| 49·6 | +50·77 | | 1 | | | | |
| 55·9 | +79·75 | 3 | 1 | | | | |
| 55·3 | +85·92 | 3 | 1 | | | | |
| —21 49 17·4 | +47·61 | 1 | 2 | 20 3 55·48 | +4·12 | —21 49 15·7 | +10·0 |
| 12·8 | +49·42 | | 1 | | | | |
| 16·2 | +67·0 | 3 | 2 | | | | |
| 15·1 | +86·28 | 3 | 2 | | | | |
| —21 44 12·8 | +48·54 | 1 | 1 | 20 15 36·30 | +4·04 | —21 44 16·3 | +11·0 |
| 10·8 | +48·60 | 1 | 0 | | | | |
| 15·2 | +49·72 | | 3 | | | | |
| 11·2 | +74·69 | 1 | 0 | | | | |
| 18·4 | +85·67 | 3 | 3 | | | | |
| +21 39 52·7 | +86·12 | 4 | 1 | 20 17 34·11 | +4·02 | —21 40 3·4 | +11·2 |
| 55·2 | +88·66 | | 1 | | | | |
| 56·1 | +91·04 | 3 | 1 | | | | |
| —21 14 15·2 | — 4·40 | | 0 | 20 23 4·25 | +3·96 | —21 14 20·7 | +11·8 |
| 17·9 | +69·6 | 2 | 1 | | | | |
| 23·5 | +78·22 | 2 | 1 | | | | |
| 20·7 | +85·65 | 4 | 1 | | | | |
| —21 27 54·7 | +47·63 | 2 | 2 | 20 23 40·71 | +3·97 | —21 27 54·5 | +11·6 |
| 55·1 | +48·54 | | 1 | | | | |
| 54·4 | +49·72 | | 2 | | | | |
| 55·3 | +85·71 | | 1 | | | | |
| 53·9 | +85·98 | 3 | 2 | | | | |
| —21 26 4·3 | +98·46 | | | 20 26 4·93 | +3·96 | —21 26 4·3 | +11·8 |
| —21 14 37·4 | +48·56 | 1 | 1 | 20 27 30·99 | +3·95 | —21 14 38·8 | +11·9 |
| 39·6 | +56·7 | 2 | 2 | | | | |
| 38·8 | +85·98 | 3 | 2 | | | | |
| —21 20 53·8 | +49·64 | | 0 | 20 32 30·40 | +3·92 | —21 20 56·6 | +12·3 |
| 56·2 | +57·1 | 5 | 1 | | | | |
| 56·1 | +85·65 | 4 | 1 | | | | |
| 57·4 | +86·68 | 3 | 1 | | | | |

**Bemerkungen zu den Vergleichsternen.**

Stern 3. Aus den angeführten Positionen würde sich eine Eigenbewegung von

| | | |
|---|---|---|
| Straßburg—$M_1$........ | +0ˢ0132 | —0″070 |
| Straßburg—Schj...... | | —0·063 |
| Mittel... | +0·0132 | —0·067 |

ergeben, doch wurde dieselbe wegen der geringen Anzahl der benutzbaren Positionen nicht angebracht.

Stern 5. Refractoranschluss an Stern 4 durch Javelle ausgeführt.

Stern 14. Die Eigenbewegung wurde folgendermaßen abgeleitet:

| | | |
|---|---|---|
| $M_1$—Lal.................... | —0ˢ0042 | —0″0288 |
| $\frac{1}{2}$ (Par+$M_2$)—Lal ........... | —0·0041 | —0·0588 |
| $\frac{1}{2}$ ($Rad_3$+Ott)—Lal.......... | —0·0049 | — |
| $\frac{1}{3}$ ($Rad_3$+Ott+San Fern)—Lal. | — | —0·0525 |
| Mittel... | —0·0044 | —0·0518 |

$M_1$ gibt den Stern um 4″ nördlicher und daher den Betrag der Eigenbewegung in *D* bedeutend vermindert. Bei der schönen Übereinstimmung unter den Positionen der anderen Kataloge konnte angenommen werden, dass der Beobachtung in $M_1$ ein Fehler anhafte. Daher wurde das Mittel in *D* unter der Annahme abgeleitet, dass die aus $M_1$ gefundene Eigenbewegung nur den dritten Theil des Gewichtes der anderen Bestimmungen besitzt.

Ebenso scheint die Position des Kataloges von San Fernando in *AR* fehlerhaft zu sein. Vielleicht ist die dortige Angabe um $+1^s$ zu verbessern. Da sich die Ursache der Nichtübereinstimmung nicht ermitteln ließ, wurde dieser Ort in *AR* ausgeschieden.

Stern 19. Refractoranschluss an die drei anderen Sterne durch Javelle ausgeführt. Leider gibt Javelle die Anschlusssterne nicht an, so dass die Position nicht überprüft werden konnte.

Stern 21. In *AR* wurde eine Eigenbewegung im Betrage von

| | |
|---|---|
| $M_2$—$M_1$ . . . . . . . . . . . . | —0ˢ0149 |
| $M_2$—Gött$_2$ . . . . . . . . . . | —0·0173 |
| Mittel . . . | —0·0161 |

abgeleitet. Der Ort von $M_1$ scheint in *D* mit einem größeren Fehler behaftet zu sein und wurde daher weggelassen.

Stern 31. Um constante Zonenfehler zu ermitteln, wurden aus jeder der beiden Zonen ungefähr 10 Sterne mit Sternen aus dem AWe-Kataloge verglichen. Das Resultat war aber zu zweifelhaft, als dass es hätte Vertrauen finden können.

Stern 36. Von Antoniazzi (Padua) an Stern 39 angeschlossen.

Stern 47. Von Javelle an Stern 48 angeschlossen und um die für den letzteren sich ergebende Eigenbewegung corrigiert.

Stern 48. Aus

$$\frac{1}{2}(\text{Cord}+\text{Rad}_3)-\text{Lal}$$

ergab sich eine Eigenbewegung von

—0ˢ0029 —0″159.

Stern 52. Refractoranschluss an Stern 51, ausgeführt durch Kortazzi in Nicolajew.

Stern 53. Die Positionen ließen folgende Eigenbewegung ableiten:

| | | |
|---|---|---|
| AWe—Lal . . . . . . . . . . . . . . | —0ˢ0206 | —0″182 |
| $\frac{1}{2}$(Cord+Cinc)—Lal . . . . . | —0·0198 | —0·182 |
| Mittel . . . | —0·0202 | —0·182 |

Stern 56. Die angeführten Örter ergaben in $D$ folgende Eigenbewegung:

| | |
|---|---|
| Cinc—$M_2$ ............ | —0ʺ984 |
| $Rad_3$—Cinc............ | —0·671 |
| Mittel... | —0·775 |

Da der Zeitraum zwischen Cinc und $M_2$ nur gering (2 Jahre) ist, so wurde der daraus abgeleitete Wert nur mit halbem Gewichte verwendet. $Rad_3$ gibt für diesen Stern eine Eigenbewegung von —1ʺ100. Zur Correction des Sternortes wurde das Mittel aus der Eigenbewegung nach dem Radcliffe-Katalog und dem oben für dieselbe abgeleiteten Wert, also der Betrag —0ʺ937 angenommen.

Stern 57. Eine Eigenbewegung ergab sich in folgender Größe:

| | | |
|---|---|---|
| Yarn—Lal ............... | — | —0ʺ039 |
| $\frac{1}{2}$(Cord+Cinc)—Lal..... | —0ˢ0124 | —0·084 |
| Mittel... | —0·0124 | —0·069 |

Der zweiten Bestimmung wurde bei der Bildung des Mittels doppeltes Gewicht gegeben.

Stern 59. Von Bigourdan in Paris an Stern 57 angeschlossen.

§. 4.

Die Beobachtungen dieses Kometen finden sich publiciert in den »Astronomischen Nachrichten«, Bd. 146, 147, 148 und 149, in den »Comptes-rendus«, Bd. 126, 127, 128, im »Bulletin Astronomique«, Bd. 15, und im »Astronomical Journal«, Bd. 19.

In der folgenden Zusammenstellung ist die Bedeutung der einzelnen Columnen wohl aus der Überschrift ersichtlich und bedarf es daher nur noch der Erwähnung, dass die Werte für die Parallaxen in $AR$ und $D$ mit Hilfe der aus den Stichtenoth'schen Elementen sich ergebenden Werten für $\Delta$ gerechnet wurden.

| Datum | M. Z. Berlin der Beobachtung | AR | $par_\alpha$ | D | $par_\delta$ | Zahl der Vergl. | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Arcetri: A. N. 149, 19.** | | | | | | | |
| Beobachter: A. Abetti. — Instrument: Refractor 284 *mm*. Lamellenmikrometer, Vergrößerung: 124. | | | | | | | |
| Juni 20 I | 11ʰ 50ᵐ 27ˢ8 | 20ʰ 15ᵐ 39ˢ65 | −0ˢ47 | −21° 44′ 13″8 | +12″1 | 24 : 8 | 55 |
| » 20 II | 11 50 27·8 | 15 38·97 | -0·47 | 44 13·3 | +12·1 | 24 : 8 | 56 |
| » 21 I | 11 28 51·8 | 20 3 23·78 | 0·50 | -22 0 0·0 | +12·4 | 16 : 8 | 54 |
| » 21 II | 11 28 51·8 | 3 23·52 | −0·50 | −21 59 56·4 | +12·4 | 16 : 8 | 53 |
| » 27 I | 12 10 10·8 | 18 32 51·49 | −0·03 | -22 9 55·1 | +15·1 | 16 : 8 | 41 |
| » 27 II | 12 10 10·8 | 32 51·56 | −0·03 | 9 53·7 | +15·1 | 16 : 8 | 42 |
| » 28 I | 11 11 18·8 | 18 16 56·70 | −0·17 | −21 52 10·1 | +15·0 | 16 : 8 | 40 |
| » 28 II | 11 11 18·8 | 16 56·18 | −0·17 | 52 12·8 | +15·0 | 16 : 8 | 38 |

Giug. 20. Debolissima; come una stella di 12ᵐ con rarissima nebulosità; però si punta bene. — Giug. 21. Idem. — Giug. 27. Nubi interrompenti. — Giug. 28. Chiaro di luna. La cometa è visibile come le stelle ultime visibili che sono quelle di 10ᵐ in 11ᵐ.

| Datum | M. Z. Berlin der Beobachtung | $AR$ | $par_\alpha$ | $D$ | $par_\delta$ | Zahl der Vergl. | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Bamberg:** A. N. 146, 373. | | | | | | | |
| Beobachter: E. Hartwig. — Instrument: Refractor 10″, Ringmikrometer. | | | | | | | |
| Juni 21 | 13ʰ 29ᵐ 22ˢ2 | 20ʰ 2ᵐ 18ˢ13 | —0ˢ08 | —22° 1′ 10″1 | + 8″4 | — | 53 |
| Rund, Durchmesser 2′, Helligkeit 10. Gr. Excentrische Verdichtung. | | | | | | | |
| **Besançon:** A. N. 147, 85; B. A. 15, 322. | | | | | | | |
| Beobachter: P. Chofardet. — Instrument: Equatoreal coudé. | | | | | | | |
| Juni 20 | 14ʰ 37ᵐ 46ˢ7 | 20ʰ 14ᵐ 14ˢ65 | —0ˢ26 | —21° 46′ 7″1 | +13″2 | 9 : 6 | 55 |
| » 28 | 13 51 28·7 | 18 15 4·42 | +0·33 | —21 49 42·8 | +15·1 | 12 : 9 | 37 |
| » 29 | 13 40 21·7 | 17 58 36·53 | +0·36 | —21 24 42·9 | +15·1 | 9 : 6 | 33 |
| Juli 9 | 10 58 25·7 | 15 44 20·75 | +0·30 | | | 9 : | 23 |
| » 9 | 11 5 58·7 | | | —14 14 55·1 | +11·5 | : 9 | 23 |

La comète Giacobini, le 9. Juillet, est excessivement faible et les pointés sont très difficiles.

**Bordeaux:** C. R. 127, 39.

Beobachter: L. Picart. — Instrument: .......... ..

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni 19 | 12ʰ 38ᵐ 9ˢ8 | 20ʰ 26ᵐ 53ˢ73 | —0ˢ48 | —21° 26' 41"7 | +11"8 | ? | 58 |
| » 20 | 12 23 13 0 | 20 15 22·18 | —0·50 | —21 44 36·5 | +12·2 | ? | 56 |
| » 23 | 11 49 43·1 | 19 35 49·11 | - 0·49 | 22 22 53·7 | +13·5 | ? | 49 |
| Juli 8 | 11 26 21·2 | 15 54 17·88 | +0·30 | 14 59 37·3 | +11·8 | ? | 25 |
| » 11 | 11 15 12·1 | 15 26 9·86 | +0·34 | —12 48 18·0 | +10·4 | ? | 21 |
| » 15 | 10 40 13 9 | 14 57 46·17 | +0·30 | —10 21 35·2 | + 8·8 | ? | 18 |
| » 16 | 10 41 53·1 | 14 51 55 23 | +0·32 | — 9 49 56·9 | + 8·5 | ? | 15 |

## Marseille: B. A. 15, 422 und 467.

Beobachter: Stephan (bis inclusive Juni 29) und Coggia (von Juli 7 bis Juli 12).
Instrument: Äquatoreal von Eichens, Öffnung 0·26 *m*.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni 19 | 13ʰ 6ᵐ 35ˢ3 | 20ʰ 26ᵐ 40ˢ43 | —0ˢ36 | —21° 27' 4"1 | +12"1 | 5 : 5 | 61 |
| » 20 | 14 15 19·3 | 20 14 26·18 | —0·11 | —21 45 53·7 | +12·9 | 5 : 5 | 55 |
| » 23 | 13 3 36·3 | 19 35 4·95 | —0·19 | —22 23 19·1 | +14·1 | 5 : 5 | 49 |
| » 28 | 13 12 40·3 | 18 15 32·01 | +0·20 | —21 50 20·0 | +15·1 | 5 : 5 | 40 |
| » 29 | 12 19 42·3 | 17 59 31·92 | +0·08 | —21 26 10·4 | +15·1 | 5 : 5 | 33 |
| Juli 7 | 10 39 47·3 | 16 5 36·62 | +0·20 | -15 48 19·2 | +12·2 | 4 : 4 | 28 |
| » 8 | 10 47 13·3 | 15 54 35·11 | +0·26 | —15 1 3·3 | +11·6 | 7 : 7 | 25 |
| » 9 | 10 56 19·3 | 15 44 21·67 | +0·31 | —14 14 59·9 | +11·1 | 5 : 5 | 24 |
| » 11 | 11 0 27·3 | 15 26 15·99 | +0·38 | —12 48 37·8 | +10·4 | 6 : 6 | 22 |
| » 12 | 10 45 32·3 | 15 18 19·98 | +0·34 | —12 8 52 2 | + 9·7 | 6 : 6 | 20 |

Le 19 juin la comète est assez faible et d'apparence un peu grenue; le 20 juin, elle semble plus faible et plus condensée que la veille; le 23, au contraire, elle est plus brillant, que le 20; elle est fortement condensée autour d'un petit noyeau très net de 10. grandeur. Le 29 la clarté de la lune rend l'observation difficile.

| Datum | M. Z Berlin der Beobachtung | $AR$ | $par_\alpha$ | $D$ | $par_\delta$ | Zahl der Vergl. | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **München:** A. N. 146, 373 und 375. Beobachter: Villiger. — Instrument: ? | | | | | | | |
| Juni 21 I | 12h 6m 49s8 | 20h 3m 2s53 | −0s36 | −22° 0' 25"4 | +13"2 | 30 : 10 | 53 |
| » 21 II | 12 47 18·8 | 2 41·10 | −0·25 | 0 49·8 | +13·6 | 30 : 10 | 53 |
| **Nicolajew:** A. N. 148, 77. Beobachter: J. Kortazzi. — Instrument: Refractor 9". | | | | | | | |
| Juni 22 | 12h 14m 35s0 | 19h 49m 40s68 | −0s06 | −22° 13' 42"8 | +14"1 | 4 : 4 | 52 |
| » 23 | 11 37 42·0 | 19 35 56·62 | −0·12 | −22 22 56·8 | +14·4 | 6 : 6 | 49 |
| » 26 | 11 14 12·0 | 18 49 52·74 | +0·00 | 22 22 27·1 | +15·3 | 6 : 6 | 44 |
| » 27 | 10 47 3·0 | 18 33 48·22 | 0·03 | −22 10 48·5 | +15·4 | 8 : 8 | 42 |
| » 28 | 10 59 41·0 | 18 17 3·37 | +0·09 | 21 52 25·0 | +15·5 | 8 . 8 | 37 |
| » 29 | 11 21 43·0 | 18 0 11·54 | +0·24 | −21 27 19·0 | +15·3 | 8 : 8 | 33 |
| **Nizza:** A. N. 146, 373, und nach brieflicher Mittheilung. Beobachter: St. Javelle. — Instrument: Äquatoreal (76 *cm* Öffnung). | | | | | | | |
| Juni 19 | 13h 4m 56s7 | 20h 26m 40s89 | −0s34 | −21° 27' 5"0 | +12"0 | 20 : 10 | 58 |
| » 22 | 13 28 43·7 | 19 48 58·26 | 0·07 | −22 14 10·2 | +13·7 | 20 : 10 | 51 |
| » 23 | 10 46 28·7 | 19 36 28·13 | −0·74 | −22 22 32·6 | +12·8 | 16 : 11 | 49 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni | 24 | 10h 53m 39·7 | | | 19h 21m 33s68 | | | 0s53 | −22° 27′ 54″9 | | | +13″4 | 20 : 10 | 47 |
| » | 25 | 12 | 14 | 6·7 | 19 | 5 | 14·41 | 0·21 | —22 | 28 | 0·5 | +14·6 | 12 : 5 | 46 |
| » | 26 | 11 | 6 | 12·7 | 18 | 49 | 57·53 | 0·39 | 22 | 22 | 28 8 | +14 4 | 20 : 10 | 45 |
| » | 27 | 10 | 38 | 21·7 | 18 | 33 | 53·94 | 0·42 | 22 | 10 | 49.8 | +14·5 | 20 : 10 | 43 |
| » | 28 | 10 | 18 | 40·7 | 18 | 17 | 32·74 | —0·42 | 21 | 52 | 54·3 | +14·5 | 20 : 10 | 40 |
| » | 29 | 10 | 15 | 54·7 | 18 | 0 | 57·34 | —0·35 | —21 | 28 | 33·6 | +14·7 | 20 : 10 | 34 |
| » | 30 | 12 | 1 | 32·7 | 17 | 43 | 18·04 | +0·11 | —20 | 55 | 41·9 | +14·9 | 20 : 12 | 31 |
| Juli | 5 | 10 | 5 | 35·7 | 16 | 30 | 15 93 | +0·02 | —17 | 25 | 24·1 | +13·3 | 19 : 14 | 30 |
| » | 6 | 9 | 43 | 19·7 | 16 | 17 | 44·72 | +0·03 | 16 | 37 | 38·8 | +12·8 | 18 : 12 | 29 |
| » | 7 | 10 | 5 | 33·7 | 16 | 5 | 51·13 | +0·12 | —15 | 49 | 20·5 | +12·3 | 20 : 14 | 27 |
| » | 8 | 10 | 3 | 19·7 | 15 | 54 | 53·74 | +0 14 | 15 | 2 | 23·3 | +11·8 | 20 : 10 | 25 |
| » | 9 | 10 | 56 | 25 7 | 15 | 40 | 21·52 | +0·33 | 14 | 14 | 57·1 | +11·1 | 20 : 10 | 23 |
| » | 12 | 9 | 58 | 23·7 | 15 | 18 | 34·18 | +0·25 | 12 | 10 | 22·0 | + 9·9 | 20 : 10 | 19 |
| » | 15 | 10 | 17 | 37·7 | 14 | 57 | 51·84 | +0·33 | —10 | 22 | 9·9 | + 8·6 | 20 : 10 | 17 |
| » | 16 | 10 | 0 | 34·7 | 14 | 52 | 4·70 | +0·31 | — 9 | 50 | 46·6 | + 8·3 | 20 : 10 | 15 |
| » | 18 | 10 | 6 | 22·7 | 14 | 41 | 38·47 | +0·32 | — 8 | 52 | 54·1 | + 7·6 | 16 : 8 | 14 |
| » | 19 | 10 | 0 | 35·7 | 14 | 37 | 1·61 | +0·32 | — 8 | 26 | 45·3 | + 7·3 | 9 : 3 | 13 |
| » | 20 | 10 | 24 | 33·7 | 14 | 32 | 39·54 | +0·35 | — 8 | 1 | 48·0 | + 7·0 | 20 : 7 | 10 |
| » | 21 | 10 | 33 | 14·7 | 14 | 28 | 39·07 | +0·36 | — 7 | 38 | 49·4 | + 6 7 | 17 : 6 | 11 |
| » | 22 | 9 | 45 | 49·7 | 14 | 25 | 4·25 | +0·30 | — 7 | 17 | 54·3 | + 6·6 | 20 : 10 | 9 |
| » | 23 | 9 | 43 | 12·7 | 14 | 21 | 37·95 | +0·30 | — 6 | 57 | 47·9 | + 6 4 | 20 : 10 | 8 |
| » | 25 | 10 | 45 | 46·7 | 14 | 15 | 18·99 | +0·36 | — 6 | 20 | 25·5 | + 5 8 | 19 : 11 | 7 |
| August | 6 | 9 | 28 | 58·7 | 13 | 51 | 42·42 | +0·26 | — 3 | 55 | 34·4 | + 4·3 | 14 : 7 | 6 |
| » | 9 | 9 | 36 | 30·7 | 13 | 48 | 7·65 | +0 26 | — 3 | 32 | 38·6 | + 4·0 | 15 : 5 | 2 |
| » | 10 | 9 | 20 | 54·7 | 13 | 47 | 5·97 | +0·25 | — 3 | 25 | 59·1 | + 3 9 | 24 : 10 | 5 |
| » | 11 | 9 | 17 | 19·7 | 13 | 46 | 7·01 | +0·25 | — 3 | 19 | 28·6 | + 3·9 | 14 : 7 | 4 |
| » | 12 | 9 | 27 | 1·7 | 13 | 45 | 11·41 | +0 25 | — 3 | 13 | 24·0 | + 3·8 | 12 : 6 | 3 |
| » | 13 | 9 | 21 | 22·7 | 13 | 44 | 19·42 | +0·24 | — 3 | 7 | 44·1 | + 3·7 | 15 : 5 | 3 |
| » | 16 | 9 | 14 | 33·7 | 13 | 42 | 1·50 | +0·23 | — 2 | 52 | 13·1 | + 3 6 | 18 : 6 | 1 |

Le 16 août, lors de la dernière observation, la comète était à l'extrême limite de la visibilité; la position conclue doit donc être considérée comme quelque peu douteuse.

| Datum | M. Z. Berlin der Beobachtung | *AR* | $par_\alpha$ | *D* | $par_\delta$ | Zahl der Vergl. | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Padua:** A. N. 148, 115. | | | | | | | |
| Beobachter: A. Antoniazzi und G. Ciscato (Juni 27 I und Juni 28 I). — Instrument: Dembowski-Äquatoreal, 187 *mm*. | | | | | | | |
| Juni 27 I | 11ʰ 36ᵐ 41ˢ7 | 18ʰ 33ᵐ 14ˢ40 | −0ˢ14 | −22° 10' 16"8 | +15"2 | 10 : 10 | 41 |
| » 27 II | 12 32 12·7 | 18 32 35·35 | +0·10 | −22 9 41·7 | +15·2 | 10 : 10 | 42 |
| » 28 I | 11 45 55 7 | 18 16 29·36 | −0 03 | −21 51 35·9 | +15·3 | 5 : 5 | 39 |
| » 28 II | 12 33 2·7 | 18 15 58·87 | +0·14 | −21 50 58 7 | +15 2 | 10 : 5 | 36 |
| » 28 III | 13 9 14·7 | 18 15 33·23 | +0·27 | −21 50 26·4 | +15·0 | 6 : 6 | 35 |
| » 29 I | 12 49 4 7 | 17 59 11·16 | +0·37 | −21 25 35 5 | +15·0 | 10 : 10 | 33 |
| » 29 II | 13 22 8·7 | 17 58 48·25 | +0·39 | −21 24 59·2 | +14·8 | 6 : 6 | 32 |

Piccola, si vede generalmente con difficoltà al principio delle osservazioni incausa del chiarore della luna, poi abbastanza bene. Nucleo non ben distinto, però le osservazioni si fanno senza troppa difficoltà. Il 30 Giugno la cometa fu cercata invano in causa dello splendore troppo vivo della luna.

**Palermo:** A. N. 147, 13.

Beobachter: T. Zona. — Instrument: Merz'sches Äquatoreal.

| Datum | M. Z. Berlin der Beobachtung | *AR* | $par_\alpha$ | *D* | $par_\delta$ | Zahl der Vergl. | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni 19 | 11ʰ 57ᵐ 20ˢ2 | 20ʰ 27ᵐ 12ˢ49 | −0ˢ49 | −21° 26' 32"5 | +11"6 | ? | 59 |

**Paris:** C. R. 126, 1769.

Beobachter: G. Bigourdan (Juni 19) und G. Fayet (Juni 23). - - Instrument: Äquatoreal von 0·305 *m* Öffnung.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni 19 I | 14$^h$ 20$^m$ 44$^s$9 | 20$^h$ 26$^m$ 4$^s$92 | —0$^s$16 | - 21° 28' 2"9 | +12"9 | 4 : 4 | 59 |
| » 19 II | 14 29 25·9 | 20 26 0·60 | —0·13 | —21 28 13·6 | +12·9 | 2 : 2 | 59 |
| » 19 III | 14 33 33·9 | 20 25 58·71 | - 0 12 . | - 21 28 16·4 | +13·0 | 4 : 4 | 59 |
| » 23 | 13 56 50·1 | 19 34 32·39 | —0·04 | —22 23 35·9 | +14·6 | 8 : 8 | 49 |

Comète très faible (grandeur 13·2 environ) arrondie, 30" environ de diamètre, avec condensation centrale granuleuse de 15" d'étendue et qui ressort assez bien.

**Rio de Janeiro:** A. N. 148, 203; C. R. 127, 487.

Beobachter: ............ — Instrument: Refractor, 0·24 *m*.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni 21 | 13$^h$ 46$^m$ 41$^s$3 | 20$^h$ 2$^m$ 6$^s$50 | —0$^s$84 | —22° 1' 7"8 | — 2"7 | 10 : 10 | 53 |
| » 23 | 13 18 2·3 | 19 34 53 62 | —0·87 | —22 23 6 7 | — 2·7 | 10 : 10 | 49 |

**Straßburg:** A. N. 146, 373; 147, 13 und 395.

Beobachter: H. Kobold. — Instrument: Refractor, 18". Fadenmikrometer.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni 20 | 12$^h$ 21$^m$ 38$^s$2 | 20$^h$ 15$^m$ 23$^s$56 | - 0$^s$38 | —21° 44' 31"8 | +12"7 | ? | 55 |
| » 23 | 13 25 57·2 | 19 34 50·98 | - 0 07 | —22 23 25·7 | +14·5 | 15 : 6 | 49 |
| Juli 15 I | 11 22 49·2 | 14 57 34·82 | +0 40 | —10 20 40·4 | + 8·8 | 10 : 4 | 18 |
| » 15 II | 11 22 49·2 | 14 57 34·88 | +0 40 | —10 20 41·8 | + 8·8 | 10 : 4 | 16 |
| » 16 | 11 7 5·2 | 14 51 49·21 | +0·38 | — 9 49 23·3 | + 8·5 | 20 : 8 | 15 |
| » 18 | 10 58 36·2 | 14 41 28 05 | +0·36 | — 8 51 55·8 | + 7 9 | 20 : 8 | 12 |

Am 16. Juli bei guter Luft als äußerst schwache Nebelmasse, in deren vorangehendem Theile sich ein Kern 15$^m$ befand; die Beobachtung trotzdem nur mit größter Anstrengung möglich.

| Datum | M. Z. Berlin der Beobachtung | *AR* | $par_\alpha$ | *D* | $par_\delta$ | Zahl der Vergl. | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Teramo:** A. N. 149, 51. | | | | | | | |
| Beobachter: V. Cerulli. — Instrument: Cooke Refractor, 15″. Fadenmikrometer, Vergrößerung 200. | | | | | | | |
| Juni 27 | 12ʰ 52ᵐ 36ˢ0 | 18ʰ 32ᵐ 21ˢ82 | +0ˢ17 | —22° 9′ 29″5 | +14″9 | 2 : 1 | 42 |
| Rotonda. Si vede nel cercatore di 2½ inch. | | | | | | | |
| **Toulouse:** C. R. 126, 1767. | | | | | | | |
| Beobachter: F. Rossard. — Instrument: ....... | | | | | | | |
| Juni 19 | 13ʰ 41ᵐ 13ˢ8 | 20ʰ 26ᵐ 24ˢ19 | —0ˢ30 | 21° 27′ 38″9 | +12″1 | 18 : 20 | 60 |
| **Washington:** A. J. 19, 63. | | | | | | | |
| Beobachter: E. Frisby. — Instrument: ........ | | | | | | | |
| Juni 22 | 18ʰ 9ᵐ 52ˢ8 | 19ʰ 46ᵐ 16ˢ49 | —0ˢ33 | —22° 16′ 28″9 | +12″8 | 20 : 4 | 50 |

§. 5.

Alle Beobachtungen, die von einem Beobachter während einer Nacht angestellt worden waren, wurden nun zu Mittelwerten vereinigt. Beim Vergleiche der Beobachtungen mit der aus dem Elementensysteme von Dr. Stichtenoth gerechneten und gleich eingangs angesetzten Ephemeride mussten stellenweise sogar noch die dritten Differenzen berücksichtigt werden, trotzdem die Ephemeride bereits auf halbe Tage interpoliert worden war.

In der folgenden Zusammenstellung der Differenzen im Sinne »Beobachtung—Rechnung« gibt Columne 1 den Beobachtungsort, Columne 2 das Datum und die mittlere Berliner Zeit der Beobachtung, vermindert um den für die Aberrationszeit entfallenden Betrag, in Tagesbruchtheilen. In den nächsten zwei Columnen endlich sind die Differenzen »Beobachtung—Rechnung, also $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ angesetzt. Die Bildung von $\Delta\alpha \cos\delta$ war wohl überflüssig, da die Declination während des Zeitraumes, über den sich die einzelnen Normalorte erstrecken, nur sehr geringfügigen Änderungen unterworfen war und sich der Komet überdies während der ganzen Dauer seiner Sichtbarkeit nur so wenig vom Äquator entfernte, dass diese Multiplication in keinem Falle eine nennenswerte Änderung des Wertes von $\Delta\alpha$ zur Folge gehabt hätte.

Eine in der ersten Columne dem Beobachtungsorte beigefügte Ziffer deutet auf eine Bemerkung am Schlusse der Tabelle.

**Beobachtung — Rechnung.**

| Beobachtungsort | Beobachtungszeit | Beobachtung—Rechnung | |
|---|---|---|---|
| | | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ |
| Palermo (1) | Juni 19·49445 | −0ˢ46 | [−5ʺ4] |
| Bordeaux | 19·52280 | −0·12 | +17·7 |
| Nizza | 19·54140 | −0·30 | +15·6 |
| Marseille | 19·54255 | −0·01 | +17·9 |
| Toulouse | 19·56661 | +0·07 | +10·2 |
| Paris | 19·59902 | −0·62 | +16·4 |

| Beobachtungsort | Beobachtungszeit | Beobachtung—Rechnung | |
|---|---|---|---|
| | | Δα | Δδ |
| Arcetri ........... | Juni 20·48979 | +0ˢ19 | +16ʺ4 |
| Straßburg ........ | 20·51144 | +0·20 | +18·9 |
| Bordeaux ......... | 20·51254 | —0·52 | +16·8 |
| Marseille ......... | 20·59040 | +0·32 | +19·0 |
| Besançon ........ | 20·60599 | —0·02 | +20·7 |
| Arcetri ........... | Juni 21·47489 | +0·14 | +16·8 |
| München ......... | 21·51532 | —0·26 | +14·1 |
| Bamberg .... .... | 21·55867 | —0·15 | +14·5 |
| Rio de Janeiro (2).. | 21·57062 | [—3·28] | +16·1 |
| Nicolajew ........ | Juni 22·50674 | +0·06 | + 8·6 |
| Nizza ............ | 22·55824 | +0·03 | +16·0 |
| Washington ....... | 22·75350 | +0·33 | + 5·3 |
| Nizza ............ | Juni 23·44564 | —0·17 | +18·9 |
| Nicolajew ........ | 23·48121 | —0·21 | +12·6 |
| Bordeaux ......... | 23·48956 | —0·84 | +18·5 |
| Marseille ......... | 23·54087 | —0·09 | +16·4 |
| Rio de Janeiro (2).. | 23·55090 | [—3·47] | +16·4 |
| Straßburg ........ | 23·55639 | —0·42 | +16·9 |
| Paris (3) ......... | 23·57784 | —0·27 | +16 0 |
| Nizza (4) ......... | Juni 24·45070 | —1·74 | +19·0 |
| Nizza ............ | Juni 25·50663 | —0·11 | +16·5 |
| Nizza (5) ......... | Juni 26·45952 | —1ˢ20 | +15ʺ8 |
| Nicolajew ........ | 26·46577 | +0·36 | +16·8 |
| Nizza (6) ......... | Juni 27·44021 | [+0·83] | +20·8 |
| Nicolajew ........ | 27·44625 | —0·53 | +17·6 |
| Padua (Ciscato) ... | 27·48073 | +0·07 | +17·8 |
| Arcetri ........... | 27·50398 | +0·35 | +18·8 |
| Padua (Antoniazzi). | 27·51928 | +0·44 | +17·4 |
| Teramo .......... | 27·53344 | —0·26 | +16·1 |

| Beobachtungsort | Beobachtungszeit | Beobachtung—Rechnung | |
|---|---|---|---|
| | | Δα | Δδ |
| Nizza (7)......... | Juni 28·42656 | —0ˢ26 | [+24″7] |
| Nicolajew .. ..... | 28·45504 | —0·70 | +15·6 |
| Arcetri ........... | 28·46312 | +0·16 | +18·3 |
| Padua (Ciscato) (8). | 28 48715 | [—2·77] | [+23·0] |
| Padua (Antoniazzi). | 28·53244 | —0·65 | +16·5 |
| Marseille ......... | 28·54739 | +0·22 | +19·5 |
| Besançon......... | 28·57434 | —0·32 | +20·8 |
| Nizza ........... | Juni 29·42464 | —0·75 | +18·5 |
| Nicolajew ........ | 29·47034 | —0·54 | +18·0 |
| Marseille .. ...... | 29·51061 | —0·33 | +18·9 |
| Padua ........... | 29·54229 | —0·78 | +18·3 |
| Besançon......... | 29·56662 | +0·15 | +11·5 |
| Nizza (9)......... | Juni 30·49799 | —1·14 | +19·4 |
| Nizza .......... | Juli 5·41720 | —0·76 | +13·0 |
| Nizza .......... | Juli 6·40859 | —0·76 | +16·8 |
| Nizza ........... | Juli 7·41698 | —0·53 | +16·7 |
| Marseille (10)..... | 7·44075 | +1·25 | +10·1 |
| Nizza ........... | Juli 8·41532 | —0·56 | + 9·5 |
| Marseille (11)..... | 8·44580 | +0·24 | + 8·4 |
| Bordeaux.. ...... | 8·47298 | +0·23 | +14·8 |
| Marseille ......... | Juli 9·45200 | —0·32 | +13·5 |
| Nizza...... ..... | 9·45207 | —0·20 | +15·6 |
| Besançon......... | 9·45346 | —0·22 | |
| » (12) . . . | 9·45870 | | + 0·2 |
| Marseille (12)..... | Juli 11·45461 | +0·66 | +19·8 |
| Bordeaux ........ | 11·46485 | —0·37 | +14·3 |
| Nizza.......... . | Juli 12·41138 | 0·00 | +12·7 |
| Marseille (13)..... | 12·44111 | +1·06 | [+25·6] |

| Beobachtungsort | Beobachtungszeit | Beobachtung—Rechnung | |
|---|---|---|---|
| | | Δα | Δδ |
| Nizza (14) ....... | Juli 15·47133 | [—2ˢ36] | +22"8 |
| Bordeaux ........ | 15·43997 | +0·20 | +13·4 |
| Straßburg ........ | 15·46955 | —0·25 | + 9·4 |
| Nizza (15)........ | Juli 16·41229 | —0·12 | + 8·3 |
| Bordeaux......... | 16·44097 | —0·07 | + 5·3 |
| Straßburg ........ | 16·45847 | +0·03 | + 6·7 |
| Nizza............ | Juli 18·41599 | —0·03 | + 6·6 |
| Straßburg ........ | 18·45226 | —0·06 | + 7·1 |
| Nizza............ | Juli 19·41181 | +0·20 | + 9·5 |
| Nizza............ | Juli 20·42830 | +0·22 | + 9·1 |
| Nizza.......... .. | » 21·43413 | +0·18 | + 0 5 |
| Nizza............ | » 22·40105 | +0·16 | + 5·7 |
| Nizza............ | » 23·39906 | +0·17 | + 3·2 |
| Nizza........... | » 25·44216 | +0·64 | + 0·2 |
| Nizza............ | August 6·38675 | +0·29 | + 4·5 |
| Nizza............ | » 9·39146 | +0·22 | + 3·1 |
| Nizza............ | » 10·38046 | +0·69 | — 1·5 |
| Nizza............ | » 11·37781 | +0·73 | + 3·7 |
| Nizza............ | » 12·38438 | +0·94 | + 0·7 |
| Nizza...... ..... | » 13·38029 | +0·72 | — 3·8 |
| Nizza............ | » 16·37506 | +0·06 | — 2·0 |

## Bemerkungen.

(1.) Wegen der großen Differenz in *D* gegen die anderen Beobachtungen wurde diese Beobachtung von Prof. Zona in Palermo in Declination weggelassen.

(2.) Die beiden Beobachtungen von Rio de Janeiro wurden wegen des constanten Fehlers von $-3^s$ in Rectascension ausgeschieden.

(3.) Irrthümlicherweise gibt Fayet bei Gelegenheit der Publication dieser Beobachtung die Sternzeit und nicht, wie es nach den »Comptes-rendus« der Fall sein sollte, die mittlere Zeit an.

(4.) Die ungewöhnlich große Differenz in *AR* ließ sich auf keine Weise verringern. Javelle theilte mir mit, dass in seinen Reductionen kein Rechenfehler zu finden sei. Der Vergleichstern 47 ist von Javelle durch einen Refractoranschluss auf Stern 48 bezogen worden. Doch muss die Ursache der Abweichung nicht gerade in einem fehlerhaften Sternort gelegen sein, da überhaupt große, negative Differenzen in den Nizzaer Beobachtungen dieses Kometen nicht selten sind (man vergleiche die Beobachtungen von Juni 26, 29, 30, Juli 5, 6 und 15). Es scheint so fast, als hätte die stärkere Vergrößerung — Javelle beobachtete am großen Refractor — die Möglichkeit einer abweichenden Auffassung vergrößert.

(5.) Die große Differenz in *AR* mag vielleicht auf einen Fehler im Sternorte zurückzuführen sein, da der Stern 45 nur in AWe zu finden war. Doch kann auch die bereits unter (4) hervorgehobene Möglichkeit die Abweichung verursacht haben.

(6.) Ein Zeitfehler kann schwer angenommnn werden, da durch eine $\pm$ Correction der Beobachtungszeit in jedem Falle eine Coordinate noch ungünstiger würde. Da die anderen Nizzaer Beobachtungen meist große negative Differenzen ergeben, wurde diese Beobachtung in Rectascension gestrichen.

(7.) Wegen des zu stark abweichenden Wertes von $\Delta\delta$ wurde diese Beobachtung nur in Rectascension verwendet.

(8.) Unter der Annahme, dass die Beobachtungszeit um $+5^m$ zu corrigieren sei, würden die Differenzen

$$+0^s\!.69 \qquad +18''\!.6$$

also bedeutend besser. Die Beobachtung wurde jedoch weggelassen, weil diese Zeitcorrection nicht ohneweiters zulässig erschien.

(9.) Der Vergleichstern beruht nur auf zwei Beobachtungen aus den Washingtoner Zonen und kann mit constanten Zonenfehlern behaftet sein (vide Anmerkung zu Stern 31).

(10.) $\Delta\alpha$ ist durch Annahme eines Zeitfehlers nicht corrigierbar. Ebenso ist die Position des Vergleichsternes genügend gesichert.

(11.) Coggia hat falschen Vergleichstern und gibt als solchen Stern 26 an. Mit demselben würden die Differenzen

$$+0^s38 \quad -22'9;$$

mit Stern 25 wird die Declination bedeutend besser und wurde die Beobachtung deshalb mit diesem letzteren angenommen.

(12.) Die Beobachtungen ergeben in $D$ eine ziemlich bedeutende Abweichung von den anderen Beobachtungen. In Anbetracht des Umstandes, als der Komet zu dieser Zeit bereits sehr lichtschwach geworden war und die $D$-Werte sich immer noch um zulässige Beträge vom Mittel des Normalortes entfernen, wurden die Beobachtungen zwar beibehalten, aber nur mit halbem Gewichte zur Bildung des Mittels der Correctionen verwendet.

(13.) $\Delta\alpha$ ist durch Annahme eines Zeitfehlers nicht corrigierbar, da sonst $\Delta\delta$ noch schlechter würde. Der Sternort erscheint hinreichend gesichert. Bei der geringen Differenz ☌ — ∗ = $+0^m\,0^s09$ schien es unthunlich, den Rectascensionswert zu übergehen. So wurde derselbe daher beibehalten, aber die Declination wegen der allzustarken Abweichung weggelassen.

(14.) Durch Annahme eines Zeitfehlers von $+10^m$ wurden die Differenzen

$$+0^s16 \quad +10'5;$$

Javelle schrieb mir jedoch, dass ein Zeitfehler nicht annehmbar sei. Die Beobachtung wurde daher in Rectascension weggelassen. Auch der $D$-Wert zeigt einen ziemlich bedeutenden Fehler gegenüber den anderen Beobachtungen aus dieser Zeit. Schließlich veranlasste jedoch die bereits unter (12) geltend gemachte Überlegung, dass der Komet zu dieser Zeit schon

äußerst lichtschwach war und an der äußersten Grenze der Sichtbarkeit stand, dazu, den Ort in Declination beizubehalten.

(15.) Die Beobachtung ist in $D$ um $-1'$ zu corrigieren.

## §. 6.

Welche Beobachtungen zur Bildung eines Normalortes herangezogen wurden, ist in der vorhergehenden Tabelle durch Trennungsstriche kenntlich gemacht. Es ergibt sich aus derselben, dass aus dem gesammten Beobachtungsmateriale ohne Zwang sechs Normalorte abgeleitet werden konnten, welche den weiteren Rechnungen zugrunde zu legen waren. Es ergaben sich folgende Correctionen der Ephemeride:

| Normalort | Beobachtungen | Zeit | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| I | Juni 19—23 | Juni 21·434 | $-0^s136$ | $+15''69$ |
| II | Juni 24—30 | Juni 28·033 | −0·360 | +17·71 |
| III | Juli 5—12 | Juli 9·153 | −0·020 | +12·95 |
| IV | Juli 15—19 | Juli 17·063 | −0·012 | + 9·90 |
| V | Juli 20—25 | Juli 22·621 | +0·274 | + 3·74 |
| VI | August 6—16 | August 11·382 | +0·523 | + 0·67 |

Die Aufstellung der Normalorte gestaltete sich nun mit Hilfe dieser an die Ephemeride anzubringenden Correctionen folgendermaßen, wobei die Zeiten auf Mittag oder Mitternacht abgerundet wurde.

I. Normalort:

| | | |
|---|---|---|
| Ephemeridenort .......... | $20^h\,3^m\,3^s64$ | $-22°\,0'\,24''8$ |
| Corr. d. Eph. ............. | − 0·136 | + 15·69 |
| —Red. ad. l. app. .......... | − 2·86 | − 6·0 |
| | 20 3 0·644 | −22 0 15·11 |

I. . . . . . . . Juni 21·5 $\quad 300°\,45'\,9''90 \quad -22°\,0'\,15''11$

II. Normalort:

| | | |
|---|---|---|
| Ephemeridenort........ | $18^h\,24^m\,37^s97$ | —22° 1′ 32″5 |
| Corr. d. Eph............ | — 0·360 | + 17·71 |
| —Red. ad. l. app........ | — 2·96 | + 0·60 |
| | 18 24 34·650 | —22 1 14·19 |
| II........ Juni 28·0 | 276° 8′ 39″75 | —22° 1′ 14″19 |

III. Normalort:

| | | |
|---|---|---|
| Ephemeridenort....... | $15^h\,48^m\,51^s65$ | —14° 35′ 29″7 |
| Corr. d. Eph. .......... | — 0·020 | + 12·95 |
| —Red. ad. l. app....... | — 2·87 | + 11·4 |
| | 15 48 48·760 | —14 35 5·35 |
| III........ Juli 9·0 | 237° 12′ 11″40 | —14° 35′ 5″35 |

IV. Normalort:

| | | |
|---|---|---|
| Ephemeridenort........ | $14^h\,48^m\,51^s21$ | —9° 33′ 1″1 |
| Corr. d. Eph............ | — 0·012 | + 9·90 |
| —Red. ad. l. app........ | — 2·84 | + 14·9 |
| | 14 48 48·358 | —9 32 36·30 |
| IV........ Juli 17·0 | 222° 12′ 5″37 | —9° 32′ 36″30 |

V. Normalort:

| | | |
|---|---|---|
| Ephemeridenort........ | $14^h\,24^m\,43^s26$ | —7° 15′ 49″9 |
| Corr. d. Eph............ | + 0·274 | + 3·74 |
| —Red. ad. l. app. ....... | — 2·85 | + 15·9 |
| | 14 24 40·684 | —7 15 30·26 |
| V........ Juli 22·5 | 216° 10′ 10″26 | —7° 15′ 30″26 |

VI. Normalort:

| | | |
|---|---|---|
| Ephemeridenort........ | $13^h\,45^m\,59^s58$ | —3° 18′ 42″9 |
| Corr. d. Eph............ | + 0·523 | + 0·67 |
| —Red. ad. l. app. ....... | — 2·98 | + 18·5 |
| | 13 45 57·123 | —3 18 23·73 |
| VI....... August 11·5 | 206° 29′ 16″84 | —3° 18′ 23″73 |

§. 7.

Bei dem geringen heliocentrischen Bogen, während dessen der Komet beobachtet worden ist, war es wohl unnöthig, die definitive Bahnbestimmung unter strenger Berücksichtigung der Methode der kleinsten Quadrate durchzuführen. Es wurde daher der ungleich rascheren Methode der Variation von $M$ der Vorzug gegeben.

Was die beiden durch die Bahnelemente genau darzustellenden Orte betrifft, so war es gleich anfangs klar, dass der erste Normalort schon wegen der großen Anzahl der in ihm vereinigten Beobachtungen und des ihm aus diesem Grunde anhaftenden hohen Gewichtes einer dieser beiden Punkte sein müsse. Für den zweiten darzustellenden Ort blieb die Wahl zwischen dem V. und VI. Normalort. Obwohl eigentlich der V. Normalort anfänglich vertrauenerweckender schien, weil der Komet zu dieser Zeit noch lichtstärker war als später, so wurde dennoch der Umstand für die endgiltige Entscheidung und Wahl des VI. Ortes ausschlaggebend, dass der Durchgang durch das Perihel nach den vorläufigen Bahnbestimmungen auf den 25. Juli, also zwischen den V. und VI. Ort fällt. Überdies liegt der letzte VI. Ort schon so weit vom Perihel ab, dass der heliocentrische Bogen durch ihn um fast 15° vergrößert wird.

Als erster Wert von $M$ wurde der für die Zeiten Juni 21·5 und August 11·5 aus der Ephemeride resultierende Wert von

$$M_1 = 0 \cdot 4243300$$

gewählt. Schon aus früheren Rechnungen war bekannt, dass sich der wahre Wert von $M$ etwas größer ergeben werde, als der obige angenommene Wert $M_1$; das zweite Elementensystem wurde daher mit einem um

$$\Delta M = 0 \cdot 0001$$

vergrößerten Wert von $M_1$ gerechnet.

Diese beiden Werte ergaben folgende auf den Äquator als Fundamentalebene bezogene Elementensysteme:

System I.

$M_1 = 0 \cdot 424\,3300$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $T$ ........ | 1898 Juli 25·549 047 m. Z. Berlin | | | |
| $\omega$ ........ | 313° | 37′ | 11″83 | mittl. Äqu. 1898·0 |
| ☊ ........ | 212 | 12 | 3·98 | |
| $i$ ........ | 155 | 0 | 42·87 | |
| log $q$ ..... | 0·176 4710. | | | |

System II.

$M_2 = 0 \cdot 424\,4300$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $T$ ........ | 1898 Juli 25·522 072 m. Z. Berlin | | | |
| $\omega$ ........ | 313° | 36′ | 4″89 | mittl. Äqu. 1898·0 |
| ☊ ........ | 212 | 12 | 0·66 | |
| $i$ ........ | 155 | 0 | 42·93 | |
| log $q$ ..... | 0·176 4738. | | | |

Die aus diesen zwei Systemen für die Zeiten der Normalorte abgeleiteten Rectascensionen und Declinationen sind die folgenden:

System I.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I........ | 300° | 45′ | 9″56 | —22° | 0′ | 15″10 |
| II........ | 276 | 8 | 49·27 | —22 | 1 | 16·01 |
| III........ | 237 | 12 | 25·56 | —14 | 35 | 9·42 |
| IV........ | 222 | 12 | 17·66 | — 9 | 32 | 41·97 |
| V........ | 216 | 10 | 17·42 | — 7 | 15 | 32·19 |
| VI........ | 206 | 29 | 16·88 | — 3 | 18 | 23·74 |

System II.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I........ | 300° | 45′ | 9″58 | —22° | 0′ | 15″10 |
| II........ | 276 | 8 | 30·74 | —22 | 1 | 13·85 |
| III........ | 237 | 12 | 1·17 | —14 | 35 | 1·57 |
| IV........ | 222 | 11 | 54·73 | — 9 | 32 | 32·93 |
| V........ | 216 | 10 | 7·31 | — 7 | 15 | 28·05 |
| VI........ | 206 | 29 | 16·82 | — 3 | 18 | 23·70 |

Vergleicht man die Normalorte mit den aus dem System I abgeleiteten Positionen, so erhält man folgende Werte der $\partial\alpha$- und $\partial\delta$-Größen:

II. Normalort:

$$\partial\alpha_2 = -\ 9\text{'}52;\quad \partial\alpha_2 \cos\delta_2 = -\ 8\text{'}82;\quad \partial\delta_2 = +1\text{'}82.$$

III. Normalort:

$$\partial\alpha_3 = -14\cdot16;\quad \partial\alpha_3 \cos\delta_3 = -13\cdot71;\quad \partial\delta_3 = +4\cdot07.$$

IV. Normalort:

$$\partial\alpha_4 = -12\cdot29;\quad \partial\alpha_4 \cos\delta_4 = -12\cdot12;\quad \partial\delta_4 = +5\cdot67.$$

V. Normalort:

$$\partial\alpha_5 = -\ 7\cdot16;\quad \partial\alpha_5 \cos\delta_5 = -\ 7\cdot10;\quad \partial\delta_5 = +1\cdot93.$$

Der Änderung von $M$ um $+0\cdot0001$ entsprechen aber, wie der Vergleich zwischen den aus den Systemen I und II abgeleiteten Kometenörtern ergibt, die Werte:

II. Normalort:

$$\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right) = -18\text{'}53;\qquad \left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\cos\delta_2 = -17\text{'}18;$$

$$\left(\frac{\partial\delta_2}{\partial x}\right) = +2\text{'}16,$$

III. Normalort:

$$\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\right) = -24\cdot39;\qquad \left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\right)\cos\delta_3 = -23\cdot61;$$

$$\left(\frac{\partial\delta_3}{\partial x}\right) = +7\cdot85,$$

IV. Normalort:

$$\left(\frac{\partial\alpha_4}{\partial x}\right) = -22\cdot93;\qquad \left(\frac{\partial\alpha_4}{\partial x}\right)\cos\delta_4 = -22\cdot61;$$

$$\left(\frac{\partial\delta_4}{\partial x}\right) = +9\cdot04,$$

V. Normalort:

$$\left(\frac{\partial\alpha_5}{\partial x}\right) = -10\cdot11;\qquad \left(\frac{\partial\alpha_5}{\partial x}\right)\cos\delta_5 = -10\cdot03;$$

$$\left(\frac{\partial\delta_5}{\partial x}\right) = +4\cdot14,$$

so dass die acht Gleichungen zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes von $\Delta x$ nunmehr lauten:

$$
\begin{aligned}
-\ 8''82 &= -17''18\,\Delta x \\
-13\cdot71 &= -23\cdot61\,\Delta x \\
-12\cdot12 &= -22\cdot61\,\Delta x \\
-\ 7\cdot10 &= -10\cdot03\,\Delta x \\
+\ 1\cdot82 &= +\ 2\cdot16\,\Delta x \\
+\ 4\cdot07 &= +\ 7\cdot85\,\Delta x \\
+\ 5\cdot67 &= +\ 9\cdot04\,\Delta x \\
+\ 1\cdot93 &= +\ 4\cdot14\,\Delta x
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen geben für den wahrscheinlichsten Wert von $\Delta x$:

$$\Delta x = \frac{[an]}{[aa]} = \Delta M_1 = +0\cdot000\,0565,$$

$$\log \Delta x = \log \Delta M_1 = 9\cdot98684.$$

Mit diesem Werte erhält man nach der Formel

$$E = E_1 + (E_2 - E_1)\,\Delta M_1$$

die folgenden Verbesserungen der Elemente des Systems I:

$$
\begin{aligned}
\Delta T &= -\ 0\cdot015\,241 \\
\Delta\omega &= -37''82 \\
\Delta\Omega &= -\ 1\cdot88 \\
\Delta i &= +\ 0\cdot03 \\
\Delta \log q &= +\ 0\cdot000\,0016
\end{aligned}
$$

und damit als endgiltige auf den Äquator 1898·0 bezogene Elemente:

$$
\begin{aligned}
T &= 1898 \text{ Juli } 25\cdot533\,806 \text{ m. Z. Berlin} \\
\omega &= 313^\circ\ 36'\ 34''01 \\
\Omega &= 212\quad 12\quad 2\cdot10 \qquad \text{mittl. Äqu. } 1898\cdot0 \\
i &= 155\quad 0\quad 42\cdot90 \\
\log q &= 0\cdot176\,4726.
\end{aligned}
$$

Dieses Elementensystem gibt folgende Darstellung der Normalorte:

| | | $d\alpha \cos\delta$ | $d\delta$ |
|---|---|---|---|
| I. | Juni 21·5........ | +0ˢ02 | —0ˢ01 |
| II. | Juni 28·0........ | +0·88 | +0·60 |
| III. | Juli 9·0........ | —0·36 | —0·36 |
| IV. | Juli 17·0........ | +0·66 | +0·56 |
| V. | Juli 22·5........ | —1·43 | —0·41 |
| VI. | August 11·5..... | —0·01 | —0·01 |

Die Darstellung kann wohl im ganzen eine befriedigende genannt werden und es wäre nur wünschenswert gewesen, wenn die große Differenz in der Darstellung der Rectascension des V. Ortes einer Verbesserung fähig geworden wäre. Berücksichtigt man die Grundlagen, auf denen dieser Normalort beruht und bedenkt man einerseits, dass die Zahl der Beobachtungen, welche in demselben vereinigt sind, nur gering ist; und anderseits, dass der Komet zu dieser Zeit bereits so lichtschwach geworden war, dass ein Fehler von —1″ = —0ˢ07 in den Beobachtungen wohl nicht mehr zu den Unmöglichkeiten gerechnet werden kann, so wird man die eigentlich nicht einmal so große Abweichung schwerlich auffallend nennen können.

Rechnet man mit dem verbesserten Werte von $M$

$$M = 0{\cdot}424\,3865$$

das endgiltige Elementensystem, so erhält man folgende auf den mittleren Äquator von 1898·0 bezogene Bahn:

$$T = 1898 \text{ Juli } 25{\cdot}533\,810 \text{ m. Z. Berlin}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 313° \ 36' \ 34{\cdot}05 \\ \Omega = 112 \ \ 12 \ \ 2{\cdot}11 \\ i = 155 \ \ 0 \ \ 42{\cdot}90 \end{array}\right\} \text{mittl. Äqu. } 1898{\cdot}0$$

$$\log q = 0{\cdot}176\,4727,$$

welche die Normalörter in folgender Weise und in befriedigender Übereinstimmung mit dem obigen Schema darstellt:

| | | | $d\alpha \cos\delta$ | $d\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| I. | Normalort: | Juni 21·5 ...... | +0"01 | −0"01 |
| II. | » | Juni 28·0 ...... | +0·86 | +0·60 |
| III. | » | Juli 9·0 ...... | −0·37 | −0·35 |
| IV. | » | Juli 17·0 ...... | +0·65 | +0·57 |
| V. | » | Juli 21·5 ...... | −1·43 | −0·41 |
| VI. | » | August 11·5.... | −0·01 | −0·01 |

Obwohl diese Darstellung bei dem gleichmäßigen Zeichenwechsel schwerlich Aussicht auf Verbesserung geben kann, so wurde dennoch nach Hornsteins Methode ermittelt, nach welcher Seite sich die endgiltige Parabel verändern würde, falls man die Excentricität als Unbekannte in die Ausgleichungsrechnung hätte einführen wollen. Mit den Werten des Elementensystems II[1] und unter der Annahme, dass die große Halbaxe den Wert:

$$a = 100$$

besitze, ergab sich folgendes elliptisches Elementensystem:

$T = 1898$ Juli 25·85332 m. Z. Berlin

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 313^\circ\ 50'\ 26"56 \\ \Omega &= 212\ \ 14\ \ 51·12 \\ i &= 155\ \ \ 0\ \ \ 9·85 \end{aligned}\right\}\ \text{mittl. Äquinoctium und mittl. Äqu. 1898·0}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2·000\,0000 \\ e &= 0·985\,0039 \\ \log q &= 0·176\,0091. \end{aligned}$$

Diese Ellipse ergab für den II. bis V. Normalort folgende Positionen des Kometen:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II........ | $AR =$ 276° | 8′ | 6"36; | $D =$ −22° | 1′ | 10"50 |
| III........ | 237 | 11 | 44·57; | −14 | 34 | 56·86 |
| IV........ | 222 | 11 | 48·37; | − 9 | 32 | 32·66 |
| V.... ... | 216 | 9 | 58·86; | − 7 | 15 | 25·71. |

[1] Leider hatte ich damals das Blatt, auf dem ich das System I gerechnet hatte, verlegt, so dass ich, um nicht die Hilfsgrößen neu rechnen zu müssen, genöthigt war, das System II und den Wert $M = 0·424430$ zugrunde zu legen.

Mit Hilfe dieser Positionen und der bereits oben angesetzten Werte ergaben sich für die $\partial\alpha\cos\delta$, $\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cos\delta$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y}\cos\delta$, $\partial\delta$, $\frac{\partial\delta}{\partial x}$, $\frac{\partial\delta}{\partial y}$-Werte folgende Zahlen:

II. Normalort....... $\partial\alpha_2\cos\delta_2 = +\;8^{\prime\prime}36;$

$$\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\cos\delta_2 = +17^{\prime\prime}18; \quad \left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\right)\cos\delta_2 = -22^{\prime\prime}60.$$

III. Normalort....... $\partial\alpha_3\cos\delta_3 = +\;9\cdot90;$

$$\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\right)\cos\delta_3 = +23\cdot61; \quad \left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\right)\cos\delta_3 = -16\cdot07.$$

IV. Normalort....... $\partial\alpha_4\cos\delta_4 = +10\cdot49;$

$$\left(\frac{\partial\alpha_4}{\partial x}\right)\cos\delta_4 = +22\cdot61; \quad \left(\frac{\partial\alpha_4}{\partial x}\right)\cos\delta_4 = -\;6\cdot27.$$

V. Normalort....... $\partial\alpha_5\cos\delta_5 = +\;2\cdot93;$

$$\left(\frac{\partial\alpha_5}{\partial x}\right)\cos\delta_5 = +10\cdot03; \quad \left(\frac{\partial\alpha_5}{\partial x}\right)\cos\delta_5 = -\;8\cdot38.$$

II. Normalort:

$$\partial\delta_2 = -0^{\prime\prime}34; \quad \left(\frac{\partial\delta_2}{\partial y}\right) = -2^{\prime\prime}16; \quad \left(\frac{\partial\delta_2}{\partial y}\right) = +3^{\prime\prime}35.$$

III. Normalort:

$$\partial\delta_3 = -3\cdot78; \quad \left(\frac{\partial\delta_3}{\partial y}\right) = -7\cdot85; \quad \left(\frac{\partial\delta_3}{\partial y}\right) = +4\cdot71.$$

IV. Normalort:

$$\partial\delta_4 = -3\cdot37; \quad \left(\frac{\partial\delta_4}{\partial y}\right) = -9\cdot04; \quad \left(\frac{\partial\delta_4}{\partial y}\right) = +0\cdot27.$$

V. Normalort:

$$\partial\delta_5 = -2\cdot21; \quad \left(\frac{\partial\delta_5}{\partial y}\right) = -4\cdot14; \quad \left(\frac{\partial\delta_5}{\partial y}\right) = +2\cdot34.$$

Mit denselben werden die Gleichungen zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte von $\Delta x$ und $\Delta y$:

$$
\begin{aligned}
+\ 8{\cdot}36 &= +17{\cdot}18\Delta x - 22{\cdot}60\Delta y \\
+\ 9{\cdot}90 &= +23{\cdot}61\Delta x - 16{\cdot}07\Delta y \\
+10{\cdot}49 &= +22{\cdot}61\Delta x - \ 6{\cdot}27\Delta y \\
+\ 2{\cdot}93 &= +10{\cdot}03\Delta x - \ 8{\cdot}38\Delta y \\
-\ 0{\cdot}34 &= -\ 2{\cdot}16\Delta x + \ 3{\cdot}35\Delta y \\
-\ 3{\cdot}78 &= -\ 7{\cdot}85\Delta x + \ 4{\cdot}71\Delta y \\
-\ 3{\cdot}37 &= -\ 9{\cdot}04\Delta x + \ 0{\cdot}27\Delta y \\
-\ 2{\cdot}21 &= -\ 4{\cdot}14\Delta x + \ 2{\cdot}34\Delta y.
\end{aligned}
$$

Aus diesem Gleichungssystem ergaben sich folgende zwei Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
+1629{\cdot}3\Delta x - 1049{\cdot}8\Delta y &= -689{\cdot}8 \\
-1049{\cdot}8\Delta x + \ 917{\cdot}5\Delta y &= +464{\cdot}4.
\end{aligned}
$$

Die Auflösung dieser zwei Gleichungen ergab für die Werte der zwei Unbekannten:

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= -0{\cdot}0000371 \ldots\ldots\ldots M = 0{\cdot}424\,3929 \\
\Delta y &= +0{\cdot}0827 \quad \ldots\ldots\ldots a = 1209{\cdot}2.
\end{aligned}
$$

Mit diesen Größen werden die wahrscheinlichsten elliptischen Elemente, welche so wie die anderen Elementensysteme noch auf den Äquator als Fundamentalebene bezogen sind:

$$T = 1898 \text{ Juli } 25{\cdot}53945.$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\omega &= 313^\circ\ 36'\ 51{\cdot}32 \\
\Omega &= 212\ \ 12\ \ 13{\cdot}53 \\
i &= 155\ \ \ 0\ \ 40{\cdot}22
\end{aligned}
\right\}\ \text{mittl. Äqu. } 1898{\cdot}0
$$

$$
\begin{aligned}
a &= 1209{\cdot}2 \\
e &= 0{\cdot}998\,7588.
\end{aligned}
$$

Führt man die Zahlenwerte für $\Delta x$ und $\Delta y$ auch in die obigen Gleichungen ein, so lassen dieselben folgende Fehler in den einzelnen Normalorten übrig:

| | $d\alpha \cos \delta$ | $d\delta$ |
|---|---|---|
| I. Normalort ........ | 0ʹ00 | 0ʹ00 |
| II. » ........ | —0·12 | —0·74 |
| III. » ........ | +0·19 | +0·48 |
| IV. » ........ | —1·58 | 0·00 |
| V. » ........ | +1·48 | +0·49 |
| VI. » ........ | 0·00 | 0·00 |

Die Darstellung hat sich für den zweiten und dritten Normalort zwar nicht unwesentlich verbessert, dafür aber für den vierten und fünften Normalort bedeutend schlechter gestaltet, als unter Annahme der oben angesetzten wahrscheinlichsten parabolischen Elemente. Immerhin könnte die Darstellung durch die abgeleitete Ellipse aber noch als ziemlich befriedigend gelten und geht aus derselben unmittelbar hervor, dass man die wahrscheinlichste Bahn innerhalb der durch die beiden Systeme parabolischer und elliptischer Elemente gegebenen Grenzen annehmen könnte, ohne gerade mit den Beobachtungen in Widerspruch zu gerathen und auf Bahnformen zu stoßen, welche bedeutende Fehler übrig lassen.

Wollte man die Grenzen ermitteln, innerhalb deren man die Umlaufszeit variieren kann, so würde man für dieselbe den Wert

$$U_1 = 42043 \text{ Jahre}$$

als die untere Grenze für die Umlaufzeit erhalten. Die obere Grenze würde der Parabel entsprechend durch den Wert

$$U_2 = \infty$$

gebildet. Da der Grenzwert $U_1$ sich dem Werte $\infty$ so bedeutend nähert, und die parabolische Bahn noch eine schönere Darstellung zugelassen hat, scheint es gerechtfertigt, wenn ich als endgiltige Bahnform die Parabel angenommen habe. Werden die oben angesetzten parabolischen Elemente auf die mittlere Ekliptik 1898·0 bezogen, so ergibt sich folgendes Elementensystem:

Komet (Giacobini) 1898 V

$T =$ 1898 Juli 25·533810 m. Z. Berlin

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \;\; 22^\circ \;\; 24' \;\; 15''26 \\ \Omega &= 278 \;\; 17 \;\; 33 \cdot 09 \\ i &= 166 \;\; 51 \;\;\; 3 \cdot 43 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Äqu. } 1898 \cdot 0$$

$\log q = 0 \cdot 1764727,$

welches bis jetzt für den Kometen 1898 V (Giacobini) als definitiv angesehen werden darf.

# Die Veränderlichkeit der täglichen Barometeroscillation auf dem hohen Sonnblick im Laufe des Jahres

von

**A. v. Obermayer,**
c. M. k. Akad.

(Mit 3 Tafeln und 3 Textfiguren.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Februar 1901.)**

Die Kenntnis des täglichen Barometerganges unter den verschiedenen auf der Erdoberfläche bestehenden Verhältnissen ist in den letzten Jahren, insbesondere durch die Arbeiten des Herrn Hofrathes Dr. Julius Hann, in großen Zügen fertiggestellt worden; die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen lässt sich durch die Zerlegung der täglichen Barometerschwankungen in ihre harmonischen Componenten nach ganz bestimmten Gesichtspunkten ordnen.

Die halbtägige und die dritteltägige Druckschwankung zeigen auf der ganzen Erdoberfläche einen sehr constanten Charakter; die ganztägige Druckschwankung wird durch den Temperaturgang wesentlich beeinflusst.

Die Eigenthümlichkeiten der täglichen Barometeroscillation an den Meeresküsten, auf Bergspitzen und in Thälern wurde von Hann durch die thermische Druckschwankung erklärt, welche zur Ausbildung von Land- und Seewinden, dann von Thal- und Bergwinden und den damit verbundenen Umlagerungen von Luftmassen führt, welche den Barometergang beeinflussen.

Wesentlich Neues ist bei weiteren Untersuchungen über den täglichen Barometergang kaum mehr zu erwarten, es kann

sich nur mehr um die weitere Detaillierung der Erscheinung handeln, um Feststellung örtlicher Einflüsse u. dgl. m.

Die bereits durch 14 Jahre mit geringer Unterbrechung geführten Barometerregistrierungen auf dem Hohen Sonnblick schienen die Gelegenheit zu einer solcher Arbeit zu bieten. Ich habe aus den Aufzeichnungen der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie in Wien, die mir durch den Herrn Director J. M. Pernter in liebenswürdiger Weise zur Benützung überlassen wurden, den täglichen Barometergang in Abweichungen vom Mittel, für die einzelnen Monate des Jahres gerechnet, und dann weiter auch den täglichen Gang an den heiteren und trüben Tagen der einzelnen Monate in Betracht gezogen und nach den harmonischen Componenten dargestellt.

Mit Hilfe der harmonischen Componenten habe ich die Curven verzeichnet, welche dieser Abhandlung beigeschlossen sind, und die beobachteten Werte durch entsprechende Punkte markiert.

Zur Construction der Curven mit Hilfe der harmonischen Componenten wurde ein Verfahren eingeschlagen, welches auf der Zusammensetzung einfacher Schwingungen beruht und zu Hilfscurven, Vectordiagrammen, führt, die an sich schon Aufschluss über gerechnete Abweichungen vom Mittel geben. Ich habe auch versucht, verschiedene graphische Darstellungsarten der Veränderung des Barometerganges und seiner Componenten zu geben, welche die in den Formeln niedergelegten Resultate sehr gut veranschaulichen.

Die Barometerregistrierungen begannen auf dem Hohen Sonnblick (3106·5 *m*, 47° 3′ N. B., 12° 57′ E. L.), gleich nach der Eröffnung der Beobachtungsstation, welche am 1. September 1886 stattfand.

Als erster Beobachter war Simon Neumayer, ein Knappe des Goldbergwerkes auf dem Hohen Goldberge, unter der Aufsicht Rojachers bestellt. Zur Registrierung des Barometerganges waren zu jener Zeit ein Barograph von Richard, kleines Modell, und ein registrierendes Quecksilberbarometer von Redier, in der sogenannten »Gelehrtenstube« aufgestellt.

Zu Ostern 1887 wurde Neumayer von Rojacher entlassen und P. Gassner angestellt. Auch dieser wurde im

Herbste entlassen und durch Winkler ersetzt. Endlich im Spätherbste 1887 übernahm Peter Lechner die Beobachtungen auf dem Sonnblick und führte dieselben durch 7 Jahre, vom Herbste 1890 an selbständig, bis Ende März 1894 fort.

Der Redier'sche Barograph erwies sich zur Aufzeichnung der kleinen täglichen Schwankungen wenig geeignet, er wurde im Jahre 1894 außer Gebrauch gestellt und dafür ein großes Modell des Richard'schen Barographen, mit Temperaturregistrierung nach Angabe von Hann, in Gebrauch genommen, dessen Aufzeichnungen vom März 1894 an Verwendung fanden. Nebstbei blieb der kleine Richard'sche Barograph in Thätigkeit. Das große Modell des Richard'schen Barographen wurde in dem steinernen Beobachtungsthurm aufgestellt, woselbst die Temperatur weitaus constanter bleibt, wie in der Gelehrtenstube.

Die sehr verlässlichen Beobachtungen Peter Lechners, die er zum großen Theile selbst ausführte, oder in seiner Abwesenheit durch von ihm bestellte, abgerichtete und scharf controllierte Gehilfen ausführen ließ, bilden unzweifelhaft den wertvollsten Theil des gesammelten Beobachtungsmateriales.

Die mit Juni 1894 beginnenden Beobachtungen Waggerls sind, was die Registrierungen betrifft, zwar verwendbar, lassen aber die Sorgfalt vermissen, welche die Lechner'schen Beobachtungen auszeichnet. Im Juli 1897 wurde Waggerl durch Johann Moser aus Heiligenblut ersetzt. Dieser starb am 7. September auf dem Sonnblick. Ihm folgte Hasenknopf, der frühere Gehilfe Peter Lechners, und dieser wurde im Herbste 1899 durch Alois Sepperer ersetzt, dem eine zeitlang Makarius Janschütz, der Ziehsohn P. Lechners, beide von Lechner unterwiesen, als zweiter Beobachter beigegeben war. In Alois Sepperer scheint wieder ein brauchbarer und verlässlicher Beobachter gewonnen zu sein, der gut abliest, die Instrumente richtig behandelt und auch auf richtige Zeitangaben achtet.

Die Veröffentlichung der täglichen meteorologischen Beobachtungen vom Sonnblick beginnt in den Jahrbüchern der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus mit October 1886, jene des zum größten Theile von Dr. Max Margules reducierten täglichen Ganges des Barometers mit dem

Jahre 1891. In der k. k. Centralanstalt sind aber die reducierten Barometeraufzeichnungen vom November 1886 an vorhanden. Aus der ganzen Reihe bis zum Jahre 1899 fehlen bloß die Barometerregistrierungen der Monate November und December 1890.

Es sei hier noch bemerkt, dass seit Februar 1898 im Lehnerhäusl in Bucheben, 1200 *m*, dem Wohnhause P. Lechners, eine Fußstation zum Hohen Sonnblick mit registrierenden Instrumenten eingerichtet ist.

Der tägliche Gang in den Monaten Mai, Juni, Juli und August des Jahres 1899 ist durch folgende Zahlenreihe in Hundertelmillimeter in Abweichungen vom Mittel ausgedrückt.

Bucheben (1200 *m*) Sommer 1899.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a. m. | | | | | | | | | | | |
| 42 | 32 | 21 | 16 | 19 | 26 | 33 | 35 | 29 | 18 | 03 | —15 |
| p. m. | | | | | | | | | | | |
| —31 | —53 | —65 | —73 | —76 | —69 | —47 | —17 | —21 | 41 | 50 | 51 |

Deren harmonische Componenten sind:

$$\Delta b = 0\cdot540 \sin (kt + 40^\circ\ 55') + 0\cdot301 \sin (kt + 138^\circ\ 48').$$

Im 59. Bande der Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften (1892) hat J. Hann in den »Weiteren Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers«, mit Benützung der drei Jahre 1887—1888—1889 den täglichen Gang des Barometers auf dem Sonnblick ermittelt und dabei die Monate November, December, Jänner und Februar als Winter; März, April, September und October als Frühling und Herbst, und Mai, Juni, Juli und August als Sommer zusammengefasst. Er gibt für die Abweichungen vom mittleren Barometerstande von 520 *mm* die folgenden Zahlen in Millimeter. Ich habe des Vergleiches halber die von mir gefundenen Zahlen daneben gesetzt.

| | Winter | | Frühling und Herbst | | Sommer | | Jahr | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Hann | Ob. | Hann | Ob. | Hann | Ob. | Hann | Ob. |
| 1h | 07 | 08 | 14 | 09 | 00 | 04 | 07 | 07 |
| 2 | 03 | 01 | —02 | —05 | —15 | —13 | —05 | —06 |
| 3 | —08 | —08 | —19 | —21 | —32 | —30 | —20 | —20 |
| 4 | —20 | —20 | —31 | —31 | —45 | —40 | —32 | —30 |
| 5 | —28 | —27 | —40 | —38 | —50 | —43 | —35 | —36 |
| 6 | —34 | —28 | —43 | —40 | —45 | —41 | —41 | —36 |
| 7 | —28 | —25 | —38 | —34 | —37 | —35 | —34 | —31 |
| 8 | —18 | —17 | —30 | —27 | —27 | —26 | —25 | —23 |
| 9 | —03 | —05 | —16 | —14 | —17 | —16 | —12 | —12 |
| 10 | 14 | 10 | —01 | —01 | —04 | —04 | 09 | 02 |
| 11 | 23 | 18 | 11 | 11 | 08 | 08 | 14 | 12 |
| Mittag | 19 | 13 | 17 | 16 | 16 | 16 | 17 | 15 |
| 1h | 06 | 02 | 15 | 14 | 19 | 20 | 09 | 12 |
| 2 | —06 | —08 | 11 | 10 | 21 | 22 | 09 | 08 |
| 3 | —07 | —08 | 09 | 08 | 22 | 21 | 08 | 07 |
| 4 | —08 | —07 | 06 | 04 | 19 | 18 | 06 | 05 |
| 5 | —07 | —05 | 03 | 04 | 14 | 13 | 03 | 04 |
| 6 | —02 | 01 | 04 | 06 | 12 | 10 | 05 | 05 |
| 7 | 03 | 08 | 11 | 12 | 14 | 13 | 09 | 11 |
| 8 | 09 | 14 | 19 | 21 | 19 | 15 | 16 | 18 |
| 9 | 19 | 21 | 27 | 29 | 30 | 29 | 25 | 26 |
| 10 | 23 | 24 | 30 | 30 | 33 | 30 | 27 | 28 |
| 11 | 23 | 23 | 27 | 26 | 29 | 26 | 30 | 25 |
| Mitternacht | 15 | 18 | 19 | 18 | 18 | 16 | 14 | 17 |

Für die harmonischen Componenten des täglichen Ganges findet Hann:

Winter:

$$\Delta b = 0\cdot 113 \sin (kt + 164° \, 25') + 0\cdot 192 \sin (2kt + 116° \, 29');$$

Frühling und Herbst:

$$\Delta b = 0\cdot 246 \sin (kt + 170° \, 9') + 0\cdot 191 \sin (2kt + 104° \, 26');$$

Sommer:

$$\Delta b = 0\cdot 318 \sin (kt + 181° \, 41') + 0\cdot 179 \sin (kt + 110° \, 15') + \\ + 0\cdot 041 \sin (3kt + 135° \, 6');$$

Jahr:

$$\Delta b = 0\cdot 021 \cos kt + 0\cdot 175 \cos 2kt - 0\cdot 223 \sin kt - 0\cdot 065 \sin 2kt$$

$$\Delta b = 0\cdot 224 \sin (kt + 174° \, 36') + 0\cdot 187 \sin (2kt + 110° \, 24').$$

Der mittlere Barometerstand ist 519·9 *mm.*[1]

**Berechnung des mittleren täglichen Ganges des Barometers für die einzelnen Monate, und der harmonischen Componenten desselben.**

Seit dem Abschlusse der Arbeiten Hanns sind auf dem Sonnblick noch weitere Beobachtungen gesammelt worden, so dass gegenwärtig für 14 Jahre die reducierten Aufzeichnungen des täglichen Barometerganges vorliegen. Ich habe in meine Untersuchung die 10 Jahre 1887 bis 1896 einbezogen.

Aus dem in der k. k. Central-Anstalt bearbeiteten Beobachtungsmateriale, in welchem zu den 24 Stunden des Tages der Barometerstand in Millimeter angegeben ist, wurde für jeden einzelnen Monat der tägliche Gang des Barometers in Abweichungen vom Mittel gerechnet. Die Werte zu den Stunden $0^h$ und $24^h$ fallen hiebei zumeist nicht zusammen, da die zufälligen Barometerschwankungen sich nicht vollständig eliminieren.

[1] Die von Hann gefundenen Amplituden weisen größere Werte auf als die von mir für die Decade 1887 bis 1896 gerechneten. Es liegt dies an dem Umstande, dass Hann seinen Rechnungen nur die Jahre 1887, 1888 und 1889 zugrunde legen konnte, von denen das Jahr 1887, unter den in Betracht gezogenen 10 Jahren, fast in allen Monaten die größten Werte der Extreme des täglichen Ganges aufweist.

Dieser Unterschied der Anfangs- und Endwerte wurde für jeden einzelnen Monat von Mittag an ausgeglichen.

Die den täglichen Gang für die gleichnamigen Monate der 10 Jahre darstellenden Zahlenreihen wurden dann untereinander geschrieben und daraus der mittlere tägliche Gang des Barometers, in Abweichungen vom Mittel, für den betreffenden Monat ermittelt.

Die 118 Zahlenreihen, welche den täglichen ausgeglichenen Gang in den einzelnen Monaten darstellen, werden im folgenden nicht mitgetheilt. Dieselben wurden aber graphisch dargestellt, um etwaige Fehler zu entdecken und um zu vergleichen, wie sich der tägliche Gang in den gleichnamigen Monaten von Jahr zu Jahr geändert habe. Diese Veränderlichkeit ist für die verschiedenen Stunden des Tages in den einzelnen Monaten verschieden groß.

Ich habe versucht, diese Abweichungen der für die 10 Jahre gerechneten Mittelwerte vom wahren Werte durch den Fehler $\bar{q}$ der mittleren Quadrate des Resultates nach der Formel

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{\Sigma f^2}{n(n-1)}}$$

auszudrücken, worin $\Sigma f^2$ die Summe der Fehlerquadrate, $n$ die Anzahl der Beobachtungen ist. Die Abweichungen der einzelnen Jahresmittel vom wahren Werte werden hieraus durch Multiplication mit $\sqrt{n}$, d. i. mit 3 für die Monate November und December, und mit $\sqrt{10} = 3 \cdot 162$ für die übrigen Monate gefunden. Durch Multiplication mit $^2/_3$ ergibt sich der wahrscheinliche Fehler.

Die so gerechneten Abweichungen des Hauptwertes vom wahren Werte liegen zwischen $\bar{q} = 1 \cdot 2$ und $\bar{q} = 4 \cdot 7$ Hundertelmillimeter; der Mittelwert ist $2 \cdot 46$.

Für die Abweichungen der Jahresmittel vom wahren Werte hat man hiernach $q = 3 \cdot 8$ bis $14 \cdot 9$, im Mittel $7 \cdot 8$; die wahrscheinlichen Fehler liegen zwischen $w = 2 \cdot 5$ und $10 \cdot 0$, im Mittel bei $5 \cdot 2$. Die größte zu erwartende Abweichung eines Mittels vom Hauptmittel pflegt im allgemeinen den vierfachen wahrscheinlichen Fehler nicht zu überschreiten, würde also

hier etwa bei 0·40 *mm* liegen; für eines der Jahresmittel beträgt dieselbe indessen nur 0·27 *mm*.

Für die einzelnen Monate sind die mittleren Abweichungen des Resultates und einer Beobachtung:

| | Jänner | Februar | März | April | Mai | Juni | Juli | August | September | October | November | December |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{q}$...... | 2·7 | 2·2 | 2·4 | 2·9 | 3·1 | 2·7 | 2·1 | 2·0 | 1·8 | 2·5 | 2·6 | 2·6 |
| $q$...... | 8·5 | 7·0 | 7·6 | 9·2 | 9·8 | 8·5 | 6·6 | 6·3 | 5·7 | 7·7 | 7·8 | 7·8 |

In den Monaten April und Mai, welchen die größte Tagesschwankung des Barometers zukommt, erreichen die Abweichungen der einzelnen Mittel vom wahren Werte, durch den Fehler der mittleren Quadrate ausgedrückt, die größten, im September die kleinsten Werte.

Wird der tägliche Gang des Fehlers $\bar{q}$ in den 24 Stundenwerten für die einzelnen Monate in Curven dargestellt, so verlaufen dieselben anscheinend recht unregelmäßig und weisen viele Zacken auf; bei passender Gruppierung jedoch zeigen sich manche übereinstimmende Merkmale. Insbesondere die Sommercurve gibt drei ausgesprochene Maxima und Minima, die sehr nahe um $8^h$ auseinanderliegen. Das Hauptmaximum fällt sehr nahe an die Mittagstunde; nach $3^h$ p. treten ein secundäres Minimum, um $6^h$ p. das größere secundäre Maximum ein. Die Minima um $11^h$ p. und $5^h$ a. sind ungefähr gleich tief, während das Morgenmaximum unter den Tagesmittelwert des $\bar{q}$ fällt.

Es hat den Anschein, als ob die Störungen der den Barometergang beeinflussenden Ursachen im Gange dieser Mittel ihren Ausdruck fänden.

Dieser tägliche Gang zeigt eine ganztägige und eine dritteltägige harmonische Schwankung. In der Wintercurve treten diese beiden Schwankungen gegen die halbtägige und vierteltägige zurück; diese letztere Curve zeigt vier ausgesprochene Maxima und Minima.

Auch die aus den täglichen Gängen der einzelnen Monate nach der Formel $\sqrt{\Sigma \bar{q}^2}$ gerechnete Jahresmittel weisen im Laufe des Tages vier Maxima, darunter eines, 0·79, um $12^h$ mittags; ein zweites, 0·85, um $1^h$ a. und vier Minima, darunter eines um $1^h$ p. mit 0·69 und ein anderes um $8^h$ a. mit 0·72 Hundertelmillimeter, auf.

In der folgenden Zusammenstellung I ist der tägliche Gang des Barometers eingetragen, und zwar in Abweichungen von dem unter $b_m$ angeschriebenen Mittel für die 24 Stunden des Tages, in Hundertelmillimetern, nach Monaten geordnet, wie er aus den Registrierungen der 10 Jahre 1887 bis 1896 abgeleitet wurde.

Es folgen dann unter Winter die aus den Monaten November, December, Jänner und Februar; unter Frühling und Herbst die aus den Monaten März, April, September und October; unter Sommer die aus den Monaten Mai, Juni, Juli und August abgeleitete Mittel. Schließlich ist der tägliche Gang des Barometers im Mittel für das Jahr angesetzt.

Auf Tafel I ist unter »Täglicher Barometergang« eine graphische Darstellung der für die einzelnen Monate mit Hilfe der harmonischen Componenten construierten Curven des täglichen Barometerganges gegeben. Die in der Zusammenstellung I gegebenen beobachteten Stundenmittel sind durch kleine Kreuze bezeichnet, welche auf die betreffende Zeitordinate gesetzt sind. Die Differenzen »Beobachtet—Berechnet« ergeben für manche Curven sehr nahe die gleiche Zahl von Plus- (+) und Minus- (—) Zeichen und auch sehr nahe die gleiche Zahl von Zeichenfolgen und Zeichenwechsel. Manche der beobachteten Werte scheinen indessen mit größeren Fehlern behaftet zu sein, weil die Zahl der einen Art Vorzeichen wesentlich überwiegt.

## I. Täglicher Gang des Barometers auf dem Hohen Sonnblick

während der einzelnen Monate in Abweichungen vom Mittel in Hundertelmillimetern.

10 Jahre: 1887 bis 1896; November und December 1890 fehlen.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | $b_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jänner ..... | 19 | 10 | 06 | −02 | −15 | −26 | −30 | −25 | −16 | −04 | 11 | 19 | 11 | −03 | −14 | −12 | −10 | −08 | −03 | 03 | 10 | 19 | 25* | 25 | 19 | 515·55 |
| Februar .... | 22 | 13 | 03 | −11 | −24 | −29 | −34 | −32 | −24 | −14 | 01 | 16 | 19 | 10 | 00 | −02 | −04 | 03 | 03 | 11 | 17 | 25 | 27 | 26 | 22 | 515·23 |
| März ...... | 19 | 10 | −04 | −20 | −30 | −36 | 37 | −31 | −23 | −11 | 03 | 15 | 21 | 14 | 08 | 04 | 00 | 02 | 02 | 10 | 19 | 27 | 30 | 26 | 19 | 515·69 |
| April ...... | 18 | 09 | −09 | −24 | −37 | −47 | −46 | −41 | −35 | 22 | −03 | 08 | 15 | 17 | 18 | 17 | 13 | 11 | 08 | 12 | 24 | 31 | 30 | 27 | 18 | 516·82 |
| Mai ....... | 17 | 06 | −18 | −34 | −45 | −46 | −41 | −34 | −25 | −15 | −04 | 08 | 17 | 20 | 21 | 19 | 17 | 13 | 11 | 15 | 22 | 32 | 31 | 26 | 18 | 520·46 |
| Juni ....... | 15 | 01 | −14 | 32 | −43 | −45 | −43 | −36 | −26 | −16 | −03 | 09 | 18 | 23 | 25 | 24 | 20 | 15 | 12 | 12 | 17 | 29 | 31 | 26 | 15 | 523·80 |
| Juli........ | 16 | 05 | −10 | −26 | −34 | −40 | −39 | −33 | −25 | −17 | −04 | 08 | 16 | 18 | 20 | 20 | 18 | 13 | 10 | 12 | 15 | 26 | 29 | 26 | 16 | 525·11 |
| August .... | 16 | 03 | −11 | −26 | 38 | −42 | −40 | −35 | −26 | −16 | −03 | 07 | 13 | 17 | 20 | 19 | 16 | 12 | 08 | 11 | 20 | 28 | 28 | 25 | 16 | 525·55 |
| September .. | 15 | 05 | −10 | −21 | −31 | −37 | −36 | −31 | −25 | −12 | 01 | 10 | 16 | 15 | 14 | 10 | 07 | 06 | 06 | 12 | 20 | 26 | 26 | 22 | 15 | 524·85 |
| October .... | 21 | 12 | −03 | −17 | −27 | −32 | −39 | −34 | −23 | −11 | 01 | 10 | 12 | 08 | 01 | −01 | −04 | 01 | 06 | 14 | 22 | 30 | 33 | 28 | 21 | 520·17 |
| November .. | 17 | 05 | −03 | −12 | −22 | −26 | −28 | −24 | −15 | 00 | 13 | 18 | 10 | 01 | −08 | −09 | 08 | −05 | 02 | 11 | 18 | 25 | 26 | 23 | 17 | 519·36 |
| December .. | 12 | 04 | −01 | −08 | −17 | −25 | −26 | −20 | −12 | 00 | 15 | 20 | 11 | 01 | −08 | 07 | −04 | −03 | 00 | 05 | 10 | 15 | 19 | 18 | 12 | 516·47 |
| Winter ..... | 18 | 08 | 01 | −08 | −20 | 27 | −28 | −25 | −17 | −05 | 10 | 18 | 13 | 02 | 08 | −08 | −07 | −05 | 01 | 08 | 14 | 21 | 24 | 23 | 18 | 516·90 |
| Frhl.u.Herbst | 19 | 09 | 07 | −21 | −31 | −38 | −40 | −34 | −27 | 14 | −01 | 11 | 16 | 14 | 10 | 08 | 04 | 04 | 06 | 12 | 21 | 29 | 30 | 26 | 18 | 519·38 |
| Sommer .... | 16 | 04 | −13 | −30 | −40 | −43 | −41 | −35 | −26 | −16 | −04 | 08 | 16 | 20 | 22 | 21 | 18 | 13 | 10 | 13 | 19 | 29 | 30 | 26 | 16 | 523·71 |
| Jahr ....... | 17 | 07 | −06 | −20 | −30 | −36 | −36 | −31 | −23 | −12 | 02 | 12 | 15 | 12 | 08 | 07 | 05 | 09 | 05 | 11 | 18 | 26 | 28 | 25 | 17 | 519·92 |

Der tägliche Gang des Barometers auf hohen Berggipfeln ist, wie schon J. M. Pernter[1] im Jahre 1881 an Beobachtungen ausführte, die am Schafberge, am Hochobir, am St. Bernhard und am Theodulpasse gesammelt waren, ausführte, durch ein Morgenminimum charakterisiert, welches sich mit der Erhebung des Gipfels über dem Meeresspiegel vertieft, während das tiefe Nachmittagsminimum der Niederung sich mit der Höhe verflacht. Das Abendmaximum, welches in der Niederung unbedeutend ist, erhöht sich mit der Erhebung über den Meeresspiegel. Auch auf die Veränderlichkeit des täglichen Ganges mit den Jahreszeiten hat Pernter hingewiesen. Er kommt S. 412 zum Schlusse, dass Höhen, wie Schafberg und Obir, zu geringe Erhebungen aufweisen, um die charakteristischen Erscheinungen deutlich hervortreten zu lassen.

Die Beobachtungen auf dem Hohen Sonnblick haben diesem Mangel abgeholfen; sie sind über jener neutralen Region angestellt, auf welche Pernter in seiner Abhandlung hinweist und welche Hann in den »Beiträgen zum täglichen Gange der meteorologischen Elemente in den höheren Luftschichten«[2] genauer festgestellt hat. Die Amplitude $a_1$ der einmaligen täglichen Schwankung nahm im Sommer 1892 von $a_1 = 0 \cdot 346$ in München, 526·4 *m*, auf 0·118 am Hirschberg, 1512 *m*, und 0·095 auf dem Wendelstein, 1727 *m*, ab und dann auf 0·124 am Obir, 2044 *m*, und 0·249 auf dem Sonnblick, 3106·5 *m*, zu.

Zur weiteren Discussion des in I mitgetheilten täglichen Ganges sind die folgenden Differenzen zwischen den Werten der verschiedenen Extreme gebildet.

Dabei ist:

$\Delta p$ Ext. die Differenz zwischen den primären Extremen, d. i. dem Abendmaximum und dem Morgenminimum; dieselbe gibt die Grenze, innerhalb welcher sich die tägliche Barometerschwankung im Mittel in den einzelnen Monaten bewegt; dieselbe erreicht im Mai den größten, im December den kleinsten Wert.

---

[1] Diese Sitzungsber., 84. Bd., S. 382, 1881: »Über den täglichen und jährlichen Gang des Luftdruckes auf Berggipfeln und in Gebirgsthälern«.

[2] Diese Sitzungsber., 103. Bd., S. 82.

$\Delta s$ Ext. die Differenz der secundären Extreme, d. i. des verspäteten Vormittagsmaximums und des Nachmittagsminimums; sie lässt die Abflachung des letzteren in den Monaten April bis September, und die Vertiefung desselben in den Monaten November bis Jänner, mit einem größten Werte im letzteren Monate deutlich erkennen.

$\Delta p$ und $s$ Max. die Differenz zwischen Abendmaximum und dem verspäteten Vormittagsmaximum, welche in den Monaten April und October die größten, in den Monaten Juni, December und Jänner die kleinsten Werte aufweist.

$\Delta p$ und $s$ Min. die Differenz zwischen dem Nachmittagsminimum und dem Morgenminimum; dieselbe weist im December und Jänner die kleinsten, im April, Mai und Juni die größten Werte auf. In diesen drei Monaten liegt das Nachmittagsminimum auch am höchsten über dem Tagesmittel.

| | Jänner | Februar | März | April | Mai | Juni | Juli | August | September | October | November | December |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta p$ Ext. . . | 55 | 61 | 67 | 77 | 78 | 76 | 69 | 70 | 63 | 72 | 54 | 45 |
| $\Delta s$ Ext. . . . | 33 | 23 | 23 | 10 | 10 | 13 | 10 | 12 | 10 | 16 | 27 | 28 |
| $\Delta p$ u. $s$ Max. | 06 | 08 | 09 | 13 | 11 | 06 | 09 | 08 | 12 | 21 | 08 | -01 |
| $\Delta p$ u. $s$ Min. | 16 | 30 | 35 | 55 | 57 | 57 | 50 | 50 | 43 | 35 | 19 | 18 |

Das Morgenminimum des täglichen Barometerganges, welches im Flachlande um $4^h$ a. eintritt, verspätet sich auf dem Sonnblick in den Monaten December und Jänner auf 15 bis $20^m$ nach $6^h$ a., es weicht in den Monaten März und April auf $6^h$ a., in den Monaten März und Juni auf $5^h$ a. zurück. In den Monaten Juli, August und September fällt es in die Zeit zwischen $5^h$ a. und $6^h$ a., im October und November auf $6^h$ a.

Während dieses Morgenminimum in den eigentlichen Thalstationen sehr schwach ausgeprägt, ja mitunter sogar verwischt ist, wird es auf den Gipfelstationen zum Hauptminimum. Es

weicht auf dem Sonnblick im Monate December am wenigsten, in den Monaten April und Mai am meisten vom Tagesmittel ab.

Das Vormittagsmaximum, welches im Flachlande um $10^h$ a. eintritt, ist auf dem Sonnblick schon in den Monaten November, December und Jänner auf $11^h$ a. verspätet; es verschiebt sich in den Monaten Februar, März und April allmählich auf $1^h$ p., tritt im Mai erst um $2^h$ p. ein, rückt im Juni und Juli etwas über diese Stunde hinaus, weicht im August auf $2^h$ p., im September auf $1^h$ p., im October auf $12^h$ Mittag zurück. Während der Monate April und Mai erhebt sich das Maximum allmählich und erreicht im Juni die größte Abweichung vom Tagesmittel; in den Monaten Juli und August sinkt es wieder ab. In den Monaten October und Februar zeigt es sich am wenigstens ausgebildet.[1]

---

[1] Im 59. Bande der Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien (S. 297) hat Hann in den »Weiteren Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers« an einigen Stationen, welche nahe unter der gleichen geographischen Breiten liegen, den Einfluss der Seehöhe auf die charakteristische Vertiefung des Morgenminimums und die ebenso charakteristische Verspätung des Vormittagsmaximums nachgewiesen.

Die von Hann ausgewählten Beobachtungsorte sind im Nachfolgenden nebst der Seehöhe, der Abweichung in Hundertelmillimeter vom Mittel, des Morgenminimums, des Vormittagsmaximums und den zugehörigen Zeiten angeführt. Des Vergleiches halber habe ich noch hinzugefügt: Die von mir für den Sonnblick und für das Lehnerhäusl in Bucheben, 1200 *m*, gerechneten Werte, dann diejenigen Werte für Genf, Chamonix und für das Observatorium Vallot auf den Bosses du dromadaire am Montblanc (Meteorologische Zeitschrift, 1899, S. 198) aus den Registrierungen in den Monaten Juli, August und September 1890—1891—1892 abgeleitet und von Mittag an ausgeglichen; endlich die gleichen Werte für Colorado Springs und Pikes Peak (diese Sitzungsber., 107. Bd., S. 156), auch für die vier Sommermonate gerechnet.

| | *h* | Morg. $\Delta b$ | Min. | Vorm. $\Delta b$ | Max. |
|---|---|---|---|---|---|
| Salzburg | 440 *m* | 09 | $4^h$ a. | 40 | $8^h$ a. |
| Zell am See | 770 | 36 | 4 a. | 54 | 7 a. |
| Bad Fusch | 1180 | 02 | 6 a. | 14 | 9 a. |
| Kolm Saigurn | 1600 | —32 | 4 a. | 07 | 11 a. |
| Schafberg | 1780 | —35 | 4 a. | 19 | 11 a. |
| Obir | 2040 | —38 | 5 a. | 24 | 12 a. |
| Säntis | 2500 | —44 | 5 a. | 17 | 1 p. |
| Sonnblick | 3106 | —50 | 5 a. | 22 | 3 p. |

Das Nachmittagsminimum, welches im Flachlande als Hauptminimum um $4^h$ p. eintritt und dessen beträchtliche Vertiefung für die Thalstationen charakteristisch ist, weist auf dem Sonnblick nur secundären Charakter auf. Es hält sich in den Monaten October bis März unter dem Tagesmittel, fällt im October auf $4^h$ p., weicht, sich vertiefend, im November auf $3^h$ p., im December und Jänner auf $2^h$ p. zurück und ist in dem letzteren Monate am meisten ausgeprägt. Von hier an beginnt es sich zu verflachen und dem Tagesmittel zu nähern, tritt im Februar um $4^h$ p., im März um $5^h$ p. ein, erreicht in diesem Monate das Tagesmittel, verspätet sich im April auf $5^h$ $30^m$ p. und bleibt von hier an über dem Tagesmittel bis zum September nahezu gleichmäßig abgeflacht. In den Monaten Mai bis August verspätet sich das Nachmittagsminimum auf $6^h$ p. Im September fällt es auf $5^h$ p. und nähert sich, dem Werte nach, dem Tagesmittel.

Das Abendmaximum, welches im Flachlande als secundäres Maximum um $10^h$ p. eintritt, erlangt mit der Erhebung des Beobachtungsortes über dem Meeresspiegel den Charakter eines Hauptmaximums, eine Erscheinung, die sich auf dem Sonnblick recht deutlich ausspricht, woselbst dieses Maximum stets sehr nahe zur normalen Zeit, d. i. um $10^h$ p. eintritt. In den Monaten December, Jänner, Februar verspätet sich der Eintritt

| | $h$ | Morg. $\Delta b$ | Min. | Vorm. $\Delta b$ | Max. |
|---|---|---|---|---|---|
| Bucheben | 1200 *m* | 16 | $4^h$ a. | 35 | $8^h$ p. |
| Sonnblick | 3106 | —44 | 5 a. | 22 | 2 p. |
| Genf | 405 | —04 | 6 a. | 52 | 9 a. |
| Chamonix | 1080 | —09 | 5 a. | 03 | 7 a. |
| Bosses | 4359 | —49 | 5 a. | 22 | 1 p. |
| Colorado Springs | 1856 | 31 | 3 a. | 78 | 7 a. |
| Pikes Peak | 4308 | —62 | 4 a. | 45 | 12 a. |

Die Vertiefung des Morgenminimums tritt in den drei Gruppen von Beobachtungsorten, durch die geographische Breite der Größe nach beeinflusst, deutlich hervor. Die Verspätung des Vormittagsmaximums scheint im Mittel über $2^h$ p., den auf dem Sonnblick beobachteten Wert, nirgends hinauszugehen; im Gegentheile, auf den Bosses und am Pikes Peak bleibt sie ausgesprochen hinter dieser Zeit zurück. An heiteren Tagen tritt, wie später ausgeführt werden wird, auf dem Sonnblick allerdings eine Verspätung dieses Vormittagsmaximums auf $3^h$ p. ein.

des Maximums etwas, in den Monaten April, Mai, Juni, August, September verfrüht sich derselbe.

Das Abendmaximum ist in den Monaten December und Jänner nur wenig höher als das Vormittagsmaximum, von welchem es durch das sehr ausgebildete Nachmittagsminimum getrennt ist. In den Monaten Februar, März, April, Mai überragt es das Vormittagsmaximum ganz ausgesprochen und erreicht in den Monaten April und Mai seine größte Ausbildung. In den Monaten Juni, Juli und August sinkt es etwas ab, dagegen erhebt sich in diesen Monaten das verspätete Vormittagsmaximum, das Nachmittagsminimum mit sich emporziehend und abflachend, so dass die Erhebungen beider Maxima sich wieder nähern. Von August an sinkt das Vormittagsmaximum bis zu seinem kleinsten Werte im October ab, während das Abendmaximum sich in dem letzteren Monate zu denselben Werten wie im April und Mai erhebt und dadurch die Differenz zwischen den beiden Maxima im October den größten Wert erreicht. Im November ist das Vormittagsmaximum gestiegen, das Abendmaximum gefallen; im December sind sie gleich hoch.

Aus den in I mitgetheilten Zahlenwerten wurden die harmonischen Componenten nach der Bessel'schen Formel gerechnet.

Der Winkel $\theta$ in den nachstehenden Formeln ist statt des Ausdruckes $kt$ gesetzt.

Die Coefficienten der Form

$$\begin{aligned}\Delta b = p_1 \cos\theta + p_2 \cos 2\theta + p_3 \cos 3\theta + \ldots \\ q_1 \sin\theta + q_2 \sin 2\theta + q_3 \sin 3\theta + \ldots\end{aligned}$$

sind in der Zusammenstellung II für die 12 Monate des Jahres für den Winter, für Frühling und Herbst, für den Sommer und für das Jahr angegeben.[1]

[1] Die Coefficienten $p_k$, $q_k$ der periodischen Reihe, in welche die Function $\Delta b = f(\theta)$ nach dem Fournier'schen Verfahren entwickelt wird, sind bekanntlich

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta;$$

$$p_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos i\theta\,d\theta,\quad q_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin i\theta\,d\theta;$$

In der Zusammenstellung III sind die harmonischen Componenten durch eine Sinusreihe ausgedrückt, welche aus II durch die Substitutionen

$$p_1 = a_1 \sin A_1,\ p_2 = a_2 \sin A_2 \ldots$$
$$q_1 = a_1 \cos A_1,\ q_2 = a_2 \sin A_2 \ldots$$

erhalten wird. Dabei sind $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ die Amplituden der einzelnen harmonischen Componenten, $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots$ die Epochenwinkel.[1]

Auf der Tafel I sind unter »Ganztägige Druckschwankung« und unter »Halbtägige Druckschwankung« die einfachen Wellenlinien gezeichnet, welche diese Schwankungen darstellen.

---

Es sei hier angefügt, dass sich dieselben mittels eigener Instrumente, welche die hier angezeigten Integrationen ausführen, graphisch bestimmen lassen. Längs der auf einem Cylinder aufgezeicheten Curve wird ein Stift entlang geführt, und nach der Art der Einstellungen am Apparate ergibt sich der eine oder der andere Coefficient. Solche Instrumente, »Harmonische Analysatoren« genannt, sind in dem von Prof. Walter Dyck herausgegebenen Kataloge mathematischer, mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Vieweg) drei aufgeführt:

»86. Harmonic Analyser von Lord Kelvin (Univ. Cambridge) Natural Philosophy von Thomson und Tail, 2. Auflage, 1879.«

»90. Harmonischer Analysator von Prof. O. Henrici. City and guild of London Institute.«

»91. Harmonischer Analysator von A. Sommerfeld und E. Wichert, beschrieben in den Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg, Bd. 32, S. 28.«

[1] In dieser Form eignet sich die Reihe zu graphischen Darstellungen, wie sie auch später gegeben werden sollen. Selbstverständlich kann statt der Sinusreihe auch eine Cosinusreihe Anwendung finden, wie es in England üblich ist. Zur Ermittelung der Größe $a_k$ und $A_k$ einer solchen Reihe aus jenen $p_k$ und $q_k$ hat Generallieutenant Strachey einen Rechenschieber construiert und zur Zusammensetzung der einzelnen Glieder der harmonischen Reihe einen Apparat, welcher gestattet, einfache harmonische Curven von der gegebenen Amplitude und Epoche zu verzeichnen.

Andere solche Apparate sind construiert von Faidiga, Interferenzator zur Zusammensetzung der Flutwelle der Sonne und des Mondes auf graphischem Wege; Beiblätter XX, S. 85, 1896; und von W. C. L. van Schaïk zur Zusammensetzung zweier gleichförmiger Bewegungen im Kreise zu einer harmonischen Bewegung. Zeitschrift für phys. und chem. Unterricht, Bd. 8, S. 350, 1895.

Mit Hilfe von Pauspapier kann man leicht eine bequeme Vergleichung zweier dieser Curven sowohl untereinander, als auch mit der Curve des täglichen Ganges vornehmen.

Die Veränderungen, welche die Amplituden $a_1$, $a_2$ und die Epochenwinkel $A_1$ und $A_2$ erfahren, habe ich versucht, graphisch darzustellen. Die einfache harmonische Schwingung wird hiezu durch einen Vector dargestellt, dessen Länge $OA_1 = a_1$, Fig. 1, gleich der Amplitude ist und der unter dem Epochenwinkel $A_1$

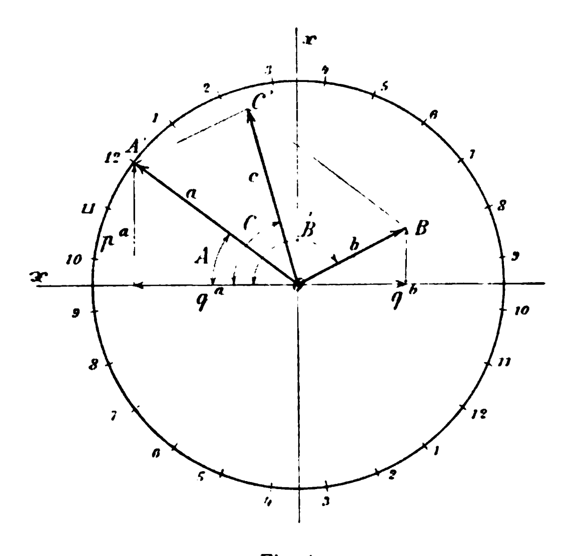


Fig. 1.

zur $x$-Axe, im Coordinatenanfangspunkte beginnend, gezogen wird. Denkt man sich den Vector um den Punkt $O$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit so gedreht, dass er während der Periodendauer der einfachen Schwingung gerade einen Umlauf macht, so gibt die Projection des Endpunktes auf die $y$-Axe die harmonische Sinusschwingung wieder.

Zieht man mit dem Halbmesser $OA = a_1$ einen Kreis, den Hilfskreis, und theilt dessen Umfang, von $A'$ ausgehend, in 24 Theile, die man, wie in der Figur, mit den Stundenziffern beschreibt, so bestimmen die Schnittpunkte mit der $y$-Axe die Zeit der Extreme und jene mit der $x$-Axe die Zeiten des Durchganges durch die Gleichgewichtslage.

## II. Die harmonischen Componenten des täglichen Barometerganges auf dem Hohen Sonnblick

für die einzelnen Monate gerechnet; 10 Jahre 1887 bis 1896 (1890 November und December fehlen).

| | $p'$ | $q'$ | $p''$ | $q''$ | $p'''$ | $q'''$ | $p^{(4)}$ | $q^{(4)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jänner | 0·0766 | —0·0855 | 0·1543 | —0·0901 | —0·0254 | 0·0517 | —0·0042 | —0·0361 |
| Februar | 0·0640 | —0·1698 | 0·1727 | —0·0657 | —0·0351 | 0·0198 | 0·0167 | —0·0087 |
| März | 0·0297 | —0·2008 | 0·1816 | —0·0806 | —0·0199 | —0·0012 | —0·0017 | 0·0036 |
| April | 0·0249 | —0·2992 | 0·1798 | —0·0424 | —0·0042 | —0·0109 | —0·0013 | —0·0051 |
| Mai | —0·0108 | —0·3056 | 0·1604 | —0·0712 | 0·0252 | —0·0325 | 0·0063 | 0·0050 |
| Juni | —0·0275 | —0·3076 | 0·1645 | —0·0470 | 0·0248 | —0·0338 | 0·0050 | —0·0029 |
| Juli | —0·0023 | —0·2714 | 0·1520 | —0·0347 | 0·0194 | —0·0246 | 0·0000 | —0·0101 |
| August | 0·0001 | —0·2778 | 0·1532 | —0·0464 | 0·0176 | —0·0240 | —0·0100 | —0·0043 |
| September | 0·0085 | —0·2299 | 0·1495 | —0·0612 | —0·0096 | —0·0079 | —0·0021 | 0·0043 |
| October | 0·0730 | —0·2018 | 0·1627 | —0·0913 | —0·0226 | 0·0122 | 0·0013 | —0·0071 |
| November | 0·0499 | —0·1240 | 0·1328 | —0·1195 | —0·0259 | 0·0342 | 0·0067 | —0·0245 |
| December | 0·0191 | —0·0914 | 0·1233 | —0·0896 | —0·0161 | 0·0462 | —0·0038 | —0·0325 |
| Winter | 0·0524 | —0·1177 | 0·1458 | —0·0912 | —0·0256 | 0·0380 | 0·0039 | —0·0230 |
| Frühling und Herbst | 0·0340 | —0·2329 | 0·1684 | —0·0689 | —0·0141 | —0·0020 | —0·0010 | —0·0011 |
| Sommer | —0·0101 | —0·2906 | 0·1575 | —0·0498 | 0·0218 | —0·0287 | 0·0003 | —0·0028 |
| Jahr | 0·0254 | —0·2138 | 0·1572 | —0·0699 | —0·0060 | 0·0024 | 0·0011 | —0·0098 |

**III. Die harmonischen Componenten des täglichen Barometerganges auf dem Hohen Sonnblick**

für die einzelnen Monate gerechnet; 10 Jahre 1887 bis 1896 (November und December 1890 fehlen).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Jänner | 0·1148 sin (138° 09′ + θ) | + 0·1787 sin (120° 17′ + 2θ) | + 0·0574 sin (334° 12′ + 3θ) | + 0·0363 sin (186° 38′ + 4θ) |
| Februar | 0·1815 sin (159 21 + θ) | + 0·1848 sin (110 15 + 2θ) | + 0·0403 sin (299 26 + 3θ) | + 0·0188 sin (117 31 + 4θ) |
| März | 0·2030 sin (171 35 + θ) | + 0·1987 sin (113 56 + 2θ) | + 0·0199 sin (266 33 + 3θ) | + 0·0051 sin (334 44 + 4θ) |
| April | 0·3002 sin (175 15 + θ) | + 0·1847 sin (103 16 + 2θ) | + 0·0117 sin (201 04 + 3θ) | + 0·0054 sin (194 18 + 4θ) |
| Mai | 0·3058 sin (182 02 + θ) | + 0·1755 sin (113 56 + 2θ) | + 0·0411 sin (142 13 + 3θ) | + 0·0080 sin ( 51 34 + 4θ) |
| Juni | 0·3088 sin (185 07 + θ) | + 0·1711 sin (105 57 + 2θ) | + 0·0419 sin (143 43 + 3θ) | + 0·0058 sin (120 07 + 4θ) |
| Juli | 0·2714 sin (180 29 + θ) | + 0·1559 sin (102 52 + 2θ) | + 0·0313 sin (141 44 + 3θ) | + 0·0101 sin (180 00 + 4θ) |
| August | 0·2778 sin (180 00 + θ) | + 0·1601 sin (106 51 + 2θ) | + 0·0298 sin (143 45 + 3θ) | + 0·0109 sin (246 44 + 4θ) |
| September | 0·2301 sin (177 53 + θ) | + 0·1615 sin (112 16 + 2θ) | + 0·0124 sin (230 33 + 3θ) | + 0·0048 sin (333 58 + 4θ) |
| October | 0·2146 sin (160 07 + θ) | + 0·1866 sin (119 18 + 2θ) | + 0·0257 sin (298 22 + 3θ) | + 0·0072 sin (169 38 + 4θ) |
| November | 0·1337 sin (158 04 + θ) | + 0·1787 sin (131 59 + 2θ) | + 0·0429 sin (322 52 + 3θ) | + 0·0254 sin (164 42 + 4θ) |
| December | 0·0934 sin (168 12 + θ) | + 0·1524 sin (126 00 + 2θ) | + 0·0489 sin (340 47 + 3θ) | + 0·0327 sin (186 40 + 4θ) |
| Winter | 0·1283 sin (156 00 + θ) | + 0·1720 sin (122 01 + 2θ) | + 0·0458 sin (326 02 + 3θ) | + 0·0233 sin (170 22 + 4θ) |
| Frühling und Herbst | 0·2354 sin (171 42 + θ) | + 0·1817 sin (112 15 + 2θ) | + 0·0142 sin (261 56 + 3θ) | + 0·0015 sin (222 17 + 4θ) |
| Sommer | 0·2908 sin (181 59 + θ) | + 0·1652 sin (107 33 + 2θ) | + 0·0359 sin (142 35 + 3θ) | + 0·0028 sin (173 53 + 4θ) |
| Jahr | 0·2153 sin (173 13 + θ) | + 0·1720 sin (113 58 + 2θ) | + 0·0065 sin (291 48 + 3θ) | + 0·0099 sin (173 36 + 4θ). |

In der Fig. 1 der Taf. II ist eine solche Darstellung in der Weise ausgeführt, dass die Endpunkte der Vectoren, die den einzelnen Monaten entsprechen, eingetragen und mit der Ordnungszahl des Monates beschrieben sind. Die ausgezogenen Linien verbinden die Endpunkte der Vectoren, welche die in II und III gegebenen Componenten darstellen. Von den Vectoren sind nur jene $a_1$ der einmaligen täglichen Schwankung *O* 1 und *O* 6, dann jene $a_2$ der zweimaligen täglichen Schwankung *O* 7 und *O* 11 ausgezogen, die anderen wurden weggelassen.

Die Amplitude $a_1$ der einmaligen täglichen Barometerschwankung hat auf dem Sonnblick im December den kleinsten Wert 0·09 *mm*, steigt von hier an und erreicht im Mai den Wert von 0·306 *mm*, erhält sich während des Juni auf 0·309 *mm*, fällt langsam während August und September, dann rascher, insbesondere zwischen October und November, zum Minimalwerte des December ab.

Der Epochenwinkel $A_1$ der einmaligen täglichen Barometerschwankung zeigt im Jänner ein Minimum, die größten Ausweichungen sind in diesem Monate am meisten verspätet. Der Epochenwinkel steigt bis zum Monat April rascher, dann langsamer an und erreicht im Juni sein Maximum von 185° 07′. Die größten Ausweichungen sind hier am meisten verfrüht; er erhält sich bis zum September auf dem Werte von 177°, fällt im October und November auf 158° ab, steigt im December auf 167° an und fällt im Jänner wieder ab.

Die Amplitude $a_2$ der zweimaligen täglichen Schwankung zeigt zwei Maxima, das größere im März mit 0·199 *mm*, das kleinere im October mit 0·187 *mm*, und zwei Minima, eines im Juli mit 0·156 *mm* und das zweite tiefere im December mit 0·152 *mm*.

Der Epochenwinkel $A_2$ der zweimaligen täglichen Schwankung ist wenig veränderlich; sein Jahresmittel ist 114°, er hält sich vom Februar bis zum September zwischen 104° und 114°. In den Monaten April, Juni und Juli ist der Eintritt der Extreme der zweimaligen Schwankung am meisten verspätet. Im Monate November steigt der Epochenwinkel auf 131° an, die Extreme sind zu dieser Zeit merklich verfrüht.

Die Amplitude $a_3$ der dreimaligen täglichen Barometerschwankung zeigt in den Monaten November, December, Jänner, Februar, Mai, Juni und Juli die größten zwischen 0·03 *mm* und 0·05 *mm*, im April und September die kleinsten, an 0·01 *mm* liegenden Werte.

Die Epochenwinkel $A_3$ liegen vom October bis Februar im 4. Quadranten, im März und April und September im 3. Quadranten und von Mai bis August im 2. Quadranten.

Mit diesem Wechsel der Größe des Epochenwinkels[1] um nahe 180° hängt auch die Kleinheit der Amplitude zur Zeit der Äquinoctien zusammen.

Die Amplituden $a_4$ der viermaligen täglichen Schwankung sind auch in den Monaten November, December, Jänner und Februar am größten. Die Epochenwinkel $A_4$ liegen während dieser Monate im 2. und 3. Quadranten, in den übrigen Monaten finden sich Epochenwinkel in allen vier Quadranten.

Wenn auch bei der Kleinheit der täglichen Barometerschwankung auf dem Hohen Sonnblick der Einfluss der zufälligen Abweichungen auf die in I mitgetheilten Mittelwerte nicht ganz eliminiert sein mag und dadurch die absoluten Werte von $a_3$, $a_4$, $A_3$, $A_4$ merklich beeinflusst werden, so scheinen diese beiden Componenten im täglichen Barometergange namentlich des Winters doch wesentlich zu sein. Es spricht dafür der eigenthümliche Verlauf der Curven der täglichen Schwankung, wie eine derselben für den Monat Jänner in Fig. 3, S. 36, wiedergegeben ist, während der Zeit von $3^h$ p. bis $8^h$ p. Diesen Verlauf zeigen auch die Wintercurven für Schafberg, Obir und Säntis[2] und für den Pikes Peak.[3] Auf dem

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 107, S. 72. Met. Zeitschr., 1894, S. 23.

[2] J. Hann, Denkschriften der k. Akad. der Wissensch. in Wien, Bd. 59, S. 336.

[3] J. Hann, Diese Sitzungsber., Bd. 107, S. 125 und S. 157. Auf dem Gipfel des Pikes Peak wurden von 1. November 1892 bis 30. September 1894 Registrierungen der meteorologischen Elemente ausgeführt. Dieselben sind in dem »Report of the Chief of the Weather Bureau (Washington)« in 1893 bis 1894 in extenso mitgetheilt. Aus den von Park Morill in englischen Zollen gerechneten und in dem »Report« 1895 bis 1896 veröffentlichten Stundenmitteln des Barometerstandes hat J. Hann die Abweichungen in Millimetern vom Tagesmittel gerechnet und in die citierte Abhandlung aufgenommen.

letzteren Gipfel ist die gesammte tägliche Schwankung 1·12*mm*, d. i. das doppelte derjenigen auf dem Sonnblick; der Einfluss der Fehler ist hier jedenfalls abgeschwächt.

Die harmonischen Componenten $a_3$, $a_4$, $A_3$ und $A_4$ sind:

Sonnblick:

| | |
|---|---|
| Winter ............ | $0·0458 \sin(326° 02'+3\theta)+0·0233 \sin(170° 22'+4\theta)$ |
| Frühling und Herbst.. | $0 0142 \sin(261\ 56+3\theta)+0·0015 \sin(222\ 17+4\theta)$ |
| Sommer............ | $0·0359 \sin(142\ 35+3\theta)+0·0028 \sin(185\ 28'+4\theta)$. |

Pikes Peak:

| | |
|---|---|
| Winter ............ | $0·0938 \sin(15° 34'+3\theta)+0·0284 \sin(232° 27'+4\theta)$ |
| Frühling und Herbst.. | $0·0393 \sin(18\ 59+2\theta)+0·0091 \sin(283\ 25+4\theta)$ |
| Sommer............ | $0·0402 \sin(173\ 34+3\theta)+0·0313 \sin(126\ 51+4\theta)$. |

Die Amplitude $a_3$ ist auf dem Sonnblick und auf dem Pikes Peak während des Winters am größten, im Frühling und Herbst am kleinsten. Im Sommer ist $a_3$ auf dem Sonnblick um etwa 20% kleiner wie im Winter, auf dem Pikes Peak nur wenig größer als im Frühling und Herbst.

Der Epochenwinkel $A_3$ liegt auf dem Sonnblick während des Winters im 4. Quadranten, geht während des Frühling und Herbstes im Mittel in den 3. Quadranten über und hält sich während des Sommers im 2. Quadranten. Auf dem Pikes Peak liegt $A_3$ während des Winters im 1. Quadranten, etwa 45° von dem $A_3$ des Sonnblick abstehend, bleibt während des Frühlings und Herbstes im Mittel in diesem Quadranten, übergeht aber während des Sommers auch in den 2. Quadranten, eine Erscheinung, welche, wie Hann hervorhebt, der dreimaligen täglichen Barometerschwankung auf der ganzen Erdoberfläche zuzukommen scheint.

Die Amplitude $a_4$ ist auf beiden Hochgipfeln im Frühling und Herbst im Mittel am kleinsten, auf dem Sonnblick dagegen im Winter; auf dem Pikes Peak im Sommer am größten.

Der Epochenwinkel $A_4$ ist auf dem Sonnblick im Mittel während des Winters und Sommers nahe bei 180°, während des Frühlings und Herbstes bei 220°, auf dem Pikes Peak während des Winters, Frühlings und Herbstes in der Nähe von 270°, dagegen im Sommer ausgesprochen im 2. Quadranten.

Kleine Abänderungen, denen die gefundenen Mittelwerte des Barometerganges auf dem Sonnblick bei einer Revision der ganzen Rechnung unterworfen wurden, beeinflussen die Werte von $a_4$ und $A_4$ weitaus mehr, als die Werte von $a_3$ und $A_3$; die für die viermalige tägliche Barometerschwankung gerechneten Größen sind daher mit einiger Unsicherheit behaftet.

## Zusammensetzung der harmonischen Componenten auf graphischem Wege.

Die vorhin erwähnte Darstellung einer einfachen harmonischen Schwingung durch einen unter dem Epochenwinkel gezogenen Vector von der Länge der Amplitude gestattet einfache harmonische Schwingungen zusammenzusetzen.

Soll derselbe Punkt gleichzeitig zwei einfache harmonische Schwingungen von derselben Periode, aber von verschiedenen Amplituden $OA'_1 = a$ und $OB'_1 = b$ und Epochenwinkeln $A$ und $B$ ausführen, so ist $OC'_1$, Fig. 1, S. 17, die resultierende Amplitude und $xOC'_1 = C$ der zugehörige Epochenwinkel, wie aus der Zusammensetzung der Componenten $p_a, p_b, q_a, q_b$ sofort erkannt wird. Zugleich ist $OC'_1$ der Halbmesser desjenigen Kreises, in dem sich ein Punkt bewegen würde, welcher zwei gleichförmige Bewegungen in Kreisen von den Halbmessern $a_1$ und $a_2$ und den Epochenwinkeln $A_1$ und $A_2$ in derselben Zeit auszuführen hätte, und $C$ der zugehörige Epochenwinkel.

Soll ein Punkt mehrere einfache harmonische Schwingungen zugleich ausführen, denen verschiedene Amplituden und Epochen, aber auch verschiedene Perioden zukommen, so gibt die Aneinanderreihung der Vectoren wohl die Lage des Punktes zur Zeit Null, aber die aus den Bewegungen in den Hilfskreisen resultierende Bewegung ist keine Bewegung im Kreise, sondern eine solche in einer Curve, die als Hilfscurve zur Construction der Wellenlinie dienen kann, also eigentlich ein Vectordiagramm ist.

Handelt es sich hiebei zunächst, wie bei der einmaligen und bei der zweimaligen täglichen Barometerschwankung, um die Zusammensetzung zweier einfacher harmonischer Bewegungen, deren Schwingungszahlen sich wie 1:2 verhalten,

so ist die resultierende Hilfscurve eine Pascal'sche Curve;[1] dieselbe wird durch die Punkte einer Geraden $\Omega a_2$, Fig. 2, beschrieben, von welcher ein Punkt $a_2$ durch eine Kurbel $Oa_2$ auf einem Kreise geführt wird, während die Gerade durch einen festen Punkt $\Omega$ des Umfanges dieses Kreises geleitet. Während

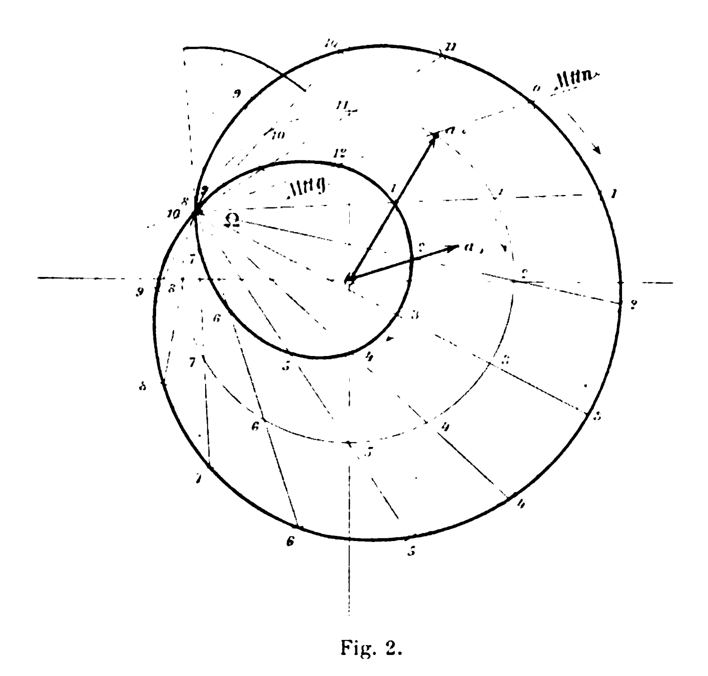


Fig. 2.

der Umfang des Kurbelkreises zweimal in gleichförmiger Bewegung durchlaufen wird, dreht sich die Gerade gleichförmig einmal um den Punkt $\Omega$.

Sind $Oa_2$ und $Oa_1$ die beiden gegebenen einfachen harmonischen Schwingungen, deren Umlaufszahlen sich wie 2:1

[1] Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Bd. 1, 1888, S. 150. Rollt ein Kreis eines ebenen Systems auf einem gleich großen festen Kreise, so sind die cyclischen Curven, welche die Systempunkte beschreiben, Pascal'sche Curven; ebenso wenn ein Kreis umschließend auf einem halb so großen festen Kreise rollt. In der »Lehre von den Schwingungscurven« wird F. Melde bei der Zusammensetzung elliptischer Bewegungen, deren Perioden sich wie 1:2 verhalten, zu solchen Curven mit Schlingen, wie die Pascal'schen Curven, geführt.

verhalten, so zieht man zur Construction der Pascal'schen Curve mit dem Halbmesser $Oa_2 = a_2$, der Amplitude der zweimaligen täglichen Schwingung einen Kreis, theilt dessen Umfang, von $a_2$ ausgehend, in 12 Theile und beschreibt die Theilpunkte entsprechend. Durch den Endpunkt $a_2$ führt man eine Parallele zu $Oa_1$, dieselbe schneidet den Kreis vom Halbmesser $a_2$ im Doppelpunkte $\Omega$ der Pascal'schen Curve. Dieser Punkt $\Omega$ ist mit den 12 Theilpunkten des Kreises durch Gerade zu verbinden und von den Theilpunkten ist die Strecke $a_1$ nach beiden Seiten hin abzutragen; die so erhaltenen Punkte mit dem Theilpunkte, von dem sie abgetragen wurden, correspondierend beschrieben und der Reihe der Zahlen nach verbunden, geben die gesuchte Curve.

Ist $a_1 < 2a_2$, so ergibt sich eine Schlinge wie in Fig. 2; ist $a_1 = 2a_2$, so entsteht die Cardioide, mit der Spitze in $\Omega$; ist $a_1 > 2a_2$, dann zeigt die Curve auf dem Leitstrahle durch $\Omega$ eine mehr oder minder ausgesprochene Einbiegung.

Ein Punkt, der sich zufolge der beiden in Rede stehenden harmonischen Bewegungen auf der Pascal'schen Curve bewegt, gelangt nach je einer Stunde in die durch die Constructionen gefundenen, mit der Tagesstunde beschriebenen Punkte.

Werden diese Punkte durch Parallele zur $x$-Axe auf Gerade reduciert, welche parallel zur $y$-Axe in gleichen Abständen gezogen und mit den Tagesstunden beschrieben sind, so geben diese Punkte verbunden die entsprechende Wellenlinie.

Sind noch eine dreimalige und eine viermalige tägliche Barometerschwankung zu berücksichtigen, so kann von den Punkten der Pascal'schen Curve ausgegangen und es können dann die Amplituden $a_3$ und $a_4$ jener Schwingungen unter dem der Stunde entsprechenden Phasenwinkel angeschlossen werden. Es lässt sich dies sehr rasch ausführen, wenn noch ein Hilfskreis von größerem Halbmesser benutzt wird, der um den Coordinatenanfangspunkt geschlagen, zum Auftragen von Winkeln ohnehin nöthig ist und dessen Umfang, von den Schnittpunkten mit den verlängerten Vectoren $a_3$ und $a_4$ ausgehend, in acht, beziehungsweise sechs Theile getheilt wird. Durch die Schnittpunkte und den Kreismittelpunkt werden Rayons gezogen, die nach der positiven Seite der Vectoren

z. B. mit 0, 4, 8, 12; 1, 5, 9; 2, 6, 10; 3, 7, 11 oder 0, 3, 6, 9, 12; 1, 4, 7, 10; 2, 5, 8, 11 beschrieben werden. Zu den correspondierenden Punkten der Pascal'schen Curven, z. B. 0, 4, 8, 12, sind zuerst die $a_3$ abwechselnd nach der einen und anderen Richtung abzutragen und daran die $a_4$ in dem entsprechenden Sinne zu reihen.

Auf Taf. II sind die Vectordiagramme für den Monat Jänner verzeichnet. Die punktierte Curve ist die Pascal'sche Curve, die gestrichelte entsteht durch Hinzufügung der dreimaligen täglichen Schwankung, die ausgezogene Curve endlich durch die Hinzufügung der viermaligen täglichen Schwankung.

Auf Taf. III, Fig. 1 und Fig. 2, sind die unter den Epochenwinkeln $A_1 A_2 A_3 A_4$ gezogenen Vectoren $a_1 a_2 a_3 a_4$ der harmonischen Componenten des täglichen Barometerganges für die heiteren und trüben Tage der Monate Jänner und August in ein rechtwinkeliges Coordinatensystem eingezeichnet.

Auf Taf. III, Fig. 3, sind die mit Hilfe dieser Vectoren construierten Vectordiagramme für die tägliche Schwankung derartig verzeichnet, dass sich die zugehörigen Coordinatenaxen decken. Es wurde jede der Curven für sich allein construiert, die Richtigkeit derselben durch Construction der Wellenlinie und Vergleichung mit den beobachteten Resultaten geprüft und dann auf Pausleinwand ein Coordinatensystem gezogen und die Curven darauf übertragen. Die Lagen des bewegten Hilfspunktes in den einzelnen Stunden sind durch Punkte markiert, welche in die Unterbrechungen der Curve eingezeichnet sind.

Ein derartiges Übereinanderzeichnen der Hilfscurven gestattet einen sehr genauen und übersichtlichen Vergleich zwischen zwei periodischen Bewegungen. Die Ordinaten der Theilpunkte der Hilfscurve oder der Stundenpunkte der davon abgeleiteten Wellenlinien können von der Abscissenaxe aus abgemessen werden und geben auf graphischem Wege die »berechneten« Stundenwerte der mittleren Barometerabweichung.

Es sei noch bemerkt, dass durch die in Rede stehenden Hilfscurven die gesuchten Wellenlinien sich einfacher, übersichtlicher und genauer construieren lassen, als dadurch, dass etwa die den einzelnen harmonischen Componenten ent-

sprechenden Wellenlinien untereinander verzeichnet und die abgemessenen Ordinaten der Größe und dem Zeichen nach aneinandergereiht werden.

Zu der mehrfachen Kreistheilung, die hier vorkommt, empfiehlt sich die Benützung einer dünnen, kreisförmigen Metallscheibe, welche mit 24 in gleichem Winkelabstande eingeschnittenen Schlitzen versehen ist, die nahe am Rande beginnen und 1 bis 2 *cm* von dem fein durchbohrten Mittelpunkte der Scheibe endigen. Durch eine Pikiernadel wird der Mittelpunkt über dem Coordinatenanfangspunkte fixiert und die Scheibe soweit gedreht, dass durch zwei diametrale Schlitze der deutlich ausgezogene Vector $a_2$ und dessen markierter Schnittpunkt auf der rückwärtigen Verlängerung sichtbar werde. Mit einem flach gespitzten Bleistifte können dann die Theilstriche an dem Umfange des zu theilenden Kreises gezogen werden. Selbstverständlich leistet die Scheibe auch für die nöthigen Theilungen zur Construction der drei- und viermaligen täglichen Schwankung gute Dienste.

## Die tägliche Schwankung des Barometers an heiteren und trüben Tagen auf dem Hohen Sonnblick.

Der Unterschied im täglichen Gange des Barometers an heiteren und trüben Tagen wurde zuerst von Lamont für München nachgewiesen. Seither haben A. Buchan für den Ben Nevis und die zugehörige Fußstation Ft. William und für Triest, Nekamura für Hamburg ähnliche Untersuchungen geführt.

J. Hann[1] hat diese Untersuchungen erneuert aufgenommen und auf folgende Beobachtungsstationen und Jahreszeiten erstreckt: Zürich und Säntis für den Sommer, Obir (2040 *m*) und Klagenfurt (450 *m*) für Sommer und Winter; dann Peissenberg (994 *m*), Hirschberg (1512 *m*), Wendelstein (1727 *m*) München (526 *m*), Bayrisch-Zell (802 *m*), Feld bei Miesbach (717 *m*) für den Sommer. Die Stationen München, Peissenberg, Wendelstein und Säntis sind von Hann[2] dazu benützt

[1] J. Hann, Der tägliche Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen, namentlich auf Berggipfeln. Diese Sitzungsber., Bd. 104, S. 505, 1895.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. 104, S. 522.

worden, um zu zeigen, wie sich die Barometerschwankungen an heiteren und trüben Tagen mit der Höhe der Berggipfeln ändern. J. Hann hat die Erklärung der beobachteten Erscheinung durch die Zerlegung in die harmonischen Componenten gegeben und auch versucht, die wahrscheinliche Ursache des verschiedenen Ganges des Barometers bei heiterem und trüben Wetter aufzudecken. Er ist dabei zu dem Satze gelangt, dass der Unterschied im täglichen Gange des Barometers bei heiterem und bei trübem Wetter vollkommen dem Unterschiede zwischen dem täglichen Gange des Luftdruckes über dem Lande und über dem angrenzenden See entspreche, und er schließt daran den Satz, dass die Orte barometrischer Maxima mit klarem Himmel und großer täglicher Wärmeschwankung in Bezug auf die täglichen Druckschwankungen geradeso auf die Orte barometrischer Minima mit bedecktem Himmel und kleiner täglicher Wärmeschwankung reagieren, wie die Landflächen auf die benachbarten Wasserflächen.

Die für den Sonnblick vorliegenden Registrierungen des Barometerganges ließen es als dankbare Aufgabe erscheinen, die Unterschiede im Barometergange an heiteren und trüben Tagen für diesen Hochgipfel für die einzelnen Monate des Jahres festzustellen und die harmonischen Componenten des Barometerganges aufzusuchen.

Zur Auffindung der heiteren und trüben Tage dienten die Angaben über die Bewölkung zu den Beobachtungsterminen $7^h$ a., $2^h$ p. und $9^h$ p., welche in den »Jahrbüchern der Centralanstalt für Meteorologie« in Zahlen von 0 bis 10 ausgedrückt, veröffentlicht sind.

Ohne Beiziehung der Registrierungen des Sonnenscheinautographen ist die Feststellung der heiteren Tage nach diesem Vorgange dadurch erschwert, dass namentlich in den Sommermonaten Tage zugelassen werden müssen, an denen die Bewölkung 0 nicht vorkommt, dagegen Bewölkungen bis zu 3 verzeichnet sind. Die Summe der Beobachtungszahlen für die drei Beobachtungstermine steigt an solchen Tagen bis zu 6 an.

Als trübe Tage wurden jene gezählt, an welchen die Bewölkung zu den drei Beobachtungsterminen mit 10 verzeichnet, die Bewölkungssumme daher 30 ist. Nur in jenen Monaten, in

welchen die Zahl der trüben Tage gering ist, wurden einige Tage mit der Bewölkungssumme 29 zugelassen.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Zahlen der heiteren und trüben Tage in den einzelnen Monaten der Jahre 1886 bis 1896, für welche Beobachtungen vorliegen, zusammengestellt.

Die größte Zahl der heiteren Tage fällt auf die Monate November, December, Jänner, Februar und März. Die Bewölkung ist namentlich in den vier erstangeführten Monaten, oft mehrere Tage hintereinander, zu allen drei Beobachtungsterminen mit 0 angeführt. In den Monaten Mai, Juni und Juli kommen Bewölkung 0 fast gar nicht vor, so dass der ganz klare Himmel über dem Sonnblick in den Tagen des Sommers nur auf wenige Tagesstunden beschränkt bleibt. Trotz dieses Umstandes ergibt sich für den täglichen Gang des Barometers an den als heiter gewählten Tagen des Sommers ein sehr charakteristischer Unterschied gegen jenen an den trüben Tagen, der mit den Resultaten übereinstimmt, welche J. Hann für den Säntis und für den Obir gefunden hat.

| | Jänner | Februar | März | April | Mai | Juni | Juli | August | September | October | November | December |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Heitere Tage** | | | | | | | | | | | | |
| 1886 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 8 | — |
| 87 | 18 | 13 | 9 | 2 | — | 2 | — | 6 | 3 | — | 3 | 1 |
| 88 | 6 | 2 | — | 3 | 3 | 1 | — | 5 | 5 | 8 | 5 | 10 |
| 89 | 9 | 2 | 4 | 2 | — | 2 | 1 | 3 | 1 | 1 | 15 | 8 |
| 1890 | 8 | 16 | 6 | 2 | 2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 7 | — | — |
| 91 | 7 | 9 | 2 | 2 | 2 | — | — | 3 | 11 | 5 | 5 | 5 |
| 92 | 3 | 1 | 9 | 6 | 4 | 1 | 4 | 7 | 7 | 4 | 7 | 6 |
| 93 | 8 | 2 | 6 | 8 | — | 2 | 4 | 4 | 2 | 4 | 2 | 10 |
| 94 | 9 | 4 | 7 | 7 | 3 | — | 3 | 2 | — | 1 | 12 | 4 |
| 95 | — | 1 | 5 | 4 | — | — | — | 3 | 2 | — | 6 | — |
| 96 | 6 | 9 | 3 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Summe.. | 74 | 59 | 51 | 36 | 14 | 9 | 14 | 37 | 34 | 30 | 63 | 44 |

| | Jänner | Februar | März | April | Mai | Juni | Juli | August | September | October | November | December |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | **Trübe Tage** | | | | | | |
| 1886 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 12 | 16 |
| 87 | — | 1 | 7 | 4 | 14 | 8 | 3 | 5 | 8 | 9 | 16 | 5 |
| 88 | 5 | 12 | 13 | 7 | 7 | 3 | 14 | 12 | 7 | 10 | 6 | 4 |
| 89 | 3 | 11 | 10 | 10 | 9 | 11 | 11 | 12 | 9 | 16 | 2 | 7 |
| 1890 | 5 | 2 | 2 | 9 | 6 | 11 | 9 | 7 | 12 | 10 | — | — |
| 91 | 10 | 3 | 10 | 7 | 9 | 8 | 10 | 8 | 3 | 6 | 9 | 5 |
| 92 | 9 | 15 | 5 | 10 | 10 | 15 | 7 | 5 | 6 | 11 | 1 | 1 |
| 93 | 5 | 8 | 4 | 3 | 13 | 9 | 7 | 3 | 8 | 8 | 4 | 5 |
| 94 | 3 | 5 | 4 | 8 | 11 | 10 | 9 | 9 | 11 | 10 | 5 | 7 |
| 95 | 13 | 8 | 16 | 14 | 12 | 15 | 12 | 11 | 5 | 8 | 4 | 14 |
| 96 | 8 | 4 | 13 | 19 | 19 | 13 | 16 | 24 | 15 | 20 | 20 | 14 |
| Summe. . | 61 | 68 | 84 | 91 | 110 | 103 | 98 | 96 | 84 | 108 | 79 | 78 |

Für den October 1886 sind in den »Jahrbüchern der k. k. Centralanstalt für Meteorologie« zwar die täglichen Beobachtungen enthalten, aber es sind noch keine verwertbaren Aufzeichnungen des täglichen Barometerganges vorhanden, so dass die 8 heiteren Tage dieses durch gutes Wetter ausgezeichneten Monates nicht berücksichtigt werden konnten. Der Monat December 1890 weist 12 heitere Tage auf; leider fehlen die Registrierungen der Barometeroscillation für diesen Monat.

Von den Barometerregistrierungen auf dem Hohen Sonnblick sind die Monate November 1886 bis August 1887 nicht in wahren Werten ausgedrückt, aber es ist nach den dort verzeichneten Angaben möglich, die Umrechnung auf absolute Werte auszuführen. Ich habe dies für den täglichen Gang der heiteren und trüben Tagen ausgeführt.

Die aus dem gesammten Beobachtungsmateriale der Jahre 1886 bis 1896 gerechneten mittleren täglichen Barometerschwankungen in Hundertelmillimeter sind für die heiteren und trüben Tage in Tabelle IV eingetragen. Von diesen Werten

sind die Mittel gebildet und zum Vergleiche sind die entsprechenden Mittel aus Tabelle I hinzugefügt.

Es sei gleich hier hervorgehoben, dass in den Monaten Jänner, Februar, November und December die Mittel aus den heiteren und trüben Tagen mit den Gesammtmitteln recht gut übereinstimmen. In den übrigen Monaten sind, insbesondere während der Abendstunden bis über Mitternacht hinaus, Abweichungen vorhanden, die bis auf 0·09 *mm* ansteigen.

Für alle Monate haben die angeführten Zahlenreihen das gemeinsame Merkmal, dass sich zwischen $5^h$ a. und $7^h$ a. und zwischen $5^h$p. und $7^h$p. nicht nur die in Rede stehenden Mittelwerte einander sehr nähern oder gleich werden, sondern dass auch die Abweichungen der heiteren und trüben Tage sich wenig von einander und von diesen Mittelwerten unterscheiden. Es sind dies die Zeiten, zu welchen sich die Curven für die Barometergänge an heiteren und trüben Tagen durchschneiden.

Der Verlauf der Curven der Barometerschwankungen, in Abweichungen vom Mittel, für die heiteren und trüben Tage ist in der Fig. 3, S. 36, für den Monat Jänner als charakteristisch für den Winter, dann für April und endlich für August als charakteristisch für den Sommer, nach den unter VI und VII angeführten harmonischen Componenten des Barometerganges verzeichnet. Die beobachteten Werte sind für die heiteren Tage in aufrechten Kreuzen +, für die trüben Tage in liegenden Kreuzen × markiert.

Die Barometerschwankung an den heiteren Tagen zeigt das Morgenminimum als Hauptminimum, das Vormittagsmaximum, eventuell auf Nachmittag verspätet, als Hauptmaximum; das Nachmittagsminimum und das Abendmaximum schwach entwickelt.

Die Barometerschwankung an trüben Tagen hat auch morgens das Hauptminimum, jedoch ein wenig über das Mittel ragendes, nahezu verwischtes Vormittagsmaximum und Nachmittagsminimum, dagegen ein sehr ausgesprochenes Abendmaximum. An heiteren Tagen ist die Barometerabweichung vom Mittel um Mitternacht sehr gering, mitunter auch negativ, an trüben Tagen jedoch sehr bedeutend.

## IV. Täglicher Gang des Barometers an heiteren

während der einzelnen Monate, in Abweichungen vom Mittel, in Hundertel-

Die heiteren und trüben Tage November und

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jänner 74 heitere Tage ........ | -01 | -05 | -07 | -08 | -15 | -24 | -23 | -18 | -10 |
| 61 trübe Tage ......... | 41 | 28 | 21 | 09 | -12 | -28 | -30 | -27 | -20 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen.. | 19 | 10 | 06 | 00 | -14 | -26 | -26 | -22 | -14 |
| » » 310 Tagen.......... | 19 | 10 | 06 | -02 | -15 | -26 | -30 | -25 | -16 |
| Februar 59 heitere Tage ....... | 03 | -03 | -09 | -18 | -26 | -27 | -30 | -25 | -16 |
| 68 trübe Tage ........ | 35 | 24 | 12 | -04 | -19 | -26 | -34 | -36 | -30 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen.. | 20 | 12 | 02 | -11 | -22 | -26 | -32 | -31 | -23 |
| » » 283 Tagen ......... | 22 | 13 | 03 | -11 | -24 | -29 | -34 | -32 | -24 |
| März 51 heitere Tage ......... | 06 | 01 | -09 | -25 | -36 | -41 | -37 | -29 | -18 |
| 84 trübe Tage........... | 39 | 28 | 08 | -07 | -24 | -35 | -37 | -34 | -33 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen.. | 27 | 17 | 01 | -13 | -29 | -37 | -37 | -32 | -28 |
| » » 310 Tagen.......... | 19 | 10 | -04 | -20 | -30 | -36 | -37 | -31 | -23 |
| April 36 heitere Tage.......... | 10 | 02 | -10 | -27 | -41 | -46 | -43 | -35 | -30 |
| 91 trübe Tage ........... | 36 | 16 | -06 | -23 | -40 | -50 | -47 | -46 | -41 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen.. | 29 | 12 | -07 | -24 | -40 | -49 | -46 | -43 | -38 |
| » » 300 Tagen.......... | 18 | 09 | -09 | -24 | -37 | -47 | -46 | -41 | -35 |
| Mai 14 heitere Tage.......... | -04 | -17 | -29 | -41 | -49 | -47 | -39 | -25 | -12 |
| 110 trübe Tage........... | 27 | 08 | -11 | -27 | -40 | -43 | -41 | -34 | -29 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen.. | 24 | 05 | -13 | -28 | -41 | -44 | -40 | -33 | -27 |
| » » 310 Tagen ......... | 17 | 06 | -18 | -34 | -45 | -46 | -41 | -34 | -25 |
| Juni 9 heitere Tage .......... | 09 | -01 | -13 | -32 | -46 | -48 | -44 | -33 | -26 |
| 103 trübe Tage............ | 27 | 09 | -08 | -27 | -39 | -43 | -45 | -38 | -29 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen.. | 26 | 08 | -08 | -28 | -40 | -43 | -44 | -37 | -28 |
| » » 300 Tagen.. ....... | 15 | 01 | -14 | -32 | -43 | -45 | -43 | -36 | -26 |

## und trüben Tagen auf dem Hohen Sonnblick

Millimeter. 10 Jahre 1887 bis 1896. November und December 1890 fehlen. December 1886 sind mit in Rechnung gestellt.

| 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 05 | 22 | 26 | 18 | 05 | -08 | -07 | -05 | -04 | -01 | 01 | 07 | 09 | 10 | 11 | -01 | 520·92 |
| -08 | 02 | 06 | -01 | -13 | -17 | -18 | -17 | -12 | -10 | -03 | 09 | 21 | 36 | 42 | 41 | 511·35 |
| -01 | 12 | 17 | 10 | -03 | -12 | -12 | -11 | -07 | -05 | -01 | 08 | 15 | 22 | 24 | 18 | 516·60 |
| -04 | 11 | 19 | 11 | -03 | -14 | -12 | -10 | -08 | -03 | 03 | 10 | 19 | 25 | 25 | 19 | 515·55 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -03 | 16 | 27 | 28 | 18 | 06 | 01 | -03 | -01 | 04 | 09 | 11 | 18 | 15 | 10 | 03 | 520·62 |
| -26 | -06 | 09 | 11 | 06 | -03 | -05 | -09 | -07 | 02 | 13 | 20 | 30 | 39 | 36 | 35 | 511·64 |
| -16 | 04 | 18 | 19 | 11 | 01 | -03 | -06 | -04 | -03 | 11 | 16 | 25 | 28 | 24 | 20 | 515·81 |
| -14 | 01 | 16 | 19 | 10 | 00 | -02 | -04 | -03 | 03 | 11 | 17 | 25 | 27 | 26 | 22 | 515·23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -05 | 13 | 23 | 27 | 25 | 14 | 10 | 05 | 03 | 04 | 09 | 16 | 23 | 21 | 15 | 06 | 519·29 |
| -24 | -08 | 00 | 03 | -01 | -06 | -08 | -10 | -05 | 03 | 15 | 26 | 37 | 45 | 44 | 40 | 511·22 |
| -17 | 00 | 09 | 12 | 09 | 01 | -01 | -04 | -02 | 03 | 13 | 23 | 32 | 36 | 33 | 27 | 514·27 |
| -11 | 03 | 15 | 21 | 14 | 08 | 04 | 00 | -02 | 02 | 10 | 19 | 27 | 30 | 26 | 19 | 515·69 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -14 | 02 | 15 | 26 | 27 | 26 | 19 | 17 | 11 | 04 | 05 | 16 | 25 | 21 | 17 | 10 | 520·14 |
| -31 | -14 | -02 | 06 | 08 | 09 | 09 | 09 | 11 | 12 | 22 | 35 | 43 | 44 | 43 | 36 | 514·62 |
| -26 | -09 | 03 | 11 | 13 | 10 | 12 | 11 | 11 | 10 | 17 | 29 | 38 | 37 | 35 | 28 | 516·20 |
| -22 | -03 | 08 | 15 | 17 | 18 | 17 | 13 | 11 | 08 | 12 | 24 | 31 | 30 | 27 | 18 | 516·82 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -02 | 07 | 21 | 28 | 31 | 32 | 30 | 27 | 19 | 12 | 06 | 10 | 13 | 13 | 06 | -04 | 525·13 |
| -20 | -08 | 01 | 11 | 11 | 12 | 10 | 09 | 08 | 08 | 16 | 23 | 40 | 40 | 37 | 27 | 519·50 |
| -18 | -06 | 04 | 13 | 13 | 14 | 12 | 11 | 09 | 08 | 15 | 22 | 37 | 37 | 34 | 24 | 520·14 |
| -15 | -04 | 08 | 17 | 20 | 21 | 19 | 17 | 17 | 11 | 15 | 22 | 32 | 31 | 30 | 18 | 520·46 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -13 | -01 | 14 | 26 | 29 | 32 | 36 | 32 | 23 | 17 | 11 | 13 | 20 | 17 | 17 | 09 | 525·98 |
| -21 | -10 | 02 | 12 | 15 | 16 | 17 | 14 | 11 | 09 | 11 | 20 | 36 | 37 | 33 | 27 | 522·63 |
| -20 | -09 | 03 | 13 | 16 | 17 | 18 | 15 | 12 | 10 | 11 | 19 | 35 | 35 | 31 | 26 | 522·00 |
| -16 | -03 | 09 | 18 | 23 | 25 | 24 | 20 | 15 | 12 | 12 | 17 | 29 | 31 | 26 | 15 | 523·80 |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juli 14 heitere Tage | -07 | -14 | -28 | -43 | -49 | -46 | -39 | -37 | -21 |
| 98 trübe Tage | 34 | 16 | -02 | -22 | -31 | -41 | -43 | -40 | -35 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen | 28 | 12 | -05 | -24 | -33 | -42 | -42 | -40 | -33 |
| » » 310 Tagen | 16 | 05 | -10 | -26 | -34 | -40 | -39 | -33 | -25 |
| August 37 heitere Tage | 06 | -04 | -17 | -31 | -43 | -47 | -44 | -35 | -23 |
| 96 trübe Tage | 28 | 14 | -02 | -19 | -31 | -36 | -38 | -35 | -29 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen | 18 | 09 | -06 | -22 | -34 | -40 | -40 | -35 | -28 |
| » » 310 Tagen | 16 | 03 | -11 | -26 | -38 | -42 | -40 | -35 | -26 |
| September 34 heitere Tage | 05 | -03 | -14 | -25 | -35 | -39 | -38 | -33 | -19 |
| 84 trübe Tage | 30 | 17 | 01 | -14 | -26 | -34 | -36 | -36 | -31 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen | 23 | 11 | -04 | -17 | -29 | -35 | -36 | -35 | -28 |
| » » 300 Tagen | 15 | 05 | -10 | -21 | -31 | -37 | -36 | -31 | -25 |
| October 30 heitere Tage | 05 | 03 | -07 | -18 | -26 | -30 | -32 | -27 | -11 |
| 108 trübe Tage | 35 | 22 | 04 | -14 | -25 | -36 | -43 | -40 | -32 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen | 29 | 18 | 02 | -15 | -26 | -35 | -41 | -38 | -28 |
| » » 310 Tagen | 21 | 12 | -03 | -17 | -27 | -32 | -39 | -34 | -23 |
| November 63 heitere Tage | -04 | -08 | -10 | -19 | -20 | -23 | -21 | -10 | -03 |
| 79 trübe Tage | 37 | 21 | 06 | -09 | -23 | -31 | -34 | -31 | -20 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen | 19 | 08 | -02 | -14 | -22 | -28 | -28 | -22 | -13 |
| » » 270 Tagen | 17 | 05 | -03 | -12 | -22 | -26 | -28 | -24 | -15 |
| December 44 heitere Tage | 02 | -08 | -13 | -16 | -22 | -27 | -28 | -23 | -04 |
| 78 trübe Tage | 29 | 15 | 08 | -04 | -12 | -26 | -28 | -22 | -15 |
| Mittel von den h. und tr. Tagen | 19 | 07 | 01 | -08 | -16 | -27 | -28 | -22 | -11 |
| » » 271 Tagen | 12 | 04 | -01 | -08 | -17 | -25 | -26 | -20 | -12 |

| 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -14 | -05 | 01 | 25 | 26 | 31 | 29 | 26 | 20 | 14 | 09 | 10 | 09 | 16 | 07 | -07 | 527·52 |
| -26 | -17 | -05 | -01 | 04 | 07 | 08 | 10 | 09 | 12 | 17 | 24 | 37 | 40 | 41 | 34 | 522·94 |
| -25 | -15 | -04 | 03 | 07 | 10 | 11 | 12 | 11 | 12 | 16 | 22 | 35 | 37 | 37 | 28 | 523·52 |
| -17 | -04 | 08 | 16 | 18 | 20 | 20 | 18 | 13 | 10 | 12 | 15 | 26 | 29 | 26 | 16 | 525·11 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -11 | 04 | 11 | 14 | 22 | 29 | 32 | 27 | 21 | 14 | 12 | 17 | 19 | 17 | 15 | 06 | 528·89 |
| -21 | -11 | -02 | 03 | 08 | 10 | 10 | 11 | 10 | 08 | 13 | 23 | 35 | 38 | 34 | 28 | 523·07 |
| -18 | -07 | 01 | 08 | 12 | 16 | 12 | 12 | 13 | 10 | 13 | 21 | 30 | 32 | 29 | 22 | 524·70 |
| -16 | -03 | 07 | 13 | 17 | 20 | 19 | 16 | 12 | 08 | 11 | 20 | 28 | 28 | 25 | 16 | 525·55 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -08 | 08 | 16 | 21 | 19 | 19 | 14 | 11 | 08 | 06 | 13 | 18 | 19 | 18 | 14 | 05 | 528·64 |
| -18 | -06 | 00 | 04 | 03 | 02 | 00 | 01 | 03 | 06 | 16 | 27 | 35 | 34 | 34 | 30 | 521·43 |
| -15 | -02 | 05 | 09 | 08 | 07 | 05 | 04 | 04 | 06 | 15 | 24 | 30 | 30 | 28 | 23 | 523·51 |
| -12 | 01 | 10 | 16 | 15 | 14 | 10 | 07 | 06 | 06 | 12 | 20 | 26 | 26 | 22 | 15 | 524·85 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -01 | 12 | 20 | 19 | 10 | 06 | 00 | -01 | -01 | 03 | 04 | 08 | 12 | 18 | 12 | 05 | 524·98 |
| -20 | -09 | 00 | 04 | -01 | -05 | -08 | -09 | -03 | 09 | 22 | 28 | 40 | 43 | 40 | 35 | 518·13 |
| -16 | -10 | 04 | 07 | 01 | -03 | -06 | -03 | -02 | 07 | 18 | 24 | 34 | 38 | 34 | 29 | 519·62 |
| -11 | 01 | 10 | 12 | 08 | 01 | -01 | -04 | -01 | 06 | 14 | 22 | 30 | 33 | 28 | 21 | 520·17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 23 | 26 | 18 | 09 | 03 | 00 | -03 | -02 | 03 | 09 | 12 | 14 | 10 | 05 | -04 | 524·42 |
| -07 | 05 | 10 | 06 | -05 | -13 | -13 | -11 | -06 | -04 | 13 | 18 | 32 | 36 | 37 | 37 | 515·47 |
| 00 | 13 | 17 | 11 | 02 | -06 | -07 | -07 | -04 | 04 | 11 | 15 | 24 | 25 | 23 | 19 | 519·45 |
| 00 | 13 | 18 | 10 | 01 | -08 | -09 | -08 | -05 | 02 | 11 | 18 | 25 | 26 | 23 | 17 | 519·36 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 06 | 25 | 27 | 20 | 08 | -02 | -02 | -02 | -04 | 01 | 00 | 04 | 06 | 09 | 08 | 02 | 520·99 |
| -05 | -01 | 00 | 01 | -11 | -18 | -15 | -09 | -06 | 01 | 07 | 15 | 27 | 33 | 35 | 29 | 513·38 |
| -01 | 08 | 10 | 08 | -04 | -12 | -10 | -07 | -05 | 01 | 05 | 11 | 19 | 24 | 25 | 19 | 516·13 |
| 00 | 16 | 20 | 11 | 01 | -08 | -07 | -04 | -03 | 00 | 05 | 10 | 15 | 19 | 18 | 12 | 516·47 |

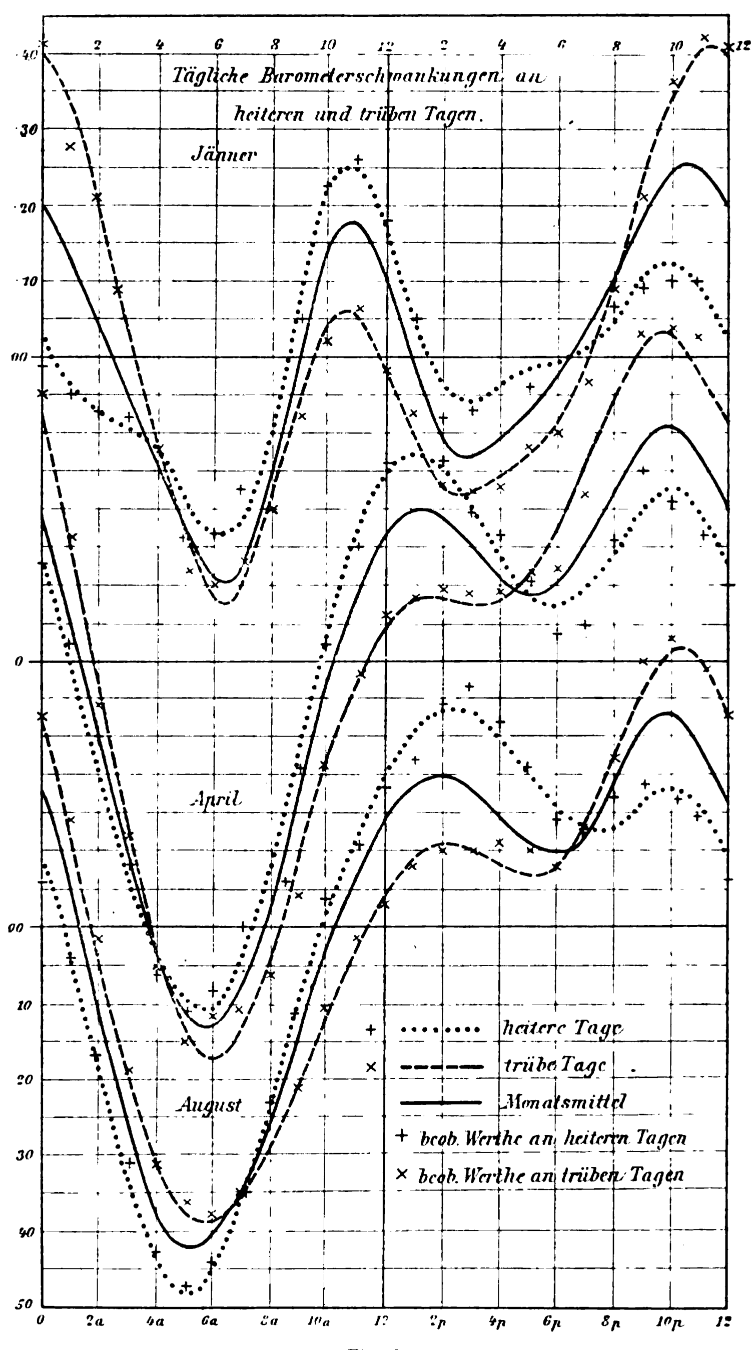

Tägliche Barometerschwankungen an heiteren und trüben Tagen.
Jänner
April
August
heitere Tage
trübe Tage
Monatsmittel
+ beob. Werthe an heiteren Tagen
× beob. Werthe an trüben Tagen
0
2a
4a
6a
8a
10a
12
2p
4p
6p
8p
10p
12

Fig. 3.

Das Morgenminimum tritt an heiteren Tagen früher ein, als an trüben Tagen. Im Winter ist es an trüben Tagen, im Sommer an heiteren Tagen mehr vertieft. Im October tritt der ausgesprochene Wechsel zwischen dem Sommer- und Winterverlauf der Curve ein. Im Frühjahr ist dieser Wechsel nicht so deutlich auf ein bestimmtes Monat beschränkt.

Das Vormittagsmaximum fällt an den heiteren und trüben Tagen des Jänner auf $10^h$ a. und zeigt an heiteren Tagen eine mittlere Abweichung von 0·26 *mm*, an trüben Tagen bloß von 0·06 *mm*. Im Februar ist es auf $11^h$ a., im März auf $12^h$ mittags, im April das Maximum der heiteren Tage auf $2^h$ p. vorgerückt, jenes der Curve für die trüben Tage ist sammt dem Nachmittagsmaximum verschwunden, die Curve steigt vom Morgenminimum während der Nachmittagstunden nur weniger rasch zum Abendmaximum an. Im Mai hält sich das Maximum an den heiteren Tagen auf $2^h$ p., ein sehr schwaches Maximum tritt zur selben Zeit an trüben Tagen ein. Im Juni ist das Maximum der heiteren Tage auf $3^h$ p. verspätet und zeigt eine Abweichung von 0·36 *mm* vom Mitttel, jenes der trüben Tage ist schwach, aber deutlich ausgebildet. Im Juli und August hält sich an heiteren Tagen das Maximum auf $3^h$ p., an trüben Tagen verschwindet es fast vollständig. Im September ist dieses Maximum an heiteren und trüben Tagen auf Mittag zurückgewichen, an trüben Tagen wenig entwickelt. Im October tritt dasselbe an heiteren Tagen um $11^h$ a., an trüben Tagen um Mittag ein. Im November und December sind die Maxima beider Curven auf die Zeit zwischen $10^h$ a. und $11^h$ a. verschoben.

Das Nachmittagsminimum tritt an heiteren Tagen im Jänner um $2^h$ p., im Februar um $4^h$ p., im März um $5^h$ p., im April um $6^h$ $30^m$ p., im Mai, Juni, Juli und August um $7^h$ p. ein und ist in diesen Monaten wenig entwickelt. Im September weicht es auf $6^h$ p., im October auf $5^h$ p., im November und December auf $4^h$ p. zurück. In den Wintermonaten senkt es sich zwischen Vormittags- und Abendmaximum bemerklich ein. An den trüben Tagen des Sommers ist dieses Nachmittagsminimum fast gänzlich verwischt, in den anderen Monaten liegt es zwischen $4^h$ p. und $6^h$ $30^m$ p.

Das Abendmaximum tritt an heiteren Tagen etwas verfrüht, sehr nahe um $9^h$ p., an trüben Tagen zur normalen Zeit, um $10^h$ p., ein. Im Mai, Juni, Juli und August ist es an heiteren Tagen nur schwach entwickelt und dessen Größe von jener des Abendminimums wenig verschieden. Im März, April, September und October ist es deutlicher ausgesprochen. An trüben Tagen ist das Abendmaximum jederzeit beträchtlich und es beträgt dessen Abweichung vom Mittel bis über 0·40 *mm*.

Der früher angedeutete, auch aus den in Fig. 3 gezeichneten Curven für die Monate Jänner und August ersichtliche Wechsel in der Tiefe des Morgenminimums, welches an heiteren Tagen in den Sommermonaten tiefer, in den Wintermonaten weniger tief als an trüben Tagen ist, tritt auf dem Obir nicht[1] ein. Dort bleibt dieses Minimum an heiteren Tagen im Sommer und Winter stets tiefer als an trüben Tagen.

Die Unterschiede in dem Barometergange auf dem Sonnblick und auf dem Obir sind aus der folgenden Zusammenstellung zu ersehen.

Es ist daraus zu erkennen, dass im Winter die Minima der Größe nach an heiteren und trüben Tagen des Sonnblick zwischen jene am Obir fallen. Im Sommer sind diese beiden Minima auf dem Sonnblick tiefer als am Obir, wie es der Höhenlage entspricht.

Im Winter fallen auf dem Sonnblick und auf dem Obir die Vormittagsmaxima an heiteren und trüben Tagen so ziemlich auf $11^h$ a.; im Sommer verspätet sich an heiteren Tagen dieses Maximum auf dem Sonnblick mehr wie am Obir. An trüben Tagen verwischen sich auf dem Sonnblick dieses Maximum und das Nachmittagsminimum, welch letzteres auf dem Obir stets deutlich auftritt, fast gänzlich.

An den heiteren Tagen des Winters und des Sommers bleibt das Abendmaximum des Sonnblick unter jenem des Obir. An den trüben Tagen des Winters hat der Sonnblick, an jenen des Sommers der Obir das höhere Maximum zu dieser Zeit.

---

[1] J. Hann, Diese Sitzungsber., Bd. 104, S. 514 und 516.

## V. Der tägliche Gang des Barometers an heiteren und trüben Tagen während der Winter- und Sommermonate auf dem Sonnblick und dem Obir.

| | Winter | | | | Sommer | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Obir | | Sonnblick | | Obir | | Sonnblick | |
| | heiter | trüb | heiter | trüb | heiter | trüb | heiter | trüb |
| Beob.-Tage.. | 30 | 40 | 240 | 277 | 40 | 30 | 74 | 407 |
| Bar.-Mittel .. | 588·9 | 584·3 | 521·7 | 513·0 | 599·4 | 594·2 | 526·9 | 522·0 |
| 1ʰ | —23 | 10 | —06 | 22 | —07 | 34 | —09 | 12 |
| 2 | —26 | 05 | —10 | 12 | —19 | 19 | —22 | —06 |
| 3 | —28 | 02 | —15 | —02 | —34 | —02 | —37 | —24 |
| 4 | —32 | —07 | —21 | —17 | —42 | —18 | —47 | —35 |
| 5 | —36 | —19 | —26 | —28 | —42 | —28 | —47 | —41 |
| 6 | —38 | —22 | —26 | —32 | —38 | —30 | —42 | —42 |
| 7 | —25 | —19 | —19 | —29 | —24 | —33 | —34 | —37 |
| 8 | —04 | —07 | —08 | —21 | —11 | —31 | —21 | —31 |
| 9 | 13 | 02 | 05 | —12 | —02 | —26 | —10 | —22 |
| 10 | 28 | 10 | 22 | 00 | 11 | —18 | 01 | —12 |
| 11 | 39 | 19 | 27 | 06 | 20 | —07 | 12 | —01 |
| Mittag | 31 | 06 | 21 | 04 | 22 | —06 | 24 | 06 |
| 1 | 17 | —14 | 10 | —06 | 20 | —05 | 27 | 10 |
| 2 | 04 | —27 | —03 | —13 | 21 | —12 | 31 | 11 |
| 3 | 01 | —25 | —02 | —13 | 19 | —19 | 32 | 11 |
| 4 | —01 | —20 | —03 | —12 | 16 | —19 | 28 | 11 |
| 5 | 03 | —15 | —03 | —08 | 09 | —13 | 23 | 10 |
| 6 | 11 | —04 | 02 | —01 | 03 | —05 | 14 | 09 |
| 7 | 18 | 13 | 05 | 08 | 02 | 09 | 10 | 14 |
| 8 | 16 | 16 | 09 | 16 | 08 | 20 | 13 | 23 |
| 9 | 15 | 22 | 12 | 28 | 22 | 45 | 18 | 37 |
| 10 | 09 | 28 | 11 | 36 | 24 | 51 | 16 | 39 |
| 11 | 05 | 28 | 09 | 38 | 18 | 49 | 11 | 36 |
| Mitternacht | —06 | 27 | 00 | 37 | 08 | 43 | 01 | 29 |

Unter VI und VII sind die harmonischen Componenten des täglichen Ganges in den beiden üblichen Darstellungsweisen für die heiteren und trüben Tage und die einzelnen Monate eingetragen und zum Vergleiche die Werte aus II und III dazugesetzt.

## VI. Die harmonischen Componenten des täglichen Barometerganges auf dem Hohen Sonnblick

an heiteren und trüben Tagen, für die einzelnen Monate berechnet.

10 Jahre (1887 bis 1896). November und December 1890 fehlen; November und December 1886 sind einbezogen.

| | $p'$ | $q'$ | $p''$ | $q''$ | $p'''$ | $q'''$ | $p^{(4)}$ | $q^{(4)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jänner 74 heitere Tage ....... | −0·0402 | −0·0655 | 0·1094 | −0·0808 | −0·0382 | 0·0477 | −0·0063 | −0·0480 |
| 61 trübe Tage ....... | 0·1978 | −0·0646 | 0·1976 | −0·0738 | 0·0143 | 0·0453 | 0·0071 | 0·0281 |
| 310 Tage, Mittel.......... | 0·0766 | −0·0855 | 0·1543 | −0·0901 | 0·0250 | 0·0517 | −0·0042 | 0·0361 |
| Februar 59 heitere Tage ...... | 0·0584 | −0·1433 | 0·1426 | 0·0840 | −0·0491 | 0·0261 | 0·0100 | −0·0144 |
| 68 trübe Tage ....... | 0·1707 | −0·1787 | 0·1799 | −0·0441 | 0·0275 | −0·0032 | 0·0146 | 0·0051 |
| 283 Tage, Mittel.......... | 0·0640 | −0·1698 | 0·1727 | −0·0657 | −0·0351 | 0·0198 | 0·0167 | −0·0087 |
| März 51 heitere Tage......... | −0·0624 | −0·2078 | 0·1731 | 0·0819 | 0·0228 | 0·0101 | −0·0025 | 0·0036 |
| 84 trübe Tage.......... | 0·1973 | 0·2045 | 0·1913 | −0·0839 | 0·0114 | 0·0032 | 0·0150 | −0·0029 |
| 310 Tage, Mittel.......... | 0·0297 | −0·2008 | 0·1816 | −0·0806 | 0·0199 | −0·0012 | −0·0017 | 0·0036 |
| April 36 heitere Tage.... .... | 0·0577 | 0·2697 | 0·1864 | −0·0300 | 0·0011 | −0·0155 | 0·0063 | 0·0022 |
| 91 trübe Tage.......... | 0·1362 | 0·3441 | 0·1773 | −0·0725 | 0·0048 | −0·0190 | 0·0100 | 0·0004 |
| 300 Tage, Mittel.......... | 0·0249 | 0·2992 | 0·1798 | 0·0424 | −0·0042 | 0·0109 | 0·0013 | −0·0051 |
| Mai 14 heitere Tage... ...... | 0·1801 | 0·2853 | 0·1255 | 0·0542 | 0·0348 | −0·0263 | 0·0021 | 0·0008 |
| 110 trübe Tage.......... | 0·0725 | −0·2902 | 0·1577 | 0·0863 | 0·0173 | −0·0390 | 0·0054 | −0·0058 |
| 310 Tage, Mittel.......... | 0·0108 | −0·3056 | 0·1604 | 0·0712 | 0·0252 | 0·0325 | 0·0063 | 0·0050 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni 9 heitere Tage | —0·0970 | —0·3248 | 0·1576 | 0·0015 | 0·0277 | —0·0098 | —0·0029 | —0·0007 |
| 103 trübe Tage | 0·0541 | —0·2986 | 0·1764 | 0·0528 | 0·0258 | 0·0348 | 0·0021 | 0·0065 |
| 300 Tage, Mittel | —0·0275 | 0·3076 | 0·1645 | 0·0470 | 0·0248 | 0·0338 | 0·0050 | —0·0029 |
| Juli 14 heitere Tage | —0·1271 | —0·3159 | 0·1092 | —0·0278 | 0·0247 | —0·0455 | —0·0042 | 0·0043 |
| 98 trübe Tage | 0·1389 | —0·2928 | 0·1584 | —0·0515 | 0·0240 | —0·0210 | 0·0029 | 0·0108 |
| 310 Tage, Mittel | —0·0023 | —0·2714 | 0·1520 | —0·0347 | 0·0194 | —0·0246 | 0·0000 | —0·0101 |
| August 37 heitere Tage | —0·0880 | —0·3061 | 0·1408 | —0·0241 | 0·0339 | —0·0013 | —0·0183 | 0·0030 |
| 96 trübe Tage | 0·1038 | —0·2638 | 0·1499 | —0·0488 | 0·0202 | —0·0249 | —0·0046 | —0·0079 |
| 310 Tage, Mittel | 0·0001 | —0·2778 | 0·1532 | —0·0464 | 0·0176 | —0·0240 | —0·0100 | —0·0043 |
| September 34 heitere Tage | —0·0603 | —0·2326 | 0·1416 | —0·0605 | —0·0131 | 0·0050 | —0·0096 | —0·0007 |
| 84 trübe Tage | 0·1276 | —0·2289 | 0·1541 | 0·0694 | —0·0077 | 0·0020 | 0·0013 | —0·0051 |
| 300 Tage, Mittel | 0·0085 | —0·2299 | 0·1495 | —0·0612 | —0·0096 | —0·0079 | —0·0021 | 0·0043 |
| October 30 heitere Tage | —0·0338 | —0·1332 | 0·1402 | —0·0751 | —0·0137 | 0·0310 | —0·0017 | —0·0130 |
| 108 trübe Tage | 0·1770 | —0·2351 | 0·1856 | —0·0986 | —0·0226 | 0·0146 | 0·0096 | —0·0195 |
| 310 Tage, Mittel | 0·0730 | —0·2018 | 0·1627 | —0·0913 | —0·0226 | 0·0122 | 0·0013 | —0·0071 |
| November 63 heitere Tage | —0·0778 | —0·0880 | 0·0769 | —0·1109 | —0·0290 | 0·0324 | —0·0100 | —0·0101 |
| 79 trübe Tage | 0·1449 | —0·1491 | 0·1752 | —0·1178 | —0·0011 | 0·0411 | 0·0125 | —0·0202 |
| 270 Tage, Mittel | 0·0499 | —0·1240 | 0·1328 | —0·1195 | —0·0259 | 0·0342 | 0·0067 | —0·0245 |
| December 44 heitere Tage | —0·0755 | —0·0889 | 0·1215 | —0·0964 | —0·0187 | 0·0501 | —0·0042 | —0·0361 |
| 78 trübe Tage | 0·1543 | —0·1051 | 0·1275 | —0·0996 | 0·0089 | 0·0269 | —0·0038 | —0·0253 |
| 270 Tage, Mittel | 0·0191 | —0·0914 | 0·1233 | —0·0896 | —0·0161 | 0·0462 | —0·0038 | —0·0325 |

## VII. Die harmonischen Componenten des täglichen Barometerganges auf dem Hohen Sonnblick

an heiteren und trüben Tagen, für die einzelnen Monate berechnet, durch Sinuse ausgedrückt.

10 Jahre (1887 bis 1896); November und December 1890 fehlen. Die heiteren und trüben Tage von November und December 1886 sind einbezogen.

| Monat | Tage | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Jänner | 74 heitere Tage | 0·0769 sin (211°32'+θ) | +0·1360 sin (126°27'+2θ) | +0·0611 sin (321°18'+3θ) | +0·0484 sin (352°31'+4θ) |
| | 61 trübe Tage | 0·2081 sin (108 05 +θ) | +0·2109 sin (110 29 +2θ) | +0·0475 sin ( 17 38 +3θ) | +0·0290 sin (194 11 +4θ) |
| | 310 Tage, Mittel | 0·1148 sin (138 09 +θ) | +0·1787 sin (120 17 +2θ) | +0·0574 sin (334 12 +3θ) | +0·0363 sin (186 38 +4θ) |
| Februar | 59 heitere Tage | 0·1547 sin (202 11 +θ) | +0·1655 sin (120 30 +2θ) | +0·0556 sin (297 59 +3θ) | +0·0175 sin (145 14 +4θ) |
| | 68 trübe Tage | 0·2471 sin (136 19 +θ) | +0·1852 sin (103 46 +2θ) | +0·0277 sin (263 22 +3θ) | +0·0155 sin ( 70 45 +4θ) |
| | 283 Tage, Mittel | 0·1815 sin (159 21 +θ) | +0·1848 sin (110 50 +2θ) | +0·0403 sin (299 26 +3θ) | +0·0188 sin (117 31 +4θ) |
| März | 51 heitere Tage | 0·2170 sin (196 43 +θ) | +0·1915 sin (115 20 +2θ) | +0·0249 sin (293 54 +3θ) | +0·0044 sin (325 13 +4θ) |
| | 84 trübe Tage | 0·2842 sin (136 01 +θ) | +0·2089 sin (113 41 +2θ) | +0·0118 sin (285 41 +3θ) | +0·0153 sin (100 57 +4θ) |
| | 310 Tage, Mittel | 0·2030 sin (171 35 +θ) | +0·1987 sin (113 56 +2θ) | +0·0199 sin (266 33 +3θ) | +0·0051 sin (334 44 +4θ) |
| April | 36 heitere Tage | 0·2770 sin (191 15 +θ) | +0·1881 sin ( 99 36 +2θ) | +0·0158 sin (190 15 +3θ) | +0·0084 sin (301 47 +4θ) |
| | 91 trübe Tage | 0·3701 sin (158 45 +θ) | +0·1916 sin (112 14 +2θ) | +0·0205 sin (166 27 +3θ) | +0·0100 sin ( 87 43 +4θ) |
| | 300 Tage, Mittel | 0·3002 sin (175 15 +θ) | +0·1847 sin (103 16 +2θ) | +0·0117 sin (201 04 +3θ) | +0·0054 sin (194 18 +4θ) |
| Mai | 14 heitere Tage | 0·3374 sin (212 16 +θ) | +0·1367 sin (113 22 +2θ) | +0·0436 sin (127 05 +3θ) | +0·0022 sin (107 51 +4θ) |
| | 110 trübe Tage | 0·2991 sin (165 58 +θ) | +0·1798 sin (118 41 +2θ) | +0·0427 sin (156 05 +3θ) | +0·0079 sin (137 02 +4θ) |
| | 310 Tage, Mittel | 0·3058 sin (182 02 +θ) | +0·1755 sin (113 56 +2θ) | +0·0411 sin (142 13 +3θ) | +0·0080 sin ( 51 34 +4θ) |
| Juni | 9 heitere Tage | 0·3390 sin (196 38 +θ) | +0·1576 sin ( 90 33 +2θ) | +0·0294 sin (109 29 +3θ) | +0·0030 sin (256 26 +4θ) |
| | 103 trübe Tage | 0·3034 sin (169 44 +θ) | +0·1842 sin (105 00 +2θ) | +0·0433 sin (143 27 +3θ) | +0·0068 sin (197 54 +4θ) |
| | 300 Tage, Mittel | 0·3082 sin (185 07 +θ) | +0·1711 sin (105 57 +2θ) | +0·0413 sin (143 43 +3θ) | +0·0058 sin (120 07 +4θ) |

Juli 14 heitere Tage.....0·3405 sin (201°54'+θ)+0·1127 sin (104°17'+2θ)+0·0518 sin (151°30'+3θ)+0·0060 sin (315°41'+4θ)
98 trübe Tage......0·3241 sin (154 37 +θ)+0·1666 sin (107 59 +2θ)+0·0319 sin (131 11 +3θ)+0·0112 sin (164 58 +4θ)
310 Tage, Mittel.....0·2714 sin (180 29 +θ)+0·1559 sin (102 52 +2θ)+0·0313 sin (141 44 +3θ)+0·0101 sin (180 00 +4θ)

August 37 heitere Tage..0·3185 sin (196 03 +θ)+0·1429 sin ( 99 43 +2θ)+0·0339 sin ( 92 12 +3θ)+0·0185 sin (260 42 +4θ)
96 trübe Tage...0·2835 sin (158 31 +θ)+0·1576 sin (108 02 +2θ)+0·0321 sin (140 57 +3θ)+0·0091 sin (210 13 +4θ)
310 Tage, Mittel.....0·2778 sin )180 00 +θ)+0·1601 sin (106 51 +2θ)+0·0298 sin (143 45 +3θ)+0·0109 sin (246 44 +4θ)

September 34 heitere Tage.0·2403 sin (194 32 +θ)+0·1540 sin (113 08 +2θ)+0·0140 sin (290 53 +3θ)+0·0096 sin (265 50 +4θ)
84 trübe Tage..0·2621 sin (150 51 +θ)+0·1690 sin (114 15 +2θ)+0·0080 sin (284 33 +3θ)+0·0053 sin (165 42 +4θ)
300 Tage, Mittel.....0·2301 sin (177 53 +θ)+0·1615 sin (112 16 +2θ)+0·0124 sin (230 33 +3θ)+0·0048 sin (333 58 +4θ)

October 30 heitere Tage. 0·1374 sin (194 14 +θ)+0·1600 sin (118 11 +2θ)+0·0339 sin (336 10 +3θ)+0·0131 sin (187 16 +4θ)
108 trübe Tage...0·2943 sin (143 06 +θ)+0·2101 sin (117 59 +2θ)+0·0269 sin (302 52 +3θ)+0·0217 sin (153 47 +4θ)
310 Tage, Mittel.....0·2146 sin (160 07 +θ)+0·1866 sin (119 18 +2θ)+0·0257 sin (298 22 +3θ)+0·0072 sin (169 38 +4θ)

November 63 heitere Tage.0·1175 sin (221 29 +θ)+0·1350 sin (145 16 +2θ)+0·0435 sin (318 10 +3θ)+0·0142 sin (224 43 +4θ)
79 trübe Tage..0·2079 sin (135 49 +θ)+0·2111 sin (123 55 +2θ)+0·0411 sin (358 27 +3θ)+0·0232 sin (148 15 +4θ)
270 Tage, Mittel.... 0·1337 sin (158 04 +θ)+0·1787 sin (131 59 +2θ)+0·0429 sin (322 52 +3θ)+0·0254 sin (164 42 +4θ)

December 44 heitere Tage.0·1163 sin (210 20 +θ)+0·1551 sin (128 26 +2θ)+0·0535 sin (339 32 +3θ)+0·0364 sin (186 38 +4θ)
78 trübe Tage..0·1867 sin (124 16 +θ)+0·1618 sin (128 00 +2θ)+0·0283 sin ( 18 18 +3θ)+0·0256 sin (188 33 +4θ)
271 Tage, Mittel.....0·0934 sin (168 12 +θ)+0·1524 sin (126 00 +2θ)+0·0489 sin (340 47 +3θ)+0·0327 sin (186 40 +4θ).

Auf Tafel II, Fig. 1, sind die harmonischen Componenten $a_1 A_1$ und $a_2 A_2$ für die heiteren und trüben Tage der einzelnen Monate nach der früher gegebenen Erklärung graphisch dargestellt. Man ersieht daraus, dass die Vectoren der ganztägigen Druckschwankung an heiteren Tagen während des ganzen Jahres im 3. Quadranten, an trüben Tagen im 2. Quadranten verbleiben. Im December und Jänner ist der Epochenwinkel $A_1$ kleiner als $A_2$.

Der Vector der halbtägigen Druckschwankung erfährt an den heiteren Tagen eine viel größere Richtungsänderung als an trüben Tagen, der Epochenwinkel $A_2$ liegt an den heiteren Tagen zwischen 90° 33′ im Juni und 145° 16′ im November; an trüben Tagen zwischen 103° 46′ im Februar und 128° 00′ im December.

Die Amplitude $a_1$ der einmaligen täglichen Druckschwankung wächst an heiteren Tagen vom Jänner bis zum Juni und Juli und nimmt dann wieder ab; an trüben Tagen wächst sie vom December bis zum April und nimmt von da an wieder ab. Sie ist an heiteren Tagen während der Monate October bis April kleiner, während der Monate Mai bis September größer, als an trüben Tagen.

Die Extreme der ganztägigen Druckschwankung treten an heiteren Tagen durchwegs früher auf als an trüben Tagen; die Phasendifferenzen zwischen den heiteren und trüben Tagen steigen in den Monaten November, December und Jänner bis auf 100° an, was einem Vorsprunge von 6 Stunden entspricht. In den Sommermonaten ist diese Phasendifferenz etwa 40°, der entsprechende Zeitvorsprung 3 Stunden.

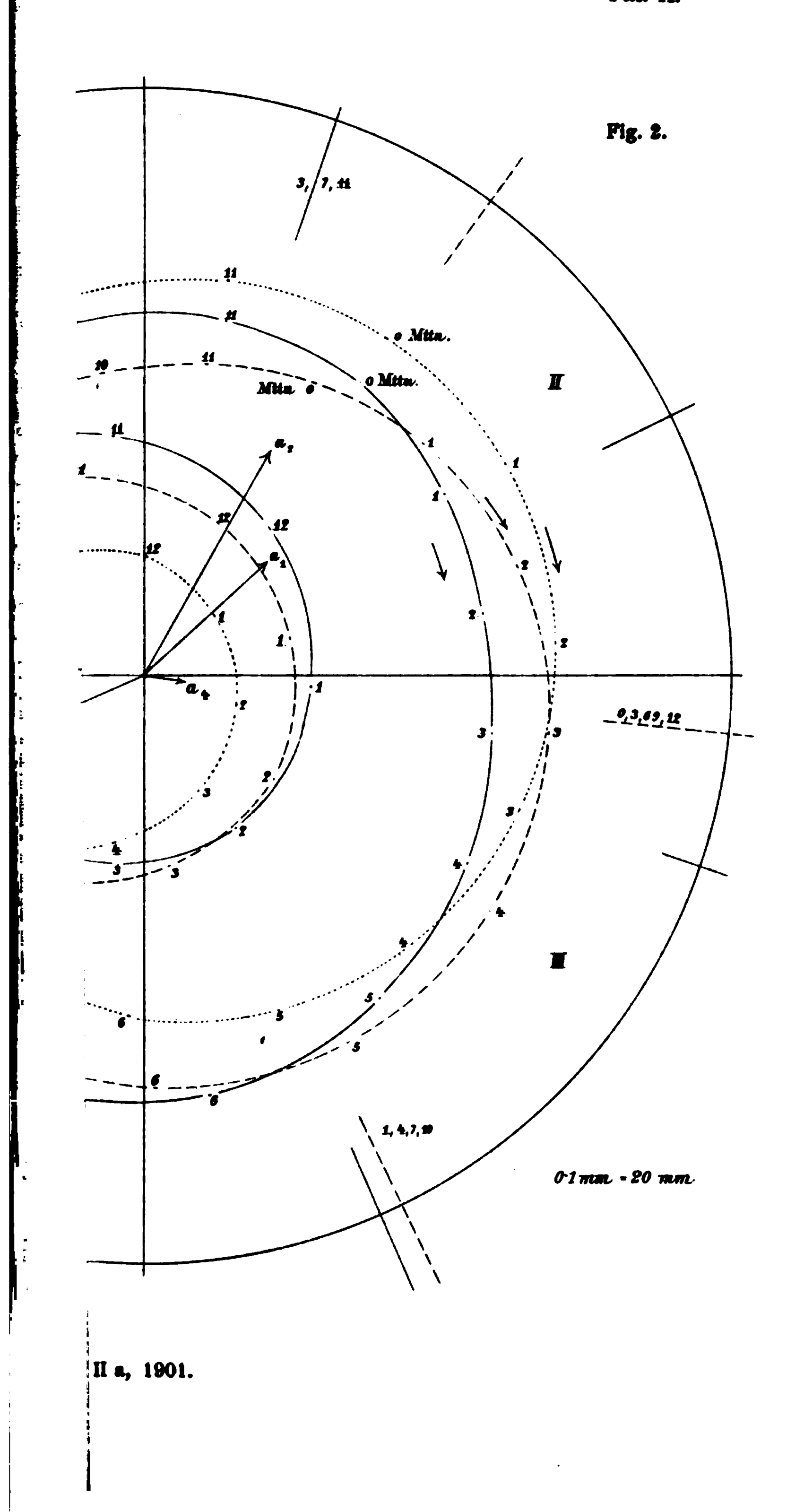
Die zweimalige tägliche Druckschwankung wird auf dem Sonnblick an den heiteren Tagen des Sommerhalbjahres durch die thermische Druckschwankung gegen das Monatsmittel, für die einzelnen Monate allerdings in verschiedenen Beträgen verspätet. In den Monaten Juni, Juli und August sind die Extreme der zweimaligen täglichen Druckschwankung auch an trüben Tagen gegen das Jahresmittel verspätet.

Die Amplitude $a_3$ der dreimaligen täglichen Druckschwankung ist an heiteren Tagen bis auf die Monate April, Juni und September größer als an trüben Tagen. In den

Monaten März, April und September zeigt dieselbe überhaupt wesentlich kleinere Werte. In den Monaten September bis März liegt der Epochenwinkel $A_3$ an heiteren Tagen im 3., in den Monaten Mai, Juni, Juli und August im 2. Quadranten. An trüben Tagen liegt der Epochenwinkel $A_3$ von April bis August im 2. Quadranten, während der übrigen Monate im 1. und 4., im Februar im 3. Quadranten.

Die Amplitude der viermaligen täglichen Schwankung zeigt nur vom October bis Februar merkliche Werte, die Epochenwinkel liegen im 1., 4. oder 3. Quadranten und sind an trüben Tagen zumeist kleiner als an heiteren.

Taf. II.




II a, 1901.

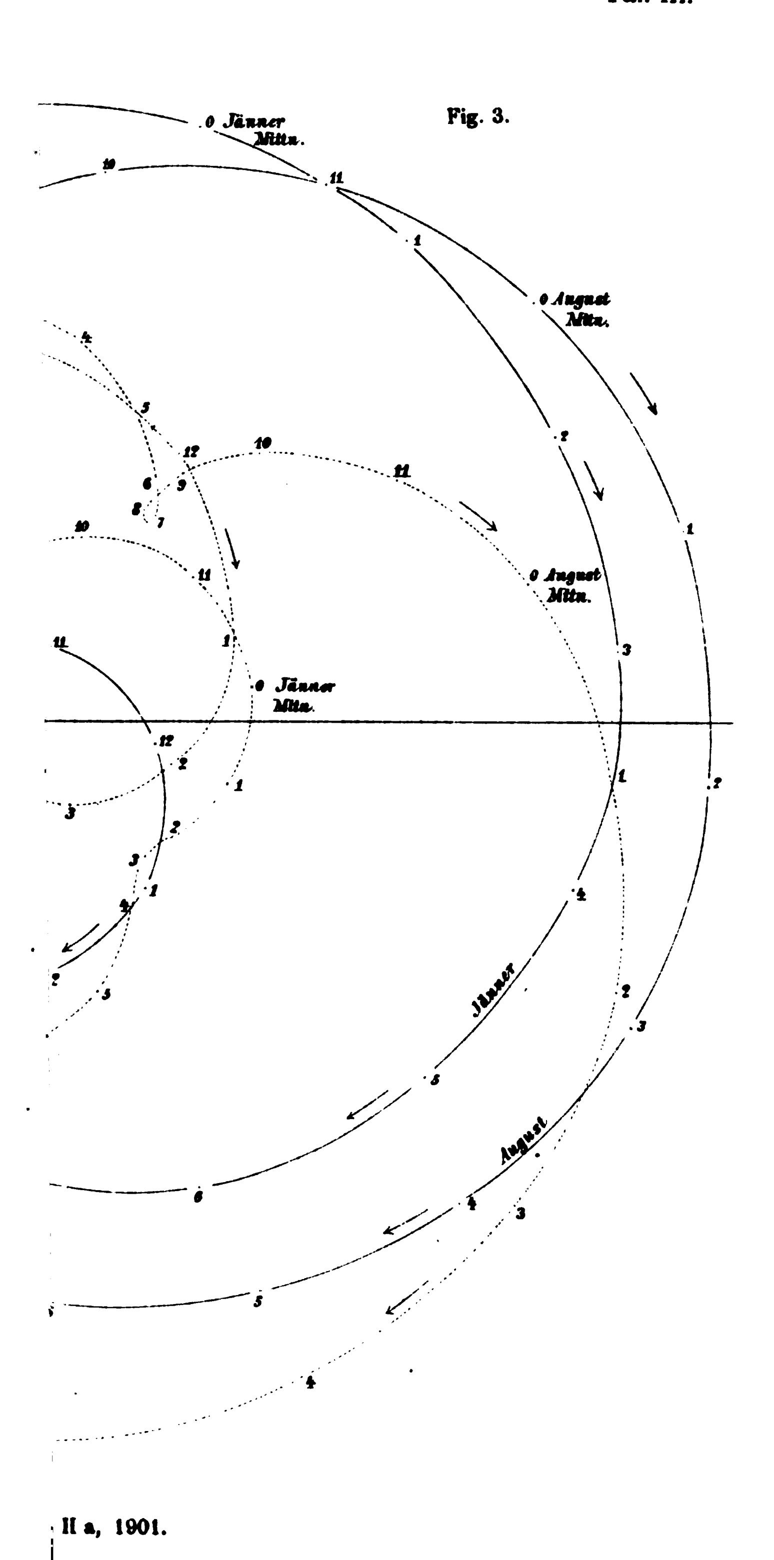
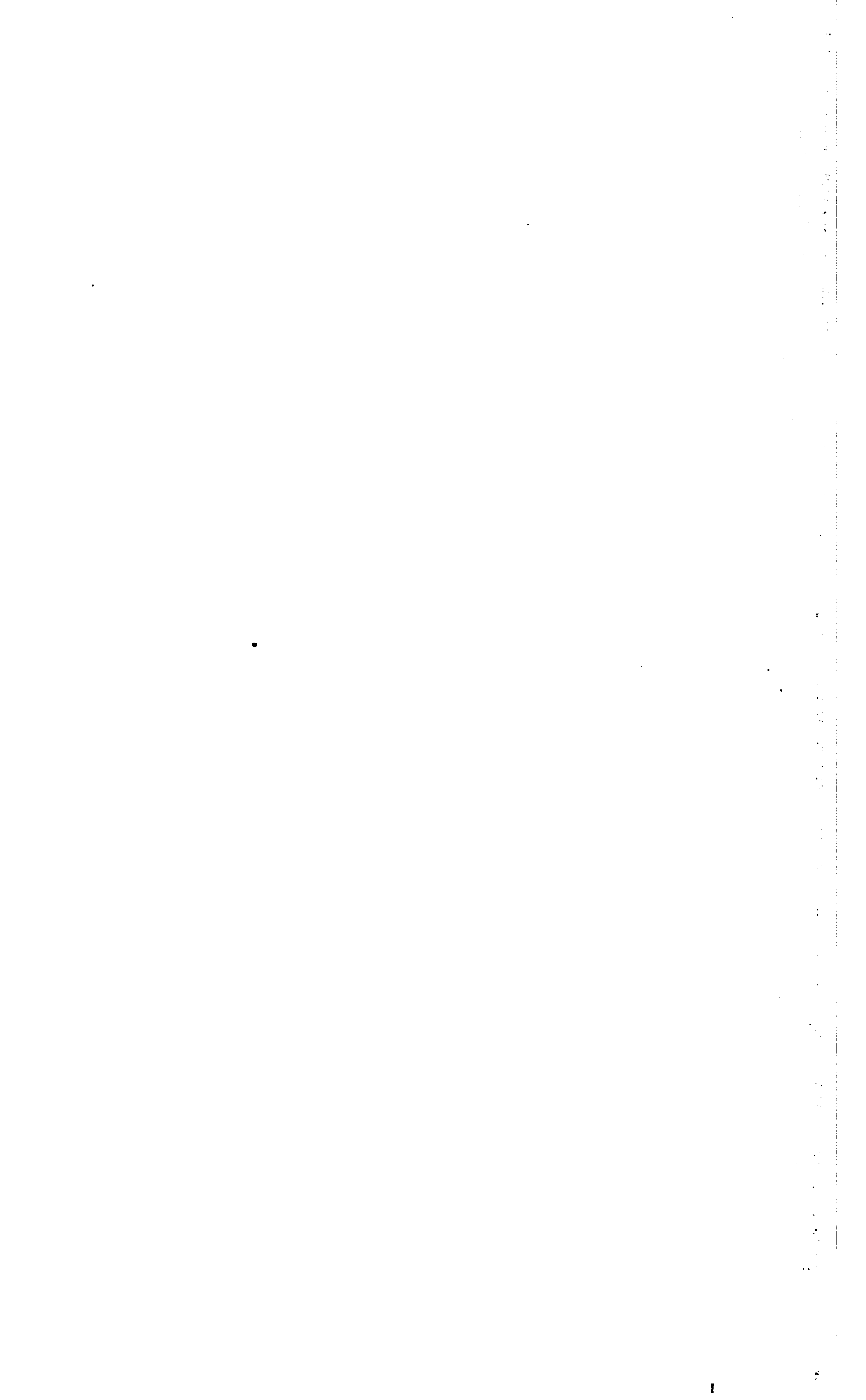

0 Jänner Mittn.
11
10
1
0 August Mittn.
2
1
3
12
10
11
0 August Mittn.
4
5
6
9
8
7
10
11
1
0 Jänner Mittn.
11
12
2
1
3
2
3
1
4
2
5
Jänner
5
6
August
2
3
4
3
5
4

Fig. 3.



# Studien über die Wirbelbewegungen

von

**Alois Indra,**

*k. u. k. Oberst.*

(Mit 16 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1901.)

Die nachstehend erörterten Versuche über Wirbelbewegungen habe ich schon vor recht langer Zeit — vor 18 Jahren — ausgeführt, als ich 1882 in der IV. Section des technischen Militär-Comité als Referent in physikalischen und technologischen Fragen Verwendung fand.

Wenn ich diese Studien bisher nicht veröffentlichte, so lag der Grund darin, dass die Beschreibung der Experimente allein, ohne erschöpfende mathematische Behandlung und insbesonders ohne Nutzanwendung derselben auf verschiedene Probleme der Physik, nicht meinen Intentionen entsprach. Die Bedeutung dieses Gegenstandes liegt, wie ich glaube, nicht in den Experimenten mit den Rauchringen selbst, sondern in der Verallgemeinerung der sich hiebei ergebenden Erscheinungen und Gesetze. Dieselben Vorgänge, die sich sichtbar an den Rauchringen aus ponderablem Stoffe darbieten, wird man unmittelbar auch auf Ätherbewegungen übertragen können und somit die Gesetze der Rauchringe auch zur Erklärung elektrischer und der Lichterscheinungen ausnützen dürfen.

Um dies thun und an einzelnen Fällen überzeugend darlegen zu können, bedarf es aber noch weiterer Studien und insbesonders auch grundlegender Versuche, zu deren Ausführung mir meine sonstige dienstliche Thätigkeit bisher nicht die Zeit ließ und ich namentlich auch nicht in der Lage war, über die nöthigen Experimentiermittel verfügen zu können.

Wenn ich mich nun doch entschlossen habe, die nachstehend beschriebenen Versuche ohne mathematische Behandlung ihres Wesens und ohne Verallgemeinerung auf Ätherbewegungen — also gleichsam als Torso — zu veröffentlichen, so bin ich hiezu durch den Umstand geführt worden, dass die Rauchringe neuerdings durch das in großem Umfange wieder aufgenommene »Wetterschießen« eine actuelle und speciell praktische Bedeutung erlangt haben.

Wenn daher vieles in nachstehender Abhandlung nur flüchtig angedeutet ist und somit lückenhaft erscheint, so bitte ich das entschuldigen zu wollen, indem ich mir vorbehalte, diesen Gegenstand noch einer späteren, eingehenderen Erörterung zu unterziehen und dabei dasjenige nachzuholen, was vorläufig nur in allgemeinen Umrissen skizziert ist.

1. Zur mechanischen Darstellung der Wirbelbewegungen bediente ich mich einfacher parallelopipedischer Kästen mit zwei

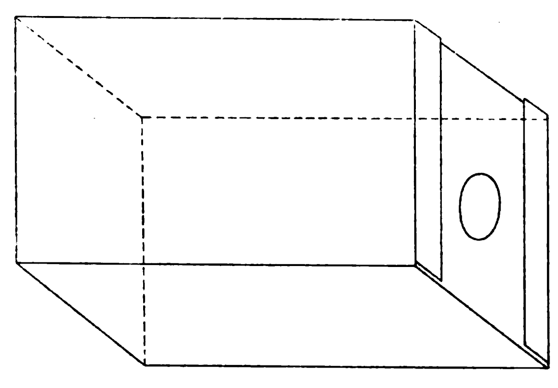


Fig. 1.

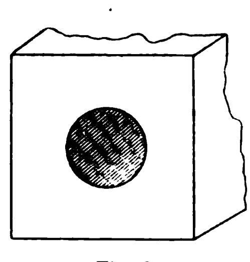
Glaswänden und zwei Wänden mit kreisförmigen Öffnungen, vor welchen Kartenblätter mit beliebig gestalteten Durchlochungen (Discontinuitäten) eingeschoben werden konnten. Die obere Fläche des Kastens war mit Pergament überspannt. Solche Kästen (Fig. 1) standen mir in verschiedenen Dimensionen und in größerer Zahl zu Gebote, um die verschiedenen Formen von Wirbelbewegungen und ihre gegenseitigen Einwirkungen darstellen zu können.

Um die Wirbelbewegung sichtbar zu machen, füllte ich die Kästen am einfachsten mit Tabakrauch.

Wird die Pergamentfläche des rauchgefüllten Kastens angeklopft, so tritt bei jeder kreisförmigen Öffnung der beiden Seitenwände je ein Wirbelring aus, den wir vor allem subjectiv näher untersuchen wollen.

Um unsere Aufmerksamkeit nur auf einen Wirbelring zu beschränken, schließen wir die zweite Öffnung im Kasten, so dass der Ring nur an der einen Seite austritt.

Es ist selbstverständlich, dass die Geschwindigkeit des ausfahrenden Wirbelringes umso größer ist, mit je größerer Intensität wir auf die Pergamentfläche klopfen.



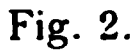


Fig. 2.

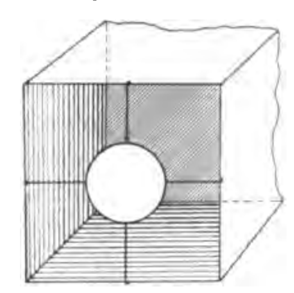


Fig. 3.

Gleichzeitig als der aus der Rauchatmosphäre des Kastens gebildete Wirbelring nach außen tritt, gelangt auch von der kreisförmigen Discontinuität ein aus der äußeren Luft gebildeter Wirbelring in das Innere des Kastens und ist durch seine dunkle Färbung erkenntlich.

Diese Erscheinung ist bekannt: immer entstehen an der Discontinuität zwei nach entgegengesetzten Richtungen auseinandergehende Wirbelringe, und wir fragen nun, wie entstehen diese Wirbelringe?

Hiebei müssen wir zwei Arten von Discontinuitäten unterscheiden; ich bezeichne sie mit »äußeren« und »inneren« Discontinuitäten. Unter äußeren verstehe ich solche, bei welchen die begrenzende feste Wand außen, die freie Öffnung innen sich befindet, wie in Fig. 2. Eine innere Discontinuität ist jene, bei welcher die feste begrenzende Wand innen, der freie Raum außen sich befindet, wie in Fig. 3.

Betrachten wir zuerst die Wirbelbildung bei einer äußeren Discontinuität: Durch den auf die schwingende Membran des Kastens ausgeübten Stoß wird auch das im Kasten enthaltene elastische Medium zu Longitudinalschwingungen veranlasst, welche sich durch die freie Öffnung ungehindert nach außen fortpflanzen kann. Wir sehen indes von der Schwingung ab und fassen nur die durch die freie Öffnung nach außen tretende translatorische Bewegung der Rauchmasse ins Auge.

An der inneren festen Wand des Kastens wird die translatorische Bewegung reflectiert und setzt die Schwingungen im Inneren des Kastens fort.

An der Grenze der Discontinuität haben wir es also mit zwei in entgegengesetzter Richtung verlaufenden Translationen zu thun, welche bei einem unelastischen Medium eine Trennung der Theilchen zur Folge hätten. Beim elastischen Medium sind die Theilchen untrennbar; infolge dessen werden sie zur Rotation veranlasst, und zwar im Sinne der in der Figur angezeigten Pfeile: auf diese Art entsteht der directe Wirbelring. Gleichzeitig wird aber an der Discontinuität durch die Erschütterung bei der rückgängigen Bewegung der Membran ein Wirbelring im äußeren Medium initiiert, welcher die entgegengesetzte Rotation und Bewegung gegen das Innere des Kastens hat, ich nenne ihn den conjugierten Wirbelring.

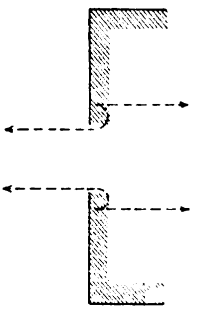


Fig. 4.

Die beiden Wirbelringe können dadurch charakterisiert werden, dass wir uns die in einem Diametralschnitt befindlichen Theilchen auf äußeren Leitlinien in entgegengesetzten Richtungen fortrollend vorstellen, wie dies in Fig. 5 und 6 dargestellt ist.

Bei der Betrachtung einer inneren Discontinuität erhalten wir selbstverständlich die entgegengesetzten Verhältnisse: der directe Wirbel geht nach innen, der conjugierte nach außen.

Die beiden Wirbelarten (directer und conjugierter Wirbel) unterscheiden sich schon beim Experiment auffallend durch die Intensität ihrer fortschreitenden Bewegung. Da

beim directen Wirbel die fortschreitende und die Drehbewegung sich in der Bewegungsrichtung summieren, während beim conjugierten Wirbel diese beiden Bewegungsarten entgegengesetzt gerichtet sind, so ist die Intensität des directen Wirbels größer

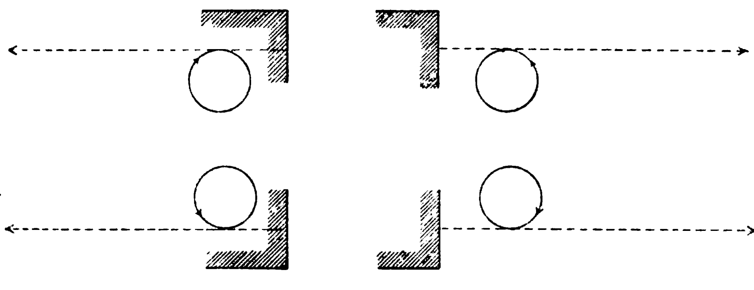


Fig. 5. Directer (äußerer) Wirbelring.

Fig. 6. Conjugiertér (äußerer) Wirbelring.

als die der conjugierten, und dies ist das wesentliche Merkmal der beiden Wirbelarten; in mathematischen Symbolen ausgedrückt, verhält sich die Intensität des directen Wirbels zu

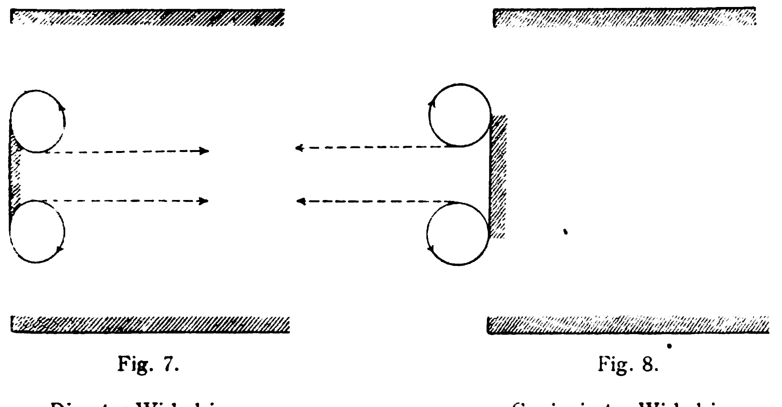


Fig. 7. Directer Wirbelring.

Fig. 8. Conjugierter Wirbelring.

der des conjugierten wie eine Größe von der Form $A+B$ zu einer Größe $A-B$.

Bei den nachfolgenden Experimenten betrachten wir vorläufig nur die directen Wirbel.

Wenn wir die Membran des Kastens mit einer bedeutenden Intensität anschlagen, so bewegt sich von der kreisförmigen

Discontinuität ein Wirbelring mit großer Geschwindigkeit in einer auf die Ebene der Discontinuität senkrechten Richtung nach vorwärts, und indem wir denselben in seiner geradlinigen Bahn verfolgen, machen wir folgende Beobachtung: Anfänglich sehen wir den Wirbelring mit großer Leichtigkeit nach vorwärts schießen; dann kommt in gewisser Entfernung ein Moment, in welchem wir glauben, der Wirbelring stehe stille, und gleich darauf haben wir die Erscheinung, als ob der Ring sich nur mit Anstrengung nach vorwärts bewege; in der That haben wir es hier mit drei verschiedenen Formen des einfachen Wirbelringes zu thun: ich bezeichne den anfänglichen Wirbelring als activen, den dritten Theil als passiven und den Übergang zwischen beiden, welcher einen scheinbaren Ruhepunkt darstellt, als neutralen Zustand des Wirbelringes. Die Bedeutung dieser drei Zustände wird aus der am Schlusse dieser Abhandlung gegebenen Darstellung klar werden.

Ist die Intensität, mit welcher wir den Wirbelring erzeugen, nur gering, dann erscheint nur ein passiver Wirbelring; desgleichen sind die aus einer längeren Röhre austretenden Ringe nur passiv.

2. Wenn wir in die Bahn eines Wirbelringes störende Verhältnisse bringen, so zeigen sich Abweichungen, von welchen ich nur die charakteristischesten andeute:

Eine in der Bewegungsrichtung des Wirbels entgegengehaltene scharfe Kante, welche sich am Ring als Durchmesser projiciert, übt auf die Bewegung desselben keinen störenden (ablenkenden) Einfluss.

Wird dagegen die scharfe Kante außerhalb des Durchmessers oder derart gehalten, dass der Rand des Wirbelringes die scharfe Kante streift, so entsteht eine Ablenkung gegen die Seite der störenden Kante, bei längerer Dauer des störenden Einflusses sogar eine Abspaltung des Wirbelringes.

Zieht man statt der Kante die störende Ebene in Betracht, so kann gezeigt werden, dass der Neigungswinkel, welchen die störende Ebene mit der Bewegungsrichtung der Wirbel bildet, im directen Verhältnisse von Einfluss ist auf die Größe der Ablenkung und auf das Verhältnis der Intensitäten der

gespaltenen Wirbel, so zwar, dass bei einem bestimmten Neigungswinkel wieder keine Spaltung, sondern nur eine totale Ablenkung gegen die störende Ebene erfolgt.

Ich bezeichne diese beschriebene Erscheinung in Analogie zu anderen ähnlichen Erscheinungen als **Brechung** der Wirbelringe.

3. Wenn wir die störende Ebene senkrecht auf die Bewegungsrichtung des Wirbelringes entgegenstellen, so können wir folgende Beobachtungen machen:

Ist die Ebene voll (continuierlich), so erfolgt ein Anprallen des Wirbelringes und ein Ausbreiten desselben längs der Ebene, bis sich der Ring in eine dünne Schichte auflöst.

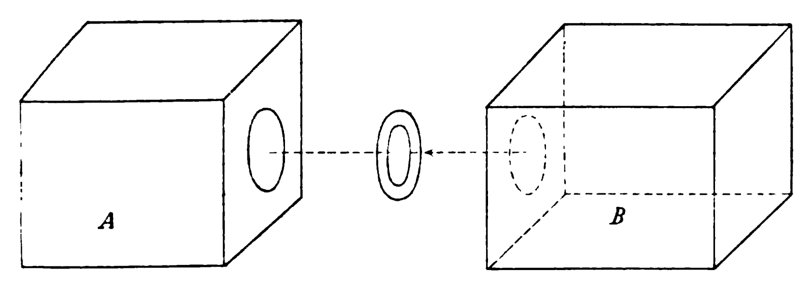



Fig. 9.

Ist die Ebene durchbrochen (discontinuierlich), so entstehen Erscheinungen, welche den Absorptions-, beziehungsweise Reflexionserscheinungen analog sind, weshalb wir sie auch als solche bezeichnen können.

Die einfachste Erscheinung ist jene, wenn die störende Ebene genau im Auftreffpunkte des Wirbels eine dem Ringe entsprechende gleich große kreisförmige Unterbrechung besitzt. Dann geht der Wirbel durch diese Öffnung hindurch, erzeugt aber beim Durchgange durch dieselbe einen conjugierten Wirbel, ähnlich wie beim Austritt aus der primären Öffnung, und zwar in der der eigenen Bewegung entgegengesetzten Richtung.

Wir überzeugen uns von dieser Thatsache, indem wir zwei mit ganz gleichen Kreisöffnungen versehene Kästen *A* und *B* (Fig. 9) mit den Öffnungen einander gegenüberstellen.

Der Kasten $B$ ist mit Rauch gefüllt, der Kasten $A$ ist leer. Wenn wir auf die Membran des leeren Kastens klopfen, so sehen wir aus dem ganz isoliert stehenden Kasten $B$ einen Rauchring genau in der Richtungslinie der beiden Öffnungen heraustreten, und es macht der ganze Vorgang auf uns den Eindruck einer Fernwirkung.

Während wir nämlich den im leeren Kasten $A$ gebildeten Wirbelring nicht sehen, trifft er die gegenüberstehende Wand des Kastens $B$ und erzeugt an der Discontinuität den conjugierten Wirbel, welcher, da er aus der gefärbten Luft des Rauchkastens $B$ gebildet wird, als Rauchring gesehen wird.

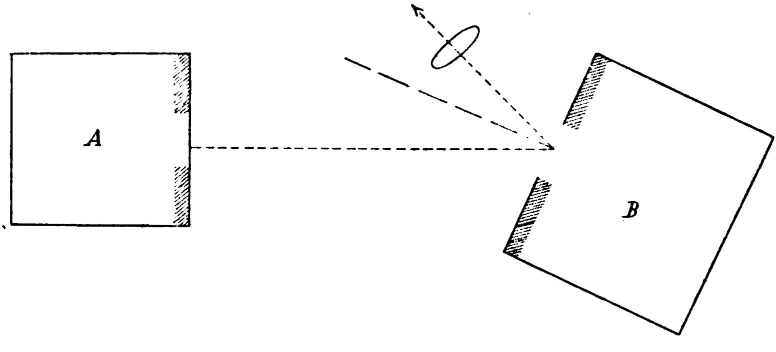



Fig. 10.

Der in den Rauchkasten eintretende directe Luftring kann durch seine dunklere Färbung im Kasten wahrgenommen werden.

Wird nun der Kasten $B$ um den verticalen Durchmesser gedreht, so dass die beiden Ebenen, welche die Discontinuitäten enthalten, einen Winkel miteinander einschließen, wie in Fig. 10, so wird beim Anklopfen des Kastens $A$ aus dem schief gestellten Rauchkasten $B$ ein Rauchring austreten, welcher sichtlich von der Symmetrie-Ebene des Kastens $B$ um beiläufig denselben Winkel abweicht, den die Verbindungslinie der beiden Kreisöffnungen mit der genannten Symmetrie-Ebene bildet. Es wird daher jetzt sowohl eine Reflexion, als auch eine Brechung stattfinden, und zwar durch die Erscheinung des conjugierten Wirbels.

Der directe Wirbel erleidet nur nach dem bereits früher Gesagten eine Ablenkung.

Wenn wir nun aber die Intensität der fortschreitenden Bewegung ins Auge fassen, so erleidet selbe an der zweiten Discontinuität zweifellos eine Störung, indem an derselben wieder so wie an der primären Öffnung Translation in Rotation verwandelt wird; es wird daher die Translationsgeschwindigkeit ab-, die Rotationsgeschwindigkeit zunehmen. Dies ist jedoch nur möglich, wenn sich der Halbmesser der rotierenden Schichten verkleinert. Daraus folgt, dass bei jedem Durchgange des Wirbelringes durch gleiche Kreisöffnungen die Rotationsgeschwindigkeit des Ringes verstärkt, der Durchmesser desselben aber proportional verkleinert wird.

Diese Erscheinung können wir vorläufig mit der Absorbtion in Analogie bringen, indem die Abnahme der Quantität des Wirbels auf Kosten der Zunahme der Rotationsintensität in ähnlicher Weise erfolgt, wie bei der Absorbtion des Lichtes die Transversalschwingung in eine der Wärme entsprechende andere Bewegungsform umgewandelt wird, daher als Lichterscheinung theilweise verschwindet oder absorbiert wird.

Diese Art von Absorbtion wird umso intensiver in die Erscheinung treten, wenn die nachfolgenden Discontinuitäten kleinere Durchmesser besitzen, als die vorhergehenden und umgekehrt; in ähnlicher Weise ist ja auch die Absorbtionsintensität des Lichtes beim Übergange aus einem dünneren Medium in ein dichteres größer als umgekehrt.

4. Wir haben bisher nur eine kreisförmige Discontinuität in Betracht gezogen. Wir erhalten ganz analoge Erscheinungen, nämlich den directen und conjugierten Wirbelring, wenn die Discontinuität durch ein beliebiges Dreieck, Quadrat oder regelmäßiges Vieleck — überhaupt durch eine Gleichgewichtsfigur begrenzt wird, in welche ein Kreis eingeschrieben werden kann.

Nehmen wir dagegen ein Rechteck oder eine Ellipse als Discontinuitätsgrenze, dann hat der austretende Wirbelring nicht mehr die Kreisform, sondern es entsteht bei größerer Intensität des initiierten Wirbels ein Ellipsring, welcher

periodisch die große und kleine Achse wechselt, daher zwischen den beiden Achsen hin- und herschwingt.

Ist aber die Intensität des initiierten Ringes verhältnismäßig klein, dann löst sich beim Austreten aus derselben Discontinuität die Ellipse in zwei Kreisringe, entsprechend der kleinen Halbachse der Ellipse, so dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Kreisringe in der kleinen Achse der Ellipse liegt.

Man kann die Bildung dieser zwei Kreiswirbel ganz genau verfolgen, indem man bei Verwendung einer rechteckigen oder elliptischen Discontinuität von der Form $ABAB$, Fig. 11, nur langsam auf die Membran des Kastens drückt (nicht klopft). Man sieht zuerst eine der Contour der elliptischen Discontinuität entsprechende Form eines Ringes austreten, welche jedoch unmittelbar nach dem Austritte sich derart umformt, dass die Theile $A$ an den Endpunkten der kleinen Achse der Ellipse sich abstoßen, während die Theile $B$ an den Endpunkten der großen Achse sich anziehen bis durch die Übergangsform $A'B'A'B'$ hindurch in $C$ und $D$ je ein geschlossener Kreisring von entsprechend kleiner Dimension gebildet wird.

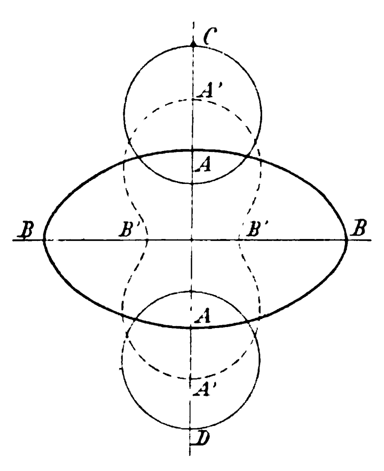


Fig. 11.

Die geradlinigen Bahnen der beiden Wirbelringe liegen in einer auf der Discontinuität senkrechten, durch die kleine Achse der Ellipse gelegten Ebene und schließen miteinander einen spitzen Winkel ein, der umso größer ist, je kleiner die fortschreitende Geschwindigkeit und je größer die Differenz der beiden Achsen der elliptischen oder rechteckigen Discontinuität ist.

Wir haben es hier mit der Erscheinung der Doppelbrechung zu thun.

Ganz dieselbe Erscheinung kann durch Reflexion eines gewöhnlichen Wirbelringes an einer zweiten elliptischen Discontinuität erreicht und gezeigt werden, wenn wir das Experiment mit zwei einander gegenüberstehenden Kästen *A* und *B* durchführen, wie in Fig. 9 und 10, wobei der Kasten *A* mit Luft gefüllt eine kreisförmige, der Rauchkasten *B* eine elliptische oder rechteckige Öffnung hat.

5. Betrachten wir nun den Austritt der Wirbelringe aus einer ebenen Wand, in welcher sich zwei oder mehrere kreisförmige Discontinuitäten befinden: Je nach der Entfernuhg der Discontinuitäten zu ihrem Durchmesser und je nach der Gruppierung derselben entstehen additive Zusammensetzungen, von welchen hier nur die einfachsten angeführt erscheinen.

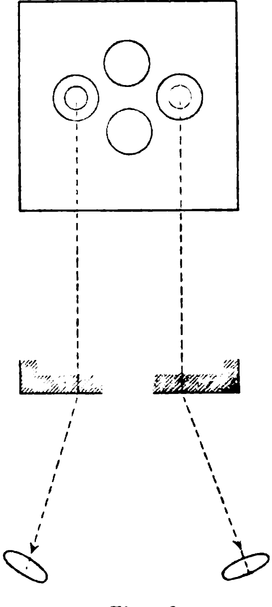


Fig. 12.

Ist die Entfernung der Discontinuitäten verhältnismäßig groß, so tritt aus jeder Discontinuität ein isolierter Wirbelring aus, welcher auch weiter isoliert bleibt und sich ganz so verhält, wie dies früher vom einzelnen Wirbelring gesagt und gezeigt wurde.

Ist die Entfernung der Discontinuitäten aber verhältnismäßig klein (gleich oder kleiner als der Halbmesser des Wirbelringes), dann bleiben die austretenden Wirbelringe nicht mehr isoliert, sondern sie combinieren sich unmittelbar nach ihrem Austritt und zeigen nachstehende Erscheinungen:

Zwei in geringer Entfernung befindliche gleich große Discontinuitäten geben einen schwingenden Ellipsring in ganz analoger Weise wie eine rechteckige oder elliptische Discontinuität; bei einer geringeren Intensität des Initiierens treten auch ebenso zwei isolierte Kreiswirbel aus, jedoch nicht in der Ebene der Mittelpunkte, sondern senkrecht darauf; ihre Bahnen

sind auch nicht parallel, sondern sie divergieren, wie dies in der Fig. 12 angedeutet ist.

Ganz dieselbe Erscheinung tritt auch auf, wenn drei oder mehrere kreisförmige Discontinuitäten sich in einer Reihe nebeneinander befinden.

Sind aber drei oder mehrere kreisförmige Discontinuitäten derart in einer Ebene vertheilt, dass ihre Mittelpunkte ein Dreieck, beziehungsweise Quadrat oder ein regelmäßiges Polygon bilden und in einer entsprechend geringen Entfernung voneinander liegen, dann tritt immer ein einziger Wirbelring aus der ganzen Summe von Discontinuitäten, d. h. die sämmtlichen in den einzelnen Discontinuitäten initiierten Wirbelringe vereinigen sich zu einem einzigen resultierenden Wirbelring.

Die Erscheinung wird dadurch nicht geändert, wenn auch das Innere der durch die eben genannten Discontinuitäten begrenzten regelmäßigen Figur gleichförmig mit eben solchen Discontinuitäten erfüllt ist.

Dagegen entstehen getrennte Wirbelringe von verschiedener Intensität, wenn die inneren Discontinuitäten in concentrischen, verhältnismäßig weit abstehenden Kreisen liegen.

Erfüllen die einander naheliegenden Discontinuitäten ein Rechteck oder eine Ellipse, so zeigen sich resultierende Wirbelringe wie bei einer einzelnen rechteckigen oder elliptischen Discontinuität, d. h. ein resultierender schwingender Ellipsring oder zwei resultierende, unter einem gewissen Winkel auseinandergehende Kreiswirbel in der Ebene der kleinen Achse.

Sind die jetzt in Betracht gezogenen vielfachen Discontinuitäten nicht von gleichem Durchmesser — oder nicht in gleicher Entfernung, dann entstehen durch Nebenschwingungen in den resultierenden Wirbeln Störungen, auf welche hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Alle hier vorgeführten Erscheinungen lassen sich sowohl bei den directen, als auch bei den conjugierten Wirbeln beobachten, wenn die Discontinuitäten sich alle in einer Ebene befinden. Wir wollen selbe mit dem Namen complanare Discontinuitäten bezeichnen.

Wenn auch jetzt die Erscheinungen nur qualitativ in Betracht gezogen werden und in metrische Bestimmungen nicht

näher eingegangen wird, so konnten wir doch bei den Experimenten beobachten, dass die fortschreitende Geschwindigkeit eines resultierenden Wirbels bei derselben Intensität der Initiierung bedeutend kleiner ist, als jene der isolierten Theilwirbel.

Desgleichen konnte man beobachten, dass die fortschreitende Geschwindigkeit umso kleiner ist, je kleiner — eine und dieselbe Contour vorausgesetzt — die ausfüllenden Discontinuitäten sind.

6. Liegen die Discontinuitäten — ob nahe oder weiter entfernt — nicht mehr in einer Ebene, sondern erfüllen sie irgendeine gekrümmte Fläche — am einfachsten eine Kugelschale —, dann wollen wir sie displanare Discontinuitäten nennen; die Erscheinungen der Zusammensetzung zu resultierenden Wirbelringen sind dann wesentlich anders, je nachdem die convexe oder die concave Seite der Kugelschale nach außen (gegen die Bewegungsrichtung) gekehrt ist.

Im allgemeinen werden in displanaren Discontinuitäten auf der convexen Seite die Wirbelringe isoliert bleiben und in der Normalrichtung der betreffenden Discontinuität nach vorwärts schreiten, dagegen auf der concaven Seite sich in derselben Weise zu Resultierenden vereinigen, wie wir dies früher von complanaren Discontinuitäten gezeigt haben.

Ist daher die Kugelschale mit der convexen Seite nach außen gekehrt, so sind die directen Wirbel isoliert, und die conjugierten addieren sich zu einem einzigen, der Contour der Kugelschale entsprechenden Wirbelring. Wenn die concave Fläche der Kugelschale nach außen gekehrt ist, so werden die directen Wirbel zu einer Resultierenden vereinigt, und die conjugierten Wirbel bleiben isoliert.

Es ist selbstverständlich, dass in weiterer Combination mehrere Kugelschalen nebeneinander in Combination gebracht werden können, welche entweder alle gleich gerichtet sind oder mit ihren convexen und concaven Flächen abwechseln, so dass nach jeder Seite resultierende und isolierte Wirbel aufs neue in Combination treten.

Nimmt man als Träger der displanaren Discontinuitäten ein feines Sieb in Form einer Kugelschale und bringt dasselbe

vor die Austrittsöffnung des Kastens, hält dann den Kasten mit der Siebseite über eine mit Mehl oder Staub (Licopodium) bestreute dunkle Papierfläche in entsprechender Entfernung, während man auf die Membran des Kastens durch einige Zeit klopft, so entstehen auf der Papierfläche durch die Zertheilung des Mehles Figuren analog wie die Lichtenberg'schen Figuren, und zwar, wenn die convexe Seite der discontinuierlichen Kugelschale gegen die Papierfläche gekehrt ist, entsteht eine Strahlenfigur, wenn die concave Seite dem Papier zugewendet ist, eine Ringfigur, wie in der nachstehenden Fig. 13 dargestellt.

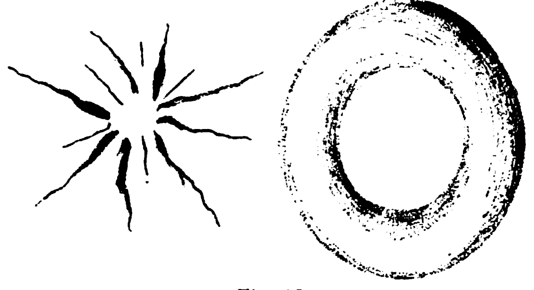


Fig. 13.

Die Ursache für die Entstehung dieser zwei verschiedenen Figuren ist nun durch die isolierten divergierenden Wirbel bezüglich der Strahlenfigur und durch den resultierenden Wirbelring bezüglich der Ringfigur klar ersichtlich und kann diese Erklärung auch leicht auf die Entstehung der Lichtenberg'schen Figuren durch den Austritt der positiven, beziehungsweise negativen Elektricität leicht angewendet werden.

Die eben dargelegte Erscheinung bildet durch die Identität mit der correspondierenden elektrischen Erscheinung den directen Anknüpfungspunkt für die Erklärung der elektrischen Vorgänge durch Wirbelbewegungen, wie ich dies seinerzeit eingehender darzulegen versuchen werde.

Durch verschiedene Combinationen convexer und concaver displanarer Discontinuitäten, sowie durch Anwendung verschiedener Formen und Dichten der Discontinuitäten können die Experimente noch beliebig ausgedehnt werden, wovon jedoch hier abgesehen werden soll.

7. Im vorstehenden wurden die Experimente, welche auf die Wirbelbildung mit äußeren Discontinuitäten abzielen, im Principe ziemlich erschöpfend gezeigt.

Ganz die analogen Experimente lassen sich wiederholen unter Anwendung von inneren Discontinuitäten, nur ist die Darstellung der bezüglichen Varianten von Discontinuitäten eine schwierige.

Complanare innere Discontinuitäten lassen sich dadurch bilden, dass man die vollen Kreisflächen mittels diametraler Fäden an der Öffnung des Kastens befestigt, wie in der Fig. 14 bei dem Experiment mit zwei Discontinuitäten dargestellt ist.

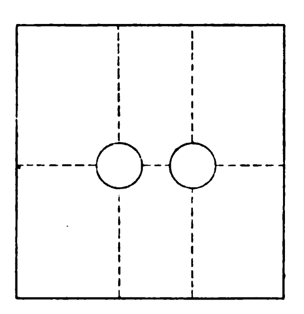


Fig. 14.

Wie bereits eingangs hervorgehoben, unterscheiden sich die an inneren Discontinuitäten erzeugten Wirbelringe von den an äußeren Discontinuitäten erzeugten dadurch, dass die Richtung der fortschreitenden Bewegung der directen und conjugierten Wirbelringe eine diametral entgegengesetzte ist: die directen Wirbelringe bewegen sich nach innen, die conjugierten nach außen.

Die früher durchgeführten Experimente müssten sich der Theorie nach mit inneren Discontinuitäten wiederholen lassen und die Erscheinungen der Brechung, Reflexion, Absorbtion, Doppelbrechung, der Lichtenberg'schen Figuren etc. zur Darstellung bringen lassen; der praktischen Ausführung dieser Experimente bieten sich jedoch bedeutende und oft nicht zu bewältigende Schwierigkeiten dar.

8. Wir haben bisher bei allen Experimenten den durch den Rauch erzeugten, daher sichtbaren Wirbel an sich in Betracht gezogen; wir wissen aber, dass sich im freien elastischen Medium jede Störung des Gleichgewichtes wellenförmig fortpflanzt, und zwar als ein Bewegungszustand; wir wissen auch, dass diese Fortpflanzung mit einer gewissen Geschwindigkeit — im ponderablen Medium mit der Schallgeschwindigkeit — erfolgt.

Diese Betrachtung auf die in der Luft erzeugten Wirbelringe übertragen, führt zu der Folgerung, dass von dem an der Discontinuität erzeugten, geradlinig vorwärtsschreitenden Wirbelringe Wirbelwellen gebildet werden, welche mit der Schallgeschwindigkeit fortschreiten, und dass dieser wellenartige Bewegungszustand von jedem Punkte des vorwärtsschreitenden Wirbelringes erneuert initiiert wird. Ich nenne diesen durch den primären Wirbel erzeugten Bewegungszustand einen Wirbelstrom.

Derselbe wäre mit Rücksicht auf den in entgegengesetzter Richtung fortschreitenden conjugierten Wirbelstrom — bei Ausschluss störender Einflüsse in der Unendlichkeit geschlossen, öffnet sich jedoch von der Erregungsstelle aus nach Maßgabe des Fortschrittes des directen und conjugierten erzeugenden Wirbels.

Wird aber nach einer gewissen Zeit die Membran des Rauchkastens mit der gleichen Intensität wie früher wieder angeschlagen, so folgt dem ersten ein zweiter Wirbel nach, welcher wieder einen in der Unendlichkeit geschlossenen Wirbelstrom erzeugt und in der Entfernung zwischen den beiden erzeugenden Wirbeln den ersten Bewegungszustand herstellt, in dem Raume vor dem ersten erzeugenden Wirbel aber infolge Interferenz der beiden Wirbelströme zu einem resultierenden Zustande führt.

Die detailliertere Entwickelung dieses Bewegungszustandes ist Gegenstand späterer Untersuchungen. Jetzt sei nur noch bemerkt, dass der Wirbelstrom ein vollkommen geschlossener sein wird, so lange unter der bisherigen Annahme die Membran in gewissen kleinen Zeitintervallen angeklopft und hiedurch der Raum zwischen dem vorhergegangenen directen und conjugierten Wirbel wieder aufs neue erregt wird.

Nun mag noch das Zeitintervall und hiemit die Distanz, in welcher ein erzeugender Wirbel dem anderen folgt, ganz kurz in Betracht gezogen werden. Ist die Aufeinanderfolge der erzeugenden Wirbel eine so rasche, dass die Entfernung der hintereinander befindlichen Wirbel gleich oder kleiner ist als der Wirbelhalbmesser, dann influenzieren sich die Wirbel derartig, dass die Bewegung des vorderen Wirbels verzögert, der Durchmesser des Wirbels gleichzeitig erweitert wird.

In demselben Maße wird der dahinter befindliche Wirbel beschleunigt bei gleichzeitiger Verringerung des Durchmessers, so dass ein Durchdringen der beiden Wirbel stattfindet. Ist dieser Zustand einmal erreicht, so würde derselbe ohne Zutritt störender Einflüsse (ohne Reibung) auch stetig beibehalten werden, es entstünde daher ein stationärer Zustand der Wirbelbewegung, beziehungsweise ein stationärer Wirbelstrom.

So wie der Bewegungszustand in der fortschreitenden Richtung der Wirbel sich fortpflanzt, so wird auch in der darauf senkrechten, also in der Ebene des Wirbelringes selbst die schwingende Bewegung initiiert und namentlich durch die activen und passiven Wirbel ein periodischer Bewegungszustand wachgerufen, welcher sich in der Ringebene nach allen Seiten fortpflanzt.

Theilweise kann diese Influenzierung des anschließenden Raumes durch das Experiment gezeigt werden, indem man einen größeren Raum mit Rauch füllt und in denselben einen aus gewöhnlicher Luft gebildeten Wirbelring treten lässt: während der Luftring vor dem Eintritt in die Rauchatmosphäre nicht sichtbar war, bemerkt man nach dem Austritt aus der Rauchatmosphäre einen aus Rauch gebildeten, jedoch im Durchmesser bedeutend größeren Rauchring, als es der primären Discontinuität entsprechen würde.

9. Alle bisher beschriebenen Wirbelbewegungen wurden hervorgerufen, indem auf die eine mittels einer Membran bespannte Seite des mit Rauch gefüllten Kastens mit einer gewissen Intensität geklopft wurde.

Dieselben Bewegungen können jedoch auch hervorgerufen werden, wenn der Kasten keine mit einer Membran bespannte Fläche besitzt, indem man den Kasten mit einer Schnur frei aufhängt und statt auf den Kasten zu klopfen, demselben selbst kurz andauernde (stoßartige) Bewegungen ertheilt.

Und zwar: Ertheilt man dem Kasten eine kurze Stoßbewegung in der Richtung 1 (Fig. 15), so sieht man Wirbelringe sowohl nach außen, als auch in das Innere des Kastens von der Discontinuität der Fläche $A$ ausgehen, und zwar ist der nach außen tretende Ring der directe und der nach innen

gehende Ring der conjugierte; ersterer entsteht beim Beginne und letzterer am Ende der Stoßbewegung des Kastens.

Bei der Stoßbewegung des Kastens in der Richtung 2 (Fig. 15) erscheinen ebenfalls die Wirbelringe nach außen und nach innen, aber es ist jetzt der nach innen gehende Luftring der directe Wirbel und der nach außen gehende Rauchring der conjugierte Wirbel.

Vollführt man daher eine ganze hin- und hergehende Schwingung mit dem Kasten, so entstehen nach jeder Richtung hin je ein directer und ein conjugierter Wirbel, daher im ganzen

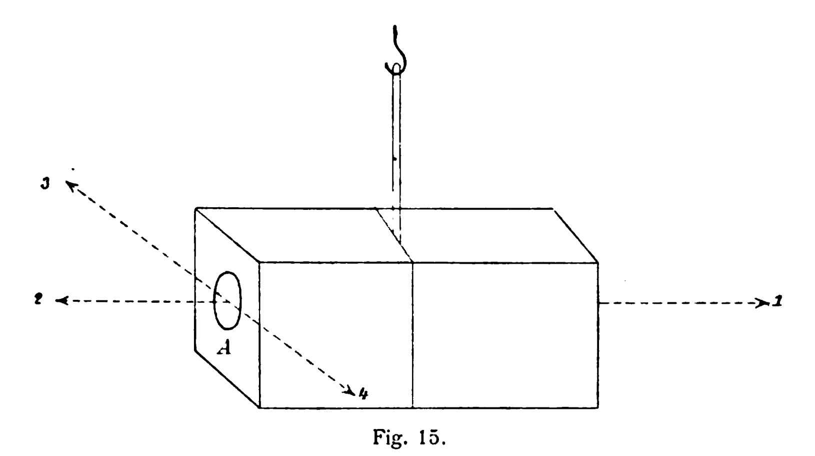



Fig. 15.

vier Wirbelringe. Wird aber die Schwingung derart rasch ausgeführt, dass der Anfang und das Ende einer jeden Schwingung sich sehr rasch folgen, dann hat man dieselbe Erscheinung wie bei den durch Anklopfen an die Membran erzeugten Wirbeln, nämlich es kommt nur ein directer Wirbel nach der einen Seite und ein conjugierter Wirbel nach der anderen Seite zur Erscheinung, indem je ein directer und conjugierter Wirbel sich assimilieren.

Aus dieser Erscheinung folgt, dass im allgemeinen auch durch das Klopfen auf eine Membran bei einer vollkommenen Schwingung derselben nicht zwei, sondern vier Wirbel erzeugt werden, wie dies auch bei einer langsamen Bewegung der Membran augenscheinlich gemacht werden kann, indem sowohl beim Anfange und Ende der hingehenden, als auch der

hergehenden Schwingung der Membran je ein Wirbelring erzeugt wird, wovon jedoch bei rascher Schwingung je zwei Ringe coincidieren.

Nennt man die eben beschriebene hin- und hergehende Stoßbewegung in der Richtung der fortschreitenden Bewegung der Wirbelringe eine Longitudinalschwingung, so kann man sagen: Bei jeder ganzen Longitudinalschwingung des Kastens tritt aus der senkrecht auf die Schwingungsrichtung befindlichen Discontinuität je ein directer und ein conjugierter Wirbelring nach den beiden entgegengesetzten Richtungen, d. i. zusammen vier Wirbelringe.

Bewegt man nun den Kasten in den Richtungen 3 und 4 der Fig. 15, d. h. also in der Ebene der Discontinuität, dann sieht man nur bei der stoßartigen Begrenzung der Bewegung je einen gleichartigen Wirbelring sowohl nach außen, als auch nach innen im Kasten fortschreiten, so dass wieder bei der vollkommenen Hin- und Herbewegung des Kastens im ganzen vier Wirbelringe entstehen. Nennt man eine solche Hin- und Herbewegung in der Richtung der Ebene der Discontinuität eine Transversalschwingung, so kann man sagen: Bei einer vollkommenen stoßartigen Transversalschwingung des Kastens treten aus der in der Ebene der Schwingung befindlichen Discontinuität je zwei direct entgegengesetzt gerichtete Paare von Wirbelbewegungen, welche untereinander gleichartig, jedoch bezüglich Stärke und Intensität von den früher genannten bei der Longitudinalbewegung des Kastens entstehenden Wirbelringen verschieden sind.

Selbstverständlich bleiben alle früher beschriebenen Erscheinungen der Wirbelbewegungen auch für die durch Longitudinal- oder Transversalschwingungen des Kastens erzeugten Wirbelringe vollkommen in Kraft.

Bringt man in dem parallelopipedischen Kasten auch an der Seitenwand *B* eine kreisförmige Discontinuität an, so ist ersichtlich, dass bei jeder Schwingung des Kastens sowohl longitudinal, als auch transversal erzeugte Wirbelringe entstehen, und schließlich, wenn jede Seite dieses oder eines beliebig anders geformten Körpers mit kreisförmigen oder elliptischen Discontinuitäten versehen wird, so ist ersichtlich,

dass man auf diese Weise insbesonders den Verlauf der Erscheinungen mit geschlossenen Discontinuitäten zu verfolgen in der Lage ist.

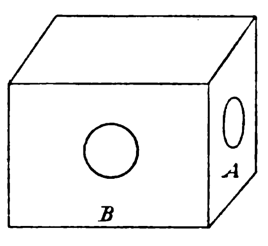


Fig. 16.

Es wird kaum nöthig sein, hervorzuheben, welche Bedeutung der hier kurz skizzierten Erzeugung von Wirbelringen als Bild einer entsprechenden Naturerscheinung innewohnt.

10. Nun würde noch erübrigen, jene Erscheinungen zu zeigen, welche die Anziehungs- und Abstoßungsphänomene darzustellen geeignet sind. Da die hiezu nöthigen Apparate bereits etwas complicierter sind und die Erscheinungen der Anziehung und Abstoßung nur bei einer entsprechenden Intensität der Wirbelbewegungen vor Augen geführt werden können, so beschränke ich mich darauf, nur hinzuweisen, dass solche Versuche bereits von Prof. Bjerknes durch Schwingungen im Wasser und von Mr. A. Stroh[1] im Jahre 1882 durch Schwingungen der Luft hervorgerufen mittels Membranbewegungen durchgeführt wurden.

Hätte Mr. Stroh in entsprechender Weise mit gefärbter Luft experimentiert, so hätte er unzweifelhaft nicht nur die äußeren Erscheinungen der Anziehung und Abstoßung, sondern auch die Bewegungen selbst als Wirbelbewegungen erkannt, wie ich sie in den vorliegenden Studien beschrieben habe.

Ich kann mich daher auf die Citierung der interessanten und umfangreichen Versuche der vorgenannten Experimentatoren bezüglich der Darstellung von Anziehungs- und Abstoßungserscheinungen der Wirbelringe beschränken und will das Resumé dieser Versuche in der Thatsache zusammenfassen:

Gleichgerichtete und gleichartige Wirbelringe ziehen sich an (und können sich assimilieren). Entgegengesetzt gerichtete und gleichartige Wirbelringe stoßen sich ab (und können sich

---

[1] Beschrieben in The Engineer Nr. 1373 vom 5. Mai 1882 unter dem Titel: Mechanische Vibrationen und der Magnetismus.

zerstören). Gleichgerichtete und ungleichartige Wirbelringe stoßen sich ab (und können sich aufheben). Entgegengesetzt gerichtete und ungleichartige Wirbelringe ziehen sich an (und können sich addieren).

## Resumé.

Die vorstehend beschriebenen Wirbelbewegungen erachte ich im Sinne der bereits in der Einleitung angedeuteten Analogien zu den wichtigsten Naturerscheinungen von nicht zu unterschätzendem wissenschaftlichen Interesse. Den Beweis dafür hoffe ich in nicht zu langer Zeit erbringen zu können.

Beanspruchen die Wirbelbewegungen an sich bereits ein hohes wissenschaftliches Interesse, so sind aber die in den vorliegenden Studien sichtlich dargestellten Wirbelbewegungen als Bilder für die Erklärung des Wesens von Ätherbewegungen gewiss von Bedeutung.

Ich glaube, dass sie in diesem Sinne jenen Anforderungen entsprechen, welche Heinrich Hertz in der Einleitung zu seinem Werke: »Die Principien der Mechanik«[1] an die Bilder unseres Geistes stellte, welche zur Erweiterung unserer Naturerkenntnisse geeignet seien.

Die Wirbelbewegungen charakterisieren sich als elementare Urbilder für eine ganze Reihe von Naturerscheinungen und gestatten an der Hand der vorgeführten Experimente den synthetischen Aufbau grundlegender Theorien.

Im speciellen gelangt man bei Betrachtnahme der ponderablen Masse als Träger der Wirbelbewegungen zu jenen Anschauungen über die Constitution der Materie, wie sie Sir W. Thomson (Lord Kelvin) durch seine Theorie der Wirbelatome begründet hat, und die experimentellen Wirbelerscheinungen liefern die Bilder zur Erklärung ganz ungeahnter Geheimnisse der physikalischen, chemischen und selbst der organisierten Natur.

Bei Betrachtnahme der hypothetischen Äthermasse als Träger der Wirbelbewegungen sind es die physikalischen

---

[1] Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt von Heinrich Hertz. Mit einem Vorworte von H. von Helmholtz. Leipzig, 1894.

Erscheinungen der Ätherbewegungen, deren Wesen als Analogien zu den angedeuteten Bildern in der mannigfachsten Weise einer weitgehenden Erklärung zugänglich ist.

Aber auch in praktischer Beziehung gelangt man durch Verknüpfung ähnlicher Erscheinungen und durch die scheinbare Übereinstimmung zwischen Bild und Natur zu Folgerungen, welche zu zweckmäßigen praktischen Anwendungen führen.

Von den letzteren will ich vorläufig nur jene herausgreifen, welche sich auf die in der letzten Zeit immer mehr zur Geltung gelangenden Anwendung der Wirbelringe zur Verhinderung der Hagelbildung beziehen und welche in dem sogenannten Wetterschießen[1] eine nicht zu unterschätzende ökonomische Bedeutung erlangt und das Interesse bedeutender Fachautoritäten erweckt hat.

Im Sinne der vorliegenden Studien und Experimente über die Bildung von Wirbelringen wäre es vollkommen gerechtfertigt, durch die in hohe Luftschichten emporgesendeten kräftigen Wirbelringe, welche aus einem geeignet construierten Mörser geschossen werden, eine Erschütterung der Luftschichten zu ermöglichen. Die von Prof. Dr. Pernter und Dr. Trabert im Juli vorigen Jahres durchgeführten sorgfältigen und umfassenden Versuche[2] über die Steighöhe der Luftwirbelringe bestätigen aber vollkommen meine, auf Grund zwanzigjähriger Beobachtungen an den aus Geschützen geschossenen Luftwirbelringen gemachte Behauptung, dass dieselben höchstens eine Höhe von 200 bis 500 *m* erreichen.

Daraus ist aber der Schluss zu ziehen, dass die beim Wetterschießen vielleicht thatsächlich erreichten günstigen Erfolge bezüglich Verhinderung der Hagelbildung nicht durch die active Erschütterung der Wirbelringe, sondern durch die Schallerregung hervorgebracht wurde, und dass daher die Ausbildung der Mörser für das Wetterschießen weniger auf die

[1] Albert Stigers Wetterschießen in Steiermark, bearbeitet von G. Suschnig. Graz, 1900.

[2] Untersuchungen über das Wetterschießen. Meteorol. Zeitschr., Bd. 35, S. 385.

Erzeugung kräftiger Wirbelringe, als auf die Erregung und Fortpflanzung intensiver Schallwellen zu richten wäre.

Für die bedeutende Wirkung der Schallwellen auf große Distanzen kann ich nachstehenden Beweis erbringen.

Zum Messen von Endgeschwindigkeiten der Geschosse auf dem Schießplatze bei Felixdorf habe ich zur Unterbrechung des elektrischen Stromes beim Auftreffen des Geschosses auf einer in großer Distanz (z. B. 2000 *m*) aufgestellten Scheibe ein Pendel construiert, welches auf der aus gewöhnlichen 2·5 *cm* dicken, auf Ständern von 15 $cm^2$ Dicke angenagelten Brettern bestehenden Scheibe mit Schrauben befestigt wurde.

Die Pendel hatten eine ziemlich geringe Empfindlichkeit, damit die durch den Wind verursachten Schwingungen der Scheibe nicht die Unterbrechung des Stromes veranlassen konnten. Erst das in die Scheibe einschlagende Geschoss sollte das Pendel abheben, dadurch den metallischen Contact unterbrechen und somit die Messung der zum Durchfliegen des Abstandes der zwei circa 10 *m* hintereinander stehenden Scheiben nöthigen Zeit mittels des elektro-ballistischen Apparates von Le Boulenger ermöglichen. Während dieses Versuches wurde aber auch auf einer zweiten Schusslinie geschossen, die parallel auf circa 600 *m* seitwärts lag, und mit einem Geschütze geschossen, dessen Mündung mehr als 2000 *m* von den vorbeschriebenen Scheiben entfernt war. In dem Momente, als dort der Schuss abgegeben wurde und die Schallwellen bei den Scheiben mit dem Pendel anlangten, wurde das Pendel abgehoben und dadurch mein Versuch gestört, so dass die Durchführung meines Versuches nur in den Schusspausen des anderen Geschützes ermöglicht war.

Daraus ist zur Evidenz erwiesen, dass die beim Schusse auftretenden Schallwellen kräftig genug sind, um noch selbst auf 2000 *m* eine genügend heftige Erschütterung hervorzubringen, durch welche in hohen Wolkenregionen die Bildung des Hagels verhindert werden könnte, während dies in so großen Höhen von den Wirbelringen in Zweifel gezogen werden muss.

---

# Über die durch Kathodenstrahlen bewirkte Ablenkung der Magnetnadel

von

Dr. Josef v. Geitler.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. deutschen Universität Prag.

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1901.)

In seiner Abhandlung »Über die Glimmentladung« hat H. Hertz[1] die Frage nach der magnetischen Wirksamkeit der Kathodenstrahlen einer experimentellen Prüfung unterworfen. Er kam dabei zu dem Resultate, dass eine Einwirkung der Kathodenstrahlen auf die Magnetnadel nicht stattfinde. Die im folgenden beschriebenen Versuche zeigen jedoch, dass eine solche Einwirkung von nicht unbeträchtlicher Intensität dennoch besteht, und lassen zugleich erkennen, weshalb dieselbe bei der Hertz'schen Versuchsanordnung nicht zur Geltung gelangen konnte.

Zunächst sei es gestattet, die auf den vorliegenden Gegenstand bezüglichen Stellen der Hertz'schen Abhandlung, zum Theile im Wortlaute, anzuführen: ».....Bilden nämlich die Kathodenstrahlen auch nicht den Weg des Stromes, so ist es doch unzweifelhaft, dass dieselben vom Magnet beeinflusst werden. Es ist deshalb von vorneherein nicht unwahrscheinlich, dass in jedem Falle auch umgekehrt die Kathodenstrahlen eine Ablenkung des Magnetes veranlassen; diese Wirkung könnte ja von einer elektrodynamischen verschieden sein. ..... Die zunächst zu beschreibenden Versuche sollen zeigen, dass eine solche Wirkung nicht besteht.« Das von Hertz verwendete

---

[1] H. Hertz, Wied. Ann., 19, S. 798, ff., 1883, oder Ges. Werke. Bd. 1, S. 257 ff.

Rohr war 300 *mm* lang, 28 *mm* weit und besaß als Kathode eine kreisförmige Messingscheibe, durch deren durchbohrte Mitte ein in einer Thermometerröhre befindlicher Draht als Anode ein wenig in das Entladungsrohr hineinragte. Die Stromzuleitungen waren möglichst inductionsfrei geführt. Die Stromlinien im Gasraume mussten bei der gewählten Anordnung jedenfalls symmetrisch zur Rohraxe liegen, ihre magnetische Wirkung nach außen musste also verschwinden. Die Kathodenstrahlen waren voll entwickelt und erfüllten die ganze Länge des Rohres. Hertz erwartete daher, dass eine etwa vorhandene Einwirkung der Strahlen auf einen außerhalb befindlichen Magnet bei dieser Anordnung zur Erscheinung kommen musste. In möglichster Nähe des Rohres war ein stark astasierter, elektrostatisch geschützter Magnet aufgehängt; das Rohr selbst wurde nacheinander so gegen den Magnet orientiert, dass eine tangentiale, radiale oder der Rohraxe parallele Kraft bemerkbar werden musste. »Aber niemals zeigte sich eine Ablenkung, die im Fernrohre auch nur $^1/_{10}$ Scalentheil betragen hätte. Wurde aber derselbe Strom — seine Stärke war etwa $^1/_{100}$—$^1/_{200}$ Dan./S. E. — unter Benützung einer zweiten Anode veranlasst, das Rohr der Länge nach zu durchsetzen, so ergaben sich Ablenkungen von 30 bis 40 Scalentheilen ..... Hienach stand fest, dass, wenn überhaupt eine specifische Einwirkung der Kathodenstrahlen auf den Magnet stattfand, diese doch nicht den 300. Theil derjenigen Wirkung erreichen konnte, welche den Kathodenstrahlen als Stromträgern zukam.«

Dieses überraschende Resultat, dass eine einseitige Wirkung des Magneten auf die Kathodenstrahlen ohne eine entsprechende Gegenwirkung dieser auf jenen bestehe, drängte den Gedanken auf, nach einer Fehlerquelle zu suchen, welche etwa geeignet gewesen sein konnte, eine Beeinflussung der Magnetnadel durch die Kathodenstrahlen in den Versuchen von Hertz zu verschleiern. Bedenkt man, dass die Kathodenstrahlen an den von ihnen getroffenen Stellen der Innenfläche der Röhre Ladungen erzeugen, so erscheint die Vermuthung nicht unwahrscheinlich, dass diese Ladungen — sei es an dem Glase selbst, sei es in der leitend gewordenen Gasmasse — zurückströmen. Dieser röhrenförmige Rückstrom wäre dann wohl

geeignet, die etwa vorhandenen magnetischen Wirkungen der in seiner Axe verlaufenden und seiner Richtung entgegengesetzten Kathodenstrahlen nach außen vollständig zu compensieren. Rückstrom und Kathodenstrahlen wären in diesem Falle gewissermaßen »inductionsfrei gewickelt«. Entspricht diese Hypothese den Thatsachen — und meine Versuche scheinen mir dies zu beweisen —, so ist es erforderlich, die Magnetnadel in das Innere der Röhre zu bringen, um eine Ablenkung derselben durch die Kathodenstrahlen zu finden. Denn im Inneren ist die Nadel dem magnetischen Einflusse des röhrenförmigen Rückstromes entzogen, während die erwartete Wirkung der Kathodenstrahlen rein zur Geltung zu kommen vermag.

Einige der auf Grund voranstehender Überlegung angestellten, bisher nur qualitativen Versuche, welche das Vorhandensein einer Ablenkung der Magnetnadel durch die Kathodenstrahlen ergeben, seien nun kurz beschrieben.

In das Fig. 1 skizzierte, 60 *cm* lange, 4 *cm* weite Glasrohr waren bei *a* und *b* plane, auf ihrer Rückseite mit Glaskappen bedeckte Aluminiumscheiben, in den seitlichen Röhrchen bei $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ Aluminiumstifte als Elektroden eingeschmolzen. Die Röhre besaß ferner zwei, auf *ab* und aufeinander senkrechte Ansätze; in dem einen derselben waren bei *c* eine Aluminiumplatte, bei $\gamma\gamma'$ Aluminiumstifte eingeschmolzen, in den zweiten Ansatz wurde ein mit Messingboden versehenes Messingrohr *m* bei *d* luftdicht eingekittet. Die Bodenfläche des Rohres befand sich etwa 1 *cm* oberhalb der Rohraxe *ab*. Das Rohr *m* war oben mit einem Messingkästchen versehen, dessen eine Wand behufs Spiegelablesung durch ein Glasfenster gebildet wurde. In dem Messinggehäuse hieng an einem Quarzfaden ein mit dem 11 *mm* langen Magnetstäbchen *ns* starr verbundener Spiegel *S*. Bei *e* war das Rohr dauernd mit einer automatischen Pumpe Sprengel'schen Systems verbunden. Der Magnet *ns* konnte mit Hilfe eines äußeren Magnetstabes beliebig gerichtet und astasiert werden. Die Schwingungsdauer betrug 2 bis 3 Secunden. Auch konnte der Magnet in einem zweiten, dem obigen ganz analog gebauten, ganz außerhalb des Entladungsrohres befindlichen Messinggehäuse *f* aufgehängt werden. Das

Messinggehäuse gewährte einen vollständigen elektrostatischen Schutz. Die Entladungen wurden mit Hilfe eines genügend weit vom Apparate aufgestellten Inductoriums erzeugt, welches mit einem Wehnelt-Unterbrecher betrieben wurde. Die Scala sammt Fernrohr befand sich etwa 130 *cm* vom Spiegel entfernt.

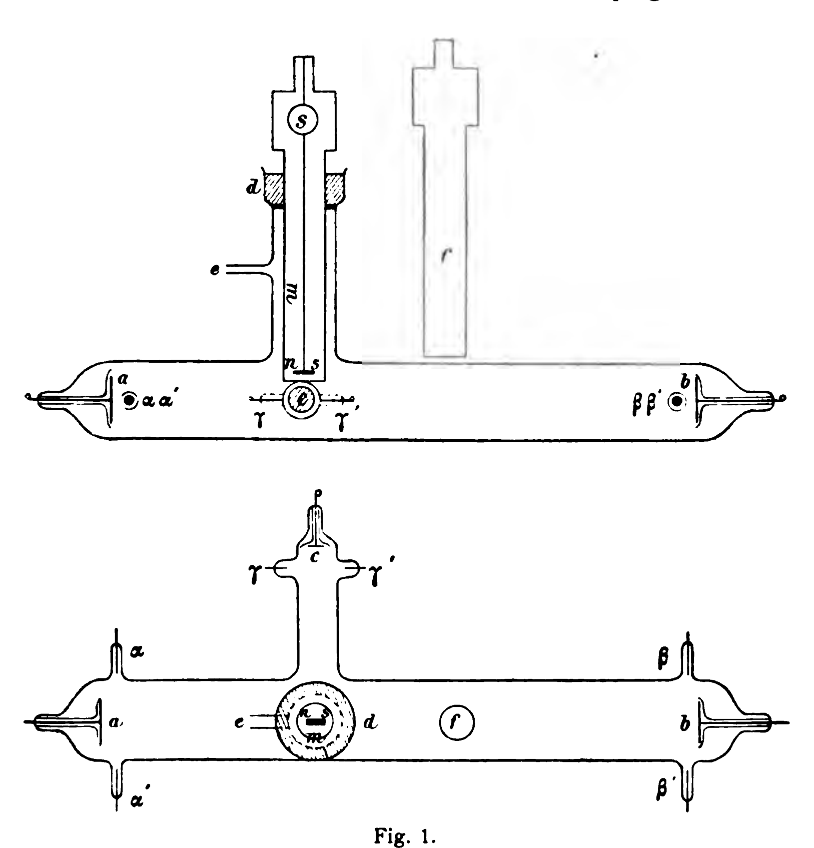


Fig. 1.

Der Magnet *ns* war bei den folgenden Versuchen der Rohraxe *ab* parallel.

Die Röhre hielt, wahrscheinlich infolge einer Unvollkommenheit des Rohres *m* nicht vollständig dicht, und es musste daher während der Versuche öfter nachgepumpt werden. Die angeführten Zahlen beziehen sich daher nicht auf einen bestimmten Druck und sind also nicht ohneweiters miteinander vergleichbar.

Positive Ausschläge (d. h. solche von kleineren zu größeren Zahlen der Scala) entsprechen einem unter der Nadel parallel der Rohraxe von *a* gegen *b* fließenden positiven Strome, negative Ausschläge einem von *b* nach *a* gerichteten.

1. Versuch. *a* ist Kathode, $\alpha\alpha'$ sind Anoden. Das Rohr fluoresciert in seiner ganzen Länge hellgrün. Man beobachtet einen negativen Ausschlag von 17·5 Scalen-Centimetern.[1] Macht man $\alpha\alpha'$ zur Kathode, *a* zur Anode, so zeigt die Nadel keinen Ausschlag.

2. Versuch. *a* ist Kathode, *b* Anode. Das Vacuum ist etwas schlechter geworden. Der wiederum negative Ausschlag beträgt 13·25 *cm*.

3. Versuch. Dieselbe Anordnung wie bei 2. Das Vacuum hat sich weiter verschlechtert. Der negative Ausschlag ist 12·5 *cm*.

4. Versuch. Anordnung wie beim ersten Versuche, das Vacuum ist noch stärker zurückgegangen. Der negative Ausschlag beträgt jetzt 8 *cm*.

5. Versuch. *b* ist Kathode, *a* Anode. Bei dem herrschenden Drucke ist der positive Ausschlag 6 *cm*.

6. Versuch. Man macht *b* zur Kathode, $\beta\beta'$ zu Anoden. Der positive Ausschlag beträgt 3·75 *cm*.

7. Versuch. *c* ist Kathode, $\gamma\gamma'$ Anoden. Das Ansatzrohr, sowie der Auftreffpunkt der Strahlen sind intensiv grün. Die Nadel zeigt einen negativen Ausschlag von nur 0·5 *cm*. Es gelingt, denselben durch entsprechende Einstellung der Nadel zum Verschwinden zu bringen.

8. Versuch. Der Magnet befindet sich jetzt im Rohre *f*, etwa 3 *cm* oberhalb der Röhrenaxe. Die Röhre ist wieder stark evacuiert, *a* Kathode, *b* Anode. Es tritt ein negativer Ausschlag von 3·5 *cm* ein.

9. Versuch. Wie bei 8. Nur ist jetzt *b* Kathode, *a* Anode. Positiver Ausschlag von 2·75 *cm*.

10. und 11. Versuch. Magnet wie bei 8. Sowohl, wenn *b* Kathode, $\beta\beta'$ Anoden, als auch, wenn *a* Kathode, $\alpha\alpha'$ Annoden

---

[1] Die auf 1·7 Secunden astasierte Nadel gab, als ein geradliniger Strom circa 1 *cm* unter ihr, parallel ihrer magnetischen Axe, vorbeigeleitet wurde, einen Ausschlag von 6 *cm* für 0·011 Ampère.

sind, zeigt, selbst bei stärkster Evacuierung, die Nadel keine Ablenkung.

Diese vier letzten Versuche entsprechen der Hertz'schen Anordnung.

12. Versuch. In dem Rohre Fig. 2 mit der Kathode *a* und den Anoden $\alpha\alpha'$ ist das Messingrohr *m* eingekittet. Dieses

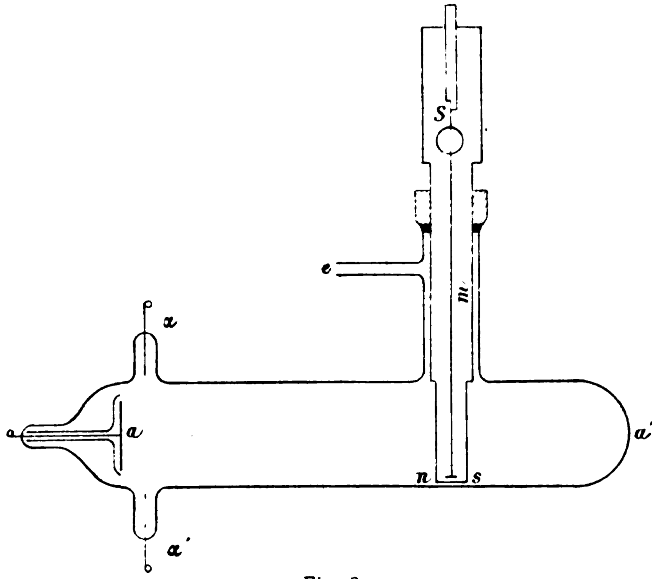



Fig. 2.

besitzt an seinem unteren Ende einen parallelepipedischen Messingkasten. Die Höhe des letzteren ist 4 *cm*, seine Länge 2 *cm*, seine lichte Breite 0·5 *cm*. Seine schmale Seite ist senkrecht, die breite Seite parallel zur Rohraxe *aa'*, so dass die Kathodenstrahlen zu beiden Seiten des schmalen Kästchens unbehindert vorbeistreichen können und einen scharfen Schatten desselben auf der Röhrenwand entwerfen. Der 3 *mm* lange Magnet *ns*, dessen magnetische Axe der Rohraxe ebenfalls parallel ist, kann in dem Messingkästchen beliebig gehoben und gesenkt werden. Es ist also möglich, ihn nach Belieben oberhalb oder unterhalb der Rohraxe, beziehungsweise der Bahn der Kathodenstrahlen einzustellen.

Befindet sich der Magnet in seiner tiefsten Lage, so erfolgt ein positiver Ausschlag von etwa 2·5 *cm*. Hebt man ihn um

1 *cm*, so bleibt der Ausschlag positiv, wird aber schwächer (1 *cm*). Bei weiterem Heben um 2 *cm* wird der nun oberhalb der Rohraxe befindliche Magnet im negativen Sinne um 1 *cm*, bei weiterem Heben um 0·5 *cm* ebenfalls im negativen Sinne um 2 *cm* abgelenkt.

Aus den beschriebenen Versuchen mögen vorläufig nachstehende Folgerungen gezogen werden: Die Versuche 1, 6, 7 und 12 zeigen, dass die Kathodenstrahlen sich dem Magnete gegenüber verhalten, wie ein in ihrer Bahn, aber ihrer Fortpflanzungsrichtung entgegenfließender, positiver, elektrischer Strom, d. h. sie suchen die Magnetnadel nach der für einen solchen Strom geltenden Ampère'schen Regel einzustellen. Die Versuche 1 bis 4, wie auch 5 und 6 ergeben das Resultat, dass die ablenkende Kraft der Kathodenstrahlen auf die Magnetnadel nicht nur einen verschwindenden Bruchtheil jener des gesammten Entladungsstromes beträgt, sondern vielmehr von derselben Größenordnung wie diese ist, ja wahrscheinlich dieser gleichkommt. Vergleicht man endlich die übrigen Versuche mit den unter Nr. 8 bis 11 beschriebenen, welch letztere der Hertz'schen Anordnung[1] wesentlich entsprechen, so scheint mir die eingangs aufgestellte Hypothese des röhrenförmigen Rückstromes zur Deutung der erhaltenen Resultate geeignet zu sein, keinesfalls aber einem der Versuche zu widersprechen.

Die vorliegenden Versuche für oder gegen eine der Hypothesen zu verwerten, welche bisher über die Natur der Kathodenstrahlen aufgestellt wurden, halte ich für verfrüht. Erst nach quantitativer Erforschung der hier ins Spiel tretenden Kräfte wird man an diese Aufgabe herantreten können. Unabhängig von jeder Theorie aber glaube ich aus meinen Versuchen den Schluss ziehen zu müssen: Die Kathodenstrahlen haben magnetische Wirkungen.

---

[1] Vergl. oben.

# Ein Satz über den schiefen Wurf im luftleeren Raume

von

**A. v. Obermayer,**

c. M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Februar 1901.)

Es sei $M_1$ in der beifolgenden Figur, ein Punkt mit den Coordinaten $\xi$ und $\eta$, welcher vom Coordinatenanfangspunkte aus durch einen schiefen Wurf erreicht werden soll. Der Neigungswinkel $M_0OM_1$ der Geraden $OM_1$ zur horizontalen Abscissenaxe sei $\beta$, es ist der sogenannte Terrainwinkel.

Der Winkel um welchen $\beta$ vermehrt werden muss, damit $M_1$ bei der zu Gebote stehenden Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ getroffen werde, sei $\alpha$; er soll als Elevationswinkel bezeichnet werden.

Die Gleichung der so erhaltenen Wurfparabel ist dann, wenn $OD_0 = h = v_0^2/2g$ gesetzt wird:

$$y = x \operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \frac{x^2}{4h \cos^2(\alpha+\beta)}$$

und die Coordinaten $\xi$ und $\eta$ des Punktes $M_1$ müssen derselben genügen.

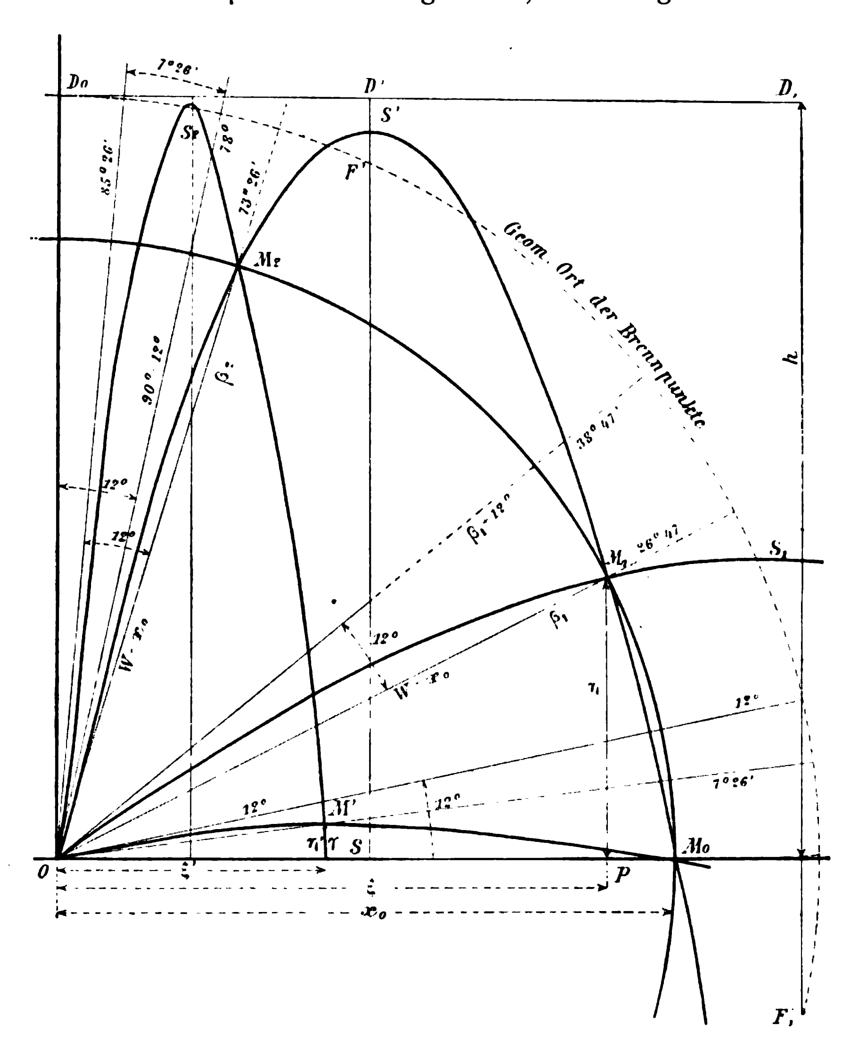
Die Abscisse $\xi$ des Endpunktes $M_1$ der schiefen Wurfweite $w = OM_1$ ist dann, wegen

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\eta}{\xi}, \tag{1}$$

gleich

$$\xi = \frac{4h \sin\alpha \cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}. \tag{2}$$

Denkt man sich bei constantem Elevationswinkel α den Terrainwinkel β continuierlich geändert, so ist der geometrische




Ort der Endpunkte $M$ aller so erhaltenen schiefen Wurfweiten

$$\eta = \xi \cot \alpha - \frac{\xi^2}{4h \sin^2 \alpha};$$

es ist die Wurfparabel $OS'M_0$, die mit dem Elevationswinkel $90-\alpha$ erzeugt wird und dieselbe horizontale Wurfweite

$OM_0 = x_0$ gibt, wie eine mit derselben Anfangsgeschwindigkeit, unter dem Winkel $a$ zum Horizonte, zustande gekommene Parabel $OSM_0$.

Man hat hiernach den folgenden Satz:

Die beiden Wurfparabeln, welche bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit mit complementären Abgangswinkeln $90-\alpha$ und $\alpha$ erzeugt werden und die gleiche horizontale Wurfweite geben, sind der geometrische Ort der Endpunkte aller schiefen Wurfweiten, welche bei geändertem Terrainwinkel $\beta$ und constantem dazugefügten Elevationswinkel $\alpha$ oder $90-\alpha$, mit der obigen Anfangsgeschwindigkeit erhalten werden.

Zieht man mit $x_0$ als Halbmesser einen Kreis, so schneidet derselbe die Wurfparabel $OSM_0$ in zwei Punkten $M_0$ und $M_3$; die Wurfparabel $OS'M_0$ im allgemeinen in den vier Punkten $M_0$, $M_1$, $M_2$ und $M_3$.

Wird eine Schusswaffe mit constant eingestelltem Elevationswinkel (Aufsatz eines Gewehres) nach aufwärts gewendet, so ist im Horizonte $w = x_0$; dann bleibt $w < x_0$ bis zu einem Winkel $\beta_1$, für welchen zum zweitenmale $w = x_0$ wird; dann bleibt $w > x_0$ bis zu einem Winkel $\beta_2$, für welchen zum drittenmale $w = x_0$ ist; dann nimmt $w$ sehr rasch ab und übergeht auf die negative Seite, d. i. auf die Verlängerung von $OM$ über $O$ hinaus. Für einen Winkel $\beta_3$ wird endlich zum viertenmale $w = x_0$.

Die Bedingung $w = x_0$ führt auf die Gleichung

$$\cos^4\beta - 2\cos^3\beta + (1 + \mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\beta = \mathrm{tg}^2\alpha,$$

von welcher eine Wurzel $\cos\beta = 1$ bekannt ist. Wird durch den Factor $(\cos\beta - 1)$ dividiert, so bleibt die Gleichung

$$\cos^3\beta - \cos^2\beta + \mathrm{tg}^2\alpha\cos\beta + \mathrm{tg}^2\alpha = 0$$

übrig, deren Wurzeln die Werte $\beta_1$, $\beta_2$ und $\beta_3$ bestimmen, von denen früher die Rede war.

Setzt man voraus, dass diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln haben soll, so findet man leicht, dass die steilere

Parabel von dem Kreise mit dem Halbmesser $x_0$ in einem Punkte tangiert wird, wenn $\alpha = 16° 42' 51''$ gewählt wird. Der entsprechende Terrainwinkel ist dann $\beta_1 = \beta_2 = 51° 49' 38''$.

Außer dem Schnittpunkte im Horizonte ergibt sich noch ein Schnitt auf dem Parabelzweig im dritten Quadranten, dem ein Terrainwinkel von 256° 20' 44'' entspricht. Bei einem Terrainwinkel $\beta = 21° 29'$ ist die Abweichung $x_0 - w$ am größten und beträgt 5% der horizontalen Wurfweite.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick, wie sich mit dem Winkel $\alpha$ die Werte von $\beta_1$, $\beta_2$ und $\beta_3$ ändern, die den Schnittpunkten des Kreises vom Halbmesser $x_0$ mit der Parabel entsprechen oder für welche $x_0 = w$ wird.

| $\alpha$ | $\cos\beta_1$ | $\cos\beta_2$ | $\cos\beta_3$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 1·0000 | 0·0000 | 0·0000 | 0° 00' | 90° 00' | 90° 00' |
| 3 | 0·9946 | 0·0549 | —0·0495 | 5 57 | 86 51 | 87 10 |
| 6 | 0·9774 | 0·1180 | —0·0954 | 12 12 | 83 13 | 84 31 |
| 9 | 0·9454 | 0·1925 | —0·1380 | 19 01 | 78 54 | 82 04 |
| 12 | 0·8928 | 0·2850 | —0·1778 | 26 47 | 73 26 | 79 46 |
| 15 | 0·7968 | 0·4185 | —0·2153 | 37 10 | 65 16 | 77 35 |
| 16 | 0·7381 | 0·4895 | —0·2276 | 42 26 | 60 42 | 76 51 |
| 16 43' | 0·6180 | 0·6180 | —0·2361 | 51 50 | 51 50 | 76 21 |

Es ist hiernach z. B. für einen Elevationswinkel $\alpha = 12°$, wie er in der Figur vorausgesetzt wird, von $\beta = 0$ bis zu $\beta_1 = 26° 47'$ die schiefe Wurfweite kleiner als die dem Elevationswinkel von 12° entsprechende horizontale Wurfweite; über diesem Terrainwinkel ist die schiefe Wurfweite größer als $x_0$ bis zu einem Terrainwinkel von 73° 26', von da an wird die schiefe Wurfweite wieder kleiner als die horizontale.

Wird zu dem Winkel von 78°, unter welchem die Parabel $OM_2SM_1M_0$ erzeugt ist, noch ein Winkel von 7° 26' dazu-

gegeben, so schneidet die so erzeugte Wurfparabel $OS_2M_2$ die Parabel $S'$ in einem Punkte $M_2$, dem ein Terrainwinkel von $\beta_2 = 73° 26'$ entspricht; der Abgangswinkel ist

$$73° 26' + 12° 00' = 85° 26'.$$

Diese Parabel $S_2$ schneidet aber auch die Parabel $OM'SM_0$ in einem Punkte $M'$, dem ein Terrainwinkel von $7° 26' = 85° 26' — (90° — 12°)$ entspricht.

Der negativen Wurzel —0·1778 entspricht hier ein Schnittpunkt der Parabel mit dem Kreise, welcher im 3. Quadranten liegt. Der Terrainwinkel ist 79° 46′ zu nehmen; derselbe gibt, um 12° vermehrt, den Winkel von 91° 46′, die Wurfparabel trifft dann die unter dem Winkel 79° 46′ zur positiven $x$-Axe gezogene Gerade auf der Verlängerung derselben, über den Coordinatenanfangspunkt hinaus.

Für Gewehre beträgt der mit dem Aufsatze eingestellte Elevationswinkel $\alpha$ für 1000 Schritte, gleich 750 *m* Entfernung, etwas über 1°. Der Wert von $\beta_1$ ist dann nach der früher gegebenen Tabelle unter 2°. Die schiefe Wurfweite ist hier nur in dem kleinen Intervalle des Terrainwinkels von 0° bis 2° kleiner als die horizontale Wurfweite und dieser Unterschied ist sehr klein. Für negative Terrainwinkel wächst der Unterschied $w—x_0$ sehr rasch, d. h. die schiefe Wurfweite ist merklich größer als die horizontale, bei gleichem Winkel $\alpha$. Ebenso bleibt die schiefe Wurfweite über Terrainwinkeln von 2° bis zu einem Winkel von 86° größer als die horizontale, und dieser Unterschied kann sehr beträchtlich werden. Es hat hiernach der folgende, von dem k. und k. Artillerie-Major Herrn Adolf Weigner aufgestellte Satz[1] seine volle Berechtigung, welcher lautet: »Beim Beschießen eines bedeutend erhöhten oder vertieften Zieles muss ein kleinerer Aufsatz angewendet werden, als jener ist, welcher für ein in derselben Entfernung, jedoch im Mündungshorizonte befindliches Ziel zutrifft.«

[1] Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens, 1890, S. 1. Über den Einfluss großer Positionswinkel auf die Treffpunktlage beim Schießen, unter Anwendung von für Ziele im Mündungshorizonte berechneten Aufsätzen.

A. Weigner hat diesen Satz bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes, unter vereinfachenden Annahmen, abgeleitet und die verticale Abweichung des Treffpunktes über dem Zielpunkte mit Hilfe einer kubischen Gleichung für einen bestimmten, kleinen Winkel $\alpha$ berechnet. Durch Versuche mit einem Zimmergewehre hat er sich von der Richtigkeit seiner Rechnungsresultate im allgemeinen überzeugt. Die Schieß-instructionen der verschiedenen Armeen berücksichtigen diese Abweichung nicht.

# Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität. VII.

## Über die tägliche Periode der Luftelektricität

von

Prof. **Franz Exner,**
w. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Februar 1901.)**

Die tägliche Periode ist trotz der zahlreichen Messungen, die von den verschiedensten Orten der Erdoberfläche darüber vorliegen, eine noch ganz unaufgeklärte Erscheinung. Diese Messungen lassen nur soviel erkennen, dass man drei verschiedene Typen unterscheiden kann: *a)* eine doppelte tägliche Periode mit zwei Maximis etwa um $8^h$ a. und $8^h$ p. Ortszeit, die durch eine starke Mittagsdepression des Potentialgefälles voneinander getrennt sind; *b)* eine einmalige tägliche Periode mit einem flachen, über alle Tagesstunden sich erstreckenden Maximum, dem ein gleichfalls ausgedehntes Nachtminimum entspricht, und endlich *c)* ein Verlauf des Potentialgefälles ohne wesentliche Änderung während 24 Stunden; dieser letztere Fall ist natürlich nur der Grenzfall einer der Typen *a)* oder *b),* in den dieselben bei allmählicher Verflachung der Extreme übergehen.

Irgendein Zusammenhang dieser Typen mit der geographischen Lage der Beobachtungsorte hat sich bisher nicht ergeben, obgleich unter letzteren sich Vertreter der verschiedensten Klimate vorfinden, dagegen hat es sich gezeigt, dass der Typus der täglichen Periode an manchen Orten, wenigstens in unseren Breiten, mit der Jahreszeit wechselt, so zwar, dass *a)* im Sommer und *b)* im Winter auftritt.

Schon vor längerer Zeit wurde von Fines[1] und von Hann[2] darauf aufmerksam gemacht, dass die damals besonders bekannte doppelte tägliche Periode der Luftelektricität in ihrem Verlaufe eine bemerkenswerte Ähnlichkeit mit dem täglichen Gange des Luftdruckes zeigt, ohne dass jedoch deshalb ein directer Zusammenhang zwischen beiden angenommen wurde. Die seither bekannt gewordenen Beobachtungen schließen auch einen solchen geradezu aus; denn abgesehen davon, dass der Typus *b)* und *c)* einer solchen Analogie widerspricht, zeigt sich auch an Orten mit ganz gleichem Gang des Luftdruckes eine wesentlich verschiedene Periode der Luftelektricität. Als typisch hiefür können die Orte Batavia auf Java und Colombo auf Ceylon gelten; an beiden ist der Barometergang wesentlich der gleiche, die Luftelektricität dagegen zeigt an ersterem Orte stark ausgesprochen die doppelte tägliche Periode, an letzterem dagegen gar keine.

Es fragt sich, ob irgendwelche meteorologischen Elemente einen Zusammenhang mit der täglichen Periode der Luftelektricität erkennen lassen und dementsprechend zur Erklärung derselben herangezogen werden können.

Es ist mir gelegentlich meiner elektrischen Messungen in Luxor (Oberägypten), welche eine besonders stark ausgeprägte doppelte tägliche Periode ergaben, aufgefallen, dass dieselbe in überraschender Weise mit dem Auftreten einer mittägigen Depression in der ultravioletten Strahlung der Sonne zusammenfällt;[3] die gleichzeitig von mir nach der Methode von Elster und Geitel[4] ausgeführten aktinometrischen Messungen haben diese Strahlungsdepression zur Mittagszeit mit einer bisher noch kaum beobachteten Deutlichkeit ergeben, und mit dieser Depression fällt auch zeitlich das Mittagsminimum des Potentialgefälles, das die beiden Maxima trennt, zusammen.

Um zu sehen, ob dieser Zusammenhang ein zufälliger oder in der Natur begründeter ist, habe ich versucht, für

---

[1] Bull. météor. du dep. d. Pyr. Or. (1888).

[2] Meteorolog. Zeitschr., VI (1889).

[3] Auf die Möglichkeit dieses Zusammenhanges habe ich bereits in der betreffenden Arbeit (diese Sitzungsber., 108 [1899]) hingewiesen.

[4] Diese Sitzungsber., 101 (1892).

möglichst viele Orte den täglichen Gang des Potentialgefälles und der Sonnenstrahlung zusammenzustellen; leider ist die Zahl derselben keine große, da Strahlungsmessungen von den wenigsten Orten vorliegen; da dieselben aber über die verschiedensten Klimate der Erde vertheilt sind, so kann der Zusammenstellung immerhin ein gewisser Wert beigelegt werden.

Die Orte, für welche eine derartige Vergleichung möglich ist, sind: Batavia, Ceylon, Delhi, Luxor, Wolfenbüttel, St. Gilgen bei Salzburg und Spitzbergen; bei allen diesen hat sich der vermuthete Zusammenhang zwischen dem Gang der Strahlung und dem des Potentialgefälles gezeigt.

Die auf diese Orte sich beziehenden Messungen haben die folgende Provenienz: für Batavia liegen einerseits die mehrjährigen elektrischen Messungen des dortigen Observatoriums,[1] anderseits die auf Ultraviolett sich beziehenden Strahlungsmessungen J. Wiesners[2] vor; letztere sind allerdings nicht in Batavia selbst, sondern in dem benachbarten Buitenzorg angestellt. Für Ceylon haben wir die seinerzeit von mir[3] ausgeführten elektrischen und die unlängst daselbst von Dr. Mache[4] angestellten Strahlungsmessungen. Für Delhi wurden beide Untersuchungsreihen gleichzeitig von Dr. Mache (l. c.) für Luxor, ebenso beide von mir[5] und für Wolfenbüttel beide in langen Beobachtungsreihen durch die Herren Elster und Geitel[6] ausgeführt. Für Spitzbergen liegen die elektrischen Beobachtungen Andrees[7] gelegentlich der schwedischen Polarexpedition und die später ebendaselbst von J. Wiesner (l. c.) ausgeführten Strahlungsmessungen vor. Für St. Gilgen endlich finden sich die Resultate der von mir daselbst ausgeführten Messungen im folgenden mitgetheilt.

An allen diesen Orten zeigt sich deutlich der Zusammenhang der mittägigen Depression des Potentialgefälles mit dem

---

1 Observ. made at the magn. and met. Obs. at Batavia (1895 und 1896).

2 Denkschr. der Wiener Akad., 64 (1896) und 67 (1899).

3 Diese Sitzungsber., 98 (1899) und 99 (1890).

4 » » 109 (1900).

5 » » 108 (1899).

6 » » 101 (1892).

7 Obs. fait au Cap Thordsen, II, Stockholm (1887).

Auftreten einer Mittagsdepression in der Sonnenstrahlung (unter letzterer ist in all diesen Fällen nur die ultraviolette Strahlung bis ins sichtbare Blau, soweit sie eben photoelektrisch oder photographisch wirksam ist, gemeint). In Batavia, Delhi und Luxor herrscht eine stark ausgeprägte doppelte elektrische Periode, wie sie in gleichem Maße deutlich in unseren Breiten noch nicht beobachtet wurde; an all diesen Orten zeigt aber auch die Sonnenstrahlung zu Mittag eine starke Depression. Dieselbe äußert sich z. B. in Luxor durch ein plötzliches Absinken der Strahlung etwa um $11^h$ mit darauffolgendem Anstieg bis zur Culmination. Nach derselben ist der Verlauf ganz symmetrisch, indem auf den Abfall zwischen $12^h$ und $1^h$ etwa um letztere Stunde wieder ein, plötzlicher Anstieg folgt, worauf die Werte sich nachmittags höher halten als die entsprechenden des Vormittags. Die unten folgende Fig. 2 gibt ein Bild dieses Verlaufes. In Delhi ist derselbe vormittags ganz identisch mit dem in Luxor, aber nachmittags sind die Werte der Strahlung so auffallend niedrig, dass die Zunahme derselben nach der Culmination darunter fast ganz verschwindet; die um etwa $11^h$ vormittags eintretende Strahlungsdepression ist aber so deutlich wie in Luxor. Aus Batavia selbst fehlen zwar Strahlungsmessungen, doch können wohl die Beobachtungen Wiesners aus dem benachbarten Buitenzorg zum Vergleiche herangezogen werden, und diese zeigen wieder, bei unbedecktem Himmel, eine entschiedene Abnahme der Strahlung zu Mittag. Es ist kaum zweifelhaft, dass in Batavia selbst diese Depression noch stärker sein wird als in dem vegetationsreicheren und höher gelegenen Buitenzorg.

Die doppelte elektrische Periode treffen wir auch in Spitzbergen, wenn auch lange nicht so scharf ausgeprägt wie an den früheren Orten, und auch hier zeigt nach Wiesners Messungen die Strahlung eine Mittagsdepression. In Wolfenbüttel wechselt die elektrische Periode ihren Charakter mit der Jahreszeit: sie ist eine doppelte im Sommer und eine einfache im Winter. Die Monatscurven der Potentialgefälle und Sonnenstrahlung lassen auch hier wieder einen Zusammenhang erkennen, indem gerade jenen Monaten mit einer auffallenden Mittagsdepression der Strahlung auch eine solche im Potential-

gefälle zukommt, wodurch letzteres eine doppelte tägliche Periode aufweist. In Ceylon endlich zeigt die Strahlung einen ganz regelmäßigen Verlauf, und dementsprechend fehlen auch in der Potentialcurve die Maxima und natürlich auch das Mittagsminimum. Endlich gilt das Gleiche auch von den Messungen in St. Gilgen, wie die folgenden Tabellen darthun.

Es war mir schon bei früheren Messungen in St. Gilgen aufgefallen, dass der Wert des Potentialgefälles sich während der Tagesstunden sehr constant hält, also jedenfalls kein Mittagsminimum erkennen lässt. Mit Rücksicht auf den vermutheten Zusammenhang des letzteren mit der Strahlung habe ich in den letzten Jahren in St. Gilgen an einer Reihe besonders klarer Tage den Gang des Potentialgefälles während der Tagesstunden nochmals untersucht und gleichzeitig damit im letzten Sommer auch Messungen der Sonnenstrahlung nach der Methode von Elster und Geitel ausgeführt. Da diese nur die ultraviolette Strahlung angibt, so wurden, um einen Einblick in den Zusammenhang der letzteren mit der Gesammtstrahlung zu gewinnen, noch gleichzeitige Messungen zum Vergleiche herangezogen, welche Dr. Benndorf, zu einem anderen Zwecke, mit dem Angström'schen Aktinometer am selben Beobachtungspunkte ausführte. Dieses Instrument, das sich als sehr bequem und exact functionierend erwies, gibt bekanntlich die durch Absorption an einer schwarzen Fläche gemessene Gesammtstrahlung in absolutem Maße.

Da es sich bei den elektrischen Messungen nur um den Gang, nicht um die absoluten Werte handelte, so war der Beobachtungspunkt ein willkürlicher, aber für alle Messungen der gleiche.

Man sieht aus Tabelle I sowohl aus den Mittelwerten, wie auch aus den einzelnen Beobachtungstagen, dass eine Mittagsdepression des Potentialgefälles fehlt und sich letzteres über alle Tagesstunden mit nahezu gleichem Werte hält; in den Nachtstunden scheint der Wert etwas abzusinken.

Tabelle I.

| Stunde | 8 a | 9 a. | 10 a. | 11 a. | 12 | 1 p. | 2 p. | 3 p. | 4 p. | 5 p. | 6 p. | 7 p. | 8 p. | 9 p. | 10 p. | 11 p. | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18./9. 1898 | | | | 65 | 50 | 30 | 30 | 70 | 80 | 105 | 105 | 105 | 100 | 105 | 75 | 60 | 55 |
| 22./9. » | | | | 75 | 108 | 135 | 125 | 115 | 140 | 115 | 100 | 100 | 105 | 105 | 105 | 80 | — |
| 26./9. » | | | 85 | 55 | 55 | — | 85 | 60 | 70 | 80 | 110 | 105 | 75 | 140 | -- | 85 | 80 |
| 27./9. » | | | | 115 | 115 | 115 | — | 75 | 140 | 115 | 120 | 105 | 105 | 110 | 100 | — | 115 |
| 3./10. » | | | 95 | 100 | 75 | 87 | 91 | 91 | 95 | 106 | 55 | 105 | 120 | | | | |
| 4./10. » | | 87 | 98 | 83 | 125 | 132 | 138 | 150 | 150 | 140 | 140 | 144 | 120 | | | 65 | |
| 5./10. » | | 83 | 83 | 100 | 106 | 106 | 126 | 138 | 154 | 150 | 105 | 74 | | | | | 106 |
| 1./8. 1899 | 70 | 75 | 65 | 60 | 70 | 60 | 55 | 60 | 65 | 70 | 90 | 90 | 70 | | | | |
| 2./8. » | 70 | 90 | 70 | 70 | 75 | 65 | 65 | 65 | 65 | 65 | 78 | 75 | 55 | | | | |
| 21./7. 1900 | | | 65 | 83 | 90 | 88 | 88 | 90 | 90 | 100 | 100 | 110 | | | | | |
| 22./7. » | | 65 | 90 | 70 | 67 | 65 | 74 | | | | | | | | | | |
| 25./7. » | | 113 | 120 | 113 | 113 | 110 | 106 | 108 | 120 | | | | | | | | |
| 26./7. » | | 60 | 75 | 98 | 98 | 91 | 83 | 74 | | | | | | | | | |
| Zahl der Tage | 2 | 7 | 10 | 13 | 13 | 12 | 12 | 12 | 11 | 10 | 10 | 10 | 8 | 4 | 3 | 4 | 4 |
| Mittel | 70 | 83 | 84 | 83 | 87 | 90 | 89 | 92 | 107 | 103 | 100 | 101 | 94 | 115 | 93 | 72 | 89 |

Was die Strahlung anlangt, so liegen wohl nur wenige Beobachtungstage vor, da diese aber vollkommen klare und normale waren, sowie auch alle den elektrischen Messungen entsprechenden, so ergibt sich doch ein recht regelmäßiger Gang.

Tabelle II.

| Zeit | $9^h$ a. | $10^h$ a. | $11^h$ a. | $12^h$ | $1^h$ p. | $2^h$ p. | $3^h$ p. | $4^h$ p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.—20. Juli 1900. | 135 | 274 | 361 | 308 | 231 | 191 | 128 | 73 |
| | 135 | 274 | 308 | 274 | 207 | 135 | 111 | 67 |
| | 159 | 235 | 308 | 331 | 310 | 310 | 197 | 76 |
| | | | 274 | 347 | 251 | 216 | 135 | |
| | | | 274 | 274 | | 197 | 127 | |
| | | | | 254 | | 169 | | |
| Mittel . . . . | 143 | 261 | 305 | 305 | 250 | 203 | 139 | 72 |
| Z. D. . . . . . | 46° | 36° | 30° | $26\frac{3}{4}$° | 28° | 33° | 42° | 54° |

Da die Beobachtungen hier nur wenige aufeinanderfolgende Tage umfassen, so konnten die Zenithdistanzen (Z. D.) der Sonne und die Stunden zusammengefasst werden; letztere sind übrigens nur beiläufig, zur Orientierung, angegeben, während die Z. D. die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Mittelwerte sind.

Die Zahlen der Tabelle II für die Strahlung sind in einem willkürlichen Maße angegeben, jedoch in dem gleichen wie bei meinen Messungen aus Luxor und Wien oder bei denen Maches aus Indien, so dass alle diese Werte direct miteinander vergleichbar sind. In der folgenden Figur ist der tägliche Gang des Potentialgefälles und der Strahlung dargestellt.

Man sieht, dass der Verlauf dieser Curven in vollständiger Übereinstimmung mit dem früher Gesagten steht: dem Mangel der Mittagsdepression der Strahlung entspricht der gleichförmige Verlauf der Potentialwerte über die Tagesstunden.

Zum Vergleiche setze ich in Fig. 2 die entsprechenden Curven für Luxor bei.

Da die Beobachtungen in Luxor sich über einen größeren Zeitraum erstreckten, während dessen die Änderung der Zenithdistanz zur gleichen Stunde schon eine bedeutende war, musste

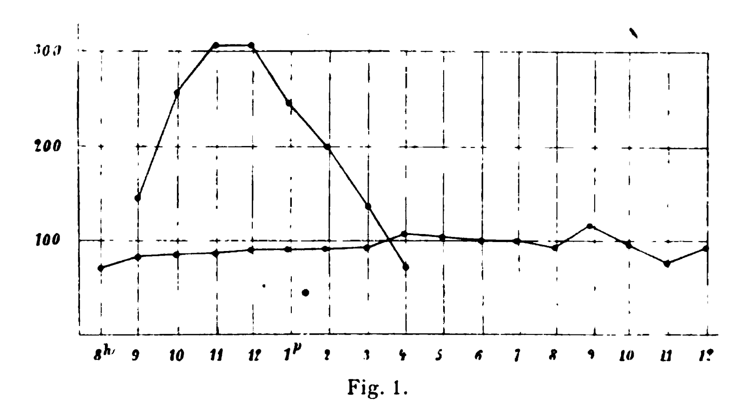


Fig. 1.

aus der für verschiedene Zenithdistanzen bekannten Strahlungscurve die für einen bestimmten Tag sich ergebende entnommen werden. Die in Fig. 2 dargestellte würde einem ideal verlaufenden Tag zu Ende des Monates März entsprechen. Es ist

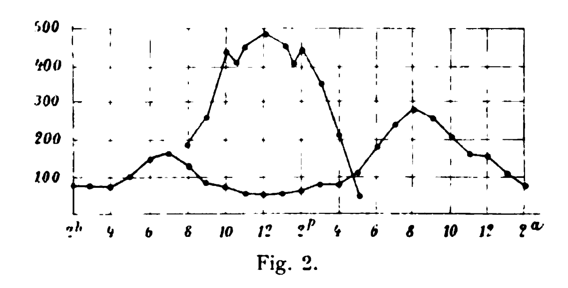


Fig. 2.

kaum zweifelhaft, dass auch die Potentialcurve, d. h. die Lage der beiden Maxima mit der wechselnden mittägigen Zenithdistanz der Sonne sich verändern wird, wie ja derartige Verschiebungen der Maxima im Laufe des Jahres auch schon vielfach beobachtet wurden; doch dürfte dieser Effect bei den Beobachtungen in Luxor, die nur einen Monat umfassen, noch kaum ins Gewicht fallen.

Ein Vergleich der Fig. 1 und 2 lässt den Einfluss der Strahlungsdepression auf den täglichen Gang des Potentialgefälles deutlich hervortreten; bei dem Umstande, dass dieser Einfluss sich bei allen Messungen, welche Potentialgefälle und Strahlung an ein und demselben Orte umfassen, zeigt, glaube ich einen ursächlichen Zusammenhang dieser beiden Erscheinungen mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen zu können.

Da die Mittagsdepression der Strahlung wohl nur der Bildung irgendeiner absorbierenden Schichte zugeschrieben werden kann, die gleichzeitig auftretende Depression des Potentialgefälles aber das Vorhandensein negativer Ladungen über dem Beobachtungsorte voraussetzt, respective eine Abnahme der normalen negativen Erdladung, so würde daraus folgen, dass an Orten mit doppelter täglicher Periode sich zur Mittagszeit eine negativ geladene, die ultravioletten Strahlen stark absorbierende Schichte über dem Beobachtungsorte bildet, die nach der Culmination der Sonne plötzlich (Luxor) oder allmählich (Delhi) wieder verschwindet.

Bedenkt man, dass in den besonders trockenen Gebieten von Delhi und Luxor sich diese Depression sehr auffallend zeigt, dieselbe dagegen an vegetationsreichen und feuchten Orten wie Ceylon oder St. Gilgen gänzlich fehlt, so liegt die Vermuthung nahe, dass man es hier mit Staub in feinster Vertheilung zu thun hat, der vom trockenen Erdboden durch die Luftströmungen aufwärts geführt wird, die der starken Insolation des Bodens in den späten Vormittagsstunden ihre Entstehung verdanken.

Damit stimmt auch die Thatsache überein, dass in unseren Breiten an vielen Orten die doppelte tägliche Periode dem Sommer, die einfache dem Winter zukommt, sowie dass Staub in der Luft sich unter allen Umständen als negativ elektrisch erweist.

Wenn diese Vermuthung richtig ist, so muss die absorbierende Schichte sich in verhältnismäßig geringer Tiefe in der Atmosphäre finden, d. h. die doppelte Periode müsste schon bei geringer Erhebung über dem Erdboden verschwinden. Da in Luxor diese Periode besonders stark hervortritt und da dort

das lybische Randgebirge steil aus der Ebene aufsteigt, so schien es mir wünschenswert, auf einem Rücken des letzteren vergleichende Beobachtungen mit Luxor anzustellen. Herr Dr. Mache hatte die Güte, vor einiger Zeit diese Vergleichung auszuführen (l. c.); da er nicht genau zur selben Jahreszeit, in welcher ich früher meine Messungen in Luxor anstellte, dort eintraf, so beobachtete er zunächst in Luxor selbst und fand, ebenso wie ich, eine starke doppelte Periode mit den Maximis genau zur gleichen Zeit, wie ich sie fand, nur war das Morgenmaximum noch etwas stärker. Dagegen zeigte sich in einer Höhe von etwa 150 *m* über Luxor die doppelte Periode schon außerordentlich abgeflacht: während unten die Extreme von 50 bis 300 Volt per Meter variierten, waren oben die Grenzen nur mehr 110 und 160. Aus dieser Verflachung des täglichen Ganges ist zu ersehen, dass die untersten 150 *m* schon den wesentlichsten Antheil zur Erscheinung beitragen.

Ein gleiches Resultat ergaben die in den letzten Jahren ausgeführten Untersuchungen Chauveaus[1] auf dem Eiffelthurm in Paris, in einer Höhe von etwa 300 *m*. Während in Paris selbst im Sommer eine deutliche doppelte Periode der Luftelektricität beobachtet wurde, zeigten die Messungen vom Eiffelthurm gleichzeitig nur eine einmalige, d. h. ein flaches Maximum über alle Tagesstunden; das beweist deutlich, dass die Schichten, welche die Mittagsdepression des Potentialgefälles erzeugen, sich unterhalb 300 *m* vorfinden.

Ganz analoge, wenn auch quantitativ nicht so genau verfolgte Resultate ergaben auch frühere Untersuchungen, so z. B. die von Smith[2] auf dem Gipfel der Dodabetha in Südindien und die von Cancani[3] in Rocca di Papa bei Rom.

Aus all diesen Beobachtungen scheint mir das Folgende mit einiger Sicherheit hervorzugehen: Ganz ohne über die Natur der absorbierenden Schicht irgendeine specielle Annahme zu machen, was gegenwärtig wohl verfrüht wäre, kann man die doppelte tägliche Periode als eine Störungserscheinung

[1] Journ. de phys., Nov. 1899 und C. R., 25. Sept. 1899 und 24. Dec. 1900.

[2] Edinb. Trans., 32 (1887).

[3] Rend. Lincei, 1897.

auffassen, die aus der normalen einfachen Periode durch das Auftreten einer localen Mittagsdepression entsteht. Der gleichen Ursache wäre auch der Übergang vom Winter- zum Sommertypus an ein und demselben Beobachtungsorte, sowie die Änderung des täglichen Ganges mit der Höhe zuzuschreiben.

Die ungestörte, normale tägliche Periode der Luftelektricität wäre somit überall die einmalige, mit einem flachen Tagesmaximum und einem flachen Nachtminimum.

Dadurch wird auch die auffallende Erscheinung verständlich, dass bei der doppelten Periode die beiden Maxima, morgens und abends, genau mit der Ortszeit gehen, also durch den Sonnenstand bedingt sind und trotzdem zweimal des Tages auftreten; sie sind eben in Wirklichkeit nur Anfang und Ende des einen, ungestörten Tagesmaximums.

In letzter Linie muss man auch die einmalige tägliche Periode als eine Störungserscheinung auffassen, als eine Störung des elektrischen Feldes, hervorgerufen durch die Bewegung irgendwelcher elektrischer Massen in der Luft; ohne eine solche würde ja das Potentialgefälle immer den gleichen Wert haben. Diese Bewegung muss solchen Processen ihre Entstehung verdanken, die durch den scheinbaren Gang der Sonne ausgelöst werden, und zwar müssen bei Tag weniger negative, oder mehr positive, Massen sich in der Luft vorfinden als bei Nacht. Diese die einmalige Periode bedingende Störung müsste sich aber bis in viel größere Höhen erstrecken, bis über 3000 *m*, da am Hohen Sonnblick nach Elster und Geitel[1] diese Periode noch bemerkbar ist.

---

Die Strahlungsmessungen, welche von Dr. Mache im Indischen Ocean, in Ceylon und Delhi und die von mir in Wien, St. Gilgen und Luxor ausgeführt wurden, sind alle nach derselben Methode und mit identischen Apparaten ausgeführt; ihre Resultate sind daher, wenn auch nicht absolute, so doch direct miteinander vergleichbar, und da es an solchen an verschiedenen Punkten der Erde nach einheitlicher Methode aus-

---

[1] Diese Sitzungsber., 102 (1893).

geführten Messungen noch mangelt, so will ich in der folgenden Tabelle die Resultate vergleichbar zusammenstellen. Die Maßeinheit ist für alle Orte die gleiche; die Werte sind nach Zenithdistanzen der Sonne geordnet, von 5° zu 5° fortschreitend und sind Mittelwerte aus den Vormittags- und Nachmittagsstunden. (Nur die Werte vom Indischen Ocean sind ausschließlich Abendwerte.)

In Ceylon und Luxor überwiegt die Strahlung des Nachmittags bedeutend die des Vormittags, in Delhi, Wien und St. Gilgen zeigt sich aber das entgegengesetzte Verhalten.

Tabelle III.

| Z. D. | Indischer Ocean | Luxor | Ceylon | Delhi | Wien | St. Gilgen |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25—30 | — | 463 | — | — | 319 | 275 |
| 30—35 | — | 412 | 395 | — | 298 | 240 |
| 35—40 | — | 456 | 320 | — | 294 | 215 |
| 40—45 | — | 400 | 270 | 263 | — | 141 |
| 45—50 | — | 325 | 252 | 199 | — | 120 |
| 50—55 | — | 286 | 221 | 166 | 177 | — |
| 55—60 | 245 | 225 | 161 | 117 | 148 | — |
| 60—65 | 200 | 191 | 139 | 71 | 100 | — |
| 65—70 | 111 | 126 | 99 | 44 | 76 | — |
| 70—75 | 74 | 61 | 86 | 24 | 56 | — |
| 75—80 | 21 | 32 | — | — | — | — |

Man sieht aus diesen Zahlen zunächst den großen Unterschied in der Strahlung bei gleichem Sonnenstand an verschiedenen Punkten der Erde, obwohl alle Messungen bei vollkommen klarem Himmel gemacht sind. Am stärksten scheint die Strahlung in Luxor, am kleinsten in St. Gilgen am Wolfgangsee zu sein, obwohl am letzteren Orte der Himmel ungleich klarer und tiefer blau gefärbt erscheint als je in Luxor; die anscheinend so reine Gebirgsluft in St. Gilgen absorbiert sogar noch mehr als die Luft in Wien. Auffallend stark ist die

Strahlung im Indischen Ocean — leider fehlen Werte bei höherem Sonnenstand —, ungefähr gleich mit der in Luxor.

Es ist schwer, sich nach diesen Zahlen eine Vorstellung darüber zu bilden, welcher Bestandtheil der Atmosphäre die Absorption der ultravioletten Strahlung bedingen mag. Der gleich hohe Wert in Luxor und im Indischen Ocean scheint eine Mitwirkung des Wasserdampfes gänzlich auszuschließen, was übrigens auch schon aus den schönen Untersuchungen von Cornu[1] über diesen Gegenstand folgt; der tiefe Wert für St. Gilgen, etwa im Vergleich mit Wien, macht es dagegen ebenso unwahrscheinlich, dass Staub oder sonstige mechanische Verunreinigungen die Unterschiede bedingen, da solche in der reinen Gebirgsluft wohl ungleich weniger vorhanden sein müssen als in Wien. Im allgemeinen scheint hohe Temperatur die Durchstrahlung zu begünstigen; vielleicht wäre an ein Zusammenwirken von Staub und Feuchtigkeit in der Weise zu denken, dass Wasser sich an Staubpartikeln in flüssiger Form niederschlägt und eben nur in dieser Form die Absorption bedingt. Die hohen Werte der Strahlung in Luxor und im Indischen Ocean würden sich dann dadurch erklären, dass an ersterem Orte das Wasser, an letzterem der Staub fehlt, und auch die tiefen Werte St. Gilgens stünden damit in Übereinstimmung, da dort bei der relativ niedrigen Lufttemperatur eine Condensation leicht eintreten könnte. Es ist sehr auffallend, dass sowohl in Luxor, als im Indischen Ocean die Sonne bei ihrem Untergang und Aufgang nicht roth gefärbt ist, wie wir sie zu sehen gewohnt sind, sondern fast vollkommen weiß; sogenannte Abendröthe oder Abendfärbungen habe ich infolge dessen in Luxor während der ganzen Zeit meines Aufenthaltes nicht zu sehen Gelegenheit gehabt, und das deutet gleichfalls auf die Abwesenheit flüssigen Wassers in der Atmosphäre hin; jedenfalls steht es im Einklange mit einer geringen Absorption der blauen und ultravioletten Strahlen.

Noch könnte man bei dieser Erscheinung an einen Einfluss des Kohlensäuregehaltes der Luft denken, der in vegetationsreichen Gebieten wohl größer sein dürfte als in trockenen;

---

[1] C. R., 90 (1880).

doch sind die Angaben darüber schwankend und zum Theil sich widersprechend.

Dass die ultraviolette Strahlung auf dem Meere bedeutend größer ist — bis zu 25% — als am Festlande, hat auch schon Wortley[1] festgestellt.

Um zu sehen, in welchem Verhältnisse die ultraviolette Strahlung zur Gesammtstrahlung steht, wurden in St. Gilgen gleichzeitig beide gemessen, die letztere mit dem Angström'schen Aktinometer, dessen Werte absolute sind. Die folgende Tabelle gibt die erhaltenen Zahlen wieder: außer Zeit und Zenithdistanz die ultraviolette Strahlung $J$ im gleichen Maße wie bei allen früheren Angaben, ferner die Gesammtstrahlung $J'$ in Grammcalorien pro Quadratcentimeter und Minute.

Tabelle IV.

| $h$ | Z. D. | $J$ | $J'$ | $\frac{J'}{J}$ |
|---|---|---|---|---|
| $9^h 30^m$ | 39° | 159 | 1·094 | 0·0069 |
| 10 45 | 31 | 235 | 1·138 | 0·0048 |
| 11 30 | 28 | 274 | 1·171 | 0·0043 |
| 12 15 | 27 | 254 | 1·148 | 0·0045 |
| 3 30 | 48 | 127 | 1·038 | 0·0082 |

Man sieht, dass mit der Zenithdistanz sich die Gesammtstrahlung sehr viel langsamer ändert als die ultraviolette; innerhalb der vorstehenden Grenzen beträgt diese Änderung circa 13%, respective 105%, was sich auch im Quotienten $\frac{J'}{J}$, durch welchen die Angaben des relativen Aktinometers auf absolute Werte reduciert werden, ausspricht. Dieser Quotient ist für jede Zenithdistanz ein anderer, er ändert sich angenähert linear mit derselben.

[1] Brit. Journ. Alm., 1881.

In der nachstehenden Fig. 3 sind die vorstehenden Zahlen graphisch dargestellt.

Diese starke Änderung der ultravioletten Strahlung mit der Zenithdistanz macht es wahrscheinlich, dass die absorbierende Schichte nur eine verhältnismäßig geringe Dicke hat; sie macht es aber zugleich unmöglich, die Messungen aus Ceylon, Delhi, Luxor etc. mit Hilfe der vorstehenden Zahlen auf absolutes Maß zu reducieren, denn es muss sehr fraglich erscheinen, ob der für eine bestimmte Zenithdistanz in unseren Breiten gefundene Quotient $\frac{J'}{J}$ auch noch für andere Orte gilt. Wäre dies der Fall, so würde sich z. B. für die stärkste beobachtete (mittlere) Strahlung in Luxor nach Tabelle III bei einer mittleren Zenithdistanz von 25° bis 30° eine Gesammtstrahlung von 2·04 Grammcalorien pro Quadratcentimeter und Minute ergeben. Der höchste beobachtete Einzelwert wäre, bei einer Zenithdistanz von $25^1/_2$°, gleich 2·64 Cal.

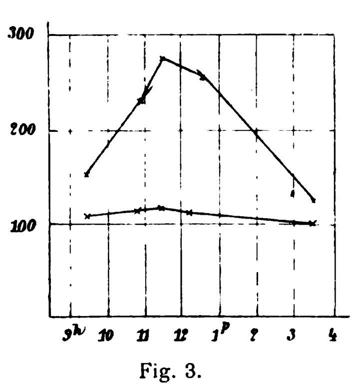


Fig. 3.

---

Ich glaube, es lassen sich aus dem Vorstehenden die folgenden Schlüsse ziehen:

1. Der normale tägliche Verlauf des Potentialgefälles ist durch eine einmalige Periode gegeben.

2. Die vielfach auftretende doppelte Periode entsteht durch Störung der einmaligen infolge Auftretens einer Mittagsdepression des Potentialgefälles.

3. Diese Depression tritt hauptsächlich in trockenen Gebieten (oder im Sommer) auf und scheint die Folge einer negativ elektrischen Schichte zu sein, die sich zur Mittagszeit über dem Beobachtungsorte bildet.

4. Diese Schichte äußert sich auch in einer starken Absorption der ultravioletten Sonnenstrahlung.

5. Die Höhe dieser Schichte scheint einige hundert Meter nicht zu übersteigen.

In Bezug auf die ultraviolette Strahlung im allgemeinen lässt sich noch sagen:

6. Das Verhältnis der ultravioletten zur Gesammtstrahlung ändert sich stark mit der Sonnenhöhe in dem Sinne, dass bei tiefem Sonnenstande letztere überwiegt.

---

# Das Restglied bei der Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten

von

Dr. **Anton Wassmuth,**

*o. Professor der mathematischen Physik in Graz.*

**(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1901.)**

Die Bedeutung des Gauss'schen Princips vom kleinsten Zwange ist erst in neuerer Zeit recht zutage getreten, nachdem Gibbs nachgewiesen, dass dieses Princip unter Umständen mehr leistet als das der virtuellen Verschiebungen und Hertz und Boltzmann in ihren Darstellungen der Mechanik dem Gauss'schen Princip einen ersten Platz anwiesen.

Betrachtet man $n$ Punkte, nennt: $x_{3\mu-2}, x_{3\mu-1}, x_{3\mu}$ die rechtwinkligen Coordinaten, $m_{3\mu-2} = m_{3\mu-1} = m_{3\mu}$ die Masse des $\mu^{\text{ten}}$ Punktes und: $X_{3\mu-2}, X_{3\mu-1}, X_{3\mu}$ die Componenten der auf diesen Punkt wirkenden, äußeren Kräfte, so sagt das Princip des kleinsten Zwanges aus, dass der Ausdruck:

$$Z = \sum_{1}^{3n} {}_i \, m_i \left[ \ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right]^2$$

ein Minimum sein müsse für alle mit den Bedingungen verträglichen Beschleunigungen $\ddot{x}_i$, wenn dabei eben nur die Beschleunigungen $\ddot{x}_i$ geändert, die Geschwindigkeiten $\dot{x}_i$ und die Coordinaten $x_i$ aber als constant angesehen werden. Setzt man zur Abkürzung: $m_i \ddot{x}_i - X_i = y_i$, so wird der Ausdruck für $Z$:

$$Z = \sum_{1}^{3n} {}_i \, \frac{1}{m_i} y_i^2.$$

Für die Anwendung auf viele physikalische Probleme ist es vortheilhaft, statt der rechtwinkligen sogenannte generelle

Coordinaten — hier kurz Parameter $p_1, p_2 \dots p_k$ genannt — einzuführen, welche die $(3n-k)$ Bedingungsgleichungen, an die das System gebunden ist, identisch erfüllen. Die $3n$ rechtwinkligen Coordinaten $x_i$ erscheinen als Functionen dieser $k$ Parameter von der Form $x_i = f_i[p_1, p_2 \dots p_k]$ und sollen Differentialquotienten nach den $p$ durch angehängte, weitere Indices bezeichnet werden; es wäre also z. B. $f_{123} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial p_2 \partial p_3}$, $f_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial p_3}$ u. s. w. Der Ausdruck für $Z$ verwandelt sich dann, wie zuerst von Lipschitz,[1] dann von Wassmuth[2] und Radakovich[3] auf verschiedene Art nachgewiesen wurde, in

$$Z = Z' + \Phi,$$

wobei $Z'$ eine der Form nach schon ermittelte Function aller Beschleunigungen $\ddot{p}_1, \ddot{p}_2 \dots \ddot{p}_k$ darstellt, während $\Phi$ keine dieser Beschleunigungen enthält und bisher noch nicht bestimmt wurde.

Die Größe $Z'$ hat den Wert:

$$Z' = \frac{1}{D} \sum_{1}^{k}{}_{\nu} \sum_{1}^{k}{}_{\mu} A_{\nu\mu} Q_\nu Q_\mu;$$

die Bedeutung der verschiedenen Buchstaben erhellt aus folgendem: Nennt man $L$ die lebendige Kraft, so wird:

$$2L = \sum_{1}^{3n}{}_{i} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{1}^{k}{}_{\nu} \sum_{1}^{k}{}_{\mu} a_{\nu\mu} \dot{p}_\nu \dot{p}_\mu,$$

wenn für $\dot{x}_i$ die Werte aus $x_i = f_i(p_1 \dots p_k)$ durch Differentiieren nach der Zeit gewonnen und eingesetzt werden; man findet

$$a_{\nu\mu} = \sum_{1}^{3n}{}_{i} m_i f_{i\nu} f_{i\mu}$$

---

[1] Lipschitz, Borch. Journ., Bd. 82, S. 323.

[2] Wassmuth, Diese Sitzungsber., Bd. 104, IIa, 1895.

[3] Radakovich, Wiener Monatshefte f. Math. u. Physik, VII, 1896.

und nennt nun $D$ die bekanntlich nicht identisch verschwindende Determinante aus den $a$, so dass $D = |a_{\varkappa\lambda}|$ mit den Unterdeterminanten $A_{\varkappa\lambda}$ ist. Ferner wird:

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_\mu} - \sum_1^{3n} {}_i X_i f_{i\mu} =$$

$$= \sum_1^k {}_\varkappa a_{\varkappa\mu} \ddot{p}_\varkappa + \sum_1^k {}_i \sum_1^k {}_\lambda \begin{bmatrix} \varkappa\lambda \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_\varkappa \dot{p}_\lambda - P_\mu,$$

wobei also: $P_\mu = \sum_1^{3n} {}_i X_i f_{i\mu}$ und das Symbol

$$\begin{bmatrix} \varkappa\lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu}\right]$$

ist.

Es soll nun die Aufgabe gelöst werden, die bisher noch unbekannte Function $\Phi$, von der man nur weiß, dass sie die Beschleunigungen $\ddot{p}_1 \ddot{p}_2 \ldots \ddot{p}_\mu$ nicht enthält, ebenfalls zu bestimmen.

Was nun den Nutzen einer solchen Ermittlung von $\Phi$ betrifft, so kann man wohl einwenden, dass diese Function, sobald man das Princip auf praktische Fälle anwendet, d. h. $Z$, respective $(Z'+\Phi)$ nach den Beschleunigungen $\ddot{p}_\mu$ oder den Größen $Q_\mu$ differentiiert, überhaupt wegfällt, indem man so die Lagrange'schen Gleichungen:

$$Q_1 = 0 \quad Q_2 = 0 \ldots Q_k = 0$$

gewinnt. Anderseits ist nicht zu leugnen, dass $Z'$ nur unvollständig den Ausdruck $Z$ wiedergibt und dass es physikalische Aufgaben geben kann, wo uns die Kenntnis der vollständigen Function, die einen Minimalwert annehmen soll, von Interesse ist. Was nun die Lösung der Aufgabe betrifft, so ergibt sich eine ganz allgemeine aus der Beziehung:

$$\Phi = Z - Z',$$

wo auf der rechten Seite nach den obigen Formeln alles bekannt ist und rechts schon a priori die Beschleunigungen $\ddot{p}_1 = \ddot{p}_2 = \ldots = \ddot{p}_k = 0$ genommen werden können, da sich

diese Beschleunigungen in $Z$—$Z'$ unbedingt aufheben müssen. Der auf diese Art gewonnene Ausdruck für $\Phi$ ist indes weder übersichtlich, noch für physikalische Anwendungen brauchbar; beiden Bedingungen entspricht eine andere Form, die ich erhielt, indem ich $\Phi$ auf eine besondere Art als eine Summe von Quadraten darstellte.

Man kann nämlich, wie ich früher schon bewiesen, indem man wie oben: $y_i = m_i \ddot{x}_i - X_i$ nimmt, für $Q_\mu$ auch setzen:

$$Q_\mu = \sum_1^{3n} {}_i\, y_i f_{i\mu}.$$

Diese wichtige Formel ergibt sich unter anderem aus der bekannten Identität:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_\mu} = \sum_1^{3n} {}_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right] \frac{\partial x_i}{\partial p_\mu},$$

wenn man darin für:

$$L = \frac{1}{2} \sum_1^{3n} {}_i\, m_i \dot{x}_i^2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = m_i \ddot{x}_i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_\mu} = f_{i\mu}$$

setzt, so dass:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_\mu} = \sum_1^{3n} {}_i\, m_i \ddot{x}_i f_{i\mu}$$

und wegen

$$P_\mu = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_\mu} + \ldots = \sum_1^{3n} {}_i\, X_i f_{i\mu}$$

durch Subtrahieren erhalten wurde:

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_\mu} - P_\mu =$$

$$= \sum_1^{3n} {}_i\, y_i f_{i\mu} = y_1 f_{1\mu} + y_2 f_{2\mu} + \ldots + y_{3n} f_{3n,\mu}.$$

Die $Q_\mu$ sind also lineare Functionen der Größen $y$, und demnach erscheint

$$\Phi = \sum_1^{3n} {}_i \frac{y_i^2}{m_i} - \frac{1}{D} \sum_1^k {}_\nu \sum_1^k {}_\mu A_{\nu\mu} Q_\nu Q_\mu =$$

$$= \sum_1^{3n} {}_i \frac{y_i^2}{m_i} - \frac{1}{D} \sum_1^k {}_\nu \sum_1^k {}_\mu A_{\nu\mu} . \sum_1^{3n} {}_r y_r f_{r\nu} . \sum_1^{3n} {}_s y_s f_{s\mu}$$

als eine quadratische Form der $y_i$.

Nun ist jede Beschleunigung $\ddot{x}_i$ und demnach auch jedes $y_i$ nach der Formel:

$$\ddot{x}_i = \sum_1^k {}_\nu f_{i\nu} \ddot{p}_\nu + \sum_1^k {}_\nu \sum_1^k {}_\mu f_{i\nu\mu} \dot{p}_\nu \dot{p}_\mu$$

in linearer Weise von den Beschleunigungen $\ddot{p}_\nu$ abhängig; wenn nun $\Phi$ als homogene quadratische Function der $y$ die $\ddot{p}_\nu$ nicht enthalten soll, so müssen sich aus gewissen $y$ Ausdrücke bilden lassen, die keine der Beschleunigungen $\ddot{p}_\nu$ enthalten und die in quadratischer Form in $\Phi$ auftreten.

Wir haben also eine Reihe solcher $y$ zu einem linearen Ausdrucke so zu vereinigen, dass daraus die Beschleunigungen $\ddot{p}_i$ sich eliminieren und werden dann vermuthen, dass in $\Phi$ die Quadrate oder die Producte von je zwei solchen Ausdrücken vorkommen werden. Bei der Untersuchung wird es sich empfehlen, von einfacheren Fällen zu allgemeineren vorzuschreiten und die Zahl der voneinander unabhängigen Größen in jedem speciellen Falle zu bestimmen.

### Zwei Punkte und ein Parameter.

Zwei Punkte mit den Massen: $m_1 = m_2 = m_3$ und $m_4 = m_5 = m_6$ hätten die Coordinaten $x_1, x_2, x_3$, respective $x_4, x_5, x_6$, und es wäre:

$$x_1 = f_1(p_1),\ x_2 = f_2(p_1) \ldots x_6 = f_6(p_1),$$

wo $p_1$ eine generelle Coordinate oder einen Parameter vorstellt. Hieraus erhält man für die Componenten der Geschwindigkeit:

$$\dot{x}_1 = f_{11} \cdot \dot{p}_1,\ \dot{x}_2 = f_{21} \cdot \dot{p}_1 \ldots \dot{x}_6 = f_{61} \cdot \dot{p}_1$$

und für die der Beschleunigung:

$$\ddot{x}_1 = f_{11}.\ddot{p}_1 + f_{111}\dot{p}_1^2,\ \ddot{x}_2 = f_{21}.\ddot{p}_1 + f_{211}\dot{p}_1^2, \ldots \ddot{x}_6 = f_{61}.\ddot{p}_1 + f_{611}.\dot{p}_1^2.$$

Multipliciert man die letzteren Ausdrücke mit den zugehörigen Massen $m_1, m_2 \ldots m_6$ und setzt wie oben: $m_i\ddot{x}_i - X_i = y_i$, so entstehen die sechs Gleichungen:

$$y_1 = m_1 f_{11}.\ddot{p}_1 + m_1 f_{111}.\dot{p}_1^2 - X_1,$$
$$y_2 = m_2 f_{21}.\ddot{p}_1 + m_2 f_{211}.\dot{p}_1^2 - X_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_6 = m_6 f_{61}.\ddot{p}_1 + m_6 f_{611}.\dot{p}_1^2 - X_6.$$

Durch Elimination von $\ddot{p}_1$ aus je zweien dieser Gleichungen entstehen 15 Combinationen, die von der Beschleunigung $\ddot{p}_1$ frei sind. So gibt z. B. die Vereinigung der zweiten und vierten Gleichung die Folgerung, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} y_2 - (m_2 f_{211}\dot{p}_1^2 - X_2), & m_2 f_{21} \\ y_4 - (m_4 f_{411}\dot{p}_1^2 - X_4), & m_4 f_{41} \end{vmatrix} = 0$$

ist und dass demnach der Ausdruck:

$$u_{24} = \begin{vmatrix} y_2, & m_2 f_{21} \\ y_4, & m_4 f_{41} \end{vmatrix} = y_2.m_4 f_{41} - y_4.m_2 f_{21}$$

frei von $\ddot{p}_1$ sein wird. Weil nun $\Phi$ eine homogene, quadratische Form der $y_1, y_2 \ldots y_6$ ist und die Beschleunigung $\ddot{p}_1$ nicht enthalten kann, so steht zu erwarten, dass $\Phi$ die 15 Größen: $u_{12}, u_{13}, u_{14} \ldots u_{56}$ in quadratischer Form enthalten werde. Dies ist thatsächlich der Fall. Es lässt sich nämlich beweisen, dass

$$D.\Phi = a_{11}.\Phi = \frac{1}{m_1 m_2} u_{12}^2 + \frac{1}{m_1 m_3} u_{13}^2 + \ldots + \frac{1}{m_5 m_6} u_{56}^2 \quad \text{(II)}$$

ist und demnach $\Phi$ als Summe von Quadraten erscheint. Man hat nämlich:

$$D = a_{11} = m_1 f_{11}^2 + m_2 f_{21}^2 + \ldots + m_6 f_{61}^2$$

und

$$a_{11}.\Phi = a_{11}\left[\frac{y_1^2}{m_1} + \ldots + \frac{y_6^2}{m_6}\right] - [y_1 f_{11} + y_2 f_{21} + \ldots + y_6 f_{61}]^2. \quad \text{(I)}$$

Zunächst liefern die Glieder mit $y_1$ oder $y_2$:

$$\frac{y_1^2}{m_1}a_{11}+\frac{y_2^2}{m_2}a_{11}-y_1^2f_{11}-y_2^2f_{21}^2-2y_1y_2f_{11}f_{21}=$$

$$=\left(\frac{y_1^2}{m_1}+\frac{y_2^2}{m_2}\right)(m_3f_{31}^2+m_4f_{41}^2+m_5f_{51}^2+m_6f_{61}^2)+\frac{1}{m_1m_2}u_{12}.$$

Nimmt man ferner die Glieder mit $y_3^2$, $2y_1y_3$, $2y_2y_3$ hinzu, so kommt noch:

$$\frac{y_3^2}{m_3}a_{11}-y_3^2f_{31}^2-2y_1y_3f_{11}f_{31}-2y_2y_3f_{21}f_{31}=$$

$$=\frac{y_3^2}{m_3}[m_1f_{11}^2+m_2f_{21}^2+m_4f_{41}^2+m_5f_{51}^2+m_6f_{61}^2]-$$

$$-2y_1y_3f_{11}f_{31}-2y_2y_3f_{21}f_{31},$$

und die Summe der bisher betrachteten Glieder ist demnach:

$$\left[\frac{y_1^2}{m_1}+\frac{y_2^2}{m_2}+\frac{y_3^2}{m_3}\right][m_4f_{41}^2+m_5f_{51}^2+m_6f_{61}^2]+$$

$$+\frac{1}{m_1m_2}u_{12}^2+\frac{1}{m_1m_3}u_{13}^2+\frac{1}{m_2m_3}u_{23}^2.$$

Betrachtet man weiter die Glieder mit $y_4^2$, $2y_1y_4$, $2y_2y_4$, $2y_3y_4$, so kommt dazu:

$$\frac{y_4^2}{m_4}a_{11}-y_4^2f_{41}^2-2y_1y_4f_{11}f_{41}-2y_2y_4f_{21}f_{41}-2y_3y_4f_{31}f_{41}=$$

$$=\frac{y_4^2}{m_4}[m_1f_{11}^2+m_2f_{21}^2+m_3f_{31}^2+m_5f_{51}^2+m_6f_{61}^2]-$$

$$-2y_1y_4f_{41}-2y_2y_4f_{21}f_{41}-2y_3y_4f_{31}f_{41}$$

und die Summe der bisher herausgehobenen Glieder ist:

$$\left[\frac{y_1^2}{m_1}+\frac{y_2^2}{m_2}+\frac{y_3^2}{m_3}+\frac{y_4^2}{m_4}\right][m_5f_{51}^2+m_6f_{61}^2]+$$

$$+\frac{1}{m_1m_2}u_{12}^2+\frac{1}{m_1m_3}u_{13}^2+\frac{1}{m_2m_3}u_{23}^2+$$

$$+\frac{1}{m_1m_4}u_{14}^2+\frac{1}{m_2m_4}u_{24}^2+\frac{1}{m_3m_4}u_{34}^2.$$

Gibt man noch hinzu die Glieder mit $y_5^2$, $2y_1y_5$, $2y_2y_5$, $2y_3y_5$, $2y_4y_5$, d. i.

$$\frac{y_5^2}{m_5}[m_1 f_{11}^2 + m_2 f_{21}^2 + m_3 f_{31}^2 + m_4 f_{41}^2 + m_6 f_{61}^2] -$$
$$-2y_1 y_5 f_{11} f_{51} - 2y_2 y_5 f_{21} f_{51} - 2y_3 y_5 f_{31} f_{51} - 2y_4 y_5 f_{41} f_{51},$$

so wird die Summe:

$$\left[\frac{y_1^2}{m_1} + \frac{y_2^2}{m_2} + \frac{y_3^2}{m_3} + \frac{y_4^2}{m_4} + \frac{y_5^2}{m_5}\right] \cdot m_6 f_{61}^2 +$$
$$+ \frac{1}{m_1 m_2} u_{12}^2 + \ldots + \frac{1}{m_3 m_4} u_{34}^2 + \frac{1}{m_1 m_5} u_{15}^2 + \ldots + \frac{1}{m_4 m_5} u_{45}^2.$$

Schließlich bleiben von $a_{11}\Phi$ noch die Glieder:

$$\frac{y_6^2}{m_6}[m_1 f_{11}^2 + \ldots + m_5 f_{51}^2] - 2y_1 y_6 f_{11} f_{61} - 2y_2 y_6 f_{21} f_{61} -$$
$$-2y_3 y_6 f_{31} f_{61} - 2y_4 y_6 f_{41} f_{61} - 2y_5 y_6 f_{51} f_{61},$$

die, addiert, ergeben:

$$a_{11}.\Phi = \frac{1}{m_1 m_2} u_{12}^2 + \frac{1}{m_1 m_3} u_{13}^2 + \frac{1}{m_2 m_3} u_{23}^2 + \frac{1}{m_1 m_4} u_{14}^2 +$$
$$+ \frac{1}{m_2 m_4} u_{24}^2 + \frac{1}{m_3 m_4} u_{34}^2 + \frac{1}{m_1 m_5} u_{15}^2 + \frac{1}{m_2 m_5} u_{25}^2 +$$
$$+ \frac{1}{m_3 m_5} u_{35}^2 + \frac{1}{m_4 m_5} u_{45}^2 + \frac{1}{m_1 m_6} u_{16}^2 + \frac{1}{m_2 m_6} u_{26}^2 +$$
$$+ \frac{1}{m_3 m_6} u_{36}^2 + \frac{1}{m_4 m_6} u_{46}^2 + \frac{1}{m_5 m_6} u_{56}^2,$$

d. i. also die Form II. (Der Gang des Beweises ist ersichtlich auch auf mehr als sechs Größen $y$ — ein einziges $p_1$ vorausgesetzt — ausdehnbar.)

Das Wesen dieser Umformung besteht also darin, dass die betreffende quadratische Form von 6 Veränderlichen $y$ als Summe von Quadraten von mehr als 6 linearen Functionen der $y_i$ dargestellt werden kann, die dann natürlich nicht mehr von einander unabhängig sind und so gewählt wurden, dass sie die Beschleunigungen $\ddot{p}$ nicht mehr enthalten.

Zwischen je drei $u$ mit den Zeigern $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ besteht eine lineare Relation; für $u_{12}$, $u_{23}$, $u_{31}$ ergibt sich z. B. aus ihren Definitionen:

$$u_{12} = y_1 \cdot m_2 f_{21} - y_2 \cdot m_1 f_{11};\ u_{31} = -u_{13} = y_3 \cdot m_1 f_{11} - y_1 \cdot m_3 f_{31};$$
$$u_{23} = y_2 m_3 f_{31} - y_3 m_2 f_{21},$$

so dass also die drei Größen $u_{12}$, $u_{23}$, $u_{31}$ der Combination 123 verbunden sind durch die Relation:

$$u_{12} \cdot m_3 f_{31} + u_{23} \cdot m_1 f_{11} + u_{31} \cdot m_2 f_{21} = 0$$

und etwa $u_{23}$ durch $u_{12}$ und $u_{13}$ ausdrückbar ist. Ebenso liefert die Betrachtung der Combination 124, dass $u_{24}$ durch $u_{12}$ und $u_{14}$ ausdrückbar ist. Bildet man so alle Combinationen zu je drei Elementen, so überzeugt man sich, dass von allen 15 Größen $u_{12} \ldots u_{56}$ nur fünf derselben, etwa: $u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}$ und $u_{16}$ als voneinander unabhängige angesehen werden können.

Dies stimmt mit der Erkenntnis, dass $\Phi$ von der Beschleunigung $\ddot{p}_1$ unabhängig ist und demnach: $\frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{p}_1} = 0$, d. i. wegen: $y_i = m_i f_{i1} \ddot{p}_1 + m_i f_{i11} \dot{p}_1^2 - X_i$ sein muss:

$$m_1 f_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + m_2 f_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \ldots + m_6 f_{61} \frac{\partial \Phi}{\partial y_6} = 0.$$

Es besteht also eine lineare Beziehung zwischen den partiellen Differentialquotienten nach den sechs Größen $y$ der quadratischen Form $\Phi$ und sonach muss $\Phi$ nach einem bekannten Satze durch fünf voneinander unabhängige neue Variable $z_1 \ldots z_5$, die in linearer Weise von $y_1 \ldots y_6$ abhängen, ausdrückbar sein.

Von der Richtigkeit der Gleichung II kann man sich auch so überzeugen, dass man sowohl den Ausdruck in I, wie den in II zweimal nach den $y$ differentiiert und die Gleichheit dieser so erhaltenen Differentialquotienten nachweist. So erhält man aus I:

$$\frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = a_{11} \frac{y_1}{m_1} - [y_1 f_{11} + y_2 f_{21} + \ldots + y_6 f_{61}] \cdot f_{11}$$

und

$$\frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = \frac{a_{11}}{m_1} - f_{11}^2 = \frac{1}{m_1} [m_2 f_{21}^2 + m_3 f_{31}^2 + \ldots + m_6 f_{61}^2].$$

Desgleichen liefert II:

$$\frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{1}{m_1} [u_{12} f_{21} + u_{13} f_{31} + \ldots + u_{16} f_{61}]$$

und

$$\frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = \frac{1}{m_1} [m_2 f_{21}^2 + m_3 f_{31}^2 + \ldots + m_6 f_{61}^2]$$

wie oben.

In ähnlicher Weise folgt aus I:

$$\frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} = -f_{21} f_{11}$$

und aus II:

$$\frac{1}{2} a_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{1}{m_1} f_{21} \cdot \frac{\partial u_{12}}{\partial y_2} = -f_{21} f_{11},$$

womit die Übereinstimmung erwiesen ist.

Hat man nur einen Punkt: $m_1 = m_2 = m_3 = m$, so ist

$$a_{11} = m[f_{11}^2 + f_{21}^2 + f_{31}^2],$$

$$a_{11} . \Phi = [y_1 f_{21} - y_2 f_{11}]^2 + [y_2 f_{31} - y_3 f_{21}]^2 + [y_3 f_{11} - y_1 f_{31}]^2$$

und, wenn $x_3 = 0$, d. h. der Punkt sich in der Ebene $x_1 x_2$ bewegt:

$$a_{11} \Phi = [y_1 f_{21} - y_2 f_{11}]^2.$$

Setzt man z. B. $p_1 = s$ dem Bogen gleich, den ein in der Ebene auf einer krummen Linie sich bewegender Punkt beschreibt, so wird:

$$p_1 = \frac{ds}{dt} = v.$$

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{dx_1}{ds} \frac{d^2 x_2}{ds^2} - \frac{dx_2}{ds} \frac{d^2 x_1}{ds^2} = f_{11} f_{211} - f_{21} f_{111}, \quad a_{11} = m,$$

$$m\Phi = \left[\frac{mv^2}{\rho} - R \cos(R, N)\right]^2,$$

wo $\rho$ den Krümmungshalbmesser, $v$ die ganze Geschwindigkeit, $R$ die Resultierende aus $X_1$ und $X_2$ und $\sphericalangle R, N$ den Winkel zwischen $R$ und der Normale $N$ vorstellt. Dieses anschauliche Resultat hat Dr. Wilhelm auf anderem Wege in einer hierorts überreichten Dissertation gefunden.

### Zwei Punkte und zwei Parameter.

Es seien zwei Punkte mit den Massen: $m_1 = m_2 = m_3$ und $m_4 = m_5 = m_6$, sowie den diesbezüglichen Coordinaten:

$$x_1 = f_1(p_1, p_2); \quad x_2 = f_2(p_1, p_2) \ldots x_6 = f_6(p_1, p_2),$$

wo $p_1$ und $p_2$ generelle Coordinaten oder Parameter vorstellen, gegeben. Dann werden die Geschwindigkeitscomponenten des ersten Punktes:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_{11}\dot{p}_1 + f_{12}\dot{p}_2 \\
\dot{x}_2 &= f_{21}\dot{p}_1 + f_{22}\dot{p}_2 \\
\dot{x}_3 &= f_{31}\dot{p}_1 + f_{32}\dot{p}_2
\end{aligned}$$

und die des zweiten Punktes:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_4 &= f_{41}\dot{p}_1 + f_{42}\dot{p}_2 \\
\dot{x}_5 &= f_{51}\dot{p}_1 + f_{52}\dot{p}_2 \\
\dot{x}_6 &= f_{61}\dot{p}_1 + f_{62}\dot{p}_2.
\end{aligned}$$

Hieraus leitet man durch nochmaliges Differentiieren nach der Zeit die Componenten der Beschleunigung ab:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= f_{11}\ddot{p}_1 + f_{12}\ddot{p}_2 + f_{111}\dot{p}_1^2 + 2f_{112}\dot{p}_1\dot{p}_2 + f_{122}\dot{p}_2^2 \\
\ddot{x}_2 &= f_{21}\ddot{p}_1 + f_{22}\ddot{p}_2 + f_{211}\dot{p}_1^2 + 2f_{212}\dot{p}_1\dot{p}_2 + f_{222}\dot{p}_2^2 \\
\ddot{x}_3 &= f_{31}\ddot{p}_1 + f_{32}\ddot{p}_2 + f_{311}\dot{p}_1^2 + 2f_{312}\dot{p}_1\dot{p}_2 + f_{322}\dot{p}_2^2 \\
\ddot{x}_4 &= f_{41}\ddot{p}_1 + f_{42}\ddot{p}_2 + f_{411}\dot{p}_1^2 + 2f_{412}\dot{p}_1\dot{p}_2 + f_{422}\dot{p}_2^2 \\
\ddot{x}_5 &= f_{51}\ddot{p}_1 + f_{52}\ddot{p}_2 + f_{511}\dot{p}_1^2 + 2f_{512}\dot{p}_1\dot{p}_2 + f_{522}\dot{p}_2^2 \\
\ddot{x}_6 &= f_{61}\ddot{p}_1 + f_{62}\ddot{p}_2 + f_{611}\dot{p}_1^2 + 2f_{612}\dot{p}_1\dot{p}_2 + f_{622}\dot{p}_2^2,
\end{aligned} \tag{1}$$

da z. B. $f_{412} = f_{421}$ etc. ist.

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit den Massen: $m_1, m_2 \ldots m_6$ multipliciert, so erkennt man leicht, dass es: $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ lineare Combinationen der Größen: $m_1\ddot{x}_1 \ldots m_6\ddot{x}_6$ gibt, welche von den Beschleunigungen: $\ddot{p}_1$ und $\ddot{p}_2$ frei sind; es lassen sich nämlich aus je drei dieser Gleichungen (1) die Größen $\ddot{p}_1$ und $\ddot{p}_2$ eliminieren. Betrachtet man z. B. die erste, vierte und fünfte dieser Gleichungen, setzt wie früher:

$$m_1\ddot{x}_1 - X_1 = y_1 \ldots m_5\ddot{x}_5 - X_5 = y_5 \text{ etc.}$$

und zur Abkürzung:

$$m_1[f_{111}\dot{p}_1^2+2f_{112}\dot{p}_1\dot{p}_2+f_{122}\dot{p}_2^2]-X_1=-\varepsilon_1$$
$$m_4[f_{411}\dot{p}_1^2+2f_{412}\dot{p}_1\dot{p}_2+f_{422}\dot{p}_2^2]-X_4=-\varepsilon_4$$
$$m_5[f_{511}\dot{p}_1^2+2f_{512}\dot{p}_1\dot{p}_2+f_{522}\dot{p}_2^2]-X_5=-\varepsilon_5,$$

so folgt also aus der ersten, vierten und fünften Gleichung, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1+\varepsilon_1, & m_1 f_{11}, & m_1 f_{12} \\ y_4+\varepsilon_4, & m_4 f_{41}, & m_4 f_{42} \\ y_5+\varepsilon_5, & m_5 f_{51}, & m_5 f_{52} \end{vmatrix} = 0$$

ist oder dass der Ausdruck:

$$u_{145} = \begin{vmatrix} y_1, & m_1 f_{11}, & m_1 f_{12} \\ y_4, & m_4 f_{41}, & m_4 f_{42} \\ y_5, & m_5 f_{51}, & m_5 f_{52} \end{vmatrix}$$

frei von $\ddot{p}_1$ und $\ddot{p}_2$ sein muss. Unter Benützung der Bezeichnung:

$$F_{\varkappa\lambda} = -F_{\lambda\varkappa} = \begin{vmatrix} f_{\varkappa 1} & f_{\varkappa 2} \\ f_{\lambda 1} & f_{\lambda 2} \end{vmatrix}$$

erhält man durch Entwickeln nach den Elementen der ersten Colonne die Beziehung:

$$u_{145} = y_1 . m_4 m_5 F_{45} - y_4 . m_1 m_5 F_{15} + y_5 m_1 m_4 F_{14}$$

oder

$$\frac{1}{m_1 m_4 m_5} \cdot u_{145} = \frac{y_1}{m_1} \cdot F_{45} - \frac{y_4}{m_4} F_{15} + \frac{y_5}{m_5} F_{14};$$

analog wäre z. B.

$$u_{123} = y_1 . m_2 m_3 F_{23} - y_2 . m_1 m_3 F_{13} + y_3 m_1 m_2 F_{12} \quad \text{u. s. w.}$$

Alle diese Größen:

$$u_{\lambda\mu\nu} = y_\lambda . m_\mu m_\nu F_{\mu\nu} - y_\mu . m_\lambda m_\nu F_{\lambda\nu} + y_\nu . m_\lambda m_\mu F_{\lambda\mu}$$

haben, wie erwähnt, die Eigenschaft, von den Werten: $\ddot{p}_1$ und $\ddot{p}_2$ unabhängig zu sein, weshalb man vermuthen wird, dass sie — natürlich in quadratischer Form — in dem Restgliede $\Phi$ auftreten werden. Dies ist thatsächlich der Fall; wir haben nämlich

hier, wenn einstweilen der besseren Übersicht wegen die Massen $m_1$, $m_2$, $m_3$, respective $m_4$, $m_5$, $m_6$ nicht als gleich vorausgesetzt werden:

$$2L = m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2+m_3\dot{x}_3^2+m_4\dot{x}_4^2+m_5\dot{x}_5^2+m_6\dot{x}_6^2 = \\ = a_{11}\dot{p}_1^2+2a_{12}\dot{p}_1\dot{p}_2+a_{22}\dot{p}_2^2,$$

so dass

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= m_1 f_{11}^2+m_2 f_{21}^2+m_3 f_{31}^2+m_4 f_{41}^2+m_5 f_{51}^2+m_6 f_{61}^2 \\ a_{22} &= m_1 f_{12}^2+m_2 f_{22}^2+m_3 f_{32}^2+m_4 f_{42}^2+m_5 f_{52}^2+m_6 f_{62}^2 \\ a_{12} &= m_1 f_{11} f_{12}+m_2 f_{21} f_{22}+m_3 f_{31} f_{32}+m_4 f_{41} f_{42}+ \\ &\qquad +m_5 f_{51} f_{52}+m_6 f_{61} f_{62} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wird.

Hieraus folgt für: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$:

$$D = \begin{vmatrix} m_1 f_{11}^2+m_2 f_{21}^2+\ldots+m_6 f_{61}^2, & m_1 f_{11} f_{12}+m_2 f_{21} f_{22}+\ldots+m_6 f_{61} f_{62} \\ m_1 f_{11} f_{12}+\ldots+m_6 f_{61} f_{62}, & m_1 f_{12}^2+m_2 f_{22}^2+\ldots+m_6 f_{62}^2 \end{vmatrix}$$

durch schrittweises Zerlegen:

$$D = m_1^2 \begin{vmatrix} f_{11}^2, & f_{11} f_{12} \\ f_{11} f_{12}, & f_{12}^2 \end{vmatrix} + \ldots + m_1 m_6 \begin{vmatrix} f_{11}^2, & f_{61} f_{62} \\ f_{11} f_{12}, & f_{62}^2 \end{vmatrix}$$

$$+ m_2 m_1 \begin{vmatrix} f_{21}^2, & f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22}, & f_{12}^2 \end{vmatrix} + \ldots + m_2 m_6 \begin{vmatrix} f_{21}^2, & f_{61} f_{62} \\ f_{21} f_{22}, & f_{62}^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ m_5 m_6 \begin{vmatrix} f_{51}^2, & f_{61} f_{62} \\ f_{51} f_{52}, & f_{62}^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} D = \; & m_1^2 f_{11} f_{12} F_{11} + m_1 m_2 f_{11} f_{22} F_{12} + \ldots + m_1 m_6 f_{11} f_{62} F_{16} \\ & + m_2 m_1 f_{21} f_{12} F_{21} + m_2^2 f_{21} f_{22} F_{22} + \ldots + m_2 m_6 f_{21} f_{62} F_{26} \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + m_5 m_6 f_{51} f_{62} F_{56} \end{aligned}$$

$$D = m_1 m_2 F_{12}^2 + m_1 m_3 F_{13}^2 + \ldots + m_1 m_6 F_{16}^2 + m_2 m_3 F_{23}^2 + \ldots \\ + m_5 m_6 F_{56}^2. \quad (3)$$

Diese Formel hätte man auch direct aus der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + \ldots + d_1 u_1, & a_1 x_2 + b_1 y_2 + \ldots + d_1 u_2 \\ a_2 x_1 + \ldots + d_2 u_1, & a_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + d_2 u_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 & u_1 \\ z_2 & u_2 \end{vmatrix}$$

für:

$$x_1 = m_1 f_{11}, \quad y_1 = m_2 f_{21} \ldots x_2 = m_1 f_{12}, \quad y_2 = m_2 f_{22} \ldots$$
$$a_1 = f_{11} \qquad b_1 = f_{21} \qquad \ldots a_2 = f_{12} \qquad b_2 = f_{22} \text{ etc.}$$

erhalten können.

Ferner ist:

$$DZ' = a_{22} Q_1^2 - 2 a_{12} Q_1 Q_2 + a_{11} Q_2^2$$
$$Q_1 = y_1 f_{11} + y_2 f_{21} + y_3 f_{31} + y_4 f_{41} + y_5 f_{51} + y_6 f_{61}$$
$$Q_2 = y_1 f_{12} + y_2 f_{22} + y_3 f_{32} + y_4 f_{42} + y_5 f_{52} + y_6 f_{62}$$

und:

$$D.\Phi = D\left[\frac{y_1^2}{m_1} + \frac{y_2^2}{m_2} + \ldots + \frac{y_6^2}{m_6}\right] -$$
$$- a_{22} Q_1^2 + 2 a_{12} Q_1 Q_2 - a_{11} Q_2^2, \qquad (4)$$

so dass $\Phi$ als eine homogene, quadratische Function der $y_1 \ldots y_6$ erscheint. Wiederum steht zu erwarten, dass $\Phi$ die Größen $u_{\lambda\mu\nu}$ in quadratischer Form enthält, so dass wir auch setzen können:

$$D.\Phi = C_{123} . u_{123}^2 + C_{124} . u_{124}^2 + \ldots + C_{456} . u_{456}^2 \qquad (5)$$

und $\Phi$ als eine Summe von Quadraten erscheint; es wird sich nämlich zeigen, dass Glieder von der Form: $u_{123} . u_{124}$ etc. nicht vorkommen können. Die Constanten $C$ bestimmen sich dann, indem man die Ausdrücke (4) und (5) zweimal nach den $y$ differentiiert. So liefert z. B. (4):

$$\frac{1}{2} D \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{D}{m_1} y_1 - a_{22} f_{11} Q_1 + a_{12} f_{11} Q_2 + a_{12} f_{12} Q_1 - a_{11} f_{12} Q_2$$

und

$$\frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = \frac{D}{m_1} - a_{22} f_{11}^2 + 2 a_{12} f_{11} f_{12} - a_{11} f_{12}^2,$$

worin für $a_{22}, a_{12}, a_{11}$ die Werte aus (2) und (3) zu nehmen sind.

Man erhält schrittweise, indem man darauf bedacht ist, Glieder mit gleicher Masse zusammenzunehmen,

$$\frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = \frac{D}{m_1} - f_{11}^2 [m_1 f_{12}^2 + m_2 f_{22}^2 + m_3 f_{32}^2 + \ldots + m_6 f_{62}^2] +$$
$$+ 2 f_{11} f_{12} [m_1 f_{11} f_{12} + m_2 f_{21} f_{22} + \ldots + m_6 f_{61} f_{62}] -$$
$$- f_{12}^2 [m_1 f_{11}^2 + m_2 f_{21}^2 + \ldots + m_6 f_{61}^2]$$
$$= \frac{D}{m_1} - m_1 (f_{11} f_{12} - f_{11} f_{12})^2 - m_2 (f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})^2 \ldots$$
$$\ldots - m_6 (f_{11} f_{62} - f_{12} f_{61})^2 =$$
$$= \frac{D}{m_1} - m_2 F_{12}^2 - m_3 F_{13}^2 - m_4 F_{14}^2 - m_5 F_{15}^2 - m_6 F_{16}^2 .$$

Hieraus folgt mit Benützung des Wertes von $D$ aus (3):

$$m_1 . \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = D - m_1 m_2 F_{12}^2 - m_1 m_3 F_{13}^2 - \ldots - m_1 m_6 F_{16}^2$$
$$= m_2 m_3 F_{23}^2 + m_2 m_4 F_{24}^2 + \ldots + m_5 m_6 F_{56}^2 . \qquad (4a)$$

Anderseits liefert die zweimalige Differentiation des Ausdruckes (5) nach $y_1$:

$$\frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = C_{123} m_2^2 m_3^2 F_{23}^2 + C_{124} m_2^2 m_4^2 F_{24}^2 + \ldots + C_{156} m_5^2 m_6^2 F_{56}$$

Man sieht, dass man bloß:

$$C_{123} = \frac{1}{m_1 m_2 m_3}, \quad C_{124} = \frac{1}{m_1 m_2 m_4} \ldots C_{156} = \frac{1}{m_1 m_5 m_6}$$

zu nehmen hat, um die volle Übereinstimmung beider Formen und die $C$ als nur von den Massen abhängige Constanten zu gewinnen.

Zu gleichem Resultate gelangt man, wenn man statt $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2}$ die Werte für $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2}$ sucht.

Man findet so aus (4):

$$\frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} = - m_3 F_{13} F_{23} - m_4 F_{14} F_{24} \ldots - m_6 F_{16} F_{26}$$
$$= + m_3 F_{31} F_{23} + m_4 F_{41} F_{24} \ldots + m_6 F_{61} F_{26} \qquad (4b)$$

und aus (5):

$$\frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} =$$

$$= C_{123} . m_3 m_1 . m_2 m_3 F_{31} F_{23} + C_{124} . m_4 m_1 . m_2 m_4 F_{41} F_{24} + \ldots +$$

so dass die **obigen** Werte der $C$ wieder die Gleichheit herstellen. Analoges gilt für die übrigen Größen $y$. Hätte man in $\Phi$ noch Glieder von der Form: $\psi = G . u_{123} . u_{124}$ aufgenommen, so wäre ein Zusatz: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} = 2 G m_2 m_4 . m_2 m_3 . F_{24} F_{23}$ erfolgt; da aber ein Glied mit dem Factor: $F_{24} F_{23}$ in $(4a)$ **nicht** auftritt, so muss $G = 0$ sein. Dasselbe gilt für die Form: $\psi = H . u_{123} . u_{234}$; hier ist wohl: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} = 0$, aber für $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1 \partial y_2}$ findet man den Wert: $H . m_3 m_4 . m_2 m_3 F_{34} F_{23}$, d. i. $H = 0$, indem in $(4b)$ ein solches Glied nicht auftritt. Glieder, welche Producte von zwei der Größen $u$ enthalten, können demnach in $\Phi$ nicht vorkommen. Wir sehen, dass:

$$D . \Phi = \frac{1}{m_1 m_2 m_3} u_{123}^2 + \frac{1}{m_1 m_2 m_4} u_{124}^2 + \ldots + \frac{1}{m_4 m_5 m_6} u_{456}^2 \qquad (6)$$

ist, wo also rechts 20 solcher Größen $u$ von der Form:

$$u_{234} = y_2 m_3 m_4 F_{34} - y_3 . m_2 m_4 F_{24} + y_4 . m_2 m_3 F_{23}$$

auftreten.

Diese 20 Größen $u_{123} \ldots$ sind nicht unabhängig voneinander. Ganz analog wie im ersten Falle findet man, dass zwischen je vier der Größen $u$, deren Zeiger aus denselben vier Nummern entnommen sind, **zwei** Relationen bestehen. So erhält man für die Combination 1234, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & m_1 f_{11} & m_1 f_{12} & m_1 f_{11} \\ y_2 & m_2 f_{21} & m_2 f_{22} & m_2 f_{21} \\ y_3 & m_3 f_{31} & m_3 f_{32} & m_3 f_{31} \\ y_4 & m_4 f_{41} & m_4 f_{42} & m_4 f_{41} \end{vmatrix} = 0$$

ist, die Beziehung:

$$-m_1 f_{11} u_{234} + m_2 f_{21} u_{134} - m_3 f_{31} u_{124} + m_4 f_{41} u_{123} = 0$$

und ebenso

$$-m_1 f_{12} u_{234} + m_2 f_{22} u_{134} - m_3 f_{32} u_{124} + m_4 f_{42} u_{123} = 0.$$

Demnach lassen sich $u_{134}$ und $u_{234}$ ausdrücken durch $u_{123}$ und $u_{124}$. Ebenso zeigt die Combination (1235), dass $u_{135}$ und $u_{235}$ ausdrückbar sind durch $u_{123}$ und $u_{125}$. So kann man alle Combination zu vier Elementen betrachten und überzeugt sich, dass diesmal nur vier voneinander Unabhängige auftreten. Wir haben auch diesmal zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{p}_1} = 0 = m_1 f_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \ldots + m_6 f_{61} \frac{\partial \Phi}{\partial y_6}$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{p}_2} = 0 = m_1 f_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \ldots + m_6 f_{62} \frac{\partial \Phi}{\partial y_6},$$

so dass $\Phi$ nach dem oben erwähnten Satze sich durch $6-2=4$ voneinander unabhängige neue Variable ausdrücken lassen muss.

Es ist nicht überflüssig, zu zeigen, dass man zu dieser Form für $\Phi$ auch auf directem Wege gelangen kann. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man der leichteren Übersicht wegen vorderhand: $m_5 = m_6 = 0$, $y_5 = y_6 = 0$ setzen und erhält so:

$$\begin{aligned}
D.\Phi = & \frac{y_1^2}{m_1}[D - a_{22} m_1 f_{11}^2 + 2 a_{12} m_1 f_{11} f_{12} - a_{11} m_1 f_{12}^2] + \\
& + \frac{y_2^2}{m_2}[D - a_{22} m_2 f_{21}^2 + 2 a_{12} m_2 f_{21} f_{22} - a_{11} m_2 f_{22}^2] + \\
& + \frac{y_3^2}{m_3}[D - a_{22} m_3 f_{31}^2 + 2 a_{12} m_3 f_{31} f_{32} - a_{11} m_3 f_{32}^2] + \\
& + \frac{y_4^2}{m_4}[D - a_{22} m_4 f_{41}^2 + 2 a_{12} m_4 f_{41} f_{42} - a_{11} m_4 f_{42}^2] + \\
& + 2 y_1 y_2 [-a_{22} f_{11} f_{21} + a_{12} f_{11} f_{22} + a_{12} f_{12} f_{21} - a_{11} f_{12} f_{22}] + \\
& + 2 y_1 y_3 [-a_{22} f_{11} f_{31} + a_{12} f_{11} f_{32} + a_{12} f_{12} f_{31} - a_{11} f_{12} f_{32}] + \\
& + 2 y_1 y_4 [-a_{22} f_{11} f_{41} + a_{12} f_{11} f_{42} + a_{12} f_{12} f_{41} - a_{11} f_{12} f_{42}] +
\end{aligned}$$

$$+2y_2y_3[-a_{22}f_{21}f_{31}+a_{12}f_{21}f_{32}+a_{12}f_{22}f_{31}-a_{11}f_{22}f_{32}]+$$
$$+2y_2y_4[-a_{22}f_{21}f_{41}+a_{12}f_{21}f_{42}+a_{12}f_{22}f_{41}-a_{11}f_{22}f_{42}]+$$
$$+2y_3y_4[-a_{22}f_{31}f_{41}+a_{12}f_{31}f_{42}+a_{12}f_{32}f_{41}-a_{11}f_{32}f_{42}].$$

Setzt man für $a_{22}$, $a_{12}$, $a_{11}$ und nachher auch für $D$ die obigen Werte, so wird der Coefficient von: $\frac{y_1^2}{m_1}$

$$= D - m_1^2 f_{11}^2 f_{12}^2 - m_1 m_2 f_{11}^2 f_{22}^2 - m_1 m_3 f_{11}^2 f_{32}^2 - m_1 m_4 f_{11}^2 f_{42}^2 +$$
$$+2m_1^2 f_{11}^2 f_{12}^2 + 2m_1 m_2 f_{11} f_{12} f_{21} f_{22} + 2m_1 m_3 f_{11} f_{12} f_{31} f_{32} +$$
$$+2m_1 m_4 f_{11} f_{12} f_{41} f_{42} - m_1^2 f_{11}^2 f_{12}^2 - m_1 m_2 f_{12}^2 f_{21}^2 -$$
$$- m_1 m_3 f_{12}^2 f_{31}^2 - m_1 m_4 f_{12}^2 f_{41}^2 =$$
$$= m_1 m_2 F_{12}^2 + m_1 m_3 F_{13}^2 + m_1 m_4 F_{14}^2 + m_2 m_3 F_{23}^2 + m_2 m_4 F_{24}^2 +$$
$$+ m_3 m_4 F_{34}^2 - m_1 m_2 F_{12}^2 - m_1 m_3 F_{13}^2 - m_1 m_4 F_{14}^2$$
$$= m_2 m_3 F_{23}^2 + m_2 m_4 F_{24}^2 + m_3 m_4 F_{34}^2.$$

Ebenso findet man für den Coefficienten von $\frac{y_2^2}{m_2}$:

$$m_3 m_4 F_{34}^2 + m_3 m_1 F_{31}^2 + m_4 m_1 F_{41}^2 \text{ u. s. w.}$$

In ähnlicher Art erhält man für den Coefficienten von $2y_1y_2$ den Wert:

$$-m_1 f_{11} f_{21} f_{12}^2 - m_2 f_{11} f_{21} f_{22}^2 - m_3 f_{11} f_{21} f_{32}^2 - m_4 f_{11} f_{21} f_{42}^2 +$$
$$+ m_1 f_{11} f_{12} f_{11} f_{22} + m_2 f_{21} f_{22} f_{11} f_{22} + m_3 f_{31} f_{32} f_{11} f_{22} +$$
$$+ m_4 f_{41} f_{42} f_{11} f_{22} +$$
$$+ m_1 f_{11} f_{12} f_{21} f_{12} + m_2 f_{21} f_{22} f_{21} f_{12} + m_3 f_{31} f_{32} f_{21} f_{12} +$$
$$+ m_4 f_{41} f_{42} f_{21} f_{12} -$$
$$- m_1 f_{11}^2 f_{12} f_{22} - m_2 f_{21}^2 f_{12} f_{22} - m_3 f_{31}^2 f_{12} f_{22} - m_4 f_{41}^2 f_{12} f_{22}$$
$$= m_3 F_{31} F_{23} + m_4 F_{41} F_{24}.$$

Ebenso wäre der Coefficient von $2y_3y_1$:

$$m_2 F_{23} F_{12} + m_4 F_{43} F_{14}$$

und der von $2y_3y_4$:

$$m_1 F_{13} F_{41} + m_2 F_{23} F_{42} \text{ u. s. w.}$$

Demnach wird:

$$D.\Phi = y_1^2 \left[ \frac{1}{m_1 m_2 m_3} m_2^2 m_3^2 F_{23}^2 + \frac{1}{m_1 m_2 m_4} m_2^2 m_4^2 F_{24}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m_1 m_3 m_4} m_3^2 m_4^2 F_{34}^2 \right] +$$
$$+ y_2^2 \left[ \frac{1}{m_2 m_3 m_4} m_3^2 m_4^2 F_{34}^2 + \frac{1}{m_1 m_2 m_3} m_3^2 m_1^2 F_{31}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m_1 m_2 m_4} m_4^2 m_1^2 F_{41}^2 \right] +$$
$$+ y_3^2 \left[ \frac{1}{m_1 m_3 m_4} m_4^2 m_1^2 F_{41}^2 + \frac{1}{m_2 m_3 m_4} m_4^2 m_2^2 F_{42}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m_1 m_2 m_3} m_1^2 m_2^2 F_{12}^2 \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 2 y_1 y_2 \left[ \frac{1}{m_1 m_2 m_3} m_1 m_2 m_3^2 F_{31} F_{23} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m_1 m_2 m_4} m_1 m_2 m_4^2 F_{41} F_{24} \right]$$
$$+ 2 y_3 y_1 \left[ \frac{1}{m_1 m_2 m_3} m_1 m_2^2 m_3 F_{23} F_{12} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m_1 m_3 m_4} m_1 m_3 m_4^2 F_{43} F_{14} \right]$$
$$+ 2 y_3 y_4 \left[ \frac{1}{m_1 m_3 m_4} m_1^2 m_3 m_4 F_{13} F_{41} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m_2 m_3 m_4} m_2^2 m_3 m_4 F_{23} F_{42} \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \frac{1}{m_1 m_2 m_3} [y_1 . m_2 m_3 F_{23} - y_2 . m_1 m_3 F_{13} + y_3 . m_1 m_2 F_{12}]^2 +$$
$$+ \frac{1}{m_1 m_2 m_4} [y_1 . m_2 m_4 F_{24} - y_2 . m_1 m_4 F_{14} + y_4 . m_1 m_2 F_{12}]^2 + \ldots$$

und allgemein:

$$D.\Phi = \frac{1}{m_1 m_2 m_3} u_{123}^2 + \frac{1}{m_1 m_2 m_4} u_{124}^2 + \ldots + \frac{1}{m_4 m_5 m_6} u_{456}^2,$$

q. e. d.

Die Formeln werden wiederum sehr vereinfacht, wenn nur ein Punkt: $m_1 = m_2 = m_3 = m$ vorliegt; es wird:

$$m.[F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{23}^2].\Phi = [y'_1 F_{23} - y'_2 F_{13} + y'_3 F_{12}]^2.$$

Aus den obigen, mit $m$ multiplicierten Ausdrücken für $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ und $\ddot{x}_3$ folgt:

$$y'_1 F_{23} + y'_2 F_{31} + y'_3 F_{12} = m[D.\dot{p}_1^2 + 2D'.\dot{p}_1\dot{p}_2 + D''.\dot{p}_2^2] \\ -[X_1 F_{23} + X_2 F_{31} + X_3 F_{12}],$$

wobei nun die Gauss'schen Bezeichnungen (in der Flächentheorie) für:

$$D = f_{111}.F_{23} + f_{211}.F_{31} + f_{311}.F_{12}$$
$$D' = f_{112}.F_{23} + f_{212}.F_{31} + f_{312}.F_{12}$$
$$D'' = f_{122}.F_{23} + f_{222}.F_{31} + f_{322}.F_{12}$$

Anwendung fanden.

Sind $p_1$ und $p_2$ zwei Curvensysteme auf einer Fläche, fassen wir also einen Punkt $m$ auf einer Fläche mit den Coordinaten $p_1$ und $p_2$ ins Auge, so ist der reciproke Wert des Krümmungshalbmessers $\rho$ eines jeden Normalschnittes:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{12}^2}} \cdot \frac{D.\dot{p}_1^2 + 2D'.\dot{p}_1\dot{p}_2 + D''.\dot{p}_2^2}{(a_{11}\dot{p}_1^2 + 2a_{12}\dot{p}_1\dot{p}_2 + a_{22}\dot{p}_2^2) \cdot \frac{1}{m}},$$

wobei:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{m}[a_{11}\dot{p}_1^2 + 2a_{12}\dot{p}_1\dot{p}_2 + a_{22}\dot{p}_2^2].$$

Es wird also:

$$D.\dot{p}_1^2 + 2D'.\dot{p}_1\dot{p}_2 + D''.\dot{p}_2^2 = \frac{v^2}{\rho}\sqrt{F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{12}^2}$$

und demnach:

$$m.\Phi = \left[\frac{mv^2}{\rho} - \frac{X_1 F_{23} + X_2 F_{31} + X_3 F_{12}}{\sqrt{F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{12}}}\right]^2$$

oder, wenn die Projection der Resultierenden $R$ aus $X_1$, $X_2$ und $X_3$ auf die Normale mit $N$ bezeichnet wird, schließlich:

$$m.\Phi = \left[\frac{mv^2}{\rho} - N\right]^2,$$

eine einfache und ungemein anschauliche Form, die uns das Wirken des bei der thatsächlichen Bewegung vorhandenen Zwanges wiedergibt. Aus dieser Gleichung, wie auch aus der allgemeinsten $\Phi = Z - Z'$ folgt für die Dimension von $\Phi$, d. i.

$$[\Phi] = ml^2t^{-4} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Quadrat der Zeit}},$$

wie es sein soll.

### Vermehrung der Zahl der Punkte und der der Parameter.

Der bisherige Vorgang, d. i. die Verwendung von zweierlei Methoden gestattet auch zu erkennen, wie man zu den allgemeinsten Fällen fortschreiten kann. Hätten wir z. B. drei Punkte mit den Massen: $m_1 = m_2 = m_3$, $m_4 = m_5 = m_6$, $m_7 = m_8 = m_9$ und wie früher nur die beiden Parameter $p_1$ und $p_2$, so würde die Aufstellung der Beschleunigungscomponenten: $\ddot{x}_1 \ldots \ddot{x}_9$ neun Gleichungen liefern, aus denen sich $\frac{9.8.7}{1.2.3} = 84$ Ausdrücke, die je drei der Größen $y$ enthalten, von der Form $u_{149} \ldots$ ableiten lassen, die ebenfalls von $\ddot{p}_1$ und $\ddot{p}_2$ frei sind. Wir schließen, gestützt auf das Vorhergehende, dass $D.\Phi$ die Form:

$$D.\Phi = \frac{1}{m_1 m_2 m_3} u_{123}^2 + \frac{1}{m_1 m_2 m_4} u_{124}^2 + \ldots + \frac{1}{m_7 m_8 m_9} u_{789}^2$$

haben wird; eine zweimalige Differentiation nach den $y$ liefert die Bestätigung. Auf diese Art kann man zu einer immer größeren Zahl von Punkten aufsteigen.

Vermehrt man hingegen die Zahl der Parameter, nimmt also z. B. drei Parameter $p_1, p_2$ und $p_3$ bei zwei Punkten als gegeben an, so sind jetzt schon je vier Gleichungen zur Elimination der Beschleunigungen $\ddot{p}_1$, $\ddot{p}_2$ und $\ddot{p}_3$ nöthig oder mit anderen Worten Ausdrücke von der Form:

$$u_{1245} = \begin{vmatrix} y_1 & m_1 f_{11} & m_1 f_{12} & m_1 f_{13} \\ y_2 & m_2 f_{21} & m_2 f_{22} & m_2 f_{23} \\ y_4 & m_4 f_{41} & m_4 f_{42} & m_4 f_{43} \\ y_5 & m_5 f_{51} & m_5 f_{52} & m_5 f_{53} \end{vmatrix}$$

werden von den Beschleunigungen $\ddot{p}_1$, $\ddot{p}_2$ und $\ddot{p}_3$ frei sein. Entwickelt man wieder nach Unterdeterminanten, und zwar nach den Elementen der ersten Colonne, und setzt zur Abkürzung:

$$F_{\varkappa\lambda\mu} = \begin{vmatrix} f_{\varkappa 1} & f_{\varkappa 2} & f_{\varkappa 3} \\ f_{\lambda 1} & f_{\lambda 2} & f_{\lambda 3} \\ f_{\mu 1} & f_{\mu 2} & f_{\mu 3} \end{vmatrix},$$

so wird:

$$u_{1245} = y_1 . m_2 m_4 m_5 F_{245} - y_2 . m_1 m_4 m_5 F_{145} + \\ + y_4 . m_1 m_2 m_5 F_{125} - y_5 . m_1 m_2 m_4 F_{124}$$

oder

$$\frac{1}{m_1 m_2 m_4 m_5} u_{1245} = \frac{y_1}{m_1} F_{245} - \frac{y_2}{m_2} F_{145} + \frac{y_4}{m_4} F_{125} - \frac{y_5}{m_5} F_{124};$$

solcher Größen $u$ werden bei zwei Punkten (6 Coordinaten) im ganzen $\binom{6}{4} = 15$ auftreten. Nach dem Vorhergehenden werden wir vermuthen, dass

$$D.\Phi = \frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_4} u_{1234}^2 + \frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_5} u_{1235}^2 + \ldots + \\ + \frac{1}{m_3 m_4 m_5 m_6} u_{3456}^2 \qquad (7)$$

ist. In diesem Falle sind die sechs Coordinaten $x_1 \ldots x_6$ der zwei Punkte Functionen der drei Parameter $p_1$, $p_2$ und $p_3$, so dass:

$$\dot{x}_1 = f_{11}\dot{p}_1 + f_{12}\dot{p}_2 + f_{13}\dot{p}_3 \ldots \dot{x}_6 = f_{61}\dot{p}_1 + f_{62}\dot{p}_2 + f_{63}\dot{p}_3$$

und

$$2L = m_1\dot{x}_1^2 + \ldots + m_6\dot{x}_6^2 = a_{11}\dot{p}_1^2 + 2a_{12}\dot{p}_1\dot{p}_2 + \ldots + a_{33}\dot{p}_3^2,$$

demnach

$$a_{\mu\nu} = \sum_{1}^{6} m_i f_{i\mu} f_{i\nu} = m_1 f_{1\mu} f_{1\nu} + m_2 f_{2\mu} f_{2\nu} + \ldots + m_6 f_{6\mu} f_{6\nu}$$

wird. Werden die Unterdeterminanten von

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

mit $A_{11}$, $A_{12}$ u. s. w. bezeichnet, so wird:

$$D.\Phi = D.[Z-Z'] = D\left[\frac{y_1^2}{m_1} + \ldots + \frac{y_6^2}{m_6}\right] -$$
$$-[A_{11}Q_1^2 + 2A_{12}Q_1Q_2 + \ldots + A_{33}Q_3^2], \quad (8)$$

wobei

$$Q_1 = y_1 f_{11} + y_2 f_{21} + \ldots + y_6 f_{61}$$
$$Q_2 = y_1 f_{12} + y_2 f_{22} + \ldots + y_6 f_{62}$$
$$Q_3 = y_1 f_{13} + y_2 f_{23} + \ldots + y_6 f_{63}$$

ist. Ähnlich wie früher lässt sich auch hier zeigen, dass die Form (8) in den Ausdruck (7) übergeführt werden kann. Hier wird es genügen, nachzuweisen, dass die zweiten Differentialquotienten von $\Phi$ nach irgend welchen Größen $y$, berechnet aus (8) oder (7), gleich ausfallen. So findet man aus (8):

$$\frac{1}{2} D. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = \frac{D}{m_1} - [f_{11}(A_{11}f_{11} + A_{12}f_{12} + A_{13}f_{13}) +$$
$$+ f_{12}(A_{12}f_{11} + A_{22}f_{12} + A_{32}f_{13}) +$$
$$+ f_{13}(A_{13}f_{11} + A_{23}f_{12} + A_{33}f_{13})] \quad (8a)$$

und

$$\frac{1}{2} D. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} = -[f_{21}(A_{11}f_{11} + A_{12}f_{12} + A_{13}f_{13}) +$$
$$+ f_{22}(A_{12}f_{11} + A_{22}f_{12} + A_{32}f_{13}) +$$
$$+ f_{23}(A_{13}f_{11} + A_{23}f_{12} + A_{33}f_{13})]. \quad (8b)$$

Setzt man in $D$ die entsprechenden Werte der $a_{\mu\nu}$ ein, zerlegt diese Determinante $D$ in Summen derart, dass stets die

Größen, welche Producte gleicher Massen enthalten, zusammengenommen werden, so findet man unschwer:

$$D=\sum_1^6{}_\lambda\sum_1^6{}_\mu\sum_1^6{}_\nu m_\lambda m_\mu m_\nu F^2_{\lambda\mu\nu}=m_1m_2m_3F^2_{123}+m_1m_2m_4F^2_{124}+ \\ +\ldots+m_4m_5m_6F^2_{456}. \quad (9)$$

Führt man die Unterdeterminanten von $F_{\varkappa\lambda\mu}$ ein, nennt also:

$$F_{\varkappa\lambda}=\begin{vmatrix} f_{\varkappa 1} & f_{\lambda 1} \\ f_{\varkappa 2} & f_{\lambda 2}\end{vmatrix},\quad G_{\varkappa\lambda}=\begin{vmatrix} f_{\varkappa 2} & f_{\lambda 2} \\ f_{\varkappa 3} & f_{\lambda 3}\end{vmatrix},\quad H_{\varkappa\lambda}=\begin{vmatrix} f_{\varkappa 3} & f_{\lambda 3} \\ f_{\varkappa 1} & f_{\lambda 1}\end{vmatrix}, \quad (10)$$

so dass

$$F_{\varkappa\lambda\mu}=f_{\varkappa 1}G_{\lambda\mu}+f_{\varkappa 2}H_{\lambda\mu}+f_{\varkappa 3}F_{\lambda\mu} \quad (11)$$

ist, so findet man

$$\begin{aligned}
A_{11}&=m_1m_2G^2_{12}+m_1m_3G^2_{13}+\ldots+m_5m_6G^2_{56}\\
A_{22}&=m_1m_2H^2_{12}+m_1m_3H^2_{13}+\ldots+m_5m_6H^2_{56}\\
A_{33}&=m_1m_2F^2_{12}+m_1m_3F^2_{13}+\ldots+m_5m_6F^2_{56}\\
A_{21}=A_{12}&=m_1m_2G_{12}H_{12}+m_1m_3G_{13}H_{13}+\ldots+m_5m_6G_{56}H_{56}\\
A_{31}=A_{13}&=m_1m_2G_{12}F_{12}+m_1m_3G_{13}F_{13}+\ldots+m_5m_6G_{56}F_{56}\\
A_{32}=A_{23}&=m_1m_2H_{12}F_{12}+m_1m_3H_{13}F_{13}+\ldots+m_5m_6H_{56}F_{56}.
\end{aligned}$$

Hieraus findet man unter steter Berücksichtigung der Regel (11):

$$f_{11}[A_{11}f_{11}+A_{12}f_{12}+A_{13}f_{13}]= \\ =f_{11}[m_1m_2G_{12}F_{112}+m_1m_3G_{13}F_{113}+\ldots+m_5m_6G_{56}F_{156}]$$

$$f_{12}[A_{12}f_{11}+A_{22}f_{12}+A_{23}f_{13}]= \\ =f_{12}[m_1m_2H_{12}F_{112}+m_1m_3H_{13}F_{113}+\ldots+m_5m_6H_{56}F_{156}]$$

$$f_{13}[A_{13}f_{11}+A_{23}f_{12}+A_{33}f_{13}]= \\ =f_{13}[m_1m_2F_{12}F_{112}+m_1m_3F_{13}F_{113}+\ldots+m_5m_6F_{56}F_{156}].$$

Bildet man die Summe dieser drei Ausdrücke, so erhält man für

$$\frac{1}{2}D\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^2}=\frac{D}{m_1}-[m_2m_3F^2_{123}+m_2m_4F^2_{124}+\ldots+m_5m_6F^2_{156}],$$

oder nach (9):

$$= \frac{1}{m_1}[m_2m_3m_4F_{234}^2 + m_2m_3m_5F_{235}^2 + \ldots + m_4m_5m_6F_{456}^2].$$

Zu genau derselben Form gelangt man durch zweimaliges Differentiieren von (7). Es wird:

$$\frac{1}{2}D.\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} = \frac{1}{m_1}[F_{234}u_{1234} + F_{235}u_{1235} + F_{236}u_{1236} + \\ + F_{245}u_{1245} + \ldots + F_{456}u_{1456}].$$

$$\frac{1}{2}D.\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^2} = \frac{1}{m_1}[m_2m_3m_4F_{234}^2 + \ldots + m_4m_5m_6F_{456}^2].$$

Ganz analog erhält man aus (8*b*):

$$\frac{1}{2}D.\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1\partial y_2} \doteq -[f_{21}(m_2m_3G_{23}F_{123} + \ldots + m_5m_6G_{56}F_{156}) + \\ + f_{22}(m_2m_3H_{23}F_{123} + \ldots + m_5m_6H_{56}F_{156}) + \\ + f_{23}(m_2m_3F_{23}F_{123} + \ldots + m_5m_6F_{56}F_{156})] = \\ = -[m_3m_4F_{134}F_{234} + m_3m_5F_{135}F_{235} + \\ + m_3m_6F_{136}F_{236} + m_4m_5F_{145}F_{245} + \\ + m_4m_6F_{146}F_{246} + m_5m_6F_{156}F_{256}].$$

Durch Differentiieren von (7) nach $y_1$ hingegen erhält man wie oben:

$$\frac{1}{2}D\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} = \frac{1}{m_1}[F_{234}.u_{1234} + \ldots \quad + F_{456}u_{1456}],$$

woraus sich durch weiteres Differentiieren nach $y_2$ unmittelbar der vorangehende, sechsgliederige Ausdruck für $\frac{1}{2}D\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1\partial y_2}$ ergibt.

---

**Allgemeines.**

Der bisherige Vorgang gestattet ohne Schwierigkeit den Übergang zu allgemeineren Fällen. Wir fanden nämlich für $n$ Punkte, wenn wir von Combinationen der *abc*... nur solche ohne Wiederholung des Zeigers betrachten, bei einem Parameter:

$$D_1 . \Phi_1 = \sum_1^{3n}{}_{a,b} \frac{1}{m_a m_b} u_{ab}^2,$$

$$u_{ab} = \begin{vmatrix} y_a, & m_a f_{a1} \\ y_b, & m_b f_{b1} \end{vmatrix} = y_a . m_b f_{b1} - y_b . m_a f_{a1},$$

$$D_1 = \sum_1^{3n}{}_a m_a f_{a1}^2;$$

bei zwei Parametern:

$$D_2 . \Phi_2 = \sum_1^{3n}{}_{a,b,c} \frac{1}{m_a m_b m_c} u_{abc}^2, \quad u_{abc} = \begin{vmatrix} y_a & m_a f_{a1} & m_a f_{a2} \\ y_b & m_b f_{b1} & m_b f_{b2} \\ y_c & m_c f_{c1} & m_c f_{c2} \end{vmatrix},$$

$$u_{abc} = y_a . m_b m_c F_{bc} - y_b . m_a m_c F_{ac} + y_c m_a m_b F_{ab},$$

$$F_{ab} = \begin{vmatrix} f_{a1} & f_{a2} \\ f_{b1} & f_{b2} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \sum_1^{3n}{}_{a,b} m_a m_b F_{ab}^2;$$

bei drei Parametern:

$$D_3 . \Phi_3 = \sum_1^{3n}{}_{a,b,c,d} \frac{1}{m_a m_b m_c m_d} u_{abcd}^2,$$

$$u_{abcd} = \begin{vmatrix} y_a & m_a f_{a1} & m_a f_{a2} & m_a f_{a3} \\ y_b & m_b f_{b1} & m_b f_{b2} & m_b f_{b3} \\ y_c & m_c f_{c1} & m_c f_{c2} & m_c f_{c3} \\ y_d & m_d f_{d1} & m_d f_{d2} & m_d f_{d3} \end{vmatrix};$$

$$u_{abcd} = y_a m_b m_c m_d . F_{bcd} - y_b . m_a m_c m_d F_{acd} +$$
$$+ y_c m_a m_b m_d F_{abd} - y_d m_a m_b m_c F_{abc},$$

$$D_3 = \sum_1^{3n}{}_{abc} m_a m_b m_c F_{abc}^2,$$

$$F_{abc} = \begin{vmatrix} f_{a1} & f_{a2} & f_{a3} \\ f_{b1} & f_{b2} & f_{b3} \\ f_{c1} & f_{c2} & f_{c3} \end{vmatrix} = f_{a1} . G_{bc} + f_{a2} H_{bc} + f_{a3} F_{bc},$$

wo

$$G_{bc} = \begin{vmatrix} f_{b2} & f_{c2} \\ f_{b3} & f_{c3} \end{vmatrix}, \quad H_{bc} = \begin{vmatrix} f_{b3} & f_{c3} \\ f_{b1} & f_{c1} \end{vmatrix} \text{ und } F_{ab} = \begin{vmatrix} f_{b1} & f_{c1} \\ f_{b2} & f_{c2} \end{vmatrix}$$

Unterdeterminanten vorstellen. Wir schließen, dass für vier Parameter

$$D_4 . \Phi_4 = \sum_{1}^{3n}{}_{a,b,c,d,e} \frac{1}{m_a m_b m_c m_d m_e} u^2_{abcde},$$

$$u_{abcde} = \begin{vmatrix} y_a & m_a f_{a1} & m_a f_{a2} & m_a f_{a3} & m_a f_{a4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_e & m_e f_{e1} & m_e f_{e2} & m_e f_{e3} & m_e f_{e4} \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \sum_{1}^{3n}{}_{abcd} \, m_a m_b m_c m_d F^2_{abcd},$$

$$F_{abcd} = \begin{vmatrix} f_{a1} & f_{a2} & f_{a3} & f_{a4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{d1} & f_{d2} & f_{d3} & f_{d4} \end{vmatrix}$$

sein wird und prüfen durch Differentiieren nach den $y$ die Richtigkeit der Formeln. So kann man weiter schreiten und wird sich auch davon überzeugen, dass in den Größen $u$, falls nur für die $y$ ihre Werte gesetzt werden, die Beschleunigungen $\ddot{p}_i$ nicht mehr vorkommen.



# Über den Einfluss der Härtungsnachwirkungen auf die Abnahme des magnetischen Momentes

von

**Ignaz Klemenčič.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1901.)

Aus meinen früheren Beobachtungen über die Constanz permanenter Magnete (diese Sitzungsber., Bd. 109, Jahrg. 1900, S. 242 und 827 und Drudes Annalen, Bd. 4, 1901, S. 316) habe ich den Satz abgeleitet, dass die zeitliche Abnahme des magnetischen Momentes durch zwei Ursachen bedingt ist, von welchen die eine in den durch die Magnetisierung hervorgerufenen Nachwirkungsdeformationen, die andere in Structuränderungen, welche sich als Nachwirkungen der vorausgegangenen Härtung einstellen, gesucht werden muss.

Die Richtigkeit dieses Satzes wurde durch neue Beobachtungen vollkommen erhärtet, worüber hiemit ein vorläufiger Bericht vorgelegt wird. Aus den unten mitgetheilten Beobachtungen lässt sich auch ein Überblick über die Wirkungsintensität und die Wirkungsdauer der genannten Ursachen gewinnen.

Um den Einfluss der Härtungsnachwirkungen besonders kräftig hervortreten zu lassen, wurden Silberstahlstäbe von 6 *mm* Dicke und 6 *cm* Länge gleich nach der Härtung magnetisiert und hierauf sofort ihr Moment an einem Magnetometer aus der ersten Hauptlage geprüft und durch eine längere Zeit beobachtet.

Die Probestücke wurden bis zur Weißglut erhitzt und hierauf in Wasser abgeschreckt. Zwischen der Härtung und der Magnetisierung verfloss eine Zeit $\vartheta$ von $0 \cdot 6^m$ bis zu mehreren Stunden. Die Magnetisierung geschah im Felde (circa 600 abs. E.) einer stromdurchflossenen Spule, wobei jeder Stab vier Secunden lang der magnetisierenden Wirkung des Feldes ausgesetzt blieb. Die erste Momentbestimmung erfolgte eine Minute nach der Magnetisierung, welcher dann andere in immer größer werdenden Zeitintervallen folgten.

Als Beispiel für das Verhalten der Silberstahlstäbe unter diesen Umständen führe ich folgende Tabelle I an.

Tabelle I.

| $N$ | $\vartheta^m$ | $\alpha$ | $\varphi$ nach | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $1^m$ | $3^m$ | $7^m$ | $13^m$ | $24^m$ | $49^m$ | $119^m$ |
| 8 | 0·6 | 282·8 | 100 | 97·4 | 95·9 | 94·7 | 93·4 | 91·6 | 88·9 |
| 9 | 1·0 | 279·0 | 100 | 97·5 | 95·4 | 94·1 | 93·0 | 91·0 | 88·5 |
| 10 | 2·0 | 288·3 | 100 | 98·6 | 97·3 | 96·2 | 94·8 | 93·0 | 90·9 |
| 11 | 5·0 | 283·4 | 100 | 98·9 | 97·0 | 96·0 | 94·6 | 93·6 | 91·0 |
| 13 | 10·0 | 278·5 | 100 | 99·5 | 98·5 | 97·5 | 96·3 | 94·5 | 92·4 |
| 12 | 20·0 | 299·7 | 100 | 99·9 | 99·5 | 99·0 | 98·6 | 97·8 | 95·4 |
| 14 | 60·0 | 292·4 | 100 | 99·9 | 99·8 | 99·6 | 99·4 | 98·9 | 97·8 |

Darin bedeutet:

$N$ die Nummer des Stabes.

$\vartheta$ die Zeit zwischen Härtung und Magnetisierung in Minuten.

$\alpha$ den Magnetausschlag eine Minute nach der Magnetisierung.

$\varphi$ den Magnetometerausschlag in Procenten von $\alpha$ zur Zeit, welche am Kopfe der Columne in Minuten verzeichnet ist und ihren Anfangspunkt im Momente der Magnetisierung hat.

Wie man sieht, ist die procentische Abnahme, gerechnet vom Momente der Magnetisierung, umso geringer, je länger die Zeit $\vartheta$ ist, die zwischen Härtung und Magnetisierung verflossen ist.

Trägt man aber die Daten in Curven auf und zählt die Zeit der Momentbeobachtung nicht vom Zeitpunkte der Magnetisierung, sondern von dem der Härtung an, so scheinen die Curven rückwärts verlängert, alle gegen einen gemeinsamen Punkt hin zu convergieren. Mit anderen Worten lässt sich dieser Sachverhalt auch so aussprechen: Während die procentische Abnahme des Momentes in einem Zeitintervalle beispielsweise zwischen der 120. und 140. Minute nach dem Augenblicke der Magnetisierung sehr verschieden ist, je nach der Zeitdifferenz zwischen Härtung und Magnetisierung, ist im Gegensatze hiezu die procentische Momentabnahme zwischen der 120. und 140. Minute, gezählt vom Augenblicke der Härtung, von der Zeitdifferenz zwischen Härtung und Magnetisierung nahezu unabhängig. Man muss daher annehmen, dass der Ablauf der Härtungsnachwirkungen durch die Magnetisierung nur wenig beeinflusst wird.[1]

Auch andere Versuche mit gleichen Stäben, wobei $\vartheta$ zwischen 1 und 1440 Minuten variiert wurde, zeigten, dass die procentische Abnahme des Momentes nach einer längeren Zeit immer nahezu gleich ausfällt, wenn die Zeit nur von der Härtung an gezählt wird. Der absolute Wert der Magnetisierung ist aber zu einer gegebenen, von diesem Zeitpunkte aus gerechneten Zeit umso kleiner, je kürzer die Zeit zwischen Härtung und Magnetisierung ist.

Diese Thatsache ist für die Kenntnis der Mechanik des Magnetisierungsvorganges nicht ohne Bedeutung; sie ist aber auch in praktischer Beziehung interessant.

Um einen Überblick über die Größe und Dauer der Härtungsnachwirkungen zu bekommen, ist es am besten, dieselben zu beschleunigen und zu beobachten, wie weit sie schließlich das Moment herunterdrücken.

Die Beschleunigung kann durch längeres Kochen bei 100° bewirkt werden. Es wurden z. B. zwei Silberstahlstäbe von je 10 *cm* Länge und 6 *cm* Dicke gleichmäßig gehärtet und der eine vor dem Kochen sofort nach der Härtung und der andere erst nach dem Kochen magnetisiert.

[1] Ähnliche Beobachtungen sind von Fromme für mechanische Erschütterungen gemacht worden. Wied. Ann., Bd. 61, 1897, S. 55.

Die Beobachtung der Momente ergab folgende Magnetometerablenkungen $\alpha$:

Stab Nr. 1.

Zeit der Härtung: 11./IV., $9^h\,57^m$ a. m.
Zeit der Magnetisierung: 11./IV., $9^h\,58^m$ a. m.

11./IV., $9^h\,59^m$ a. m. $\alpha = 937\cdot5$

8 Stunden gekocht.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11./IV., $7^h\,30^m$ p. m. | $\alpha = 538\cdot5$ | Temperatur | $= 17\cdot0$ |
| 12./IV., $8^h\,30^m$ a. m. | $\alpha = 539\cdot0$ | » | $= 16\cdot0$ |
| 12./IV., $6^h\,10^m$ p. m. | $\alpha = 538\cdot6$ | » | $= 17\cdot4$ |
| 13./IV., $7^h\,45^m$ a. m. | $\alpha = 539\cdot0$ | » | $= 16\cdot0$ |

Stab Nr. 2.

Zeit der Härtung: 11./IV., $10^h\,5^m$ a. m.
8 Stunden gekocht, hierauf magnetisiert 11./IV., $7^h\,26^m$ p. m.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11./IV., $7^h\,27^m$ p. m. | $\alpha = 907\cdot5$ | Temperatur | $= 17\cdot0$ |
| 12./IV., $8^h\,30^m$ a. m. | $\alpha = 905\cdot5$ | » | $= 16\cdot0$ |
| 12./IV., $6^h\,10^m$ p. m. | $\alpha = 904\cdot7$ | » | $= 17\cdot4$ |
| 13./IV., $7^h\,45^m$ p. m. | $\alpha = 905\cdot4$ | » | $= 16\cdot0$ |

Es muss noch erwähnt werden, dass die Schwankungen der Horizontalcomponente hiebei berücksichtigt wurden.

Wie man sieht, ist durch die Beschleunigung der Härtungsnachwirkungen das Moment des Stabes Nr. 1 von 937·5 auf 538·3 gesunken. Bei anderen Stäben hat sich gezeigt, dass die Nachwirkungen eine derartige Größe haben, dass sie imstande sind, das Moment eines sofort nach der Härtung magnetisierten Stabes auf ein Drittel des ursprünglichen Wertes herabzudrücken. Die Härtungsnachwirkungen sind also außerordentlich groß; sie sind aber auch sehr lang andauernd, wie aus folgender Beobachtung hervorgeht. Ein Silberstahlstab wurde sofort nach der Härtung magnetisiert und verlor in 15 Tagen etwa 22 % seines ursprünglichen Momentes. In der Zeit vom 16. auf den 18. Tag verlor er 0·5 %. Wenn man nun erwägt, dass die Nachwirkungen immer langsamer ablaufen, so kommt man

leicht zur Überzeugung, dass sich ihr Einfluss jahrelang bemerkbar machen muss. Aus den weiteren Daten für Stab Nr. 1 und Nr. 2 geht hervor, dass das Moment nach dem Kochen während der Dauer der weiteren Beobachtung constant geblieben ist; nur bei Nr. 2 ist ein kleines Sinken nach dem ersten Werte zu beobachten, und hier scheint eine Magnetisierungsnachwirkung vorzuliegen.

Die Momentänderungen, die man insbesondere bei alten Magnetstahlsorten in beträchtlicher Größe und Jahre hindurch beobachtet, sind also nur Härtungs- und nicht Magnetisierungsnachwirkungen. Das Verfahren von Strouhal und Barus dient hauptsächlich zur Beschleunigung des Ablaufes der Härtungsnachwirkungen und wirkt in gleicher Weise, ob man den Stab vorher magnetisiert oder nicht.

Über die Dauer und die Höhe der Magnetisierungsnachwirkungen gibt folgende Beobachtung einen Aufschluss.

Ein bereits im Sommer 1898 gehärteter, quadratischer Stahlstab von 7·5 *cm* Länge und 8 *mm* Dicke wurde zwischen den Polen eines Plücker'schen Elektromagnets am 12./IV. um $3^h 51^m$ p. m. magnetisiert und gleich hierauf das Moment beobachtet. Es wurden folgende, auf den gleichen Wert der Horizontalcomponente bezogene Magnetometerablenkungen $\alpha$ gefunden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12./IV., $3^h 52^m$ p. m. | $\alpha = 1045 \cdot 1$ | Temperatur | $= 17 \cdot 0°$ |
| 12./IV., $3^h 57^m$ p. m. | $\alpha = 1044 \cdot 3$ | » | $= 17 \cdot 0°$ |
| 12./IV., $4^h 2^m$ p. m. | $\alpha = 1043 \cdot 3$ | » | $= 17 \cdot 0°$ |
| 12./IV., $4^h 7^m$ p. m. | $\alpha = 1042 \cdot 6$ | » | $= 17 \cdot 0°$ |
| 12./IV., $4^h 18^m$ p. m. | $\alpha = 1041 \cdot 6$ | » | $= 17 \cdot 0°$ |
| 12./IV., $5^h 11^m$ p. m. | $\alpha = 1041 \cdot 0$ | » | $= 17 \cdot 0°$ |
| 12./IV., $6^h 3^m$ p. m. | $\alpha = 1040 \cdot 7$ | » | $= 17 \cdot 0°$ |
| 13./IV., $7^h 45^m$ a. m. | $\alpha = 1039 \cdot 3$ | » | $= 16 \cdot 0°$ |
| 15./IV., $8^h 0^m$ a. m. | $\alpha = 1037 \cdot 5$ | » | $= 16 \cdot 0°$ |
| 17. IV., $8^h 30^m$ a. m. | $\alpha = 1037 \cdot 1$ | » | $= 15 \cdot 8°$ |

Wie man sieht, dürften die Magnetisierungsnachwirkungen in keinem Falle das Moment um viel mehr als 1% herunterdrücken, und ihre Dauer beträgt nur wenige Tage, manchmal wahrscheinlich nur einige Stunden.

Aus den vorliegenden Beobachtungen geht hervor, dass die Molecüle oder Molecülgruppen nach einer Härtung lange nicht zur Ruhe kommen, respective ganz bedeutende Lagenänderungen durchmachen, die sich hauptsächlich durch ihren Einfluss auf das magnetische Moment äußern, aber jedenfalls auch andere physikalische Eigenschaften verändern, worüber vorläufig kaum welche Beobachtungen vorliegen.

Die Untersuchung der Härtungsnachwirkungen und hauptsächlich die Beschleunigung ihres Ablaufes durch die Temperaturerhöhung dürfte übrigens neben einem theoretischen Interesse auch eine nicht zu unterschätzende praktische Bedeutung, insbesondere für die Herstellung neuer Magnetstahlsorten haben.

---

# Über die Beziehung zwischen Permeabilität und magnetischer Nachwirkung

von

**Ignaz Klemenčič.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

**(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1901.)**

Unter der magnetischen Nachwirkung versteht man bekanntlich die Erscheinung, dass weiches Eisen nur sehr langsam der magnetisierenden Kraft folgt und oft erst nach mehreren Minuten die einer bestimmten Feldstärke entsprechende maximale Intensität annimmt; ebenso langsam findet dann der Abfall des Magnetismus nach Unterbrechung des Feldes statt.

Die magnetische Nachwirkung zeigt sich hauptsächlich in schwachen Feldern, und sie ist in diesem Gebiete an ausgeglühten Eisenstäben zuerst von Lord Rayleigh und von Ewing[1] beobachtet und studiert worden. Später haben auch andere Physiker, insbesondere Fromme,[2] Mazzotto[3] und der Verfasser[4] experimentelle Beiträge zur Kenntnis dieser Erscheinung geliefert. Das Vorhandensein eines solchen Phänomens ist jedoch schon vor vielen Jahren von F. Kohlrausch aus der Analogie mit der elastischen Nachwirkung vorausgesagt worden. Kohlrausch schreibt: »Das Maximum des magne-

---

[1] Proc. Roy. Soc., Juni 1889. Auch Ewing, »Magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen«, S. 120.

[2] Wiedemanns Annalen, Bd. 65, Jahrg. 1898, S. 41.

[3] Nuov. Cimento (4), 11, Jahrg. 1900, S. 81; auch Beiblätter zu den Annalen, Bd. 24, Jahrg. 1900, S. 1166.

[4] Diese Sitzungsberichte, Bd. 106, S. 237 und 676. Wiedemanns Annalen, Bd. 63 (Jubelband), S. 61.

tischen Momentes wird von einer bestimmten Kraft nicht sofort hergestellt, und ebenso verschwindet auch im weichen Eisen der Magnetismus erst mit der Zeit. Hienach werden die gebräuchlichen Gesetze über Magnetismus und Scheidungskraft, gerade wie das gewöhnliche Elasticitätsgesetz, eine Modification erfahren müssen, so oft man, wie häufig vorkommt, eine andere als die Zeit des wirklich erreichten Gleichgewichtes vor sich hat. Die Übereinstimmung dieser Modification mit den Gesetzen der elastischen Nachwirkung aber kann umgekehrt als der beste Prüfstein für die Drehungshypothese benützt werden.«

Kohlrausch hat auch einige, diese Sätze bestätigende Versuche gemacht, ohne sie veröffentlicht zu haben, weil sie ihm zu provisorischer Natur schienen.

Alle Beobachter benützten zur Untersuchung ausgeglühte weiche Eisendrähte. Durch das Ausglühen erlangt der Draht eine gewisse Weichheit, respective Permeabilität, deren Grad aber wahrscheinlich von der Nachbehandlung nach dem Ausglühen (rasches oder langsames Abkühlen) abhängen dürfte.

Es entstehen nun die folgenden Fragen: 1. Ist die Art der Nachbehandlung des ausgeglühten Drahtes von Einfluss auf seine Permeabilität? 2. Hängt die magnetische Nachwirkung mit diesen Umständen zusammen oder ist sie nur eine Function des Ausglühens allein?

Im Nachfolgenden wird gezeigt, dass ein ausgeglühter Eisendraht umso permeabler ist, je langsamer er gekühlt wurde; eine Thatsache, die man ja erwarten konnte. Es geht aber aus den Beobachtungen auch weiter hervor, dass die magnetische Nachwirkung von der Art der Abkühlung und daher mittelbar von der Höhe der Permeabilität in der Weise abhängt, dass sie bei den frisch ausgeglühten Stäben umso niederer ausfällt, je höher die Permeabilität ist, ein Resultat, das nicht ganz uninteressant genannt werden kann. Bei den Messungen ist auch auf die Beziehung zwischen dem remanenten Magnetismus und der magnetischen Nachwirkung Rücksicht genommen worden, und es hat sich dabei ergeben, dass zwischen den beiden Größen eine gewisse Relation vorhanden ist, wonach beide im gleichen Sinne zunehmen. Schließlich sind einige Stäbe längere

Zeit (8 Stunden) in Paraffin (140 bis 150°) gekocht worden, um den Einfluss einer solchen Temperaturerhöhung auf das magnetische Verhalten des Eisens zu studieren.

Die Messungen erstreckten sich auf verschieden lange (10 bis 50 *cm*) und verschieden dicke (4 bis 9 *mm*) Stäbe aus steierischem Eisen; dieselben wurden hinsichtlich der magnetischen Nachwirkung vor und nach dem Ausglühen bei zwei verschiedenen Feldstärken (0·30 und 0·58 abs. E.) untersucht. Die Probestücke wurden im Kohlenfeuer bis zur Glut erhitzt und dann entweder in Wasser abgeschreckt oder in Luft, respective in der Kohle selbst erkalten gelassen. Die Stärke der Glut war nicht in allen Fällen ganz gleich; sie lag gewöhnlich zwischen Roth- und Weißglut.

Die Beobachtung geschah in ähnlicher Weise wie in einem früheren Falle[1] nach der magnetometrischen Methode aus der ersten Hauptlage. Die Wirkung der Magnetisierungsspule (68 *cm* lang, 15 Windungen pro 1 *cm*) war mittels einer am Magnetometer angebrachten Galvanometerrolle durch Abzweigung des Magnetisierungsstromes compensiert. Die Magnetometernadel hatte eine Schwingungsdauer von ungefähr 1 Secunde und kam selbst bei großen Ablenkungen nach 4 Secunden zur Ruhe. Die Beobachtung der magnetischen Nachwirkung konnte also erst 4 Secunden nach Herstellung des Feldes begonnen werden. Es wurde dabei folgender Vorgang eingehalten: Eine Minute nach Schließung des Magnetisierungsstromes, respective Herstellung des Feldes, wurde dieses commutiert und dann sofort nach 4 Secunden und weiters nach Ablauf von 60 Secunden die Stellung der Nadel abgelesen. Unmittelbar nach dieser Ablesung erfolgte wieder eine Feldwendung mit Ablesungen nach 4 und 60 Secunden auf der anderen Seite. Die Stellungsänderung $\delta$ der Nadel in der Zeit zwischen 4 und 60 Secunden nach Commutierung des Feldes betrachte ich als die dieser Zeit entsprechende Nachwirkung und die Differenz der Ablesungen auf beiden Seiten nach 4 Secunden $\alpha$ als das Maß der Magnetisierbarkeit des betreffenden Stabes. Die magnetische Nachwirkung $N$ drücke ich sodann in Procenten durch

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 106, 1897, S. 236.

$$N^0/_0 = \frac{\delta}{\alpha} \cdot 100$$

aus.

Nach der letzten Ablesung wurde der Strom unterbrochen und nach 4 Secunden abgelesen. Die Differenz zwischen dieser letzten Ablesung und der Stellung nach 4 Secunden auf derselben Seite bei geschlossenem Strome sei $\varphi$, dann berechne ich den remanenten Magnetismus $r$ in Procenten nach der Formel

$$r^0/_0 = \frac{\alpha - 2\varphi}{\alpha} \cdot 100.$$

Jeder Stab wurde in der Weise untersucht, dass abwechselnd einmal das eine und dann das andere Ende dem Magnetometer zugekehrt war.

Die Eisendrähte stammen aus der Drahtzieherei der Alpinen Montangesellschaft in Graz. Der Draht wird dort nach dem Ausglühen sehr sorgfältig gekühlt. Nichtsdestoweniger zeigten alle untersuchten Drahtsorten nach dem Ausglühen und langsamer Kühlung ein bedeutendes Anwachsen der Magnetisierbarkeit. Die Stäbe werden wohl auch nach dem Ausglühen in der Fabrik einen so hohen Wert der Permeabilität besessen haben, allein es ist eine schon von Lamont beobachtete Thatsache, dass weiches Eisen mit der Zeit ganz beträchtlich an magnetischer Inductionsfähigkeit verliert.

Die Entfernung der Stäbe vom Magnetometer war verschieden, daher sind die in den Tabellen eingetragenen Werte von $\alpha$ nur relativ richtig und nur die Werte einer und derselben Tabelle untereinander vergleichbar.

Von den Beobachtungsdaten seien hier zwei Tabellen mitgetheilt, welche den Einfluss des Ausglühens und die Art des Abkühlens auf die Permeabilität, die magnetische Nachwirkung und den remanenten Magnetismus sehr deutlich erkennen lassen. Die übrigen Tabellen sind im Anhange mitgetheilt.

In den Tabellen bedeutet:

Num. Die Nummer des untersuchten Stabes.

$H$ die Feldstärke.

$\alpha$ den Stellungsunterschied der Magnetometernadel infolge Commutierens bei der Ablesung nach 4 Secunden.

$N^0/_0$ die magnetische Nachwirkung in Procenten.

$r^0/_0$ den remanenten Magnetismus in Procenten.

Abk. Die Abkühlungsart, und zwar $W$ in Wasser, $L$ in Luft und $K$ in Kohle gekühlt.

Die untersuchten Stäbe gleicher Dicke wurden immer demselben Drahtbündel entnommen und waren zumeist Nachbarstücke. Wie man aus den Werten der Permeabilität vor dem Glühen ersieht, waren die betreffenden Drahtbündel nicht durchaus homogen.

Was nun die Wirkung des Ausglühens und der darauf folgenden Abkühlungsart anbelangt, so ergab sich durch die Abkühlung in Luft und Kohle in allen Fällen eine Erhöhung der Inductionsfähigkeit, und zwar eine bedeutend stärkere bei der Abkühlung in Kohle als bei der in Luft. Die Abkühlung in Wasser setzte die Permeabilität bis auf einige wenige Fälle immer herunter. Dieses Resultat konnte nach unseren gewöhnlichen Erfahrungen erwartet werden.

Tabelle I.

**Stab aus Puddeleisen, 8 *mm* dick, 50 *cm* lang.**

| Num. | $H$ | Vor dem Glühen | | | Nach dem Glühen | | | Abk. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | |
| 1 | 0·30 | 131 | 2·3 | 11·0 | 110 | 15·1 | 28·2 | $W$ |
| | 0·58 | 281 | 1·3 | 12·0 | 262 | 8·4 | 21·0 | |
| 2 | 0·30 | 143 | 2·7 | 10·0 | 165 | 3·1 | 10·0 | $L$ |
| | 0·58 | 303 | 1·5 | 11·5 | 357 | 2·1 | 10·7 | |
| 3 | 0·30 | 132 | 2·3 | 10·4 | 180 | 1·5 | 8·7 | $K$ |
| | 0·58 | 282 | 1·3 | 10·7 | 375 | 1·0 | 10·0 | |

### Tabelle II.

**Stab aus Frischeisen, 4 *mm* dick, 40 *cm* lang.**

| Num. | $H$ | Vor dem Glühen | | | Nach dem Glühen | | | Abk. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ | $N$% | $r$% | $\alpha$ | $N$% | $r$% | |
| 1 | 0·30 | 37 | 1·1 | 18·3 | 32 | 13·7 | 39·3 | *W* |
| | 0·58 | 89 | 1·2 | 22·5 | 87 | 7·3 | 33·4 | |
| 2 | 0·30 | 34 | 1·0 | 17·6 | 38 | 9·2 | 30·7 | *L* |
| | 0·58 | 82 | 0·6 | 22·0 | 105 | 5·3 | 34·2 | |
| 3 | 0·30 | 33 | 1·0 | 17·0 | 44 | 1·6 | 19·0 | *K* |
| | 0·58 | 77 | 0·6 | 19·4 | 110 | 1·1 | 23·0 | |

Wenn man jedoch, wie schon oben erwähnt, berücksichtigt, dass die Drahtbündel bereits in der Fabrik einem sehr sorgfältigen Glüh- und Abkühlungsprocesse unterworfen wurden, so findet man das Resultat doch einigermaßen überraschend. Auf diesen Punkt soll noch später zurückgekommen werden.

Das Vorhandensein einer magnetischen Nachwirkung lässt sich bei unausgeglühten Stäben gerade noch constatieren; sie ist bei allen Stücken ziemlich gleich. Nach dem Ausglühen zeigt die magnetische Nachwirkung verschiedene Werte, je nach der Art der Kühlung. Am stärksten ist sie ausgeprägt bei den in Wasser abgeschreckten Drähten, am wenigsten bei den in Kohle gekühlten Stücken. Die Permeabilität selbst verhält sich gerade umgekehrt, und man kann sagen, dass nach dem Ausglühen die magnetische Nachwirkung mit abnehmender Permeabilität zunimmt. Es muss aber darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Probestücke vor dem Ausglühen bei gleicher Permeabilität beinahe gar keine Nachwirkung zeigen. Die Werte beziehen sich jedoch, wie schon bemerkt, nur auf

die Zeit zwischen 4 und 60 Secunden nach der Felderregung. Aus den Tabellen ist ferner zu entnehmen, dass die magnetische Nachwirkung bei niederer Feldstärke größer ist als bei höherer.

Der remanente Magnetismus zeigt nach dem Ausglühen ein ähnliches Verhalten wie die Nachwirkung und sinkt mit zunehmender Permeabilität. Hinsichtlich des remanenten Magnetismus gilt im allgemeinen die Regel, dass er bei sehr geringen Feldstärken überhaupt nicht auftritt,[1] und zwar in dem Gebiete sogenannter constanter Susceptibilität; hingegen macht er sich bei wachsenden Feldstärken umso eher bemerkbar, je größer die Permeabilität ist. Ein auf irgendeine mechanische Art gehärtetes Eisenstück hat eine viel geringere Permeabilität und Remanenz als ein ungehärtetes.[2] Die vorliegenden Beobachtungen zeigen also ein anderes Verhalten des rasch gekühlten Eisens, als wie es aus den Versuchen mit dem mechanisch gehärteten Eisen zu erwarten war.

Im allgemeinen war die magnetische Nachwirkung bei den in Wasser gekühlten Drähten bedeutend größer als bei den in Luft gekühlten; nur in einigen wenigen Fällen zeigte sich ein etwas anderes Verhalten. Diese Abweichungen dürften wohl in der Intensität des Glühens ihren Grund haben; es ist ja ohne weitere Hilfsmittel außerordentlich schwer, mehrere Drähte durchaus gleich stark zu erhitzen; ja bei längeren Stücken kann man selbst einen einzigen Draht seiner ganzen Länge nach schwer zu homogener Glut bringen. Die Stärke des Glühens ist aber jedenfalls für das Verhalten nach der Abkühlung sehr maßgebend. So z. B. zeigte eine 4 *mm* dicker und 40 *cm* langer Stab aus Frischeisen bei einer Erhitzung auf Rothglut und darauffolgender Abkühlung in Wasser eine magnetische Nachwirkung von 7·3%, ein zweiter Stab von der gleichen Sorte bei einer Erhitzung zur Weißglut hingegen eine solche von 13·0%.

Der Einfluss längeren Kochens in heißem Paraffin auf das magnetische Verhalten weicher Eisenstäbe wird durch folgende Tabelle III illustriert.

---

[1] Vergleiche indessen: Holitscher, Drudes Annalen, Bd. 3, 1900, S. 683.

[2] Ewing, »Magnetische Induction etc.«, S. 81.

Tabelle III.

| Num. | $H$ | Vor dem Glühen | | | Nach dem Glühen | | | Abk. | Nach Kochen in Paraffin | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ | $N$% | $r$% | $\alpha$ | $N$% | $r$% | | $\alpha$ | $N$% | $r$% |
| 1 | 0·30 | 38 | 0·7 | 15·0 | 41 | 13·0 | 31·0 | $W$ | 30 | 0·5 | 12·4 |
| 2 | 0·30 | 41 | 0·8 | 16·4 | 49 | 8·5 | 21·7 | $L$ | 31 | 0·7 | 13·4 |
| 3 | 0·30 | 44 | 1·1 | 16·7 | 74 | 2·5 | 19·2 | $K$ | 52 | 1·4 | 19·0 |
| 4 | 0·30 | 45 | 1·4 | 16·5 | — | — | — | — | 44 | 0·7 | 16·7 |
| 5 | 0·30 | 45 | 1·1 | 18·1 | — | — | — | — | 44 | 0·8 | 16·2 |

Durch ein achtstündiges Kochen in Paraffin von 140 bis 150° ist die Permeabilität, bezogen auf die Werte nach dem Ausglühen, durchwegs herabgesetzt worden, und die magnetische Nachwirkung ist beinahe verschwunden; im Vergleiche mit den Werten vor dem Glühen zeigt sich jedoch nur bei den Stäben 1 und 2 eine Erniedrigung. Die Stäbe 4 und 5 wurden nicht ausgeglüht, sondern nur in Paraffin gekocht, und hier zeigt sich nur eine kaum nennenswerte Herabminderung der Inductionsfähigkeit und ein kleines Nachlassen der magnetischen Nachwirkung.

Zur Erläuterung des hier beobachteten Verhaltens weicher Eisenstäbe möge folgende Erörterung angestellt werden. Die Hauptbedingung für eine große Magnetisierbarbeit des Eisens scheint eine möglichst homogene Lagerung der Eisentheilchen zu sein. Die Homogenität kann gestört werden durch Beimischung fremder Stoffe, durch mechanische Bearbeitung oder durch eine rasche Abkühlung. In allen diesen Fällen ist auch ein Sinken der Permeabilität zu erwarten. Es wurde jedoch schon eingangs erwähnt, dass bereits von Lamont ein Abnehmen der Inductionsfähigkeit mit der Zeit festgestellt wurde. Ein solches folgt auch aus unseren Versuchen. Die Stäbe zeigten, trotz dem sorgfältigen Glüh- und Kühlprocesse in der Fabrik, nach dem hier vorgenommenen Ausglühen eine beträchtliche Steigerung der Magnetisierbarkeit. Es muss also angenommen werden, dass die Inductionsfähigkeit in der Zeit

vom Ausglühen in der Fabrik bis zur Anstellung der hier beschriebenen Versuche bedeutend nachgelassen hatte.

Es ist eine auch in der Technik bekannte Thatsache, dass das Eisen mit der Zeit härter wird. Wenn wir nun dieses Härterwerden durch irgendeine der oben genannten Ursachen erklären wollen, so können wir nur annehmen, dass die Homogenität des ausgeführten Eisens durch eine mit der Zeit auftretende Krystallbildung im Inneren der Stäbe gestört wird.[1] Eine solche Umbildung dürfte wahrscheinlich bei jeder Temperatur vor sich gehen; sie wird jedoch durch eine Erhöhung der Temperatur innerhalb mäßiger Grenzen (bis 200°) wesentlich gefördert. Hier wären insbesondere die Versuche von Parshall und Royet[2] zu erwähnen, welche zeigen, dass die Hysteresis der Transformatorenbleche infolge der Erwärmung mit der Zeit beträchtlich zunimmt.

Während nun eine Härtung des Eisens durch Beimischung gewisser fremder Stoffe, speciell des Kohlenstoffes oder durch Krystallbildung in der Weise wirkt, dass mit dem Anwachsen der Härtung sowohl die Permeabilität, als auch die magnetische Nachwirkung, sowie der remanente Magnetismus bei niederen Feldstärken abnehmen, ist die Wirkung der durch rasches Abkühlen bewirkten Inhomogenität eine ganz andere, indem sowohl die magnetische Nachwirkung, als auch der remanente Magnetismus größer werden, wenn die Magnetisierbarkeit sinkt. Es wäre nicht uninteressant, auch mechanisch gehärtete Stäbe hinsichtlich der magnetischen Nachwirkung zu untersuchen.

Das Resultat dieser Untersuchung kann also dahin zusammengefasst werden, dass die magnetische Nachwirkung (in der Zeit zwischen 4 und 60 Secunden nach der Felderregung) von der Art der Abkühlung der ausgeglühten Drähte ganz wesentlich abhängt und umso größer ausfällt, je rascher das Probestück gekühlt wurde. In gleicher Weise verhält sich bei

[1] Elektrolytisch niedergeschlagenes Eisen ist sehr hart und kann durch Ausglühen weich gemacht werden. Die Bildung von Krystallen während des elektrolytischen Ausscheidens ist sehr wahrscheinlich. Vide: W. Leick, Wied. Ann., Bd. 58, S. 691.

[2] Vide: Erich Schmidt, »Die magnetische Untersuchung des Eisens und verwandter Metalle«. Halle a. S., 1900, S. 111.

niederen Feldstärken auch der remanente Magnetismus, während die Permeabilität ein entgegengesetztes Verhalten zeigt. Die Eisenstäbe weisen jedoch hinsichtlich dieser drei Größen eine andere Relation auf, wenn sie einen gewissen Zustand der Permeabilität nicht durch die Nachbehandlung nach dem Ausglühen, sondern durch irgendeine andere Art, wie z. B. durch mechanischen Zug oder durch eine zeitliche Veränderung der inneren Structur erreicht haben.

Bei gleicher Permeabilität können Remanenz und Nachwirkung verschieden ausfallen, je nach der Vorgeschichte des benützten Stabes.

Tabelle IV.

**Stab aus Puddeleisen, 9 *mm* dick, 50 *cm* lang.**

| Num. | $H$ | Vor dem Glühen | | | Nach dem Glühen | | | Abk. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | |
| 1 | 0·30 | 158 | 0·9 | 5 | 92 | 10·9 | 15 | W |
| | 0·58 | 320 | 0·6 | 6 | 202 | 6·7 | 15 | |
| 2 | 0·30 | 169 | 1·3 | 10 | 205 | 1·9 | 5·5 | L |
| | 0·58 | 345 | 0·8 | 5 | 417 | 1·2 | 7·5 | |
| 3 | 0·30 | 178 | 1·1 | 5 | 225 | 1·1 | 5·8 | K |
| | 0·58 | 365 | 0·6 | 5 | 462 | 0·7 | 6·5 | |

Tabelle V.

**Stab aus Puddeleisen, 4 *mm* dick, 40 *cm* lang.**

| Num. | $H$ | Vor dem Glühen | | | Nach dem Glühen | | | Abk. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | |
| 1 | 0·30 | 34 | 0·6 | 10·9 | 27 | 13·7 | 25·1 | W |
| | 0·58 | 73 | 0·5 | 12·0 | 65 | 7·0 | 23·5 | |
| 2 | 0·30 | 34 | 0·9 | 7·8 | 40 | 4·4 | 15·8 | L |
| | 5·58 | 74 | 0·4 | 12·3 | 89 | 3·2 | 23·8 | |
| 3 | 0·30 | 34 | 0·7 | 9·5 | 57 | 1·0 | 11·6 | K |
| | 0·58 | 73 | 0·4 | 11·6 | 128 | 1·6 | 11·6 | |

## Tabelle VI.

**Frischeisen, 6 *mm* dick, 50 *cm* lang.**

| Num. | $H$ | Vor dem Glühen | | | Nach dem Glühen | | | Abk. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | |
| 1 | 0·30 | 88 | 1·4 | 18·1 | 83 | 11·2 | 38·2 | *W* |
| | 0·58 | 209 | 0·8 | 19·3 | 222 | 6·1 | 31·4 | |
| 2 | 0·30 | 87 | 1·1 | 18·0 | 93 | 8·8 | 32·8 | *L* |
| | 0·58 | 203 | 0·7 | 19·0 | 242 | 4·7 | 29·7 | |
| 3 | 0·30 | 93 | 1·5 | 20·0 | 109 | 2·0 | 22·5 | *K* |
| | 0·58 | 221 | 0·9 | 20·0 | 266 | 1·2 | 22·8 | |

## Tabelle VII.

**Frischeisen, 6 *mm* dick, 20 *cm* lang.**

| Num. | $H$ | Vor dem Glühen | | | Nach dem Glühen | | | Abk. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | |
| 1 | 0·30 | 47 | 1·3 | 11·5 | 44 | 5·5 | 17·3 | *W* |
| | 0·58 | 101 | 0·7 | 10·6 | 97 | 2·6 | 16·4 | |
| 2 | 0·30 | 46 | 1·1 | 11·2 | 50 | 6·7 | 18·6 | *L* |
| | 0·58 | 100 | 0·6 | 8·2 | 114 | 3·7 | 16·2 | |
| 3 | 0·30 | 47 | 0·9 | 10·7 | 55 | 1·9 | 12·0 | *K* |
| | 0·58 | 191 | 0·6 | 10·7 | 118 | 1·0 | 10·5 | |

## Tabelle VIII.

**Frischeisen, 6 *mm* dick, 10 *cm* lang.**

| Num. | $H$ | Vor dem Glühen | | | Nach dem Glühen | | | Abk. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | $\alpha$ | $N^0/_0$ | $r^0/_0$ | |
| 1 | 0·30 | 18 | 0·9 | 5·5 | 18 | 5·0 | 10 | $W$ |
| | 0·58 | 37 | 0·5 | 5·1 | 38 | 2·6 | 9·5 | |
| 2 | 0·30 | 19 | 0·6 | 6·2 | 19 | 4·5 | 7·9 | $L$ |
| | 0·58 | 38 | 0·4 | 2·0 | 41 | 2·6 | 8·2 | |
| 3 | 0·30 | 18 | 1·0 | 6·0 | 21 | 2·8 | 6·7 | $K$ |
| | 0·58 | 38 | 0·6 | 4·3 | 43 | 1 6 | 5·4 | |

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

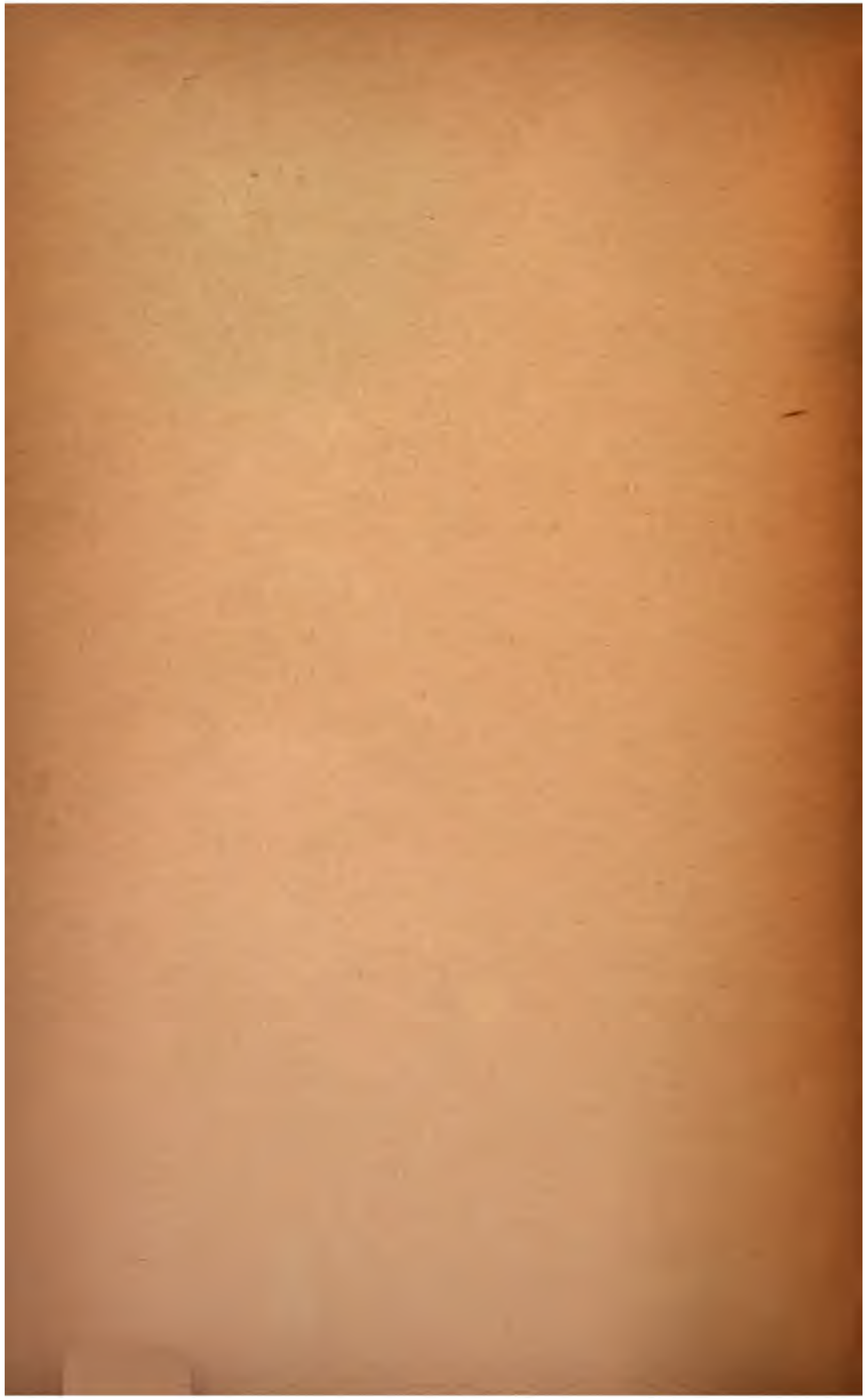
Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerolds Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerations[illegible]s für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.



# SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. V. UND VI. HEFT.

JAHRGANG 1901. — MAI UND JUNI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 4 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1901.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

# INHALT

des 5. und 6. Heftes Mai und Juni 1901 des CX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.



Preis des ganzen Heftes: 4 K 80 h = 4 Mk. 80 Pfg.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

# XI. SITZUNG VOM 9. MAI 1901.

---

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 110, Abth. II.b, Heft I (Jänner 1901).

Der Vorsitzende, Präsident E. Sueß, verliest eine Zuschrift des Curatoriums der kaiserlichen Akademie, worin mitgetheilt wird, dass Seine kaiserl. und königl. Hoheit, der Durchlauchtigste Herr Erzherzog Curator, bei der diesjährigen feierlichen Sitzung erscheinen und dieselbe mit einer Ansprache eröffnen wird.

Die Marine-Section des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums übersendet eine für die Berichte der Commission für oceanographische Forschungen bestimmte Abhandlung von k. und k. Linienschiffs-Lieutenant Herrn C. Arbesser v. Rastburg: »Geodätische Arbeiten«. (Expedition S. M. Schiff »Pola« in das Rothe Meer, südliche Hälfte, September 1897 bis März 1898.)

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung von Herrn Prof. G. Jäger: »Über das elektrische Feld eines ellipsoidischen Leiters« vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung von den Herren Prof. H. Biltz und G. Prenner in Kiel: »Über die Molekelgröße und Dampfdichte des Schwefels«.

Ferner überreicht derselbe zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

I. »Condensation von Isobutyraldehyd mit *p*-Oxybenzaldehyd«, von Herrn A. Hildesheimer;

II. »Condensation von *α*-Oxyisobutyraldehyd mit Acetaldehyd«, von Herrn J. Roesler.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Albert I, Prince Souverain de Monaco, Résultats des Campagnes scientifiques accomplies sur son yacht. Fascicule XVII, XVIII. Imprimerie de Monaco, 1900. 4°.

— Notes de Géographie biologique marine. Berlin, 1900. 8°.

Council of the Fridtjof Nansen Fund for the Advancement of Science, The Norwegian North Polar Expedition 1893—1896. Scientific Results edited by F. Nansen. Volume II. London, 1901. 4°.

Universität in Aberdeen, Aberdeen University Studies. I. Alumni of King's College. II. Record of Old Aberdeen III. Place Names of W. Aberdeen. Aberdeen, Groß-8°.

Wislicenus J., Sir Edward Frankland. 8°.

# Compressibilität und Cohäsion der Flüssigkeiten

von

Prof. Dr. **O. Tumlirz** in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1901.)

In der Abhandlung: »Das Compressibilitätsgesetz der Flüssigkeiten«[1] habe ich gezeigt, dass die Compressionsverhältnisse der tropfbaren Flüssigkeiten sich durch die Formeln

$$-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 12\cdot225\, m\, \frac{(v-a)^2}{Tv} \qquad \ldots \text{I)}$$

und

$$v_n = \frac{v_1 + aA_n}{1+A_n}, \qquad \ldots \text{II)}$$

wobei

$$A_n = 12\cdot225\, m\, \frac{(p_n - p_1)(v_1 - a)}{T}$$

ist, wiedergeben lassen. Hierin bedeuten $v$ das in Cubikmeter gemessene Volumen von 1 *k* der betreffenden Flüssigkeit, $p$ den Druck in Atmosphären, $T$ die absolute Temperatur, $m$ das Moleculargewicht und $a$ eine Constante. Die Formel II) bezieht sich auf starke isothermische Compressionen und es bedeuten hierin $v_1, p_1$ die Anfangswerte und $v_n, p_n$ die Endwerte von Volumen und Druck. Nach dieser Formel wurden die Compressionen berechnet, welche Amagat bei Wasser und Äther bis zu 3000 Atmosphären und Barus bei Äthylalkohol bis zu 400 Atmosphären ausführten.

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CIX, Abth. IIa. März 1900.

Integrieren wir die Gleichung I), indem wir $T$ als constant ansehen, so erhalten wir

$$\frac{1}{v-a} = \frac{12 \cdot 225 mp}{T} + F,$$

wo $F$ als eine Function von $T$ zu betrachten ist, oder wenn wir $TF = 12 \cdot 225 m P$ setzen,

$$(p+P)(v-a) = \frac{T}{12 \cdot 225 m}. \qquad \ldots 1)$$

Hierin ist wieder die Größe $P$ als eine Function von $T$ zu betrachten. Die Formel II) geht aus dieser letzteren Gleichung hervor, wenn man die Gleichung bei derselben Temperatur $T$ einmal auf den Anfangszustand $(v_1, p_1)$ und das anderemal auf den Endzustand $(v_n, p_n)$ bezieht und dann aus beiden Gleichungen $P$ eliminiert.

Die Gleichung 1) ist nichts anderes als die Zustandsgleichung der Flüssigkeit, und was die Größe $P$ anbelangt, so ist leicht einzusehen, dass sie den Cohäsionsdruck der Flüssigkeit bedeutet. Wir wollen das letztere durch eine kurze Betrachtung näher darthun.

Nach den von van der Waals gegebenen Anschauungen haben wir in den Flüssigkeiten und Dämpfen mechanische Systeme zu sehen, welche neben den für die vollkommenen Gase charakteristischen Eigenschaften noch eine durch innere Anziehungskräfte bestimmte Cohäsion besitzen. Vollkommene Gase, welche keine inneren Kräfte besitzen, haben die Eigenschaft, dass bei einer umkehrbaren isothermischen Ausdehnung die von außen zugeführte Wärme ebenso groß ist, als die nach außen abgegebene Arbeit, und dass umgekehrt bei einer umkehrbaren isothermischen Zusammendrückung die nach außen abgegebene Wärme ebenso groß ist, als die von außen zugeführte Arbeit; daher gilt für sie nach der mechanischen Wärmetheorie die Differentialgleichung

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 0. \qquad \ldots 2)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$v = \varphi\left(\frac{T}{p}\right) \quad \text{oder} \quad p = T\psi(v), \qquad \ldots 3)$$

wo $\varphi$ und $\psi$ beliebige Functionen bedeuten. Die einfachste Form dieser Function ist das Mariotte-Gay Lussac'sche Gesetz

$$p = \frac{T}{12 \cdot 225 mv}.$$

Da dieses Gesetz die Gleichung für jenen Zustand ist, dem alle Gase der Natur bei fortgesetzter Verdünnung zustreben, so sind in der Gleichung 3) für $\psi(v)$ nur solche Functionen zu nehmen, welche für ein unendlich großes $v$ zum Mariotte-Gay Lussac'schen Gesetze führen.

Das mechanische System soll außer den für vollkommene Gase charakteristischen Eigenschaften noch eine durch innere Anziehungskräfte bestimmte Cohäsion haben. Nach den Grundgleichungen der Hydrostatik hat dann der Druck im Innern der Flüssigkeit einen größeren Wert, als der Druck auf die Gefäßwände. Wird nämlich ein sehr kleines Massentheilchen $\mu$ unendlich wenig verschoben und wird dabei die Arbeit $\mu dA$ geleistet, so ist die dieser Ortsveränderung entsprechende Druckänderung $dp$ gegeben durch

$$dp = kdA, \qquad \ldots 4)$$

wo $k$ die Dichte bedeutet. Rückt das Massentheilchen aus der Oberfläche in das Innere, so leisten die Anziehungskräfte eine positive Arbeit, und deshalb muss der Druck im Innern größer sein, als in der Oberfläche.

Sowie mehrere Kräfte, welche an einem und demselben Punkte angreifen, sich gegenseitig nicht beeinflussen und jede Kraft so wirkt, als käme sie allein zur Geltung, so muss auch bei dem betrachteten mechanischen System festgesetzt werden, dass diejenige Eigenschaft, welche für sich allein zu dem durch die Gleichung 3) bestimmten Drucke $p$ führt, durch die Cohäsion nicht beeinflusst wird.

Stellen wir uns vor, dass eine Flüssigkeit oder ein Dampf allseits von festen Wänden eingeschlossen sei und stellen wir

uns ferner vor, dass von einem gewissen Momente an die Cohäsion verschwinde, dann muss der Druck auf die Gefäßwände denjenigen Wert annehmen, welcher durch die Gleichung 3) bestimmt ist.

Was die Anziehungskräfte anbelangt, so sprechen viele Thatsachen dafür, dass von den Anziehungskräften, welche auf ein Massentheilchen wirken, nur jene in Betracht kommen, welche von den in der allernächsten Umgebung liegenden Massentheilchen herrühren, und dass die Grenze dieser wirksamen Umgebung in einer äußerst geringen Entfernung liegt. Ein im Innern befindliches Massentheilchen erfährt daher, weil alle Massentheilchen, deren Kraftwirkungen in Betracht kommen, um das erstere symmetrisch vertheilt sind, gar keine Kraftwirkung, und denken wir uns innerhalb der Substanz parallel zur Oberfläche eine Fläche so gezogen, dass diese Fläche für jedes Oberflächentheilchen gerade die Grenze der wirksamen Umgebung darstellt, so werden alle von dieser Fläche eingeschlossenen Massentheilchen keine Kraftwirkung erfahren.

Ziehen wir jetzt die Grundgleichungen der Hydrostatik heran und nehmen wir an, dass keine äußeren Kräfte wirken, so sehen wir, dass alle diese Massentheilchen unter demselben Drucke stehen. Bezeichnet $p$ den Druck in der Oberfläche und $p+P$ den Druck im Innern, so hat der Druck $p+P$ für alle die genannten Massentheilchen denselben Wert. Da die genannten Massentheilchen sich so verhalten, als wäre ihre Cohäsion ganz verschwunden, so muss nach dem früher Gesagten der Druck $p+P$ denjenigen Wert haben, welcher durch die Gleichung 3) bestimmt ist, nämlich den Wert

$$p+P = T\psi(v). \qquad \ldots 5)$$

Diese Gleichung kommt in Übereinstimmung mit der Gleichung 1), wenn wir

$$\psi(v) = \frac{1}{12 \cdot 225\, m(v-a)}$$

setzen und $P$ als eine Function von $T$ allein betrachten. Die Größe $P$ in der Gleichung 1) ist also der Cohäsionsdruck im Innern der Flüssigkeit.

Es ist auffallend, dass der Cohäsionsdruck $P$ bei den Flüssigkeiten nur von der Temperatur allein abhängen soll. Freilich darf nicht vergessen werden, dass das Compressibilitätsgesetz, wie die Versuche von Barus über die Compression des Äthylalkohols zeigen, nur für Temperaturen gilt, welche beträchtlich unter der kritischen Temperatur liegen. Wollen wir die Erscheinungen, welche die Flüssigkeiten und Dämpfe darbieten, in der Weise beschreiben, dass wir die Flüssigkeiten und Dämpfe als mechanische Systeme von den oben genannten Eigenschaften betrachten, so müssen wir wegen des Umstandes, dass der kritische Zustand einen stetigen Übergang zwischen dem Dampfzustande und dem Flüssigkeitszustande vermittelt, die Cohäsionskräfte des Dampfes und die der Flüssigkeit als gleichartig annehmen. Der kritische Zustand verlangt aber, dass der Cohäsionsdruck auch eine Function des specifischen Volumens $v$ ist.

Wenn nun die Compressionserscheinungen der Flüssigkeiten so verlaufen, dass der Cohäsionsdruck von dem specifischen Volumen gar nicht abzuhängen scheint, so folgt daraus, dass der Cohäsionsdruck nur eine solche Function des specifischen Volumens sein kann, dass seine Abhängigkeit vom specifischen Volumen in einer tropfbaren Flüssigkeit bei Temperaturen, welche beträchtlich unter der kritischen Temperatur liegen, fast gar nicht in Betracht kommt. Bei Temperaturen, welche beträchtlich unter der kritischen Temperatur liegen, ist der Unterschied zwischen der Dichte der Flüssigkeit und der Dichte des Dampfes bedeutend, und wahrscheinlich liegt hierin der Grund des genannten Verhaltens. Nehmen wir z. B. an, es wäre der Cohäsionsdruck durch

$$\vartheta(T)\left(1-e^{-\frac{\chi(T)}{v^2}}\right)$$

bestimmt, wo $\vartheta(T)$ und $\chi(T)$ gewisse Functionen von $T$ bedeuten, so wäre es möglich, dass der Exponent $\frac{\chi(T)}{v^2}$ einerseits für die Flüssigkeit sehr groß und anderseits für den Dampf sehr klein ist; man könnte dann den Cohäsionsdruck im

ersten Fall gleich $\vartheta(T)$ und im zweiten Falle gleich $\frac{\vartheta(T)\chi(T)}{v^2}$ setzen.

Auch die in der Gleichung 1) auftretende Constante $a$ kann möglicherweise eine Größe sein, welche sich in der Flüssigkeit auf eine Constante reduciert, während sie im Dampf mit $v$ variabel ist.

Schreiben wir jetzt die Gleichung 1) in der Form

$$P = \frac{T}{12 \cdot 225\, m\,(v-a)} - p, \qquad \ldots 6)$$

so ergibt sie die Größe des Cohäsionsdruckes. Im folgenden ist der Cohäsionsdruck für mehrere Flüssigkeiten nach dieser Gleichung berechnet worden.

Der Cohäsionsdruck ist eine Größe, welche sich der directen experimentellen Prüfung entzieht. Da aber der Cohäsionsdruck noch auf einem anderen Wege erhalten werden kann, indem man, wie Stefan es zum erstenmale gethan hat,[1] den Arbeitswert der inneren Verdampfungswärme als jene Arbeit ansieht, welche zur Überwindung der Cohäsion geleistet werden muss, so bildet der Cohäsionsdruck das Bindeglied zwischen der Compressibilität und der Verdampfung. Bei der Verdampfung einer Flüssigkeit können wir zwei Phasen unterscheiden:

1. den Übergang von Flüssigkeitstheilchen aus dem Innern der Flüssigkeit in deren Oberfläche und

2. das Aufsteigen dieser Theilchen von der Oberfläche in den Dampfraum.

Ist $\mu$ die Masse eines Flüssigkeitstheilchens, so wollen wir die Arbeit, welche für den ersten Übergang nöthig ist, mit $\mu A$ und die Arbeit, welche für den zweiten Übergang nöthig ist, mit $\mu B$ bezeichnen.[2] $A$ und $B$ sind dann die betreffenden

[1] Diese Sitzungsber., Bd. XCIV, Abth. IIa. S. 4, 1886.

[2] Jede dieser Arbeiten besteht eigentlich aus zwei Theilen. Beim ersten Übergange leisten nämlich die Cohäsionskräfte der Flüssigkeit eine negative Arbeit und die Cohäsionskräfte des Dampfes eine positive Arbeit; beim zweiten Übergang leisten wieder die Cohäsionskräfte der Flüssigkeit eine negative Arbeit und die Cohäsionskräfte des Dampfes eine positive Arbeit.

Arbeiten pro Masseneinheit und ihre Summe $A+B$ ist nichts anderes als der Arbeitswert der inneren latenten Wärme des Dampfes.

Stefan hat a. a. O. gezeigt, dass wenn die Moleküle des Dampfes von jenen der Flüssigkeit in keiner Weise verschieden sind und wenn man ferner annimmt, dass die Dichte der Flüssigkeit bis an die Oberfläche die gleiche ist, die Arbeiten $A$ und $B$ einander gleich sind. Stefan sprach diese Gleichheit aus sowohl unter der Annahme, dass die Cohäsionskräfte die Natur der Laplace'schen Capillarkräfte haben, als auch unter der Annahme, dass die anziehenden Kräfte nur zwischen den unmittelbar aneinanderliegenden oder sich berührenden Molekülen ausgeübt werden, ähnlich, wie es bezüglich der Affinitätskräfte angenommen wird, welche die Atome zu einem Moleküle vereinigen. In Wirklichkeit sind wir über die Natur der Cohäsionskräfte und über die Beschaffenheit der Oberfläche der Flüssigkeit noch völlig im unklaren und daher können wir von vorherein noch nicht wissen, ob bei einer Flüssigkeit die Arbeiten $A$ und $B$ einander gleich sind oder nicht.

Einen Aufschluss über diese Frage können wir aber erhalten, wenn wir einerseits den Cohäsionsdruck aus der Gleichung 6) berechnen und anderseits die Gleichung 4) längs einer Linie integrieren, welche von der Oberfläche der Flüssigkeit in deren Inneres führt. Die Integration gibt

$$P = k.A \qquad \ldots 7)$$

oder, wenn wir für die Dichte $k$ das specifische Volumen einführen,

$$A = Pv. \qquad \ldots 8)$$

Die Gleichung 6) gibt den Cohäsionsdruck in Atmosphären an; wollen wir die Arbeit $A$ in Kilogrammeter ausdrücken, so haben wir die aus der Gleichung 6) hervorgehende Zahl noch mit 10333 zu multiplicieren. Bedeutet ferner $\rho$ die innere latente Wärme des Dampfes, so ist deren Arbeitswert gleich

$$424\rho = A+B. \qquad \ldots 9)$$

Diese Größe ist durch das Experiment bestimmbar. Ziehen wir von dieser Größe die durch Gleichung 8) gegebene Arbeits-

größe $A$ ab, so erhalten wir die Arbeitsgröße $B$, und nun können wir entscheiden, ob $A$ und $B$ einander gleich sind oder nicht.

Im folgenden werden fünf Flüssigkeiten betrachtet, und zwar Schwefelkohlenstoff, Chloroform, Benzol, Wasser und Äthylalkohol. Die Arbeitsgrößen $A$ und $B$ sind bei den drei erstgenannten Flüssigkeiten bei niederen Temperaturen thatsächlich gleich, dagegen sind sie beim Wasser und Äthylalkohol und bei den höheren Temperaturen auch beim Schwefelkohlenstoff verschieden. Beim Wasser ist die Verschiedenheit so groß, dass z. B. bei 0° C. $B$ 3·694 mal größer ist als $A$. Beim Äthylalkohol ist bei 0° C. $B$ 2·562 mal größer als $A$.

### Schwefelkohlenstoff.

$m = 75 \cdot 93$, $a = 0 \cdot 00064052$.

| $t$ Cels. | $p$ Millimeter Quecksilber | $v$ | $P$ Atmosphären | $\rho$ | $\frac{A}{424}$ | $\frac{B}{424}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 127·91 | 0·00077388 | 2202·3 | 82·79 | 41·53 | 41·26 |
| 10 | 198·46 | 78272 | 2141·0 | 81·61 | 40·84 | 40·77 |
| 20 | 298·03 | 79206 | 2080·0 | 80·34 | 40·15 | 40·19 |
| 30 | 434·62 | 80168 | 2022·6 | 79·00 | 39·52 | 39·48 |
| 40 | 617·53 | 81180 | 1965·9 | 77·57 | 38·89 | 38·68 |
| 50 | 857·07 | 82247 | 1909·6 | 76·07 | 38·28 | 37·79 |
| 60 | 1164·51 | 83382 | 1852·7 | 74·48 | 37·65 | 36·83 |
| 70 | 1552·09 | 84432 | 1811·1 | 72·82 | 37·27 | 35·55 |
| 80 | 2032·53 | 85600 | 1762·1 | 71·06 | 36·76 | 34·30 |
| 90 | 2619·08 | 86820 | 1714·2 | 69·24 | 36·27 | 32·97 |
| 100 | 3325·15 | 88112 | 1665·5 | 67·33 | 35·76 | 31·57 |
| 110 | 4164·06 | 89460 | 1618·4 | 65·34 | 35·29 | 30·05 |
| 120 | 5148·79 | 90946 | 1567·5 | 63·27 | 34·74 | 28·53 |
| 130 | 6291·60 | 92506 | 1517·6 | 61·13 | 34·21 | 26·92 |
| 140 | 7603·96 | 94185 | 1466·6 | 58·91 | 33·66 | 25·25 |
| 150 | 9095·94 | 95995 | 1414·6 | 56·61 | 33·09 | 23·52 |

Die Volumina $v$ wurden von 0° bis 50° nach der Formel von Pierre, für die höheren Temperaturen nach der Formel von Hirn berechnet. Die Werte für $\rho$ wurden den Zeuner'schen Tabellen entnommen.

Der Cohäsionsdruck $P$ lässt sich hier als eine lineare Function der Temperatur darstellen, und zwar durch

$$P = 2176\cdot4-5\cdot0917\,t. \qquad \ldots 10)$$

In der folgenden Tabelle stehen die nach dieser Gleichung berechneten Werte von $P$ und daneben ihre Differenz gegen die obigen Werte, ausgedrückt in Procenten.

| $t$ | $P$ | Differenz in Procenten | $t$ | $P$ | Differenz in Procenten |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2176·4 | —1·18 | 80 | 1769·1 | +0·39 |
| 10 | 2125·5 | —0·72 | 90 | 1718·1 | +0·23 |
| 20 | 2074·6 | —0·26 | 100 | 1667·2 | +0·10 |
| 30 | 2023·6 | +0·05 | 110 | 1616·3 | —0·13 |
| 40 | 1972·7 | +0·34 | 120 | 1565·4 | —0·13 |
| 50 | 1921·8 | +0·64 | 130 | 1514·5 | —0·20 |
| 60 | 1870·9 | +0·98 | 140 | 1463·6 | —0·20 |
| 70 | 1820·0 | +0·49 | 150 | 1412·6 | —0·14 |

**Chloroform.**

$m = 119\cdot08$. Die Größe $a$ wurde aus den Compressionsversuchen von Grassi, Grimaldi und Amagat abgeleitet und $a = 0\cdot00055852$ gefunden. Da die Versuchsergebnisse von Grassi und Grimaldi voneinander sehr stark abweichen, so hat der Wert für $a$ keine große Sicherheit.

| $t$ Cels. | $p$ Millimeter Quecksilber | $v$ | $P$ Atmosphären | $\rho$ | $\frac{A}{424}$ | $\frac{B}{424}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 59·72 | 0·00065513 | 1940·1 | 62·47 | 30·97 | 31·50 |
| 10 | 100·47 | 66275 | 1864·1 | 61·31 | 30·11 | 31·20 |
| 20 | 160·47 | 67078 | 1791·8 | 60·16 | 29·29 | 30·87 |

Die Werte für $\rho$ wurden den Zeuner'schen Tabellen entnommen.

## Benzol.

$m = 77\cdot82$, $a = 0\cdot0009577$. Es war zunächst die innere latente Wärme $\rho$ des Dampfes zu berechnen. Nach Regnault ist die ganze Verdampfungwärme, durch welche das flüssige Benzol von 0° C. in Dampf von $t$° C. verwandelt wird,

$$\lambda = 109\cdot0+0\cdot24429t-0\cdot0001315t^2.$$

Die latente Wärme $r$ des Dampfes bei der Temperatur $t$ ergibt sich daraus nach der Formel

$$r = \lambda - \int_0^t c\,dt,$$

in welcher $c$ die specifische Wärme des flüssigen Benzols bedeutet. Die Werte, welche man für $c$ gefunden hat, weichen beträchtlich voneinander ab. Ich habe nach Pickering $c = 0\cdot4066$ gesetzt. Dadurch erhält man für die Temperaturen $t = 0, 10, 20°$, beziehungsweise $r = 109\cdot0, 107\cdot4, 105\cdot7$ cal. Von diesen Zahlen sind noch die Werte für die äußere latente Wärme des Dampfes abzuziehen. Da man bei den genannten Temperaturen das Product aus der Dampfspannung und dem specifischen Volumen nach dem Mariotte-Gay Lussac'schen Gesetze bestimmen kann, so erhält man für die innere latente Wärme $\rho$ des Dampfes bei $t = 0, 10, 20°$ die Werte $\rho = 102\cdot01$, $100\cdot15$, $98\cdot19$ cal.

| $t$ Cels. | $p$ Millimeter Quecksilber | $v$ | $P$ Atmosphären | $\rho$ | $\frac{A}{424}$ | $\frac{B}{424}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 25·31 | 0·0011096 | 1888·1 | 102·01 | 51·05 | 50·96 |
| 10 | 45·25 | 11227 | 1801·9 | 100·15 | 49·30 | 50·85 |
| 20 | 75·65 | 11364 | 1722·5 | 98·19 | 47·70 | 50·49 |

## Äthylalkohol.

$m = 45 \cdot 90$, $a = 0 \cdot 0010060$. Die Werte für $\rho$ wurden hier und ebenso auch im folgenden den Zeuner'schen Tabellen entnommen.

| $t$ Cels. | $p$ Millimeter Quecksilber | $v$ | $P$ Atmosphären | $\rho$ | $\frac{A}{424}$ | $\frac{B}{424}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 12·70 | 0·0012403 | 2075·5 | 223·43 | 62·73 | 160·70 |
| 10 | 24·23 | 12533 | 2038·4 | 225·35 | 62·26 | 163·09 |
| 20 | 44·46 | 12667 | 2002·0 | 226·61 | 61 80 | 164·81 |
| 30 | 78·52 | 12805 | 1966·2 | 226·08 | 61·36 | 164·72 |

## Wasser.

$m = 17 \cdot 96$, $a = 0 \cdot 00075295$.

| $t$ Cels. | $p$ Millimeter Quecksilber | $v$ | $P$ Atmosphären | $\rho$ | $\frac{A}{424}$ | $\frac{B}{424}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| —10 | 2·093 | 0·00100186 | 4811·3 | 583·15 | 117·47 | 465·68 |
| — 5 | 3·113 | 100070 | 4926·8 | 579·30 | 120·15 | 459·15 |
| ± 0 | 4·600 | 1000127 | 5030·2 | 575·43 | 122·60 | 452·83 |
| 5 | 6·537 | 1000008 | 5124·9 | 571·55 | 124·89 | 446·66 |
| 10 | 9·165 | 1000265 | 5211·6 | 567·66 | 127·04 | 440·62 |
| 15 | 12·699 | 1000857 | 5290·9 | 563·75 | 129·05 | 434·70 |
| 20 | 17·391 | 1001751 | 5363·6 | 559·83 | 130·94 | 428·89 |
| 25 | 23·550 | 1002911 | 5429·9 | 555·91 | 132·71 | 423·20 |
| 30 | 31·548 | 1004314 | 5490·1 | 551·97 | 134·37 | 417·60 |
| 35 | 41·827 | 1005936 | 5544·9 | 548·02 | 135·93 | 412·09 |
| 40 | 54·906 | 100773 | 5595·1 | 544·06 | 137·41 | 406·65 |
| 45 | 71·390 | 100974 | 5640·1 | 540·09 | 138·79 | 401·30 |
| 50 | 91·980 | 101201 | 5678·6 | 536·12 | 140 05 | 396·07 |
| 55 | 117·475 | 101442 | 5713·4 | 532·14 | 141·25 | 390·89 |
| 60 | 148·786 | 101697 | 5744·5 | 528·15 | 142·37 | 385·78 |

| $t$ Cels. | $p$ Millimeter Quecksilber | $v$ | $P$ Atmosphären | $\rho$ | $\frac{A}{424}$ | $\frac{B}{424}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 186·938 | 0·00101971 | 5770·9 | 524·16 | 143·41 | 380·75 |
| 70 | 233·082 | 102260 | 5793·4 | 520·17 | 144·38 | 375·79 |
| 75 | 288·500 | 102569 | 5811·3 | 516·18 | 145·26 | 370·92 |
| 80 | 354·616 | 102890 | 5826·1 | 512·19 | 146·09 | 366·10 |
| 85 | 433·002 | 103224 | 5838·0 | 508·21 | 146·86 | 361·35 |
| 90 | 525·392 | 103574 | 5846·3 | 504·24 | 147·57 | 356·67 |
| 95 | 633·692 | 103938 | 5851·6 | 500·27 | 148·22 | 352·05 |
| 100 | 760·000 | 104315 | 5854·0 | 496·29 | 148·82 | 347·47 |

# Über das elektrische Feld eines ellipsoidischen Leiters

von

Prof. Dr. **Gustav Jäger.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Mai 1901.)

Das Potential, welches ein ellipsoidischer Leiter, der mit Elektricität geladen ist, erzeugt, wird in der Regel auf die Weise dargestellt, dass man nachweist, dass ein System von confocalen Ellipsoiden ein System von Niveauflächen bildet, welches den Potentialsätzen genügeleistet. Man kann dann eine derartige Äquipotentialfläche als die Oberfläche eines Leiters betrachten und die außerhalb liegenden Niveauflächen als die Äquipotentialflächen des elektrischen Feldes, woraus dann die Dichtenvertheilung auf der Oberfläche des Leiters bestimmt werden kann. Man gelangt so eigentlich durch Zufall auf die Lösung des Problems, wie beschaffen das von einem geladenen Ellipsoid erzeugte elektrische Feld ist. Nachdem nun Stefan in seiner Abhandlung: »Über das Gleichgewicht der Elektricität auf einer Scheibe und einem Ellipsoid«[1] in sehr einfacher Weise die Vertheilung der Elektricität auf einem Ellipsoid hergeleitet hat, so liegt es nahe, von der Vertheilung ausgehend, den Zustand des elektrischen Feldes im umgebenden Raume, d. h. den Wert des Potentials an einer beliebigen Stelle des Raumes zu bestimmen.

Wir benutzen zu diesem Zwecke vorerst den Satz, dass die Oberfläche eines Conductors ebenfalls eine Niveaufläche ist. Daraus folgt, dass die Gleichungen der Niveauflächen von demselben Grade sein müssen, wie die Gleichung der Conductor-

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 101, Abth. IIa., S. 1553, 1892.

fläche. Ferner werden für sehr entfernte Punkte die Niveauflächen Kugelflächen. Weiters können sich zwei Niveauflächen verschiedenen Potentials nicht schneiden. Daraus folgt, dass die zum Ellipsoid gehörigen Niveauflächen geschlossene Flächen, d. h. ebenfalls Ellipsoide sein müssen.

Diese Flächen sind somit gegeben, wenn wir deren drei Halbaxen kennen.

Die Gleichung des Leiters sei

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} + \frac{z^2}{c_0^2} = 1.$$

Wir geben ihm also die Halbaxen $a_0$, $b_0$, $c_0$.

Die Halbaxen einer beliebigen Niveaufläche seien $a, b, c$, die der unmittelbar benachbarten Niveaufläche mithin $a+da$, $b+db$, $c+dc$. Denken wir uns eine beliebige Niveaufläche mit einem Leiter erfüllt und mit der Ladung $E$ versehen, so ist an irgend einem Punkte dieses Leiters die Dichte

$$\sigma = \frac{Ep}{4\pi abc},$$

wobei $p$ das Loth ist, welches man vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die Tangentialebene des zugehörigen Punktes fällt; für die Endpunkte der Halbaxen ist $p$ gleich der jeweiligen Halbaxe. Um die benachbarte Niveaufläche zu construieren, brauchen wir nur in jedem Punkte der vorhandenen Niveaufläche ein unendlich kleines Loth zu errichten, dessen Länge verkehrt proportional der in diesem Punkte herrschenden Kraft ist. Da diese Kraft $N = 4\pi\sigma$ ist, so sind diese Lothe verkehrt proportional der Dichte $\sigma$ zu nehmen; die durch ihre Endpunkte bestimmte Fläche ist dann die neue Niveaufläche. Für uns genügt es, die in die verlängerten Halbaxen fallenden Lothe zu bestimmen. Es ist somit

$$da = \frac{dn}{\sigma_a} = \frac{4\pi abc}{aE} dn = \frac{1}{a} f(a, b, c)\, dn; \qquad \ldots 1)$$

analog bekommen wir für den Zuwachs der anderen Halbaxen:

$$db = \frac{1}{b} f(a, b, c)\,dn,$$

$$dc = \frac{1}{c} f(a, b, c)\,dn.$$

Gleichung 1) lässt sich auch schreiben:

$$a\,da = f(a, b, c)\,dn$$

oder integriert

$$\int_{a_0}^{a} a\,da = \int_{0}^{n} f(a, b, c)\,dn,$$

was ergibt

$$a^2 - a_0^2 = 2\int_0^n f(a, b, c)\,dn.$$

Derselben Größe gleich ist $b^2 - b_0^2$ und $c^2 - c_0^2$.

Da die Function $f(a, b, c)$ ja nur ein dem Volumen der jeweiligen Niveaufläche proportionaler Wert ist, demnach mit $n$ ins Unendliche wächst, so muss auch das Integral, wenn seine obere Grenze von Null bis Unendlich wächst, alle Werte zwischen 0 und $\infty$ annehmen. Folglich haben unsere Ellipsoide die Eigenschaft, dass die Quadrate ihrer Halbaxen gegeben sind durch

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a_0^2 + \lambda \\ b^2 &= b_0^2 + \lambda \\ c^2 &= c_0^2 + \lambda \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 2)$$

und ihre Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1,$$

was für alle Werte von $\lambda$ von 0 bis $\infty$ eine Schar confocaler Ellipsoide als Niveauflächen des elektrischen Feldes ergibt.

Die Normalkraft $N$ im Endpunkte der Halbaxe $a$ ist gegeben durch $-\frac{\partial V}{\partial a}$, wenn wir unter $V$ das Potential verstehen. Es ist demnach

$$-\frac{\partial V}{\partial a} = N = 4\pi\sigma = \frac{E}{bc}. \qquad \ldots 3)$$

Da nun nach Gleichung 2)

$$a^2-b^2 = a_0^2-b_0^2 = e_1^2,$$

desgleichen

$$a^2-c^2 = a_0^2-c_0^2 = e_2^2,$$

so folgt

$$b = \sqrt{a^2-e_1^2}$$

und

$$c = \sqrt{a^2-e_2^2};$$

es wird demnach

$$-\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{E}{\sqrt{(a^2-e_1^2)(a^2-e_2^2)}}$$

oder das Potential

$$V = C-\int\frac{E da}{\sqrt{(a^2-e_1^2)(a^2-e_2^2)}}. \qquad \ldots \text{I)}$$

Die Constante $C$ lässt sich bestimmen, da für unendlich werdendes $a$ $V = 0$ werden muss. Mit der Kenntnis des Potentials im Endpunkte der Halbaxe $a$ ist auch dessen Wert für die ganze Niveaufläche und somit für einen beliebigen Punkt des Raumes gegeben. Die einfacheren Fälle für ein Rotationsellipsoid, eine Kreisscheibe etc. lassen sich dann nach dem gewöhnlichen Vorgange aus obiger Formel ableiten. So würde z. B. für ein Rotationsellipsoid $e_1 = e_2$, und der Wert des Potentials an irgend einer Stelle des Raumes gegeben sein durch

$$V = C-E\int\frac{da}{a^2-e_1^2},$$

was ohneweiters durch die bekannte geschlossene Formel dargestellt werden kann.

Will man das Potential als Function von $\lambda$ bestimmen, so geschieht dies leicht auf folgende Weise:

Da $a^2 = a_0^2+\lambda$, so

$$2 a da = d\lambda,$$

und nach Gleichung 3)

$$V = C - E\int\frac{da}{bc} = C - \frac{E}{2}\int\frac{2ada}{abc} =$$

$$= C - \frac{E}{2}\int\frac{d\lambda}{\sqrt{(a_0^2+\lambda)(b_0^2+\lambda)(c_0^2+\lambda)}}. \quad \ldots \text{II})$$

Die Arbeit, welche die Kräfte leisten, wenn die Masseneinheit der Elektricität von irgend einem Punkte des Raumes ins Unendliche entfernt wird, ist gegeben durch $V_\lambda - V_\infty$, wobei $V_\infty$ gleich Null gesetzt werden muss. Wir können demnach das Potential in einem beliebigen Punkte des Raumes, dem die Coordinate $\lambda$ zugehört, auch darstellen durch

$$V_\lambda = \frac{E}{2}\int_\lambda^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{(a_0^2+\lambda)(b_0^2+\lambda)(c_0^2+\lambda)}}. \quad \ldots \text{II}a)$$

Auch diese Formel liefert für die oben erwähnten einfacheren Fälle die bekannten Formeln des Potentials; und da die Capacität eines Leiters einfach

$$C = \frac{E}{V}$$

ist, sind auch die bekannten Fälle der Capacität damit gegeben.

# Eine experimentelle Prüfung der Clausius-Mosotti'schen Formel

von

**F. Hlawati.**

(Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.)

(Mit 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. April 1901.)

Untersuchungen und Messungen zur Verificierung der Clausius-Mosotti'schen Formel sind in letzter Zeit wiederholt angestellt worden. Sie sollten entweder ihre Richtigkeit direct beweisen, oder unter der Voraussetzung ihrer Richtigkeit andere mit ihr in Zusammenhang stehende Größen ermitteln und deren Übereinstimmung mit der Wirklichkeit prüfen. Diese Untersuchungen haben nun allerdings neben manchem entschiedenen »Für« in Bezug auf die Formel hie und da auch ein »Wider« gebracht, das an positiven Temperaturcoefficienten der Dielektricitätsconstante, an ihrer Änderung mit der Zeit der Ladung etc. eine Stütze zu finden scheint.

Als directeste Methode, eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Wirklichkeit nachzuweisen, darf es wohl gelten, in dem Ausdrucke

$$\frac{k}{k'} = \frac{1+2v}{1-v}$$

oder

$$v = \frac{k-k'}{k+2k'}$$

einerseits das Volumen $v$, das die leitenden Partikel im Dielektricum einnehmen, zu bestimmen, anderseits die Dielektricitätsconstante des Isolators, und zwar $k$ für den Fall, dass er die leitenden Partikel enthält, $k'$ für den Fall, dass er frei von

ihnen ist, zu messen, und schließlich nach den gefundenen Werten die Übereinstimmung zwischen der rechten und linken Seite der Gleichung zu controlieren.

Dieser Weg ist auch eingeschlagen worden.

Beaulard[1] mischte mit einer bestimmten Menge von Paraffin eine genau definierte Gewichtsmenge von Kupferspänen; er kannte also das Volumen seiner leitenden Partikel $v$, die Dielektricitätsconstante des reinen Paraffins $k'$ und die des Gemisches $k$. Ähnlich hat Millikan[2] eine Emulsion des Gemisches Benzol und Chloroform in Wasser hergestellt; die beigesetzte Menge Wassers gab das $v$, $k$ und $k'$ wurden wieder gemessen. Zwischen $\frac{k}{k'}$ einerseits und $\frac{1+2v}{1-v}$ anderseits fand Beaulard eine Übereinstimmung bis auf 0·7% bis 4%, Millikan eine solche bis auf 0·2% bis 1·2%.

Trotz dieses gewiss nicht unbefriedigenden Resultates muss doch gesagt werden, dass in beiden Fällen die doppelte Voraussetzung, die der Clausius-Mosotti'schen Formel zugrunde liegt: die Kugelgestalt der im Isolator eingebetteten Partikelchen und ihre vollkommene Leitfähigkeit, doch eigentlich nicht realisiert waren. Kupferspäne haben gewiss alle möglichen Formen, die von der Kugelgestalt sehr bedeutend abweichen können, und Wasserpartikelchen können wieder nur in eingeschränktem Maße als leitend gelten. Über Anregung des Herrn Prof. Dr. F. Exner habe ich es nun versucht, die in Rede stehende Formel an der sogenannten »grauen Salbe« oder Quecksilbersalbe (Ung. Hydrargyri), wie sie in allen Apotheken käuflich ist, zu prüfen. Hier scheinen die genannten Voraussetzungen in geradezu bester Weise erfüllt zu sein.

Vor dem Eingehen auf die gewonnenen Resultate sei es mir gestattet, einiges über das bei der Untersuchung verwendete Medium vorauszuschicken.

## I. Das dielektrische Medium.

Die Quecksilbersalbe wurde als dielektrisches Medium verwendet, weil in ihr allen Anforderungen thunlichst entsprochen

[1] C. R. 129 (1899), p. 149.

[2] Wied. Ann. 60, S. 376.

scheint, die man stellen kann, wenn es sich um eine Prüfung der Clausius-Mosotti'schen Formel handelt. Die Kugelgestalt der leitenden Partikel, ihre wenigstens sehr angenähert gleichmäßige Vertheilung, ihre Entfernung voneinander bis zu dem Grade, dass ihre gegenseitige Induction nicht mehr störend wirkt, und endlich die Möglichkeit, das Volumen, das sie im Isolator einnehmen, ziemlich einfach und genau zu bestimmen — das alles trifft hier zu.

Die käuflichen Salben sind, je nachdem sie der Pharmac. VI. oder VII. entsprechend hergestellt werden, nicht ganz gleich. Die Messungen wurden an drei verschiedenen Salben vorgenommen. Die erste, nach der Pharmac. VI. hergestellte — sie soll im folgenden immer mit »Salbe (VI)« bezeichnet werden — besteht aus

| | |
|---|---|
| Hydrargyri | 200 *g* |
| Sebi ovilis | 100 |
| Axungiae porci | 300 |

Eine zweite, entsprechend der Pharm. VII. — Salbe ($VII/_1$) — enthält

| | |
|---|---|
| Hydrargyri | 200 *g* |
| Lanolin | 200 |
| Cerae alb. | 40 |
| Axung. porci | 160 |

Und endlich eine dritte, an Lanolin ärmer und von Cera frei — Salbe ($VII/_2$) — besteht aus

| | |
|---|---|
| Hydrargyri | 200 *g* |
| Lanolin | 100 |
| Sebi | 100 |
| Axung. porci | 200 |

Da es vor allem auf die Menge des in der Salbe enthaltenen Quecksilbers ankam, musste es von Interesse sein, den Quecksilbergehalt zu variieren. Ein mechanisches Verreiben von Salbe mit reinem Fette hätte dies wohl erreichen lassen, brachte aber gleichzeitig eine solche Menge von Luftblasen in die Substanz hinein, dass davon abgesehen werden musste. Dafür aber ließ sich die Sache leicht und verhältnismäßig sicher auf einem anderen Wege machen. Das zu Salbe ($VII/_2$)

gehörige reine Fett wurde geschmolzen und dann in dem Momente, da das Erstarren an den Wänden des Becherglases wieder begann, ein Quantum der vorhandenen Salbe eingetragen, das Ganze mit einem Glasstabe gut verrührt, und indem gleichzeitig die Salbe schmolz und das Fett erstarrte, eine annähernd gleiche Vertheilung der Quecksilberkügelchen hergestellt. Auf diese Weise habe ich die Salbe $(VII/_2)A$ und die an Quecksilber schon sehr arme Salbe $(VII/_2)B$ erhalten, die beide, so weit aus dem Aussehen, aus der Bestimmung des specifischen Gewichtes, der Dielektricitätsconstante an verschiedenen Partien geschlossen werden kann, ziemlich homogen waren. Auch aus Salbe (VI) wurde auf gleiche Weise eine Salbe $(VI)A$ hergestellt. Diese aber war in Bezug auf Homogenität viel weniger befriedigend, und alle auf sie bezüglichen Daten sollen im folgenden nur der Vollständigkeit halber angeführt sein, wollen aber wenig Anspruch auf Genauigkeit und Verlässlichkeit erheben.

Das Volumen des Quecksilbers, das in der Salbe enthalten ist, lässt sich natürlich leicht aus seinem Gewichte bestimmen. Eine gewogene Menge Salbe wurde zu diesem Zwecke mit einer Lösung von Kalilauge in Alkohol versetzt (auf 3 *g* Salbe ungefähr 50 $cm^3$ Lösung) und das Ganze über dem Wasserbade erwärmt. Aus der sich bildenden Seifenlösung schied sich das metallische Quecksilber sehr leicht aus. Nach zweimaligem Waschen mit Alkohol und Ausschütteln mit Äther konnte der reine Quecksilberrückstand getrocknet und gewogen werden. Bezeichnet $v$ das Verhältnis zwischen dem Volumen der Salbe und dem in ihr eingeschlossenen Quecksilbervolumen, so ist

$$v = \frac{S}{sp},$$

wenn $S$ das specifische Gewicht der Salbe und $s$ das des Quecksilbers bedeutet, und

$$p = \frac{Q}{q}$$

das Verhältnis des Salbengewichtes zum Quecksilbergewichte ist. Für das specifische Gewicht des Quecksilbers $s$ wurde 13·5513 eingesetzt.

Die nachstehende Tabelle I enthält die Werte für die Größe *S*, *p* und *v*. Dieselben sind Mittel aus je zwei vorgenommenen Bestimmungen, die in allen Fällen nahe aneinanderliegende Werte gaben. Nur bei Salbe (VI)*A* differierten die Verhältniszahlen *p* bedeutend, und gerade darum scheint der Zweifel an der Homogenität der ganzen Substanz ein begründeter.

Tabelle I.

| | $S$ | $p$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| Salbe (VI) .............. | 1·3605 | 2·9865 | 0·03407 |
| » ($VII/_1$) ............ | 1·4028 | 3·0902 | 0·03550 |
| » ($VII/_2$) ............ | 1·3528 | 3·0927 | 0·03228 |
| » ($VII/_2$)*A* ........... | 1·0368 | 7·8920 | 0·00969 |
| » ($VII/_2$)*B* .......... | 0·9399 | 35·0545 | 0·00198 |
| » (VI)*A* ............ | 0·9383 | 28·082 | 0·00247 |

Wenn nach Poisson[1] die gegenseitige Induction der leitenden Partikeln vernachlässigt werden darf, sobald ihr Volumen nicht über $^1/_4$ des scheinbaren Körpervolumens beträgt, weil dann die inneren Kräfte bereits unter $^1/_{11}$ der äußeren herabsinken, so wird hier diese Vernachlässigung umsomehr gestattet sein, da die größten Werte von *v* ungefähr bei $^1/_{30}$ liegen. Doch mag es immerhin einiges Interesse bieten, die Größe der Quecksilberkügelchen und ihre Entfernung voneinander im Durchschnitte zu kennen. Unter dem Mikroskope ließ sich der Durchmesser der Kügelchen leicht bestimmen. Dass er ziemlich stark variiert, wird nicht überraschen. Der Durchmesser der größten Kügelchen war ungefähr das Doppelte von dem der kleinsten. Die in Tabelle II angegebenen Werte für den Radius *r* sind Mittel aus je 20 Messungen. — Aus dem nun bekannten Radius und dem früher bestimmten Volumen *v* lässt sich aber leicht die Distanz der Mittelpunkte finden.

[1] F. Joubert-Mascart, Elektr., S. 146 f.

Ist $n$ die Anzahl der Kügelchen in der Volumeinheit und $a$ der Abstand ihrer Mittelpunkte, so hat man

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}, \qquad v = \frac{4r^3\pi}{3}n;$$

und wenn $\pi$ gegen 3 als annähernd gleich weggelassen wird:

$$a = 2r\sqrt[3]{\frac{1}{2v}}.$$

Tabelle II.

| | $r$ in Millimeter | $a$ in Millimeter | $a$ in Radien |
|---|---|---|---|
| Salbe (VI) | 0·00173 | 0·00847 | 4·9 $r$ |
| » ($VII/_1$) | 0·00151 | 0·00729 | 4·8 $r$ |
| » ($VII/_2$) | 0·00148 | 0·00797 | 5·4 $r$ |
| » ($VII/_2$) $A$ | 0·00148 | 0·01092 | 7·4 $r$ |
| » ($VII/_2$) $B$ | 0·00148 | 0·01874 | 12·7 $r$ |
| » (VI) $A$ | 0·00173 | 0·01963 | 11·3 $r$ |

## II. Bestimmung der Dielektricitätsconstanten.

Der Nernst'sche Apparat, der zu den Messungen verwendet wurde, ist zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante von Flüssigkeiten construiert worden; hier wurde der Trog mit der Salbe und dem Fette gefüllt. Die Exactheit und Einfachheit der Messung sprach eben dafür. Freilich darf dabei nicht ganz übersehen werden, dass eines mit Schwierigkeiten verbunden sein konnte: die vollständig genaue und homogene Erfüllung des Zwischenraumes zwischen Platte und Boden des Troges mit dem zu untersuchenden Medium. Die Gefahr war immer da, dass größere oder kleinere Luftblasen an den beiden erwähnten Flächen, aber auch im Inneren des Mediums zurückbleiben konnten. Die Dielektricitätsconstante wäre in einem solchen

Falle entschieden zu klein bestimmt worden. Allerdings hätte beim Fette ein Einschmelzen und nachheriges Abkühlen vielleicht dem Übelstande abgeholfen. Sollte aber das schließliche Resultat nicht an Genauigkeit einbüßen, dann war offenbar eine möglichst gleiche Behandlung des Fettes und der Salbe gefordert. Bei der letzteren musste aber vom Einschmelzen in den Trog entschieden abgesehen werden, weil dabei ein Ausfallen des metallischen Quecksilbers zu erwarten war, was aber die Capacität des Trogcondensators bedeutend vergrößert hätte. Thatsächlich wurde auch bei Salbe (VII/$_2$), bei der sonst alle Messungen auf das Mittel 32·9 hinwiesen, bei einer Füllung, bei der der Trog probeweise vorher stärker erwärmt worden war und infolgedessen die eingeführte Salbe an den Wänden zu schmelzen angefangen hatte, auf einmal 34·0 abgelesen. Ein gleicher Sprung zeigte sich bei der Salbe (VI). Der Ausschlag stieg vom Durchschnittswerte 32·3 bei stärkerer Erwärmung auf 33·62. Die bloße Erhöhung der Temperatur konnte an dem Unterschiede nicht schuld sein, weil die Ablesungen erst nach erfolgter Abkühlung auf 21° vorgenommen wurden.

Ein Drücken oder schwaches Durchkneten der Salbe vor der Füllung, ein Halten des Troges in der Hand und damit ein ganz mäßiges Erwärmen reichte übrigens hin, die Salbe so weich und bildsam zu machen, dass sie sich ganz leicht der Form des Troges anpasste, sich sehr leicht — auch bei geringem Drucke schon — gleichmäßig nach allen Seiten vertheilte. Vorsichtshalber habe ich die Masse am Boden des Troges und an der Unterseite der eingesenkten Platte immer conisch aufgetragen (Fig. 1).

Die aufgetragene Quantität musste so groß sein, dass beim Herabsenken der Platte die Salbe an der Seite ungefähr bis zur Hälfte der Trogwand emporstieg. So konnte ich mit einiger Sicherheit darauf rechnen, dass eine exacte Füllung erreicht würde. Volle Garantie war freilich nicht geboten und es zeigten sich wiederholt bei einer Füllung Ausschläge, die bedeutend unterhalb der gewöhnlichen Mittel lagen. So gab beispielsweise eine Füllung mit Salbe (VI) in ziemlichem Einklange mit den übrigen Werten eine Verschiebung von 32·51 *mm* und die

unmittelbar darauffolgende 31·64 *mm*; ebenso bei Salbe $(VII/_2) A$ die eine Füllung 29·79, die nächste 28·95 *mm*; beim Fette die eine 29·04, die darauffolgende 28·29 *mm*.

Solche auffallend niedrige Werte, die immer Luftblasen im Medium vermuthen ließen, wurden in das Resultat natürlich gar nicht einbezogen. Hier, in der etwas erschwerten Füllung des Troges, mag vielleicht auch der Grund zu suchen sein, wenn die später angeführten Messungen in den einzelnen Mittelwerten Differenzen bis 0·6 *mm* aufweisen.

Schließlich noch einige Worte über die Temperatur, bei der die Messungen vorgenommen wurden. Beobachtungen bei

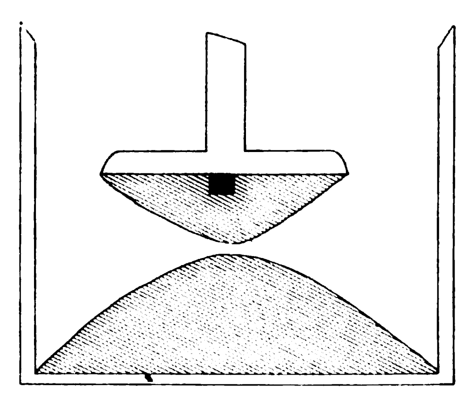


Fig. 1.

verschiedenen Temperaturen auf ein und dieselbe Temperatur zu reducieren, hätte seine Schwierigkeiten gehabt, wie sich bei einem Versuche, den Temperaturcoefficienten für die Dielektricitätsconstante der Salbe zu bestimmen, sofort zeigte. Mit der Abnahme der Temperatur müsste folgerichtig nach der Clausius-Mosotti'schen Formel die Dielektricitätsconstante im allgemeinen steigen, der Temperaturcoefficient also negativ sein. Abbeggs[1] Bestimmungen stehen damit im Einklange. Drude[2] gibt ebenfalls eine Reihe negativer Temperaturcoefficienten für Flüssigkeiten. Aber auch das Gegentheil wurde beobachtet, unter anderen von Hasenöhrl,[3] der für Glas und Ebonit

---

1 Wied. Ann., 60, S. 54.

2 Wied. Ann., 58, S. 17.

3 Diese Sitzungsber., 106 (1879), S. 69.

positive Temperaturcoefficienten fand. Und die Messungen, die ich diesbezüglich zur Orientierung anstellte, zeigten auch ein Steigen der Dielektricitätsconstante mit steigender Temperatur. So gab eine Füllung des Troges mit Salbe (VII/$_2$) folgende Verschiebungen am Messcondensator:

Bei +1° C.:

31·47
31·40
31·13

Mittel... 31·33;

bei +24° C.:

33·38
33·38
33·35

Mittel... 33·37.

Das zu Salbe (VII/$_2$) gehörige reine Fett gab in ähnlicher Weise bei ein und derselben Füllung

bei 5° C. im Mittel....... 28·41,
» 28 » » ....... 30·46.

Ob hier thatsächlich, wie es den Anschein hat, der Temperaturcoefficient positiv ist, wie weit ferner etwa der Ausdehnungscoefficient des Troges, irgendwelche Änderungen im Medium selbst ins Spiel kommen, ist wohl auf diese wenigen Probemessungen hin nicht zu entscheiden.

Um nun diesen Schwierigkeiten zu entgehen und wenigstens bedeutendere Fehler infolge eines Temperaturunterschiedes zu vermeiden, wurde darauf gesehen, dass bei allen Messungen die Temperatur womöglich bei 22° C., jedenfalls nicht außerhalb der Grenzen 20·5° und 23° stand.

Unter Beobachtung all der genannten Vorsichtsmaßregeln war gewiss nicht nur die Möglichkeit, sondern auch die Wahrscheinlichkeit vorhanden, jene Genauigkeit in der Bestimmung der Dielektricitätsconstanten zu erreichen, die für die vorliegende Untersuchung wünschenswert war.

Im folgenden sind nun die Resultate der Messungen gegeben. Für jede Salbe und jedes Fett wurden eine Reihe von Füllungen vorgenommen (in der Regel 8 bis 10), mit jeder derselben 5 bis 10 Ablesungen des Minimums beim An- und Ausschalten des Troges gemacht und immer das Mittel genommen. Diese Mittel — soweit sie nicht nach dem früher Gesagten eliminiert werden mussten — sind eben die nachstehenden Zahlen.

1. Salbe (VI):

32·51
32·33
32·27
32·34
31·97
32·06

Mittel... 32·25 ±0·05.

Daraus rechnet sich die Dielektricitätsconstante nach der Nernst'schen Formel

$$k = 3\cdot334 \pm 0\cdot006.$$

2. Salbe ($VII/_1$):

33·92
34·25
33·86
34·20
34·31
34·30

Mittel... 34·14 ±0·06.

$$k = 3\cdot542 \pm 0\cdot007.$$

Diese Salbe zeigt unter allen die größte Dielektricitätsconstante, obwohl der Quecksilbergehalt auch nicht größer ist, als in der vorhergehenden und in der folgenden. Ebenso weist das ihr zugehörige Fett höhere Werte auf, als die übrigen; es liegt darum die Vermuthung nahe, dass hier die Beimengung von Cera alba die Erhöhung der Werte bedingt.

3. Salbe ($VII/_2$):

32·75
33·0
33·07
32·55
32·98
33·15
32·65

Mittel... 32·88 ±0·18.

$k = 3·404 \pm 0·020.$

Hier liegen die Werte aus den einzelnen Messungsreihen ziemlich weit auseinander, und der wahrscheinliche Fehler wird auffallend groß (ungefähr das Dreifache der früheren); doch gibt der erhaltene Mittelwert, wie sich später zeigt, in der Rechnung ein befriedigendes Resultat.

4. Salbe ($VII/_2$)$A$:

30·75
30·85
30·9
30·58
30·95

Mittel... 30·81 ±0·04.

$k = 3·176 \pm 0·004.$

5. Salbe ($VII/_2$)$B$:

29 95
30·19
30·16
30·02
30·23
30·10

Mittel... 30·11 ±0·03.

$k = 3·100 \pm 0·003.$

6. Salbe (VI)*A*:

29·79
30·02
30·08
30·05

Mittel... 29·97 ±0·04.

$k = 3·084 \pm 0·004$.

Neben den Salben wurden zunächst die ihnen zugehörigen reinen Fette der Messung unterzogen, wie sie möglichst genau nach den früher angegebenen drei Recepten — unter Weglassung des Hydrargyr. — hergestellt worden waren. Sie sollen im folgenden durch dieselben Indices unterschieden werden, wie die entsprechenden Salben.

*a)* Fett (VI):

28·63
28·93
29·04
29·01
28·77
29·04
29·04

Mittel... 28·92 ±0·04,

$k = 2·970 \pm 0·004$.

*b)* Fett ($VII/_1$):

32·65
32·80
32·9
33·05
33·14
32·97

Mittel... 32·92 ±0·06.

$k = 3·408 \pm 0·006$.

Die hohe Dielektricitätsconstante dieses Fettes im Vergleiche zu den beiden anderen muss etwas überraschen. Schon

bei den Messungen zeigte der Apparat eine Leitfähigkeit, wie sie sonst nicht zu bemerken war. Vermuthlich liegt der Grund außer dem schon erwähnten Zusatz von Wachs hier gerade in einer größeren Menge vorhandener freier Fettsäure.

*c)* Fett ($VII/_2$):

29·43
29·50
29·60
29·40
29·65
29·41
29·63

Mittel... 29·52 ± 0·03.

$$k = 3 \cdot 035 \pm 0 \cdot 003.$$

Der Versuch, aus diesen Werten der Dielektricitätsconstanten für die Salben und die ihnen zugehörigen Fette die Größe $\frac{k}{k'}$ zu rechnen und damit $\frac{1+2v}{1-v}$ nach den Werten der Tabelle I zu vergleichen, konnte gar nicht befriedigen. Bei Salbe (VI)*A* zeigte sich eine Differenz von ungefähr 3%, bei Salbe ($VII/_1$) eine solche von nahezu 7%; bei den übrigen vier Salben lag der Fehler immer zwischen 1·5% und 2%. Bei Salbe (VI)*A* mochte die Homogenität nicht genügend sein, bei Salbe ($VII/_1$) mochte das reine Fett infolge größerer Mengen freier Fettsäure nicht ganz einwandfrei sein — es blieb trotzdem noch der bei den übrigen Salben auftretende Fehler zu erklären, und der war nahezu constant.

Das feste und consistente Aussehen der Salbe und daneben das Weiche und Poröse des Fettes hätte zunächst den Gedanken nahegelegt, dass möglicherweise durch das lange und energische mechanische Verreiben des Fettes, wie es zum »Abtödten« des Quecksilbers ja nothwendig ist, auch in der Constitution desselben eine kleine Änderung herbeigeführt habe. Doch konnte dieselbe kaum so groß sein, um den angeführten Fehler zu erklären. Viel bedeutender musste dagegen die Bildung von fettsaurem Quecksilber ins Gewicht fallen. Freie Fettsäure enthielt jedes der hergestellten Fette; auch nach Ausschütteln des

frisch bereiteten Fettes in Alkohol war schon eine saure Reagenz des letzteren zu constatieren. Und die Verbindung der Säure mit dem so fein vertheilten metallischen Quecksilber war jedenfalls um so weiter vorgeschritten, je älter die Salbe geworden war.

Entsprachen diese Annahmen der Wirklichkeit, dann lag das in der Salbe enthaltene und aus ihr ausgeschiedene metallische Quecksilber eigentlich nicht in reinem Fette, sondern in Fett+fettsaurem Quecksilber eingebettet, und folgerichtig musste dann bei Berechnung des $\frac{k}{k'}$ im Nenner die Dielektricitätsconstante dieser Verbindung eingeführt werden. Um dieselbe mit wünschenswerter Genauigkeit zu erhalten, gab es aber anscheinend nur einen Weg: die Salbe über dem Wasserbade so lange zu erwärmen, bis das metallische Quecksilber vollständig zu Boden gesunken war und dann das abgegossene Fett nach dem Erstarren der Messung zu unterziehen. Bei jeder der drei ursprünglich gegebenen Salben (VI), ($VII/_1$) und ($VII/_2$) wurde das denn auch durchgeführt. Die so erhaltenen Verschiebungen an der Scala des Messcondensators und die dazugehörigen Dielektricitätsconstanten sind folgende:

α. Fett (VI):

29·60
29·40
29·47
29·49
29·51

Mittel... 29·49 ± 0·02.

$k = 3·031 \pm 0·002.$

Nur der Vollständigkeit halber will ich erwähnen, dass ich bei dem zuerst aus Salbe (VI) auf die angegebene Weise erhaltenen Fett einen Ausschlag von 30·249 im Mittel fand. Das daraus gerechnete $k = 3·11475$, verglichen mit dem der Salbe, ließ wegen seiner Größe schon einen Fehler vermuthen. Eine Probelösung einer größeren Quantität dieses Fettes in Äther zeigte thatsächlich noch Spuren von metallischem Quecksilber.

Erst nach mehrmals wiederholtem stundenlangen Erwärmen war das Quecksilber vollständig aus der Salbe ausgefallen.

β. Fett (VII/$_1$):

30·65
30·52
30·8
31·0

Mittel... 30·74 ±0·07.

$k = 3\cdot169 \pm 0\cdot008.$

γ. Fett (VII/$_2$):

30·02
29·97
29·8
30·06
29·90

Mittel... 29·95 ±0·03.

$k = 3\cdot082 \pm 0\cdot003.$

Consequent wäre es noch gewesen, auch aus den Salben (VI)*A*, (VII/$_2$)*A* und (VII/$_2$)*B* das Fett sammt dem darin enthaltenen fettsauren Quecksilber einer Messung zu unterziehen. Doch darf diesbezüglich gewiss Folgendes gelten: Enthielt das reine Fett, das hier der ursprünglichen Salbe zugesetzt wurde, annähernd wenigstens die gleiche Menge freier Säure — was der Wirklichkeit denn doch entsprechen dürfte — wie das zur Bereitung der Salbe ursprünglich verwendete Fett, dann trat die Bildung von fettsaurem Quecksilber in der neuen Salbe wohl ebenso wieder ein und das noch bleibende reine Quecksilber war dann von einem Dielektricum umgeben, das wieder die gleiche Beschaffenheit hatte, wie in der ursprünglichen Salbe.

Der bequemeren Übersicht wegen stelle ich in der folgenden Tabelle III die letzterhaltenen Dielektricitätsconstanten der Fette unter $k'$, die der Salben unter $k$ zusammen und füge den Quecksilbergehalt der letzteren dem Volumen nach und nebstbei auch in Procenten des Gewichtes bei.

Tabelle III.

| | $k'$ | $k$ | Hg dem Volumen nach | Hg in Procenten des Gew. |
|---|---|---|---|---|
| Salbe (VI).... | 3·031 | 3·334 | 0·03407 | 33·48 |
| » $(VII/_1)$.. | 3·169 | 3·542 | 0·03550 | 32·36 |
| » $(VII/_2)$.. | 3·082 | 3·404 | 0·03228 | 32·33 |
| » $(VII/_2)A$. | 3·082 | 3·176 | 0·00969 | 12·67 |
| » $(VII/_2)B$. | 3·082 | 3·100 | 0·00198 | 2·85 |
| » $(VI)A$... | 3·031 | 3·084 | 0·00247 | 3·56 |

V. Boccara und A. Gandolfi[1] haben bei ihren Untersuchungen über die Geschwindigkeit der Hertz'schen Wellen

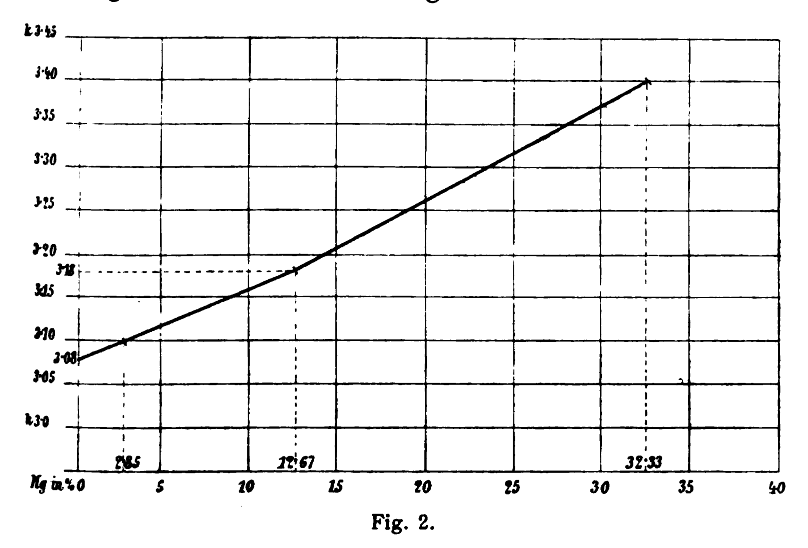



Fig. 2.

im dielektrisch-magnetischen Medium eine Mischung von Paraffin und Eisenfeilspänen hergestellt und dabei mit steigendem Procentgehalte an Eisen auch eine annähernd lineare

[1] Nuovo Cim. VIII (1898), p. 191 f.

Steigung der Dielektricitätsconstante gefunden. Auch hier kann die allerdings kleine Reihe des Fettes ($VII/_2$), der Salben ($VII/_2$), ($VII/_2$)$A$ und ($VII/_2$)$B$ dieselbe Erscheinung verificieren.

Als Abscissen sind hier die Zahlen genommen, die den Procentgehalt an metallischem Quecksilber geben: 2·85, 12·67 und 32·33. Nimmt man als Ordinaten die zugehörigen Werte der Dielektricitätsconstanten: 3·08, 3·10, 3·18, 3·40, so liegen die damit erhaltenen vier Punkte wohl nicht ganz genau in einer Geraden, aber die Biegung der Curve gegen die Abscissenaxe, die sich bei Salbe ($VII/_2$)$A$ zeigt, ist ganz unbedeutend.

### III. Die Clausius-Mosotti'sche Formel.

Sind $k$ und $k'$ die Dielektricitätsconstanten der Salbe und des Fettes, das ihr zugehört, so gibt die etwas allgemeinere Formel, wie sie von Mascart-Joubert[1] aufgestellt wird, für den vorliegenden Fall, in dem das $k$ des Quecksilbers $= \infty$ zu setzen ist, den geläufigen und wiederholt benützten Ausdruck

$$\frac{k}{k'} = \frac{1+2v}{1-v},$$

oder auch

$$v = \frac{k-k'}{k+2k'}.$$

Diese beiden Formeln sind natürlich vollständig identisch für den Physiker, der rechnet; sie sind es aber nicht mehr so ganz für den Physiker, der misst. Ihn wird die Versuchsanordnung, nach der er $k$, $k'$ und $v$ bestimmt hat, ihn wird vor allem das Medium, mit dem er es zu thun hat, drängen, die eine von beiden der anderen weit vorzuziehen. Wären unsere Messungen vollständig exact, dann müssten freilich — die Giltigkeit der Formel vorausgesetzt — die drei gemessenen Größen $k$, $k'$ und $v$ in dem ersten Falle eine ebenso genaue Übereinstimmung zwischen rechter und linker Seite der Gleichung geben, wie im zweiten Falle. Aber eine vollkommene Exactheit erreichen wir eben nie. Und gilt es dann, aus einem mangelhaften Datum ein anderes zu finden, dann dürfen wir offenbar jenen Weg nicht

[1] Elektr. und Magn., I, S. 146.

einschlagen, auf dem uns, sozusagen, von Schritt zu Schritt der Fehler unter der Hand wächst; im Gegentheile, wir werden, wo immer es möglich ist, einen anderen suchen, der den Fehler eher herabdrückt bis zur völligen Bedeutungslosigkeit.

Gerade in unserer Formel scheint das einige Beachtung zu verdienen. Ist nämlich

$$\frac{k}{k'} = \frac{1+2v}{1-v},$$

dann ist auch

$$\frac{d\left(\frac{k}{k'}\right)}{\frac{k}{k'}} = \frac{dv}{v} \cdot \frac{3v}{(1+2v)(1-v)}. \qquad \ldots 1)$$

Und ähnlich hat man auch für

$$v = \frac{k-k'}{k+2k'}:$$

$$\frac{dv}{v} = \left(\frac{dk}{k} - \frac{dk'}{k'}\right) \cdot \frac{3kk'}{(k-k')(k+2k')}. \qquad \ldots 2)$$

Je größer nun $v$ ist, d. h. je mehr es sich der Einheit nähert, desto mehr kommt in 1) der Ausdruck $\frac{3v}{1+2v}$ der Einheit nahe, desto größer wird aber gleichzeitig der Wert von $\frac{1}{1-v}$. Würde also in diesem Falle aus dem irgendwie gemessenen $v$ der Wert des $\frac{k}{k'}$ ermittelt, dann müsste schon ein geringer Fehler in der Bestimmung des $v$ eine ganz bedeutende Abweichung des gerechneten $\frac{k}{k'}$ von dem wirklichen zur Folge haben. Dasselbe gilt natürlich für die Dielektricitätsconstante eines beliebigen Nichtleiters, bezogen auf Luft, also für $k'$ nahe $= 1$. Angenommen, es gelänge uns auf irgend eine Weise einmal, das Volumen seiner leitenden Partikel ohne Zuhilfenahme des $k$ zu ermitteln, die Formel

$$k = \frac{1+2v}{1-v}$$

würde wahrscheinlich für Körper mit hohem $v$ ganz überraschend falsche Werte für $k$ errechnen lassen.

Wir haben es nun allerdings in den weitaus meisten Fällen mit kleinen Dielektricitätsconstanten zu thun; es sind Zahlen, die um 2 herum liegen. Für solche Fälle ist $v$ ungefähr $= \frac{1}{4}$ und in 1) der Factor $\frac{3v}{(1+2v)(1-v)}$ bereits kleiner als 1; eine Rechnung der Dielektricitätsconstante aus der gemessenen Raumerfüllung durch die leitenden Partikel würde eventuell ganz zuverlässig sein.

Setzt man aber $v$ als sehr klein voraus, dann wird sich wiederum in 2) der Wert des $k'$ dem des $k$ sehr weit nähern, die Differenz $k-k'$ wird eine sehr kleine Zahl, während $\frac{3kk'}{k+2k'}$ sehr nahe $= k$ wird. Nimmt man dazu noch, dass die Fehler in der Bestimmung von $k$ und $k'$ sich eventuell addieren können, so dass der Klammerausdruck $\left(\frac{dk}{k} - \frac{dk'}{k'}\right)$ einen immerhin bedeutenderen Wert annimmt, dann müssen offenbar anscheinend belanglose Fehler in der Messung der Dielektricitätsconstanten sehr bedeutende Abweichungen in $v$ nach sich ziehen.

Diese Fehlersteigerung in einer Rechnung, die unter Umständen eben sehr bedeutend werden kann, scheint für die Clausius-Mosotti'sche Formel sehr beachtenswert, ja sie ist hier vielleicht sogar imstande, einen oder den anderen Widerspruch gegen die Formel, der sich in der Literatur findet, zu mildern, eventuell sogar zu beheben. Man beachte nur, dass das über Größe und Berechnung von $v$ Gesagte in der entsprechenden Weise auf die Dichte $d$ eines Dielektricums sich ausdehnen lässt.

Linde[1] hat — um auch einen Beleg für das Gesagte anzuführen — zur Prüfung der Clausius-Mosotti'schen Formel die Dampfdichte $d'$ einiger Flüssigkeiten gemessen, ebenso die zugehörige Dielektricitätsconstante $k'$, und aus beiden dann die sogenannte Maximaldichte $D$ berechnet. Ferner bestimmte er

[1] Wied. Ann. 56, S. 567.

bei gewöhnlicher Temperatur (14°) die Dichte der Flüssigkeit $d$ und konnte nun aus $d$ und $D$ probeweise das der Flüssigkeit zukommende $k$ eruieren. Das Resultat war in einer Reihe von Fällen eine negative Dielektricitätsconstante; das ist ein eclatanter Widerspruch zur Wirklichkeit, folglich — könnte die Clausius-Mosotti'sche Formel unmöglich richtig sein.

So wurde für Methylalkohol $d' = 0 \cdot 0010$, $k' = 1 \cdot 0057$ gefunden, daraus $D = 0 \cdot 527$ gerechnet, ferner war $d = 0 \cdot 800$ und schließlich das errechnete $k = -7 \cdot 9$.

Zur Berechnung der Maximaldichte diente natürlich der Ausdruck

$$D = \frac{k'+2}{k'-1} d';$$

daraus ergibt sich aber

$$\frac{dD}{D} = \frac{-3k'}{(k'+2)(k'-1)} \cdot \frac{dk'}{k} - \frac{d(d')}{d'}.$$

Angenommen, $d'$ wäre vollkommen richtig gemessen worden (in der Fehlerrechnung fällt übrigens das letzte Glied $\frac{d(d')}{d'}$ ohnedies am wenigsten ins Gewicht), bei der Bestimmung von $k'$ sei aber insoferne ein Fehler unterlaufen, als es um $3^0/_{00}$ zu groß erhalten wurde. Ohne der Genauigkeit des Beobachters nahetreten zu wollen, halte ich einen derartigen Fehler nicht für ganz ausgeschlossen. Dann würde aber die obige Fehlerrechnung ergeben, dass in $D$ die Abweichung von dem Werte $176 \cdot 4$mal größer ist als in $k'$ und in entgegengesetzter Richtung geht, d. h. $D$ wäre um $52 \cdot 9^0/_0$ zu klein. Nach einer derartigen Correctur ist nun — ein vollständig sicheres $d$ wieder vorausgesetzt — das berechnete $k$ für die Flüssigkeit allerdings noch sehr unwahrscheinlich groß, aber das peinlich Überraschende einer negativen Dielektricitätsconstante ist verschwunden.

Für Äthylformiat findet Linde bei einer Temperatur von 14° eine Dichte $d = 0 \cdot 916$, die wiederum als sicher gelten mag, und dazu aus der Rechnung eine Dielektricitätsconstante $k = -58 \cdot 7$; die Werte für den gasförmigen Zustand sind $d' = 0 \cdot 0024$, $k' = 1 \cdot 0087$, und daraus rechnet sich die

Maximaldichte $D = 0{\cdot}870$, die auch hier, wie im früheren Falle, so unerklärlich kleiner ist als $d$. Diesmal braucht es aber gar nur die Annahme, dass in $k'$ ein Fehler von 1‰ gemacht wurde, um die Maximaldichte $D$ wirklich größer als $d$ und damit auch $k$ für den flüssigen Zustand positiv zu erhalten.

Franke[1] findet die Clausius-Mosotti'sche Formel »nur innerhalb weniger Grade als empirische Formel« verwendbar und stellt damit indirect ihre allgemeine Giltigkeit in Abrede. Aber auch er hat aus dem $k$ das $d$ berechnet.

Umgekehrt führte eine Berechnung der Dielektricitätsconstante aus dem Volumen der leitenden Partikel oder aus der Dichte meist zu einer Bestätigung der Formel, so bei Beaulard,[2] Lebedew,[3] Millikan,[4] Hasenöhrl[5] u. a.

Nach all dem Gesagten ist in unserem Falle der Weg bereits vorgezeichnet, auf dem aus den Resultaten der vorliegenden Untersuchung eine Prüfung der Clausius-Mosottischen Formel möglich ist. Das $v$ ist in allen Fällen sehr klein; verlässlich wird es also nur sein, aus dem gefundenen Volumen $v$ den Wert für $\frac{k}{k'}$ zu rechnen und denselben mit dem zugehörigen Quotienten der gemessenen Dielektricitätsconstanten zu vergleichen.

Die nachstehende Tabelle IV gibt die beiden Werte nebeneinander, ferner die Differenz derselben und angenähert auch den Fehler in Procenten.

Im allgemeinen darf hier die Übereinstimmung zwischen den beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{k}{k'} = \frac{1+2v}{1-v}$$

als eine gute bezeichnet werden. Allerdings erreicht der Fehler bei Salbe (VI)$A$ die Höhe von 1%; aber es darf auch daran erinnert werden, dass gerade sie von Anfang an als nicht ganz

[1] Wied. Ann. 50, S. 163.

[2] C. R. 129, p. 149.

[3] Wied. Ann. 44, S. 288.

[4] Wied. Ann. 60, S. 376.

[5] Diese Sitzungsber., 106 (1897), S. 69.

verlässlich bezeichnet worden ist. Bei den übrigen steigt der Fehler höchstens bis zu 0·7% und er ist besonders klein bei den drei Arten der Salbe ($VII/_2$).

Tabelle IV.

| | $\frac{1+2v}{1-v}$ | $\frac{k}{k'}$ | Differenz $\frac{k}{k'}-\frac{1+2v}{1-v}$ | Fehler in Procenten |
|---|---|---|---|---|
| Salbe (VI).... | 1·1058 | 1·1000 | —0·0058 | 0·5 |
| » ($VII/_1$).. | 1·1104 | 1·1178 | +0·0074 | 0·7 |
| » ($VII/_2$).. | 1·1003 | 1·1044 | +0·0041 | 0·4 |
| » ($VII/_2$)*A*. | 1·0294 | 1·0307 | +0·0013 | 0·1 |
| » ($VII/_2$)*B*. | 1·0060 | 1·0057 | —0·0003 | 0·03 |
| » (VI)*A*.. | 1·0074 | 1·0174 | +0·0100 | 1·00 |

Dürfen wir aber nach all dem Vorhergehenden einmal von der Giltigkeit der Clausius-Mosotti'schen Formel überzeugt sein, dann lässt sich vielleicht auch von hier aus eine Bestätigung für die Maxwell'sche Relation zwischen der Dielektricitätsconstante und dem Quadrate des Brechungsexponenten eines und desselben nicht magnetischen Körpers finden. Sind nämlich die Zahlenwerte für beide Größen wirklich identisch, dann müsste auch $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ das Volumen der leitenden Partikel im Isolator geben. Und wollten wir statt der leitenden Partikel im Isolator die Quantität eines gelösten Körpers in seinem Lösungsmittel setzen, dann erhielten wir durch die Clausius-Mosotti'sche Formel eine Relation zwischen dem Brechungsexponenten und der Concentration der Lösung. Bei einer derartigen Übertragung der Formel bleiben wir uns wohl bewusst, dass sie nicht ganz einwandfrei sein mag, besonders dann, wenn die Lösung elektrolytisch und die Concentration eine hohe ist; aber ein Versuch, die aufgestellte Relation an gegebenen Messungen zu verfolgen, darf immerhin als berechtigt gelten.

Bestimmungen von Brechungsexponenten für verschiedene Concentrationen ein und derselben Lösung liegen meist nur von wässerigen Lösungen vor. Messungen, bei denen es sich um ausgesprochen nicht leitende Flüssigkeiten handelt, sind weitaus seltener. So hat v. Berghoff[1] die Brechungsexponenten für verschiedenprocentige Lösungen von Schwefel und Phosphor in Schwefelkohlenstoff bestimmt, und in letzter Zeit M. Rudolphi[2] solche für Lösungen von Chloralhydrat in Toluol veröffentlicht. Aber gerade die Daten des letzterwähnten Beobachters zeigen auffallenderweise von reinem Toluol bis zu einer 10procentigen Lösung von Chloralhydrat ein Fallen des Brechungsexponenten mit der Zunahme der Concentration und erst von 10% aufwärts ein Steigen desselben.

Im folgenden sollen nur Benders[3] Bestimmungen der Brechungsexponenten für wässerige Salzlösungen verschiedener Concentrationen verwertet werden; sie sind wohl mit jener Genauigkeit ausgeführt, die für die beabsichtigte Rechnung wünschenswert erscheint.

Zunächst seien die von Bender gegebenen Zahlen angeführt; $\mu$ bedeutet dabei die Anzahl der Gramm-Moleküle in 1000 $cm^3$ Wasser, $n$ den Brechungsexponenten. Die Temperatur war für alle hier angeführten Messungen ungefähr 20° C.

1. Jodkalium-Lösung (für die Linie $H\gamma$):

| | |
|---|---|
| $\mu = 0$ | $n = 1 \cdot 34021$ |
| $\mu = 1$ | $n = 1 \cdot 36304$ |
| $\mu = 2$ | $n = 1 \cdot 38570$ |
| $\mu = 3$ | $n = 1 \cdot 40744$ |
| $\mu = 4$ | $n = 1 \cdot 42931$ |
| $\mu = 5$ | $n = 1 \cdot 45079$ |

2. Chlorkalium-Lösung (für die Linie $H\gamma$; bei 15° C.):

| | |
|---|---|
| $\mu = 0$ | $n = 1 \cdot 34037$ |
| $\mu = 0 \cdot 5$ | $n = 1 \cdot 34539$ |
| $\mu = 1$ | $n = 1 \cdot 35039$ |
| $\mu = 2$ | $n = 1 \cdot 35974$ |
| $\mu = 3$ | $n = 1 \cdot 36858$ |

[1] Zeitschr. f. phys. Chemie, 15, S. 431.

[2] »Molecularrefraction fester Körper« (Ravensburg 1901), S. 12 f.

[3] Wied. Ann., 39, S. 90 und 69, S. 876.

3. Chlorkalium-Lösung (für die Na-Linie; bei 20° C.):

$\mu = 0 \quad n = 1 \cdot 33297$
$\mu = 1 \quad n = 1 \cdot 34281$
$\mu = 2 \quad n = 1 \cdot 35193$
$\mu = 2 \cdot 5 \quad n = 1 \cdot 35581$
$\mu = 3 \quad n = 1 \cdot 36000$
$\mu = 3 \cdot 5 \quad n = 1 \cdot 36339$

4. Chlornatrium-Lösung (für die Na-Linie):

$\mu = 0 \quad n = 1 \cdot 33297$
$\mu = 0 \cdot 5 \quad n = 1 \cdot 33776$
$\mu = 1 \quad n = 1 \cdot 34270$
$\mu = 2 \quad n = 1 \cdot 35219$
$\mu = 3 \quad n = 1 \cdot 36100$
$\mu = 4 \quad n = 1 \cdot 36916$
$\mu = 4 \cdot 5 \quad n = 1 \cdot 37329$

Vor allem sei daran erinnert, dass die Dielektricitätsconstante mit wachsendem Volumen der leitenden Partikel im Isolator auch linear anstieg. Ebenso erhält man hier sehr angenähert eine Gerade (Fig. 3), wenn man die Werte für $\mu$ als Abscissen, die zugehörigen Werte für $n^2$ als Ordinaten aufträgt. Als Beispiele mögen die beiden ersten oben angeführten Zahlenreihen dienen. Für die Jodkalium-Lösung hat $n^2$ der Reihe nach folgende Werte:

1·79616
1·85788
1·92016
1·98089
2·04291
2·10490

Für die unter 2) angeführte Chlorkalium-Lösung erhält man aber für $n^2$:

1·79659
1·81007
1·82355
1·84890
1·87302

Von den nachstehenden Curven entspricht die ausgezogene der Jodkalium-, die gestrichelte der Chlorkalium-Lösung.

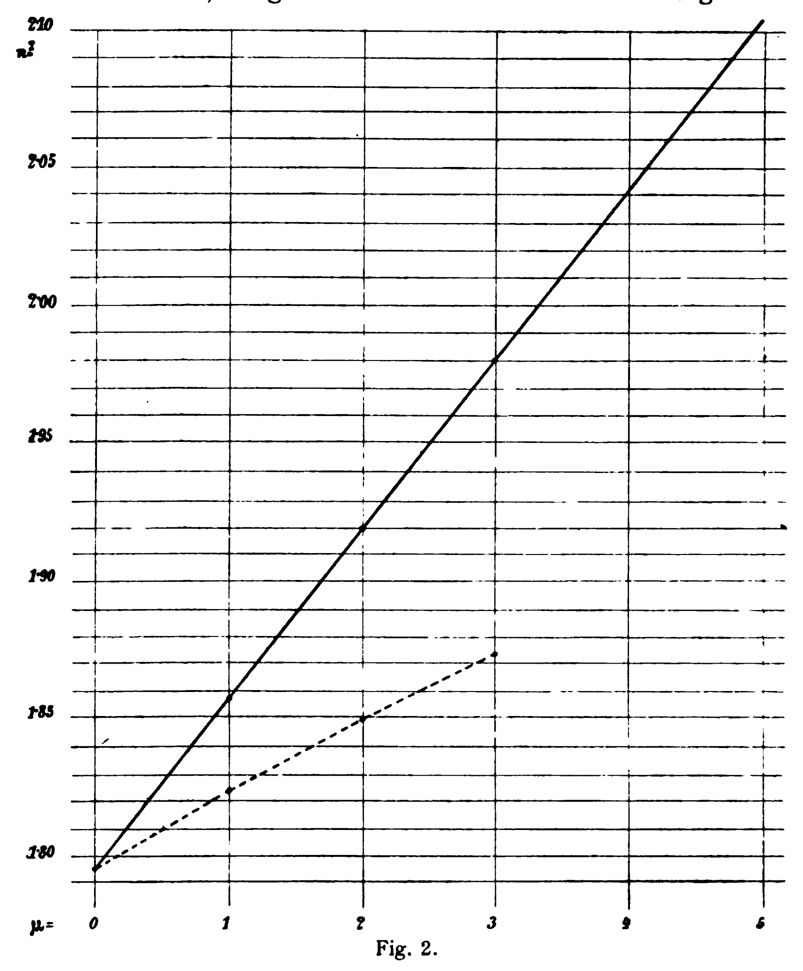



Fig. 2.

Setzen wir für die folgenden Rechnungen

$$a = \frac{\dfrac{n^2}{n_0^2} - 1}{\dfrac{n^2}{n_0^2} + 2}, \qquad \ldots 1)$$

wobei $n$ der Brechungsexponent einer Lösung von der Concentration $c$, $n_0$ der der reinen Flüssigkeit ist, so ist $a$ identisch

mit der früheren Größe $v$. Nun gibt auch die Thatsache, dass das Volumen des in der Flüssigkeit gelösten Körpers der Concentration natürlich proportional ist:

$$\frac{c'}{c} = \frac{v'}{v} = \frac{a'}{a}, \qquad \ldots 2)$$

d. h. es ist das Verhältnis zweier Concentrationen gegeben durch die zugehörigen Brechungsexponenten und den Brechungsexponenten der reinen Flüssigkeit.

Ferner gibt für $v = pc$, wenn $p$ der Proportionalitätsfactor ist, die Clausius-Mosotti'sche Formel

$$\frac{n^2}{n_0^2} = \frac{1+2pc}{1-pc} = \frac{1+2\frac{a'c}{c'}}{1-\frac{a'c}{c'}}$$

$$= \frac{c'+2a'c}{c'-a'c}$$

$$n^2 = n_0^2 \cdot \frac{c'+2a'c}{c'-a'c}. \qquad \ldots 3)$$

Diese Relation lässt aus dem Brechungsexponenten der reinen Flüssigkeit und dem einer bestimmten Lösung $c'$ dieselbe Größe für eine neue Concentration $c$ errechnen, wenn $c$ und $c'$ in ihrem Verhältnisse wenigstens gegeben sind.

Handelt es sich um die Errechnung specieller Werte und ihre Vergleichung mit den Ergebnissen der Beobachtung, dann wird natürlich der Einfluss etwaiger Beobachtungsfehler berücksichtigt werden müssen.

Aus der Gleichung 1) ergibt sich

$$\frac{da}{a} = \left(\frac{dn}{n} - \frac{dn_0}{n_0}\right) \cdot \frac{6n^2n_0^2}{(n^2-n_0^2)(n^2+2n_0^2)},$$

oder, wenn der ganze Bruch $= A$ gesetzt wird:

$$\frac{da}{a} = A\left(\frac{dn}{n} - \frac{dn_0}{n_0}\right).$$

Fällt nun die Differenz $n^2 - n_0^2$ sehr klein aus, so wird der Factor $A$ ganz bedeutend groß. Beispielsweise erhält man für die Chlorkalium-Lösung unter 2)

für $\mu = 3$ angenähert $A = 8$
» $\mu = 0 \cdot 5$ » $A = 268$.

Wären also in diesem speciellen Falle $n$ und $n_0$ je mit einem Fehler von $0 \cdot 004\%$ behaftet (was ungefähr 5 Einheiten der letzten Decimalstelle entsprechen würde), und zwar so, dass die eine Zahl zu groß, die andere zu klein bestimmt worden wäre, dann könnte der Fehler in $a$ bereits $0 \cdot 06\%$, respective $2\%$ erreichen. Nach der Gleichung 2) ist aber

$$\frac{d\left(\frac{c'}{c}\right)}{\frac{c'}{c}} = \frac{da'}{a} - \frac{da}{a},$$

d. h. im gerechneten Concentrationsverhältnisse tritt die algebraische Summe zweier solcher Fehler auf; es könnten also im ungünstigsten Falle der gerechnete Wert und der gegebene um $4\%$ differieren.

Eine ähnliche Überlegung wird für die Berechnung von $n$ gelten dürfen. Nach Gleichung 3) findet man leicht

$$\frac{dn}{n} = \frac{dn_0}{n_0} + \frac{1}{2} \frac{3a'cc'}{(c'+2a'c)(c'-a'c)} \left[\frac{da'}{a'} + \frac{dc}{c} - \frac{dc'}{c'}\right]$$

$$\frac{dn}{n} = \frac{dn_0}{n_0} + \frac{1}{2} B \left[\frac{da'}{a'} + \frac{dc}{c} - \frac{dc'}{c'}\right],$$

wenn der Bruch vor dem Klammerausdruck mit $B$ bezeichnet wird. — Bei der Jodkalium-Lösung wurden im folgenden die übrigen Brechungsexponenten aus denen für $\mu = 0$ und $\mu = 1$ berechnet. Hier war $a' = a_{(1)} = 0 \cdot 01133$.

Nach dem früher Gesagten darf man in dieser Zahl einen Fehler von $1\%$ im Mittel wohl als möglich annehmen; ferner unterliegt die Bestimmung der Concentration gewiss leicht einem Fehler von $0 \cdot 1\%$ bis $0 \cdot 5\%$. Wird aber für $\mu = 1$ und

$\mu = 2$, also in $C_{(1)}$ und $C_{(2)}$ nur $0 \cdot 1\%$ in Anschlag gebracht, so erhält man für $B$

bei $\mu = 2$ ungefähr $0 \cdot 067$
» $\mu = 5$ » $0 \cdot 187$.

Damit würde aber gesagt sein, dass ohne Rücksicht auf $\frac{dn_0}{n_0}$ der berechnete Brechungsexponent von dem gemessenen im ersten Falle um 5 Einheiten der vierten, im zweiten Falle um 1—2 Einheiten der dritten Decimalstelle abweichen kann.

Die nachstehenden Tabellen V bis VIII geben nun eine Zusammenstellung einiger nach Gleichung 3) gerechneter Brechungsexponenten unter $\nu$ mit den zugehörigen gemessenen Werten unter $n$; beigefügt ist die Differenz $\nu—n$ und angenähert die Abweichung in Procenten. Ausgegangen wurde bei den drei ersten Lösungen (Jodkalium und Chlorkalium) von der niedrigsten Concentration und die Brechungsexponenten für höhere Concentrationen gerechnet, bei der letzten Lösung (Chlornatrium) aber der umgekehrte Weg eingeschlagen.

Tabelle V (Jodkalium-Lösung).

| $\mu$ | $n$ | $\nu$ | $\nu—n$ | Procent |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1·38570 | 1·38600 | 0·00030 | 0·02 |
| 3 | 1·40744 | 1·40911 | 0·00167 | 0·12 |
| 4 | 1·42931 | 1·43239 | 0·00308 | 0·22 |
| 5 | 1·45079 | 1·45583 | 0·00504 | 0·35 |

Tabelle VI (Chlorkalium-Lösung; $H\gamma$).

| $\mu$ | $n$ | $\nu$ | $\nu—n$ | Procent |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1·35039 | 1·35042 | 0·00003 | 0·002 |
| 2 | 1·35974 | 1·36050 | 0·00076 | 0·06 |
| 3 | 1·36858 | 1·37061 | 0·00203 | 0·15 |

Tabelle VII (Chlorkalium-Lösung; Na-Linie).

| $\mu$ | $n$ | $\nu$ | $\nu-n$ | Procent |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1·35193 | 1·35267 | 0·00074 | 0·05 |
| 2·5 | 1·35581 | 1·35760 | 0·00179 | 0·13 |
| 3 | 1·36000 | 1·36256 | 0·00256 | 0·19 |
| 3·5 | 1·36339 | 1·36749 | 0·00410 | 0·30 |

Tabelle VIII (Chlornatrium-Lösung).

| $\mu$ | $n$ | $\nu$ | $\nu-n$ | Procent |
|---|---|---|---|---|
| 0·5 | 1·33776 | 1.33743 | —0·00033 | 0·02 |
| 1 | 1·34270 | 1·34211 | —0·00059 | 0·04 |
| 2 | 1·35219 | 1·35084 | —0·00135 | 0·10 |
| 3 | 1·36100 | 1·35982 | —0·00118 | 0·09 |
| 4 | 1·36916 | 1·36881 | —0·00035 | 0·03 |

Von den nach der Clausius-Mosotti'schen Formel berechneten Concentrationsverhältnissen sollen der Kürze halber nur die für die Jodkalium- und die erste Chlorkalium-Lösung angeführt werden, und zwar zuerst das gegebene Verhältnis unter $m$, dann das gerechnete unter $m'$, ferner wiederum die Differenz $m'-m$ und der Fehler angenähert in Procenten.

Tabelle IX (Jodkalium-Lösung).

| $c'/c$ | $m$ | $m'$ | $m'-m$ | Procent |
|---|---|---|---|---|
| $C_{(1)} : C_{(2)}$ | 0·500 | 0·503 | 0·003 | 0·6 |
| $C_{(1)} : C_{(3)}$ | 0·333 | 0·342 | 0·009 | 2·7 |
| $C_{(1)} : C_{(4)}$ | 0·250 | 0·258 | 0·008 | 3·2 |
| $C_{(1)} : C_{(5)}$ | 0·200 | 0·209 | 0·009 | 4·5 |
| $C_{(2)} : C_{(3)}$ | 0·666 | 0·679 | 0·012 | 1·8 |
| $C_{(2)} : C_{(4)}$ | 0·500 | 0·514 | 0·014 | 2·8 |
| $C_{(2)} : C_{(5)}$ | 0·400 | 0·415 | 0·015 | 3·8 |
| $C_{(3)} : C_{(4)}$ | 0·750 | 0·757 | 0·007 | 0·9 |
| $C_{(3)} : C_{(5)}$ | 0·600 | 0·611 | 0·011 | 1·8 |
| $C_{(4)} : C_{(5)}$ | 0·800 | 0·808 | 0·008 | 1·0 |

Tabelle X (Chlorkalium-Lösung; Hγ).

| $c/c'$ | $m$ | $m'$ | $m'-m$ | Procent |
|---|---|---|---|---|
| $C_{(1)} : C_{(0·5)}$ | 2·00 | 1·99 | —0·01 | 0·5 |
| $C_{(2)} : C_{(0·5)}$ | 4·00 | 3·85 | —0·15 | 3·8 |
| $C_{(3)} : C_{(0·5)}$ | 6·00 | 5·60 | —0·40 | 6·7 |
| $C_{(2)} : C_{(1)}$ | 2·00 | 1·93 | —0·07 | 3·5 |
| $C_{(3)} : C_{(1)}$ | 3·00 | 2·82 | —0·18 | 6·0 |
| $C_{(3)} : C_{(2)}$ | 1·50 | 1·46 | —0·04 | 2·7 |

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung, wie sie sich in den Tabellen V bis X zeigt, kann für die vorliegenden Verhältnisse immer noch eine befriedigende genannt werden; dabei ist allerdings nicht zu übersehen, dass einzelne größere Abweichungen auftreten. Dass dieselben aber gerade dann sich zeigen, wenn es sich um bedeutendere Concentrationen in den Lösungen handelt, steht mit den oben angestellten Fehlerrechnungen ganz wohl im Einklange und mag die Berechtigung und Nothwendigkeit derselben bestätigen.

Daneben wird überdies von vorneherein der Umstand, dass wir es eben mit Lösungen, und zwar mit wässerigen Salzlösungen gerade zu thun haben, dass ferner die Gleichung $k = n^2$ nur gilt, wenn $n$ für unendlich lange Wellen genommen wird, auch bei vollständiger Richtigkeit der Formeln größere oder kleinere Abweichungen erwarten lassen.

Jedenfalls aber dürfen wir, die ganze Untersuchung überblickend, sagen:

1. Sucht man die der Clausius-Mosotti'schen Formel zugrunde liegenden Annahmen möglichst weit zu realisieren, dann stehen Formel und experimentelle Thatsachen auch in ganz befriedigender Übereinstimmung; allfällige Abweichungen werden sich häufig durch bloße Berücksichtigung der möglichen unterlaufenen Ungenauigkeiten erklären lassen.

2. Die Identificierung der Zahlenwerte für $k$ und $n^2$ für ein und denselben Körper ergibt, soweit es sich um die Clausius-Mosotti'sche Formel handelt, eine so weit gehende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung, dass sie nicht bloß selbst berechtigt erscheint, sondern dass gerade hiedurch die Formel selber eine neue Bestätigung findet.

# XII. SITZUNG VOM 17. MAI 1901.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 109, Abth. I. Heft VIII bis X (October bis December 1900). — Abth. II. a, Heft X (December 1900).

Von dem Leiter der botanischen Forschungsreise nach Brasilien, w. M. Herrn Director R. v. Wettstein, ist folgendes aus Santos datierte Telegramm eingelangt: »Angekommen, alle wohlauf. Wettstein.«

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. W. Müller-Erzbach in Bremen vor, betitelt: »Das Wesen des Dampfdruckes durch Verdunstung«.

Das c. M. Herr Hofrath A. Bauer übersendet eine im Laboratorium für allgemeine Chemie an der technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit: »Autoxydationsproducte des Anthragallols«, von den Herren Max Bamberger und Arthur Praetorius.

Das c. M. Herr Director J. M. Pernter in Wien übersendet die historische Einleitung für den Jubiläumsband der Denkschriften zur Feier des fünfzigjährigen Bestandes der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, betitelt: »Vor- und Gründungsgeschichte«.

Die Marine-Section des k. und k. Reichs-Kriegs-Ministeriums übersendet eine für die Berichte der Commission für oceanographische Forschungen bestimmte Abhandlung von Herrn k. und k. Linienschiffs-Lieutenant C. Arbesser v. Rastburg: »Meteorologische Beobachtungen während der zweiten Expedition S. M. Schiff ‚Pola‘ in das Rothe Meer«.

Das w. M. Herr Hofrath Lieben legt eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit von Herrn Hugo Rosinger vor, welche den Titel führt: »Condensationsproducte des Isovaleraldehyds«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. Franz Exner legt eine gemeinschaftlich mit Herrn Dr. E. Haschek ausgeführte Untersuchung: »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente (XIX. Mittheilung)« vor.

Derselbe legt ferner eine Abhandlung des Herrn Dr. V. Conrad: »Über den Wassergehalt der Wolken« vor.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Bortolotti E., Sulla determinazione dell' ordine di infinito. Modena, 1901. 8°.

K. k. Landesschulrath in Lemberg, Jahreshauptbericht über den Zustand des Volksschulwesens in Galizien im Schuljahre 1899/1900.

Oudemans J. A. C., Dr., Die Triangulation von Java, ausgeführt vom Personale des geographischen Dienstes in Niederländisch-Ostindien. Im Auftrage des Ministeriums von Colonien und unter Mitwirkung von M. L. J. van Asperen. Haey, 1900. Groß-4°.

# Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XIX. Mittheilung)

**(enthaltend das Spectrum von Ho)**

von

Prof. **Franz Exner,** w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

**(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Mai 1901.)**

## LX. Holmium.

Über das Spectrum des Holmiums liegen bisher keinerlei Messungen vor. Unser Präparat verdanken wir Herrn Dr. A. Langlet in Gothenburg, der es durch vielhundertmalige Krystallisation aus einem Materiale gewann, das von Professor P. T. Cleve in Upsala stammte. Zwei Proben, die von Dr. Langlet mit Ho $\Sigma$ 11 und Ho $\Sigma$ $14+\alpha$ bezeichnet werden, erwiesen sich spectral als identisch und können wohl als reines Holmiumsalz angesehen werden, insoweit eine Trennung innerhalb der Gruppe der seltenen Erden heutzutage möglich ist. Mit Sicherheit ergab die spectrale Untersuchung an Verunreinigungen nur Y und Er; andere Beimengungen müssen als fraglich bezeichnet werden. Die Zahl der Linien beträgt 1905.

Zu bemerken wäre, dass die von E. Demarçay[1] dem Elemente $\Gamma$ (vielleicht Tb), sowie die dem Elemente $\Delta$ zugeschriebenen Linien sich alle im Spectrum unserer Holmiumpräparate finden. Jedoch sind die Linien $\Gamma$ schwach, die Linien $\Delta$ stark vorhanden, so dass wohl eine gewisse Trennung dieser Körper voneinander, jedoch keine vollständige Abscheidung eingetreten ist.

---

[1] E. Demarçay, C. R., Bd. 131, p. 387 (1900).

Wir haben ferner noch ein Holmiummaterial, das uns von Herrn Dr. L. Haitinger gütigst zur Verfügung gestellt wurde, und das nach einer anderen Trennungsmethode erhalten war, untersucht. Sein Spectrum war mit dem des Langlet'schen Holmiums identisch, nur zeigte es sich mit Y, Er, Sa und Gd in Spuren verunreinigt. Ein genauerer Vergleich ergab, dass einige wenige Linien im Langlet'schen Präparat kräftig, in dem Haitingers aber mit wesentlich verminderter Intensität auftraten, also wohl nicht dem Ho zuzuschreiben sind. Sie sind in den Tabellen mit Ho? bezeichnet.

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 2243·15 | 1 Y? | 2422·84 | 1 | 2476·19 | 2 |
| 91·05 | 1+ | 27·40 | 1+ | 80·98 | 1+ |
| 2312·70 | 1 | 27·75 | 1+ | 81·50 | 2+ |
| 24·04 | 1+ | 29·1 | 1+ br. | 84·49 | 1+ |
| 25·48 | 1 | 29·77 | 2 | 84·98 | 1+ |
| 49·74 | 1+ | 37·09 | 1+ | 85·50 | 1 |
| 52·20 | 1 | 38·23 | 1 | 90·47 | 2 |
| 52·70 | 1 | 39·88 | 1 | 92·13 | 1+ |
| 57·01 | 1 | 45·30 | 1 | 94·95 | 1 |
| 57·49 | 1 | 49·12 | 1+ | 95·35 | 1 |
| 57·82 | 1+ | 55·25 | 1+ | 95·64 | 1 |
| 62·74 | 1 | 56·9 | 1+ br. | 96·85 | 1+ Bo? |
| 67·08 | 1+ | 57·8 | 1+ br. | 97·52 | 1+ |
| 67·34 | 3 Y | 58·82 | 2 Fe? | 97·95 | 1+ |
| 78·96 | 1 | 60·07 | 1 | 98·70 | 2 |
| 82·95 | 1 | 60·70 | 1+ Y | 99·9 | 1+ br. |
| 87·50 | 1 | 61·19 | 1 | 2500·47 | 2 |
| 92·27 | 1 | 63·58 | 1 | 03·93 | 2 |
| 2400·66 | 1+ | 64·74 | 1 | 04·49 | 2 |
| 01·02 | 1+ | 68·43 | 1 | 04·90 | 1+ |
| 02·37 | 1 | 70·0 | 1+ | 08·76 | 1+ |
| 03·45 | 1+ | 70·81 | 1 | 10·10 | 1+ |
| 10·12 | 1 | 70·93 | 1 | 11·23 | 1+ |
| 13·85 | 1+ br. | 71·53 | 1 | 11·55 | 1+ |
| 14·79 | 3 Y | 71·97 | 1+ | 12·75 | 1+ |
| 19·2 | 1+ br. | 73·01 | 1 | 13·64 | 1 |
| 20·1 | 1+ br. | 74·11 | 1 | 18·9 | 1+ |
| 22·30 | 1 Y | 74·52 | 1 | 22·61 | 1 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 2523·06 | 1 | 2595·20 | 1+ Va? | 2772·70 | 1 |
| 24·08 | 1 | 2600·23 | 1 | 73·95 | 1+ |
| 25·93 | 1 | 00·83 | 1 | 74·80 | 1+ |
| 31·90 | 1+ | 03·2 | 1+ | 79·71 | 1 |
| 32·74 | 1+ | 08·73 | 1+ | 83·15 | 1+ |
| 40·0 | 1+ | 09·81 | 1+ | 85·67 | 1+ |
| 42·55 | 1 | 33·80 | 1+ | 85·80 | 1+ Cr? |
| 43·24 | 1 | 34·86 | 1 | 91·53 | 1 |
| 49·12 | 2 | 36·95 | 1+ | 92·63 | 1+ |
| 52·40 | 1+ | 37·8 | 1+ br. | 92·9 | 1+ |
| 53·7 | 1+ | 39·9 | 1+ br. | 94·03 | 1+ |
| 54·70 | 1+ | 43·5 | 1+ br. | 2800·43 | 1 |
| 56·39 | 1 | 45·40 | 1 | 00·62 | 1 Ti? |
| 57·7 | 1+ | 51·27 | 1+ | 01·51 | 1 |
| 58·05 | 1 | 57·11 | 1+ | 10·96 | 1 |
| 58·75 | 1+ | 58·32 | 1+ | 11·22 | 1 |
| 60·32 | 1 | 59·00 | 1+ | 11·52 | 1 |
| 63·16 | 1+ | 70·20 | 1+ Cr? | 12·15 | 1+ Cr? |
| 64·73 | 1+ | 70·30 | 1+ | 12·95 | 1+ |
| 66·35 | 1 | 77·40 | 1+ | 14·75 | 1+ |
| 67·11 | 1 | 89·36 | 1 Cr? | 15·33 | 1 |
| 68·43 | 1+ | 92·10 | 1+ | 16·50 | 1 |
| 68·60 | 1+ | 98·48 | 1+ Er | 17·11 | 8 Y |
| 69·06 | 1 | 2700·17 | 1 | 25·50 | 1 |
| 70·25 | 1+ | 09·10 | 1+ | 25·90 | 1+ |
| 70·95 | 1 Fe? | 16·6 | 1+ br. | 27·43 | 1+ |
| 71·44 | 1+ | 23·33 | 1+ Er | 28·30 | 1+ Ti? |
| 71·97 | 1+ | 29·5 | 1+ br. | 29·44 | 1 |
| 73·48 | 1+ | 29·9 | 1+ br. | 31·70 | 1+ |
| 75·03 | 1+ | 38·77 | 1+ | 34·28 | 1+ |
| 76·99 | 1 | 40·78 | 1+ | 35·15 | 2+ br. |
| 77·68 | 1 | 51·1 | 1+ br. | 36·22 | 2 |
| 78·40 | 1+ | 52·25 | 1+ br. | 38·84 | 1+ |
| 80·08 | 1+ | 57·20 | 1+ | 42·18 | 1+ |
| 80·52 | 1 Ti? | 58·25 | 1 | 43·8 | 1+ br. |
| 81·10 | 1+ | 59·32 | 1+ | 44·75 | 1 |
| 81·60 | 1+ | 65·37 | 1+ | 45·03 | 1 |
| 88·65 | 2 | 66·60 | 1+ Cr? | 45·13 | 1 |
| 91·92 | 1+ | 70·1 | 1+ br. | 45·60 | 1+ |
| 93·41 | 1+ | 71·07 | 1+ | 48·44 | 1 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 2849·03 | 2 | 2886·98 | 1+ | 2926·1 | 1+ |
| 50·77 | 1+ | 89·21 | 1 | 26·7 | 1+ |
| 51·55 | 1+ | 90·13 | 1 | 27·15 | 1 |
| 53·31 | 3 | 90·54 | 1 | 28·4 | 1+ |
| 54·57 | 1+ | 90·85 | 1 | 29·0 | 1+ br. |
| 55·51 | 1+ | 91·14 | 1 | 31·06 | 1 |
| 56 25 | 1+ | 91·57 | 2+ | 32·16 | 1 |
| 56·50 | 1+ | 92·23 | 1 | 33·43 | 1 |
| 57·20 | 1 | 93·45 | 1+ | 34·42 | 1 |
| 57·58 | 1 | 94·37 | 1+ | 34·60 | 2 |
| 59·90 | 1 | 95·08 | 1 | 36·7 | 1+ br. |
| 60·32 | 1+ | 95·48 | 1+ | 38·42 | 1 |
| 60·78 | 1 | 95·72 | 1+ | 39·36 | 1 |
| 61·62 | 1 | 97·55 | 1+ | 41·16 | 1 |
| 62·55 | 1+ Cr? | 98·35 | 1+ | 42·19 | 1+ |
| 66·40 | 1+ | 99·00 | 1+ | 43·58 | 1 |
| 67·2 | 1+ | 99·45 | 1+ | 43·83 | 1 |
| 68·05 | 1+ | 2900·10 | 1+ | 44·42 | 1+ |
| 68·85 | 1+ | 00·93 | 1 | 44·67 | 1+ |
| 69·20 | 1 | 02·02 | 1 | 46·08 | 4 Y |
| 69·94 | 1 | 02·90 | 1+ | 46·86 | 1 |
| 71·79 | 2 | 04·10 | 2 | 47·16 | 1 |
| 72·55 | 1 | 04·57 | 1 | 47·28 | 1 |
| 73·13 | 1 | 04·78 | 1 | 48·40 | 2 |
| 73·53 | 1 | 06·49 | 1 | 49·29 | 1 |
| 73·93 | 1+ | 09·44 | 1 | 50·21 | 2 |
| 74·20 | 1+ | 10·44 | 1 | 50·40 | 1 |
| 75·27 | 1+ | 10·75 | 1+ | 52·27 | 1 |
| 75·85 | 1+ | 11·45 | 1+ | 53·25 | 1+ |
| 76·25 | 1+ | 13·3 | 1+ | 57·50 | 1 |
| 76·48 | 1 | 13·83 | 1+ | 57·87 | 1 |
| 77·02 | 1+ | 14·05 | 1 | 60·15 | 1 |
| 78·81 | 1+ | 15·25 | 1+ | 61·74 | 1 |
| 80·35 | 1 | 17·3 | 1+ | 62·03 | 1 |
| 80·83 | 1 | 18·73 | 1 | 62·50 | 1 |
| 81·15 | 1 | 19·98 | 1 | 64·65 | 1 |
| 84·40 | 1 | 21·04 | 1 | 64·89 | 1 |
| 84·80 | 1 | 21·94 | 1 | 67·03 | 1 Fe? |
| 84·93 | 1 | 23·3 | 1+ | 68·80 | 2+ |
| 85·61 | 1 | 25·5 | 1+ | 69·50 | 1+ |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 2972·54 | 1 | 3009 60 | 1+ | 3052·42 | 2 |
| 73·13 | 1 | 10·20 | 1+ | 53·31 | 1 |
| 74·6 | 1+ | 12·6 | 1+ br. | 53·73 | 1+ |
| 75·75 | 1+ | 13·55 | 1+ | 54·16 | 1+ |
| 75·98 | 1 | 13·82 | 1+ | 54·50 | 1+ |
| 77·52 | 1 | 15·16 | 1 | 54·80 | 1+ |
| 78·0 | 1+ | 15·77 | 2 | 57·05 | 1 |
| 79·77 | 1 | 17·05 | 2 | 58·85 | 1+ |
| 81·5 | 1+ | 20·49 | 1 | 59·57 | 1 |
| 82·70 | 1 | 20·73 | 2 Fe? | 60·13 | 1 |
| 83·22 | 1+ | 21·92 | 1 | 60·44 | 1 |
| 86·04 | 1 | 24·85 | 1+ | 60·76 | 2 |
| 87·78 | 1 | 25·53 | 1+ | 61·50 | 2+ |
| 87·99 | 1 | 26·25 | 2 | 62·26 | 1 |
| 88·81 | 1 | 27·42 | 1 | 62·72 | 2 |
| 89·90 | 1 | 27·66 | 1 | 63·91 | 1 |
| 90·40 | 1+ | 28·99 | 1 | 64·17 | 1 |
| 90·65 | 1 | 29·36 | 1 | 64·35 | 1 |
| 91·49 | 1 | 29 94 | 2 | 64·65 | 1 |
| 91·75 | 1 | 30·51 | 2 | 65·29 | 1+ |
| 92·30 | 1+ | 31·30 | 1+ | 67·09 | 2 |
| 92·50 | 1+ | 32·95 | 1 Gd? | 67·55 | 1 |
| 95·54 | 1 | 33·30 | 1 | 69·09 | 1 |
| 96·89 | 1 | 34·59 | 1+ | 69·82 | 1 |
| 97·46 | 1+ | 36·80 | 1 | 70·17 | 1 |
| 98·02 | 1+ | 37·16 | 1 | 70·55 | 1 |
| 98·37 | 1+ | 38·39 | 3 | 70·9 | 1+ |
| 99·15 | 1+ | 40·45 | 1+ | 72·02 | 1 |
| 99·53 | 1+ | 41·75 | 1+ | 72·54 | 1+ |
| 3001·80 | 1 | 42·25 | 1+ | 72·80 | 1+ |
| 02·52 | 1 | 43·24 | 2 | 73·05 | 1 Ti? |
| 02·79 | 1 (Fe) | 43·50 | 2+ | 73·66 | 2 |
| 02·98 | 1+ | 44·66 | 1 | 74·12 | 1+ |
| 03·90 | 1 | 46·45 | 1+ | 74·50 | 1+ |
| 04·33 | 1+ | 47·67 | 2 | 75·20 | 1 |
| 05·67 | 1+ | 48·28 | 1 | 75·28 | 1 Ti? |
| 06·06 | 1 | 48·39 | 1+ | 75·59 | 1 |
| 07·2 | 1+ br. | 49·20 | 1 | 76·00 | 1 |
| 07·7 | 1+ br. | 50·52 | 1+ | 76·98 | 1 |
| 08·95 | 1+ | 51·56 | 1 | 78·42 | 1 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3078·78 | 2 | 3109·40 | 1+ | 3143·91 | 2 |
| 78·99 | 1 | 09·89 | 2 | 44·4 | 1+ |
| 79·44 | 1 | 10·9 | 1+ | 45·31 | 1 |
| 80·40 | 1+ | 11·90 | 1 | 46·25 | 2 |
| 81·03 | 1 | 12·20 | 1 | 47·0 | 1+ |
| 81·71 | 1+ | 13·20 | 1 | 47·64 | 1 |
| 82·55 | 1+ | 13·60 | 1 | 48·85 | 1+ |
| 83·60 | 1+ | 14·44 | 1+ | 50·00 | 1+ |
| 84·16 | 1 Er | 16·03 | 1+ | 50·28 | 1+ |
| 84·49 | 1 | 16·95 | 1 | 50·58 | 1+ |
| 84·79 | 1 | 17·55 | 1 | 50·75 | 1+ |
| 85·9 | 1+ | 18·03 | 1 | 52·03 | 1 |
| 86·7 | 1+ | 18·60 | 1 | 52·35 | 1 |
| 87·61 | 1+ | 19·07 | 1+ | 52·46 | 1 |
| 88·2 | 1+ | 20·28 | 2 | 53·41 | 1+ |
| 88·55 | 1+ | 22·15 | 1+ | 54·2 | 1+ |
| 89·50 | 1+ | 22·77 | 1 Er | 54·35 | 1+ Ti? (Fe) |
| 89·70 | 1 | 23·18 | 1+ | 54·7 | 1+ |
| 90·66 | 1+ | 26·27 | 1 | 56·29 | 1+ |
| 93·23 | 1 Va? | 26·89 | 1 | 56·61 | 3 |
| 93·95 | 1 | 27·6 | 1+ | 57·29 | 1 |
| 94·65 | 1 | 28·48 | 2 | 57·64 | 1 |
| 95·13 | 1+ | 30·25 | 1+ | 59·4 | 2+ br. |
| 95·85 | 1+ | 32·23 | 1 | 60·64 | 1 |
| 96·40 | 1+ | 32·70 | 1+ | 61·12 | 1 |
| 96·98 | 1+ | 32·83 | 1+ | 61·49 | 1 |
| 97·71 | 1+ | 33·12 | 1+ | 62·93 | 3 |
| 98·66 | 1+ | 34·4 | 1+ | 64·18 | 1 |
| 99·30 | 1+ Er | 35·48 | 3 | 65·8 | 1+ |
| 3100·63 | 1+ | 35·93 | 1+ | 66·7 | 1+ |
| 01·0 | 1+ | 36·50 | 1+ | 67 56 | 1 |
| 01·50 | 1+ | 36·78 | 1+ | 68·21 | 1 |
| 02·04 | 2 | 38·23 | 1+ | 68·7 | 1+ Ti? |
| 02·35 | 1+ Va? | 39·05 | 1+ | 69·62 | 1+ |
| 03·10 | 1 | 39·60 | 1+ | 70·11 | 2 |
| 03·35 | 1 | 40·15 | 1 | 70·85 | 1 |
| 03·94 | 2 | 40·75 | 2 | 71·57 | 1 |
| 05·10 | 2 | 41·24 | 2 | 71·85 | 1 |
| 07·1 | 1+ | 42·41 | 1 | 73·2 | 1+ |
| 08·45 | 1+ | 43·29 | 1 | 73·4 | 1+ Y |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3173·88 | 1 | 3203·41 | 3 Y | 3239·70 | 1+ |
| 74·95 | 1 | 04·41 | 1 | 40·15 | 1 |
| 75·6 | 1+ | 05·50 | 1 (Fe) | 41·00 | 2 |
| 77·99 | 2 | 06·49 | 2 | 42·43 | 5 Y |
| 78·46 | 1 | 06·73 | 1 | 43·9 | 1+ |
| 79·15 | 1+ | 07·20 | 1 | 45·25 | 2 |
| 80·83 | 1 | 08·42 | 1 | 48·46 | 1 |
| 81·70 | 1+ | 08·93 | 1 | 49·00 | 1+ |
| 82·04 | 1 | 12·16 | 1 | 49·53 | 1+ |
| 83·32 | 1 | 12·55 | 1 | 51·41 | 4 |
| 83·97 | 1 | 12·79 | 1 | 52·05 | 1 Ti? |
| 84·35 | 1 | 13·35 | 1+ | 52·33 | 2 |
| 84·70 | 1 | 14·75 | 1 | 52·45 | 1+ |
| 84·89 | 1 | 15·30 | 3 | 54·05 | 1 |
| 85·60 | 1+ | 16·06 | 1 (Fe) | 54·61 | 1 |
| 86·48 | 2 | 16·75 | 5 Y | 55·3 | 1+ |
| 87·36 | 1 | 17·46 | 1 (Fe) | 56·39 | 2 |
| 87·76 | 2 | 19·03 | 1 | 57·49 | 1+ |
| 88·50 | 1 | 20·10 | 1 | 58·13 | 1 |
| 88·73 | 1+ | 20·58 | 1 | 58·45 | 1+ |
| 89·15 | 1 | 21·61 | 1 | 59·23 | 1+ Er |
| 89·89 | 1 | 21 73 | 1 | 59·47 | 1+ |
| 90·27 | 1+ | 23·42 | 2 | 60·15 | 1 |
| 90·76 | 1+ Va? | 25·24 | 1 | 60·83 | 1 |
| 93·10 | 1 | 26·05 | 1 | 61·35 | 2 |
| 93·40 | 1 (Fe) | 26·16 | 1 | 61·75 | 1 Ti? |
| 93·82 | 1 | 26·50 | 1 | 62·13 | 1+ |
| 93·98 | 1 (Fe) | 27·57 | 1 | 62·40 | 1+ |
| 95·71 | 3 Y | 29·08 | 1 | 62·90 | 1+ |
| 96·51 | 1 | 29·48 | 1 | 63·10 | 1+ |
| 97·70 | 1 | 30·06 | 1 | 64·02 | 1 |
| 98·88 | 1 | 30·70 | 1 Er | 64·43 | 1 |
| 99·3 | 1+ | 32·21 | 1+ | 64·90 | 2 |
| 99·63 | 1 | 32·75 | 1 | 65·31 | 1 |
| 3200·36 | 3 Y | 33·50 | 1+ | 65·69 | 1 |
| 01·40 | 1+ | 34·62 | 1 Ti? | 66·12 | 2 |
| 01·77 | 1 | 36·00 | 3 | 66·34 | 2 |
| 01·90 | 1+ | 36·75 | 2 | 67·25 | 1+ |
| 02·66 | 1 | 38·3 | 1+ | 67·86 | 1+ Va? |
| 02·95 | 1 | 38·85 | 1+ | 68·31 | 1 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3268·40 | 1 | 3294·80 | 1 | 3325·7 | 1+ |
| 68·69 | 1 | 95·08 | 1 | 26·32 | 1 |
| 69·24 | 1 | 95·35 | 1 | 26·60 | 1 d.? |
| 69·53 | 1 | 96·08 | 1 d. | 27·18 | 1 |
| 69·70 | 1 | 96·46 | 1 | 27·42 | 1 |
| 71·09 | 1 | 97·77 | 2 | 28·01 | 5 Y |
| 71·45 | 1+ | 98·4 | 1+ br. | 28 95 | 1+ |
| 72·20 | 1 | 99·33 | 1+ | 29·15 | 1+ |
| 72·86 | 2 | 3301·05 | 1 | 30·75 | 1 |
| 73·73 | 1 | 02·2 | 1+ | 31·4 | 1+ br. |
| 75·10 | 1+ | 02·63 | 1+ | 32·2 | 1+ br. (Ti?) |
| 75·89 | 1 | 04·15 | 1+ Er? | 32·83 | 1 |
| 76·07 | 1 | 04·45 | 1+ | 33·25 | 1+ |
| 76·90 | 1 | 04·90 | 1+ | 33·70 | 1+ |
| 77·7 | 1+ | 05·54 | 1 | 34·25 | 1 |
| 78·29 | 1+ | 05·65 | 1 | 34·56 | 1 |
| 78·45 | 1+ Ti? | 06·30 | 2 | 34·94 | 1 |
| 79·59 | 1 | 06·93 | 1 | 35·55 | 1+ Cr? |
| 79·84 | 1 | 08·99 | 5 | 36·0 | 1+ |
| 80·25 | 2 | 11·10 | 1 | 37·37 | 1+ |
| 81·60 | 1 | 12·48 | 1 | 37·88 | 1 |
| 81·86 | 1 | 12·55 | 1 | 39·64 | 1 |
| 82·18 | 1 | 12·85 | 2 | 40·78 | 1+ |
| 82·96 | 3 | 13·46 | 1 | 41·13 | 3 |
| 83·30 | 1+ | 15·08 | 1 | 41·6 | 1+ |
| 83·87 | 1 | 15·87 | 1 | 42·01 | 1 Ti? |
| 84·51 | 1 | 16·44 | 2 | 42·76 | 1 Cr? |
| 85·10 | 2+ | 17·24 | 2 | 43·7 | 1+ br. |
| 86·12 | 1 | 18·13 | 1+ | 44·58 | 1 |
| 86·35 | 1+ | 18·55 | 1+ | 45·49 | 1 |
| 86·72 | 1+ | 18·89 | 1+ | 45·90 | 1 |
| 86·90 | 1+ | 20·01 | 3 | 46·15 | 1+ |
| 88·06 | 1 | 21·2 | 1+ br. | 46·83 | 1+ |
| 88·60 | 1+ | 22·02 | 1+ | 47·37 | 1+ |
| 88·75 | 1+ | 22·39 | 1+ | 47·95 | 1 |
| 89·47 | 2 | 23·09 | 1 Ti? | 48·15 | 1+ |
| 91·27 | 2 | 23·40 | 1+ d. | 49·15 | 1+ Ti? |
| 91·72 | 1+ | 23·87 | 1+ | 49·54 | 2 Ti? |
| 93·23 | 1+ | 24·05 | 1+ | 50·20 | 1 |
| 93·99 | 1 | 24·55 | 2 | 50·59 | 1 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3350·79 | 1 | 3376·45 | 1 | 3405·42 | 1 |
| 52·82 | 2 | 76·74 | 1 | 05·65 | 1 |
| 53·33 | 1 | 77·23 | 1 | 05·78 | 1 |
| 53·70 | 2 | 77·33 | 1 | 06·91 | 1 |
| 55·15 | 1 | 78·32 | 1 | 07·03 | 1 |
| 55·47 | 1 | 78·54 | 1 | 07·30 | 2 |
| 55·71 | 1 | 79·00 | 2 | 07·92 | 4 |
| 56·33 | 1 | 81·72 | 1 | 08·27 | 2 |
| 57·73 | 1 | 82·07 | 1 | 09·60 | 1 |
| 58·04 | 1 | 83·90 | 1 Ti? | 10·85 | 1+ |
| 58·36 | 1 | 84·23 | 1+ | 11·35 | 1 |
| 58·74 | 1 | 85·18 | 5 | 11·66 | 1 |
| 59·1 | 1+ | 86·70 | 2 | 13·91 | 3 |
| 59·60 | 2 | 87·05 | 1+ | 14·43 | 1+ |
| 60·79 | 1 | 87·35 | 1 | 14·95 | 2 |
| 61·35 | 1 Ti? | 87·93 | 1 | 15·34 | 1 |
| 61·80 | 1 | 88·96 | 2 | 15·51 | 1 |
| 62·32 | 1+ | 89·56 | 1 | 15·80 | 1 |
| 63·57 | 1+ | 90·9 | 1+ d. | 16·55 | 2 |
| 64·20 | 1+ | 91·3 | 1+ d. | 17·25 | 1 |
| 64·48 | 1+ | 92·12 | 2 | 18·22 | 1 |
| 65·03 | 1+ | 92·23 | 1+ | 19·74 | 2 |
| 65·90 | 1 | 93·10 | 1 | 20·94 | 1 |
| 66·34 | 1 | 93·75 | 4 | 21·20 | 1 |
| 66·82 | 1 | 94·14 | 1 | 21·45 | 1 |
| 67·34 | 1 | 94·96 | 1 | 21·75 | 1+ |
| 68·21 | 2 Er, Cr? | 96·30 | 3 | 22·18 | 1 |
| 69·82 | 2 | 96·98 | 1+ | 22·60 | 1 |
| 70·99 | 2 | 97·53 | 1 | 22·74 | 1 |
| 71·65 | 1+ | 98·47 | 1 | 22·99 | 1 |
| 71·82 | 1 | 99·03 | 2 | 23·13 | 1 |
| 71·92 | 1 | 99·10 | 3 | 23·35 | 1 |
| 72·50 | 1 | 3401·41 | 1 | 23·97 | 1 |
| 72·91 | 3 Er | 02·13 | 1 | 25·21 | 2 |
| 73·8 | 1+ d. | 02·89 | 1 | 25·50 | 2 |
| 74·30 | 1 | 02·98 | 1 | 26·63 | 1+ |
| 74·43 | 1 | 03·37 | 1 | 26·8 | 1+ |
| 75·18 | 1+ | 03·55 | 1 | 27·35 | 1+ |
| 75·86 | 1 | 05·07 | 1 | 28·22 | 2+ d. |
| 76·11 | 1 | 05·13 | 1 | 29·20 | 2+ |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3429·56 | 2 | 3459·47 | 1+ | 3484·91 | 3 v. |
| 31·92 | 2 | 60·23 | 1 | 86·05 | 1 Er |
| 32·70 | 1 | 60·78 | 1 | 87·10 | 1+ |
| 32·96 | 1 | 61·11 | 4 | 87·33 | 1 |
| 34·50 | 3 | 61·44 | 1 | 87·74 | 2 |
| 35·40 | 1 | 62·16 | 1+ | 88·4 | 1+ br. d. |
| 36·03 | 1+ | 63·49 | 1 | 89·13 | 1 |
| 36·20 | 1 | 64·01 | 1 | 89·65 | 1+ |
| 37·07 | 1+ | 65·42 | 1+ | 91·07 | 1+ |
| 37·6 | 1+ br. | 66·27 | 1+ | 91·44 | 1+ |
| 39·07 | 2 | 67·31 | 1+ | 92·69 | 1+ |
| 39·44 | 1 | 68·00 | 1+ | 93·21 | 1+ |
| 40·55 | 1 | 68·15 | 1+ | 94·10 | 1 |
| 41·10 | 3 | 68·54 | 2 | 94·28 | 2 |
| 41·60 | 2 | 68·63 | 1 | 94·63 | 5 |
| 42·58 | 1+ | 68·90 | 1 | 94·95 | 1+ |
| 43·62 | 1 | 70·03 | 1 | 95·55 | 1+ |
| 44·36 | 1 | 70·33 | 1 | 96·21 | 2 Y |
| 45·72 | 5 | 71·27 | 2 | 96·48 | 2 |
| 47·10 | 2 | 71·71 | 2 | 96·85 | 1 |
| 47·36 | 2+ | 71·88 | 1+ Er | 97·95 | 2 |
| 47·94 | 1 | 72·40 | 1+ | 98·85 | 2 |
| 48·60 | 1+ | 73·05 | 1+ | 99·09 | 2 |
| 49 99 | 1 | 73·45 | 1+ | 99·25 | 2 Er |
| 50·37 | 1+ | 73·83 | 1 | 99·74 | 1 |
| 51·2 | 1+ | 74·42 | 4 | 3500·02 | 1 |
| 51·4 | 1+ Bo? | 75·79 | 1 | 00·09 | 1 |
| 51·85 | 1+ | 76·50 | 1 | 00·65 | 1 |
| 53·25 | 2 | 77·21 | 3 | 01·00 | 1 |
| 54·20 | 1+ | 78·05 | 1 | 01·57 | 2 |
| 54·44 | 3 | 78·38 | 1 | 02·00 | 1 |
| 54·60 | 2 | 78·60 | 1 | 02·25 | 1+ |
| 55·23 | 1+ | 79·55 | 1 Er | 02·99 | 1 |
| 55·8 | 1+ | 79·90 | 1 | 03·17 | 1 |
| 56·15 | 5 | 80·57 | 1 Er? | 03·33 | 1 |
| 56·69 | 3 | 80·97 | 1 | 03·45 | 1 |
| 57·74 | 1+ | 82·23 | 1+ | 04·66 | 3 |
| 58·10 | 1+ | 82·91 | 1 | 05·59 | 3 |
| 58·75 | 1+ | 83·25 | 1 | 05·99 | 1 |
| 59·13 | 1 | 84·68 | 1+ | 06·18 | 1 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3506·38 | 1+ | 3535·09 | 4 | 3560·04 | 1 Er |
| 06·95 | 3 | 36·15 | 6 | 60·30 | 1 |
| 07·6 | 1+ br. | 36·69 | 1 | 60·60 | 1 |
| 08·55 | 1+ br. Er | 37·80 | 1 | 61·43 | 1+ |
| 09·26 | 4 | 37·95 | 1+ | 61·87 | 2 |
| 09·55 | 1 | 38·64 | 5 | 62·87 | 1 |
| 10·24 | 1+ | 38·96 | 1+ | 63·31 | 3 |
| 11·83 | 1 | 39·48 | 1 | 63·87 | 3 |
| 11·91 | 1 | 39·75 | 1 | 64·39 | 1 |
| 12·10 | 1 | 40·42 | 1+ | 64·68 | 1 |
| 12·45 | 1 | 40·84 | 1+ | 65·86 | 1 |
| 12·72 | 2 | 41·96 | 1 | 66·25 | 1 |
| 12·84 | 2 | 42·45 | 3 | 67·02 | 1+ |
| 14·25 | 1 | 42·96 | 1 | 67·51 | 1 |
| 15·20 | 1+ | 44·33 | 2 | 68·20 | 1 |
| 15·71 | 2+ | 44·45 | 2 | 68·66 | 2 |
| 17·38 | 2 | 45·07 | 1 | 69·15 | 1 |
| 18·85 | 1+ | 45·88 | 1 | 69·84 | 1 |
| 19·90 | 2+ br. | 46·14 | 1 | 71·15 | 1+ |
| 21·25 | 2+ | 46·94 | 2 | 71·52 | 1+ |
| 22·03 | 1 Va? | 47·05 | 1+ | 71·83 | 1 |
| 22·40 | 1 | 47·66 | 1 | 74·00 | 3 |
| 23·02 | 1 | 48·02 | 1 | 74·33 | 3 |
| 23·33 | 1+ | 48·29 | 2 | 74·97 | 1+ |
| 23·8 | 1+ | 48·82 | 1 | 76·15 | 1 |
| 24·16 | 7 | 49·11 | 2 Ho? | 76·41 | 4 |
| 24·74 | 1 | 49·25 | 1+ Y? | 76·78 | 1 |
| 25·04 | 1 Er | 50·38 | 5 | 77·04 | 3 |
| 25·86 | 1 | 51·11 | 1 | 78·12 | 2 |
| 26·75 | 1 | 51·28 | 1 | 78·73 | 1 |
| 27·01 | 1 | 51·76 | 3 | 79·03 | 1 |
| 27·17 | 1+ | 52·15 | 1 | 79·29 | 1 |
| 28·10 | 1 | 52·88 | 1 | 79·37 | 1 |
| 28·95 | 1+ | 53·37 | 1 | 79·60 | 1 |
| 29·15 | 1 | 55·02 | 1 | 80·20 | 2 |
| 30·66 | 1+ | 55·85 | 1 | 82·19 | 1 |
| 31·88 | 10 | 56·13 | 1 | 83·95 | 1+ |
| 32·60 | 1+ | 57·88 | 1 | 84·64 | 4 Y? |
| 33·89 | 1+ | 58·40 | 2 | 85·21 | 3 |
| 34·59 | 1+ | 59·45 | 2 | 85·95 | 3 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3586·26 | 2 | 3009·39 | 1 | 3633·90 | 1 |
| 87·57 | 1+ | 11·21 | 5 Y | 34·32 | 1+ |
| 87·93 | 1+ | 12·05 | 1 | 34·45 | 1+ |
| 89·27 | 1 | 12·94 | 2 | 34·93 | 1+ |
| 90·24 | 2 | 13·24 | 2 | 35·41 | 2 |
| 90·85 | 2 | 14·23 | 2 | 36·36 | 1 |
| 91·59 | 3 | 14·81 | 1 | 37·41 | 2 |
| 92·00 | 2 | 15·09 | 1 | 38·61 | 1+ |
| 92·27 | 2 | 15·30 | 1 | 40·01 | 2+ |
| 93·09 | 1 | 15·75 | 1+ | 40·38 | 2 |
| 93·34 | 1 | 16·23 | 1 | 40·95 | 1 |
| 93·93 | 1+ | 16·50 | 1 | 41·8 | 1+ |
| 94·33 | 1+ | 16·72 | 1 Er | 42·8 | 1+ Ti? |
| 94·44 | 1+ | 17·31 | 1 | 44·02 | 2 |
| 94·79 | 1 | 17·75 | 1 | 45·51 | 6 |
| 95·21 | 3 | 17·93 | 1 Er | 45·98 | 2 |
| 95·44 | 1+ | 18·22 | 2 | 46·72 | 1 |
| 96·24 | 2 | 18·65 | 2 | 47·97 | 1 |
| 96·60 | 1+ | 19·58 | 1 | 48·55 | 1+ |
| 98·10 | 1+ | 20·11 | 1 | 48·92 | 3 |
| 98·45 | 1+ | 20·30 | 2 | 50·18 | 1 |
| 98·95 | 1+ | 20·69 | 1 | 50·58 | 2 |
| 99·2 | 1+ | 21·57 | 1 | 54·02 | 1+ |
| 99·65 | 1 Er? | 21·67 | 1 | 54·35 | 1 |
| 99·99 | 1 Er? | 22·73 | 1 | 54·56 | 1 |
| 3600·52 | 3 | 22·90 | 1 | 55·04 | 2 |
| 00·92 | 6 Y | 24·41 | 2 | 55·80 | 1 |
| 01·6 | 1+ | 25·65 | 1+ | 56·13 | 1 |
| 02·10 | 3 Y | 25·85 | 1+ | 56·60 | 1 |
| 02·98 | 2 | 26·63 | 1+ | 57·05 | 1+ |
| 03·32 | 1 | 26·90 | 1+ | 58·00 | 1+ |
| 04·50 | 1 | 27·35 | 1+ | 59·05 | 2+ |
| 05·04 | 1 Er? | 28·2 | 1+ | 60·16 | 1 |
| 05·28 | 1 | 28·80 | 2 Y | 60·95 | 1 |
| 05·44 | 1 Cr? | 29·54 | 3 | 61·30 | 1+ |
| 06·27 | 3 | 30·39 | 3 | 61·48 | 1+ Ti? |
| 06·50 | 1+ | 30·59 | 1 | 61·96 | 1 |
| 07·05 | 1 | 32·25 | 1+ | 62·48 | 1 |
| 07·32 | 1+ | 32·91 | 2+ | 63·29 | 1 |
| 08·25 | 1+ | 33·25 | 5 Y | 64·80 | 5 Y |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3665·38 | 2 | 3695·80 | 1 | 3733·51 | 1 |
| 66·50 | 1 | 96·40 | 1+ Er | 34·14 | 1 |
| 67·11 | 2 | 97·09 | 1 Er | 34·52 | 1 |
| 68·17 | 1+ | 97·46 | 1 | 36·61 | 1+ |
| 68·74 | 1+ | 98·39 | 3 | 37·78 | 1+ |
| 69·1 | 1+ br. | 99·15 | 1 | 38·73 | 1 |
| 71·88 | 1 | 99·48 | 1 | 39·47 | 1 |
| 72·50 | 3 | 3700·72 | 1 | 39·96 | 1 |
| 72·90 | 2 | 01·79 | 2 | 40·20 | 1 |
| 73·35 | 2 | 03·02 | 2 | 40·50 | 1+ |
| 74·28 | 3 | 04·07 | 2 | 41·36 | 1 |
| 74·64 | 1 | 07·54 | 2 | 42·04 | 1 |
| 74·95 | 1+ | 07·75 | 2 | 42·79 | 1 Er |
| 75·87 | 1+ | 08·36 | 2 | 43·24 | 1 |
| 76·20 | 1 | 10·41 | 10 Y | 43·58 | 1 |
| 76·56 | 2 | 10·85 | 1+ | 45·21 | 1 |
| 76·78 | 3 | 11·82 | 2+ | 47·5 | 1+ |
| 77·45 | 1+ | 13·96 | 1 | 47·67 | 1 Y |
| 78·15 | 1+ | 15·00 | 1 | 47·95 | 2 |
| 78·68 | 1+ | 15·45 | 1 | 48·19 | 2 |
| 79·41 | 1+ | 15·71 | 1 Va? | 48·40 | 2+ |
| 80·8 | 1+ | 16·57 | 1+ | 50·46 | 1 |
| 82·15 | 1 | 17·05 | 2 | 51·95 | 1 |
| 82·47 | 1 | 18·24 | 1 | 52·37 | 1+ |
| 82·83 | 1+ | 18·83 | 1 | 53·00 | 1+ |
| 83·56 | 1 | 19·56 | 1 | 53·34 | 1+ |
| 84·55 | 1+ | 22·79 | 1 | 53·65 | 3 |
| 85·04 | 1 | 24·59 | 3 | 53·92 | 3 |
| 85·33 | 1 Ti? | 25·05 | 1+ | 54·41 | 1 |
| 85·95 | 1 | 25·58 | 1+ | 54·91 | 1 |
| 87·1 | 1+ | 26·66 | 1 | 55·36 | 2+ |
| 88·51 | 1 | 27·35 | 1+ | 56·47 | 1+ |
| 89·20 | 1+ | 28·07 | 1 | 56·72 | 1+ |
| 89·76 | 1+ | 28·86 | 1 | 57·21 | 1 |
| 90·55 | 1+ | 29·33 | 1+ | 57·52 | 4 |
| 90·78 | 1+ | 29·67 | 1 d. Er | 59·15 | 1 |
| 91·37 | 1+ | 30·73 | 1 | 59·46 | 1+ Ti? |
| 92·82 | 2 Er | 30·95 | 1+ | 59·85 | 1 |
| 94·55 | 1 | 31·30 | 1+ | 61·46 | 1+ Ti? Er? |
| 94·99 | 5 | 31·50 | 1+ | 62·90 | 1+ |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3764·46 | 1 | 3790·65 | 1 | 3815·02 | 1+ |
| 65·04 | 1 | 90·98 | 1 | 15·63 | 1 |
| 65·30 | 1 | 91·2 | 1+ | 16·31 | 2+ (Cy) |
| 66·45 | 1+ | 92·04 | 2 | 16·90 | 3 |
| 67·77 | 1+ | 93·04 | 1 | 17·52 | 1 |
| 68·45 | 1+ | 93·70 | 1+ | 18·46 | 2 Y |
| 70·37 | 1 | 93·92 | 1+ | 18·88 | 1 |
| 70·80 | 1 | 94·45 | 1+ | 20·94 | 1 |
| 71·22 | 1 | 95·52 | 1 | 22·73 | 1 |
| 72·48 | 1+ | 95·91 | 1 Er | 23·20 | 1+ |
| 73·19 | 1 | 96·30 | 1 | 23·94 | 1 |
| 73·46 | 2 | 96·87 | 3 | 24·95 | 1 |
| 74·49 | 8 Y | 99·13 | 1+ | 25·83 | 1 |
| 75·00 | 1 | 3800·23 | 1+ | 26·08 | 2 |
| 76·19 | 2 Ho? | 00·75 | 1+ | 27·05 | 1+ |
| 77·06 | 1 | 01·6 | 2+ br. Ho? | 27·53 | 1 |
| 77·64 | 1+ | 02·10 | 2 | 28·34 | 2 (Cy) |
| 78·15 | 1+ | 02·95 | 1+ | 28·6 | 1+ (Cy) |
| 78·90 | 1+ | 03·30 | 1 | 30·65 | 1+ Er? |
| 79·18 | 1 | 04·15 | 1 | 31·22 | 2+ |
| 79·38 | 2 | 04·30 | 2 | 31·79 | 1 |
| 80·60 | 1+ | 04·90 | 2 Ho? | 33·09 | 3 Ho? |
| 81·15 | 1+ | 05·67 | 1+ | 33·73 | 1 |
| 81·65 | 1+ | 06·46 | 3 | 36·63 | 3 |
| 81·80 | 1 | 07·00 | 1+ | 37·6 | 1+ |
| 82·35 | 1+ | 07·75 | 1+ | 37·76 | 1 |
| 82·49 | 1 Y? | 08·08 | 1 | 38·82 | 1 |
| 82·80 | 1+ | 08·30 | 1 | 40·60 | 1 |
| 83·03 | 1 | 09·20 | 2 | 41·08 | 1 |
| 83·71 | 2 | 09·63 | 1 | 41·45 | 2 |
| 84·10 | 2 | 09·89 | 1 | 42·13 | 1 |
| 84·80 | 1 | 10·11 | 1 | 42·60 | 1+ |
| 85·55 | 2 | 10·45 | 1 | 43·55 | 1 |
| 86·34 | 3 | 10·87 | 3 | 44·00 | 1+ |
| 86·99 | 1 Er | 11·50 | 1 | 44·12 | 1+ |
| 87·38 | 2 Va? | 12·17 | 1+ | 45·15 | 1 |
| 88·60 | 3 | 12·40 | 1+ | 45·57 | 1 (Cy) |
| 88·89 | 4 r. Y | 13·45 | 2+ | 46·13 | 1 |
| 90·06 | 1+ | 13·84 | 2 | 46·45 | 2 Ho? |
| 90·20 | 1+ | 14·73 | 1 | 46·80 | 1 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3847·10 | 1+ | 3898·71 | 8 | 3936·89 | 1 |
| 48·86 | 2 | 99·35 | 1 | 37·68 | 1+ |
| 49·41 | 2 | 3900·62 | 1+ | 38·23 | 2+ r. |
| 50·68 | 2+ | 02·57 | 1 | 38·80 | 1 Er |
| 51·75 | 1+ | 04·06 | 1 | 39·75 | 1+ |
| 52·57 | 2 | 04·38 | 1 | 42·35 | 1+ |
| 52·88 | 1 | 05·74 | 2+ r. (Si)? | 42·70 | 2 |
| 53·19 | 3 | 06·49 | 2 Er | 44·90 | 10 |
| 53·63 | 1 | 09·30 | 1 | 47·10 | 3 |
| 54·85 | 2+ | 09·55 | 1 | 50·52 | 5 Y |
| 55·76 | 2 (Cy) | 09·77 | 1 | 52·65 | 1+ |
| 57·62 | 1 (Cy) | 10·27 | 1+ | 53·27 | 1 |
| 61·70 | 3+ (Cy) | 10·72 | 1+ | 54·20 | 1 |
| 63·03 | 1+ | 11·80 | 1+ | 54·70 | 3 |
| 63·55 | 2+ br. (Cy) | 12·36 | 1+ | 55·28 | 1 |
| 64·19 | 1 | 13·05 | 1+ | 55·49 | 1 |
| 66·71 | 2 | 14·14 | 2 | 55·67 | 1 |
| 66·98 | 1 (Cy) | 15·02 | 2 | 56·95 | 1 |
| 68·59 | 2 | 15·74 | 2 | 57·40 | 1 |
| 68·94 | 1 (Cy) | 16·64 | 1+ | 57·96 | 3 r. |
| 69·54 | 2 | 17·46 | 1+ | 58·55 | 1+ |
| 70·02 | 2 | 18·15 | 1+ | 58·98 | 1+ |
| 71·52 | 2 (Cy) | 18·70 | 1 | 59·54 | 1 |
| 72·28 | 5 | 19·63 | 1+ | 61·00 | 1+ |
| 74·17 | 2 | 21·65 | 1+ | 61·35 | 1+ |
| 74·33 | 2 | 22·25 | 1+ | 62·63 | 1 |
| 76·34 | 1 | 22·87 | 1+ | 62·75 | 1 |
| 76·66 | 2+ | 23·50 | 3 | 63·32 | 1+ |
| 79·25 | 2 | 24·61 | 1 | 63·97 | 1 |
| 82·17 | 2+ | 25·57 | 1+ | 64·85 | 1 |
| 84·6 | 1+ | 29·46 | 2 | 65·25 | 1 |
| 86·05 | 1+ | 30·31 | 1 | 66·05 | 1+ |
| 86·98 | 1+ | 30·85 | 2 Y? | 66·53 | 1+ |
| 87·67 | 1 | 31·30 | 1 | 66·70 | 1+ |
| 89·09 | 2+ Ho | 31·69 | 4 | 67·16 | 1 |
| 91·16 | 8 | 32·35 | 2 | 70·13 | 1+ |
| 93·05 | 1 | 33·16 | 1+ | 71·30 | 1+ |
| 95·54 | 1 | 35·39 | 1 | 71·80 | 1+ |
| 96·44 | 1 Er | 36·23 | 1 | 73·27 | 1+ |
| 97·05 | 1+ | 36·48 | 1 | 73·48 | 1+ |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3973·75 | 1+ | 4012·96 | 1+ | 4055·93 | 1 |
| 74·05 | 1+ | 13·97 | 1 | 57·56 | 1 |
| 74·51 | 1+ | 14·36 | ·1 | 58·55 | 1+ |
| 74·86 | 1 Er | 14·87 | 2 | 59·96 | 1 Er |
| 75·16 | 1 | 15·33 | 1+ | 60·75 | 1 |
| 75·50 | 1 | 17·01 | 1 | 61·75 | 1 |
| 76·34 | 1 | 17·90 | 1 | 63·53 | 1+ |
| 76·99 | 2 | 18·63 | 1+ | 64·08 | 1+ |
| 77·55 | 1 | 19·55 | 1+ | 65·25 | 1 |
| 77·97 | 1 | 19·68 | 1+ | 66·36 | 1+ |
| 78·73 | 8 | 20·65 | 1 | 66·50 | 1+ |
| 79·34 | 2 Ho? | 21·04 | 2 | 68·68 | 1+ |
| 81·35 | 1 | 23·33 | 1+ | 72·80 | 1 |
| 82·13 | 5 | 23·83 | 1+ | 73·32 | 3 |
| 82·79 | 4 r. Y | 24·56 | 2 | 74·17 | 1 |
| 83·86 | 4 | 25·80 | 1+ | 77·10 | 1 |
| 84·40 | 3 | 27·96 | 2 | 77·52 | 2 Ho? |
| 84·86 | 1 | 28·51 | 2 Ti? | 78·12 | 8 |
| 87·25 | 1 | 29·56 | 1+ | 81·45 | 1 |
| 89·95 | 1+ Ti? | 31·80 | 1+ | 81·97 | 1 |
| 90·54 | 1 | 32·66 | 3 | 83·87 | 1 |
| 90·95 | 1 | 33·85 | 2 | 85·30 | 1+ |
| 91·50 | 3 | 36·51 | 2 | 85·55 | 1+ |
| 92·05 | 1 | 37·51 | 1 | 87·35 | 2 |
| 96·85 | 4 | 38·69 | 2 | 87·92 | 1+ |
| 98·19 | 1 | 39·03 | 1+ | 89·52 | 1+ |
| 98·75 | 1+ | 41·00 | 1 | 90·67 | 1+ |
| 4000·03 | 1 | 42·16 | 2 | 91·70 | 2 |
| 00·61 | 10 | 45·62 | 3 | 91·95 | 2 |
| 02·33 | 1 | 46·15 | 3 | 94·54 | 1 |
| 02·73 | 1 | 47·82 | 1+ | 96·26 | 1 |
| 04·45 | 1+ | 48·52 | 1 | 97·02 | 1+ br. |
| 05·65 | 2 | 49·00 | 1+ | 97·65 | 1+ br. |
| 05·97 | 1 | 50·05 | 1+ | 98·75 | 1 |
| 06·23 | 1 | 50·78 | 3 | 99·01 | 1 |
| 06·8 | 1+ | 52·01 | 1 | 4100·03 | 1+ |
| 07·90 | 1 | 53·05 | 1+ | 00·70 | 1 Er |
| 08·13 | 1 | 53·55 | 1+ | 02·08 | 1 |
| 10·24 | 2 | 54·08 | 2 | 02·55 | 2 |
| 11·45 | 2 | 55·32 | 2 | 03·48 | 6 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 4103·99 | 2 | 4156·4 | 1+ | 4201·50 | 2 |
| 05·20 | 2 | 57·05 | 1+ | 02·42 | 1 |
| 06·54 | 1 | 58·05 | 1+ | 04·86 | 1 Y |
| 06·84 | 1 | 58·55 | 1+ | 05·20 | 1+ |
| 07·34 | 1+ | 59·97 | 1+ | 05·85 | 1 |
| 08·70 | 1 | 60·37 | 1+ | 06·71 | 2 |
| 11·52 | 3 | 63·15 | 1 | 11·40 | 1 |
| 13·18 | 1 | 63·61 | 1+ | 11·91 | 4 |
| 14·23 | 1 | 64·4 | 1+ | 13·36 | 2 |
| 15·50 | 1+ | 64·75 | 1+ | 13·81 | 1+ |
| 19·2 | 1 | 67·7 | 1+ | 14·57 | 1+ |
| 19·48 | 2 | 68·11 | 3 | 15·33 | 2 |
| 20·32 | 1+ | 69·45 | 1+ | 18·28 | 3 |
| 24·79 | 2 | 70·73 | 1+ | 18·73 | 1+ |
| 25·05 | 1+ | 71·30 | 1+ | 21·30 | 3 |
| 26·28 | 1+ | 71·90 | 1+ | 22·42 | 1 |
| 27·27 | 1 Ho? | 72·10 | 1+ Ti? | 25·36 | 3 |
| 28·42 | 3 | 73·40 | 1+ | 32·20 | 1+ |
| 29·59 | 3 | 74·30 | 1+ | 33·13 | 1+ |
| 30·51 | 1 | 77·05 | 1 | 35·87 | 1+ |
| 31·20 | 1 | 77·69 | 5 Y | 37·65 | 1+ |
| 33·00 | 1 | 78·25 | 1 | 38·45 | 1+ |
| 33·51 | 2 | 78·73 | 1 | 40·00 | 1 |
| 33·99 | 1 | 79·6 | 1+ | 44·95 | 1+ |
| 34·32 | 1 | 80·55 | 1+ | 46·04 | 1 |
| 36·35 | 1 | 81·07 | 1 | 47·49 | 2 |
| 37·49 | 1+ | 82·57 | 1 | 48·55 | 1 |
| 39·63 | 1 | 83·85 | 2 | 51·90 | 1+ |
| 40·93 | 1 | 86·99 | 4 | 52·97 | 1+ |
| 41·68 | 2 | 89·65 | 1+ | 54·53 | 1+ |
| 43·00 | 2 Y | 90·15 | 1+ Er | 56·12 | 1+ |
| 43·26 | 3 | 91·1 | 1+ | 56·49 | 2 |
| 44·56 | 1 | 91·80 | 2 | 57·87 | 1+ |
| 45·73 | 1+ | 92·60 | 1+ | 58·35 | 1+ |
| 46·22 | 1 | 93·97 | 1+ | 58·73 | 1+ |
| 47·27 | 1+ | 94·46 | 1+ | 61·75 | 1+ |
| 49·30 | 1+ | 95·00 | 3 | 64·77 | 1+ |
| 51·28 | 1 | 95·38 | 1+ | 65·95 | 1+ |
| 52·65 | 2+ | 98·18 | 1 | 66·65 | 1+ |
| 55·9 | 1+ | 4201·18 | 1+ | 69·85 | 1+ |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 4270·71 | 1 | 4356·9 | 1+ | 4455·75 | 1 |
| 70·56 | 1 | 58·64 | 1 | 61·33 | 1+ |
| 73·30 | 1 | 58·94 | 1 Y | 68·05 | 1 |
| 74·1 | 1+ | 60·37 | 1 | 68·30 | 1 |
| 76·83 | 1+ | 61·53 | 1 | 71·30 | 1 |
| 78·60 | 1 | 62·43 | 1+ | 73·70 | 1+ Er |
| 85·99 | 1+ | 64·40 | 2 | 77·7 | 1+ |
| 91·2 | 1+ | 66·25 | 1+ | 90·60 | 1+ |
| 93·10 | 1+ | 66·92 | 1+ | 4500·06 | 1+ |
| 95·13 | 3 | 74·41 | 2 | 03·42 | 1+ |
| 95·70 | 1+ | 75·08 | 10 Y | 07·14 | 1+ |
| 96·3 | 1+ br. | 75·49 | 2 | 17·10 | 1+ |
| 4302·9 | 1+ | 80·38 | 1 | 18·70 | 1+ |
| 03·16 | 1 | 84 46 | 1 | 19·99 | 1+ |
| 08·79 | 4 | 85·44 | 1 | 27·93 | 1+ |
| 09·79 | 3 Y | 95·15 | 1 | 38·9 | 1+ |
| 14·05 | 2 | 98·17 | 2 Y | 41·85 | 1 |
| 19·04 | 1 | 4400·30 | 1 | 45·5 | 1+ |
| 22·40 | 1 | 01·8 | 1+ | 51·06 | 1+ |
| 22·72 | 1 | 05·76 | 1+ | 56·65 | 1+ |
| 23·93 | 1+ | 08·2 | 1+ br. | 77·95 | 1 |
| 25·28 | 2 | 09·54 | 3 | 88·09 | 1 |
| 26·63 | 1 | 19·77 | 1+ Er | 89·54 | 2 |
| 28·1 | 1+ | 20·70 | 1+ Sa? | 91·95 | 1+ |
| 29·06 | 1 | 21·88 | 1+ | 93·95 | 1+ |
| 30·05 | 1 | 22·75 | 2 Y | 95·3 | 1+ |
| 38·56 | 1+ | 31·17 | 1 | 4612·41 | 1 |
| 39·80 | 2 | 34·50 | 1+ Sa? | 17·44 | 1+ |
| 44·4 | 1+ br. | 35·92 | 1+ Ca? | 20·20 | 1+ |
| 46·51 | 1+ | 36·75 | 1+ | 64·8 | 1+ |
| 47·9 | 1+ br. | 48·30 | 1 | 73·8 | 1+ |
| 50·90 | 1+ | 49·29 | 1+ | 98·85 | 1+ |
| 53·4 | 1+ | 49·84 | 3 | | |

---

Gelegentlich dieser Mittheilung möchten wir auch einen Irrthum in unserer letzten (XVIII.) Publication berichtigen, der sich auf die Spectren von Samarium und Gadolinium bezieht. Wir haben dort aus der Existenz zahlreicher Coincidenzen von

Samarium- und Gadolinium-Linien auf das Vorhandensein eines gemeinsamen dritten Körpers geschlossen, gegen welche Schlussweise sich Herr Demarçay[1] mit der Vermuthung gewendet hat, dass das uns zur Verfügung gestandene Material nicht von genügender Reinheit war. Wir müssen Herrn Demarçay vollkommen recht geben, indem sich unser Samarium als außerordentlich stark mit Gadolinium vermischt herausstellte, so dass die allermeisten der gemeinsamen Linien nichts weiter sind als Gadolinium-Linien. Wir sind zu dieser Erkenntnis dadurch gelangt, dass uns von Herrn Dr. L. Haitinger Sa- und Gd-Präparate von solcher Reinheit zur Verfügung gestellt wurden, dass Linien von der Intensität $i = 10$ des einen Elementes im Spectrum des anderen mit $i = 1$ oder höchstens $i = 2$ auftraten. Dadurch war es möglich, durch Neuaufnahmen der beiden Spectren dieselben in unzweideutiger Weise zu trennen. Als dem Gadolinum zugehörig wären demnach die in unserer letzten Mittheilung in Tabelle LIX gegebenen Linien anzusehen; dem Samarium dagegen gehören die Linien der darauffolgenden »Tabelle der vermuthlichen Samarium-Linien« an. Es stimmt dies auch mit den von Demarçay für die beiden Elemente gegebenen Linien. Immerhin zeigt sich noch dem Samarium und Gadolinium eine Reihe von Linien insoferne gemeinsam, als sie in beiden mit gleicher oder nahezu gleicher Intensität auftreten.

In der folgenden Tabelle führen wir die stärkeren derselben an.

| Samarium | | Gadolinium | |
|---|---|---|---|
| λ | *i* | λ | *i* |
| 2466·93 | 2 | 2466·93 | 2 |
| 3259·40 | 1+ | 3259·40 | 2 |
| 3316·71 | 2 | 3316·68 | 1 |
| 60·85 | 1 | 60·86 | 3 |
| 82·55 | 3 | 82·55 | 1 |

[1] E. Demarçay, C. R. Bd. 131, Dec. 1900.

| Samarium | | Gadolinium | |
|---|---|---|---|
| λ | i | λ | i |
| 3408·80 | 3 | 3408·78 | 1 |
| 55·07 | 1 | 55·04 | 3 |
| 3545·13 | 1 | 3545·14 | 2 |
| 3649·62 | 3 | 3649·59 | 2 |
| 3757·90 | 1 | 3757·88 | 3 |
| 59·13 | 3 | 59·17 | 3 |
| 60·86 | 3 | 60·85 | 3 |
| 83·92 | 1 | 83·94 | 2 d. |
| 3812·22 | 2 | 3812·21 | 2+ |
| 19·82 | 2 | 19·81 | 2 |
| 25·20 | 1 | 25·17 | 2 |
| 90·26 | 2 | 90·25 | 1 |
| 3934·98 | 2 | 3934·99 | 3 |
| 43·38 | 2 | 43·40 | 1 |
| 44·84 | 1 | 44·82 | 2 |
| 4008·46 | 2 | 4008·48 | 1 |
| 23·41 | 3 | 23·30 | 2 |
| | | 23·49 | 2 |
| 48·74 | 1 | 48·75 | 2 |
| 63·70 | 4 | 63·74 | 3+ |
| 80·71 | 2 | 80·69 | 1 |
| 4108·52 | 1 | 4108·55 | 2 |
| 21·53 | 2 | 21·56 | 1 |
| 23·16 | 1 | 23 16 | 2 |
| 51·80 | 1 | 51·81 | 2 |
| 4205·22 | 2+ | 4205·20 | 2+ |
| 29·91 | 4 | 29·96 | 4 |

Ob diese Linien einem einheitlichen Elemente angehören, vielleicht dem Terbium, an das man mit Bezug auf seine Stellung in der Reihe denken könnte, muss vorläufig dahingestellt bleiben.

Mit der vorliegenden Mittheilung erscheinen die Messungen der seltenen Erden abgeschlossen, soweit uns das Material zugänglich war. Speciell in der Reihe der Yttererden, von denen uns durch die Güte des Herrn Dr. Haitinger eine vollständige Serie von Fractionen zur Verfügung stand, konnten wir zwischen den Endgliedern Nd und Yb nur Sa, Gd, Ho, Er und Y mit

Sicherheit nachweisen. Dass das Terbium, dessen Stellung in der Reihe man in der Nähe von Gd erwarten möchte, nicht nachzuweisen war, könnte zu Zweifeln an dessen Existenz führen, umsomehr als das seinerzeit von Roscoe und Schuster[1] publicierte Terbiumspectrum in allen Linien mit solchen des Samariums und Gadoliniums übereinstimmt, das Materiale also wohl ein Gemisch dieser beiden Elemente war. Alle dunkelbraunen Oxyde der von uns untersuchten Reihe erwiesen sich gleichfalls als Gemische von Ho, Gd und Sa. In dem Endgliede unserer Reihe, das Yb, Er und Y enthielt und im Absorptionsspectrum schwache Thuliumstreifen aufwies, waren unzweifelhaft dem Thuliumspectrum zuzuschreibende Linien nicht zu finden. Ob Thulium bei der Abtrennung der Yttererden im Rohmaterial zurückgeblieben oder überhaupt nur in nicht nachweisbaren Mengen vorhanden ist, muss unentschieden bleiben.

Schließlich sei noch erwähnt, dass sich bei je zwei Elementen der Reihe zahlreiche gemeinsame Linien von geringer, aber gleicher Intensität finden, die wohl auf das Vorhandensein weiterer gemeinsamer Bestandtheile hinweisen; doch scheint eine Durchforschung des Materiales nach dieser Richtung hin, so lange die chemischen Trennungsmethoden nicht weiter fortgeschritten sind, fast ausgeschlossen.

---

[1] Roscoe und Schuster, Journ. of Chem. Soc. 61. Ber. der deutschen chem. Gesellschaft. Bd. 15, S. 1280.

# XIII. SITZUNG VOM 23. MAI 1901.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 109, Abth. III. Heft IX und X (November und December 1900).

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt eine Arbeit von Herrn Dr. M. Radaković in Innsbruck vor, betitelt: »Bemerkungen zur Theorie des ballistischen Pendels«.

Das w. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet vier Abhandlungen aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag.

I. »Über Tetrahydrobiphenylenoxyd«, von Herrn stud. phil. Otto Hönigschmid.

II. »Zur Kenntnis der Naphtaldehydsäure«, von Herrn stud. phil. Josef Zink.

III. »Über die Condensationsproducte von Phenylaceton mit Benzaldehyd«, von den Herren G. Goldschmiedt und Hans Krzmař.

IV. »Über Esterbildung bei Pyridinpolycarbonsäuren«, von Herrn Dr. Hans Meyer.

Das c. M. Herr Prof. R. Hoernes in Graz übersendet eine Mittheilung über *Congeria Oppenheimi* und *C. Hilberi,* zwei neue Formen der »*Rhomboidea*-Gruppe« aus den oberen pontischen Schichten von Königsgnad (Királykegye) nebst Bemerkungen über daselbst vorkommende Limnocardien und Valenciennesien.

Das c. M. Herr Hofrath E. Zuckerkandl übersendet folgende zwei Arbeiten:

I. »Zur Morphologie des Musculus ischiocaudalis«. Zweiter Beitrag.

II. »Zur Entwickelung des Balkens und des Gewölbes«.

Das w. M. Herr Hofrath Ad. Lieben überreicht drei Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium:

I. »Zur Kenntnis der Carbinolverbindungen des Triphenylmethans und seiner Derivate«, von den Herren J. Herzig und P. Wengraf.

II. »Über Condensationen des Isonicotinsäureesters«, von Herrn Dr. R. Tscherne.

III. »Über die Alkylierung des Oxyhydrochinons«, von Herrn E. Brezina.

Das c. M. Herr Prof. J. M. Pernter überreicht folgende drei Abhandlungen über Fallwinde:

I. »Experimente zum Föhn«, von Herrn Prof. Dr. Paul Czermak in Innsbruck;

II. »Einfluss der Bora auf den täglichen Gang einiger meteorologischer Elemente«, von Herrn Eduard Mazelle in Triest;

III. »Über den täglichen Gang der meteorologischen Elemente bei Nordföhn«, von Herrn Dr. Robert Klein, Districtsarzt in Tragöss.

Herr Dr. Franz Kühnert, Privatdocent für chinesische Sprache an der Universität Wien, legt folgende Abhandlung vor: »Über die von den Chinesen Teh-Sing oder Tugendgestirn genannte Himmelserscheinung«.

Herr J. Halban legt eine im Physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte, von der kaiserl. Akademie der Wissenschaften subventionierte Arbeit vor, betitelt: »Ovarium und Menstruation«.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Largaiolli V., Dr., I pesci del Trentino e nozioni elementari intorno all' organismo allo svilluppo ed alle funzioni della vita del pesce. Vol. I, parte generale. Trento, 1901. 8°.

---



# Bemerkungen zur Theorie des ballistischen Pendels

von

Dr. **M. Radaković** in Innsbruck.

**(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Mai 1901.)**

In jüngster Zeit hat Herr k. u. k. Oberst A. Chevalier Minarelli Fitz-Gerald eine neue Form des ballistischen Pendels angegeben,[1] deren wesentlichster Vortheil gegenüber der älteren Form dieses Apparates, abgesehen von verschiedenen technischen Verbesserungen in der Construction der Aufhängevorrichtung, darin besteht, dass an Stelle der früher als Receptor dienenden Blei- oder Sandmasse eine oberflächenharte Stahlpanzerplatte gewählt wurde, an welcher das Geschoss ohne Eindruck zerschellt. In seiner neuen Form ist das ballistische Pendel zur Messung der Geschwindigkeit moderner Infanteriegeschosse geeignet und gestattet in der That, wie die bis jetzt mitgetheilten Vorversuche bereits ergeben, sehr genaue Messungen der Projectilgeschwindigkeit, deren noch nicht ganz aufgeklärter Verlauf in der Nähe der Mündung der Untersuchung mittels der verschiedensten Apparate und Methoden dringend bedarf. Dank der besonderen Vorzüge, welche das ballistische Pendel in seiner neuen Form auszeichnen, ist es vielleicht berufen, bei der Lösung dieser experimentellen Aufgaben eine wesentliche Rolle zu spielen.

Infolge des Interesses, welches durch diese Umstände neuerdings für das ballistische Pendel geweckt wurden, scheint

[1] Neue Methoden zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit von Gewehrprojectilen in der Nähe der Mündung. Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Jahrgang 1901, 4. Heft, S. 269.

es vielleicht nicht unangebracht, auf eine Fehlerquelle näher einzugehen, welche man bei der Verwendung dieses Apparates vermuthet hat.

Herr Oberst v. Minarelli bemerkt am Schlusse seiner Abhandlung:[1] »Es ist naheliegend, dass gegen mein ballistisches Pendel der Einwurf erhoben werden kann: dass ja das Geschoss beim Auftreffen auf die Panzerplatte einen Theil seiner Energie für moleculare Arbeit, Deformation, Schmelzung u. s. w. aufbraucht, welche Arbeit nur auf Kosten der Geschossgeschwindigkeit geleistet werden kann, daher auch in Rechnung gestellt werden müsste«. Das hier nur bedingungsweise ausgedrückte Bedenken wird von Seite der Redaction der »Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens« in bestimmterer Form aufgenommen in der diesem Satze angefügten redactionellen Bemerkung: »Die mit dem hier beschriebenen Gewehrpendel gemessenen Geschwindigkeiten müssen überdies kleiner ausfallen, als Werte, welche mit anderen ballistischen Pendeln ermittelt werden, bei denen Deformation und Erwärmung des Geschosses nicht so weitgehend sind wie hier«.

Dieser Einwand gegen die Verwendung des ballistischen Pendels beruht offenbar auf dem Gedanken, dass jener Theil der Bewegungsenergie des Geschosses, der in Wärme verwandelt oder zu molecularer Arbeit verwendet wird, dem Vorgange des Stoßes gewissermaßen verloren gehe, so dass infolge dieses Verlustes das ballistische Pendel nicht die ganze lebendige Kraft des Projectils, sondern nur einen Theil derselben durch seinen ersten Ausschlag angeben könne. Correcterweise wäre daher die durch die Messung sich ergebende Energie des Geschosses um diesen bei dem Stoßvorgange verlorenen Betrag zu vermehren, woraus natürlich sodann auch eine Vermehrung der beobachteten Geschossgeschwindigkeit sich ergeben würde.

Es lässt sich jedoch zeigen, dass diese Fehlerquelle nicht vorhanden ist, dass vielmehr bei der Berechnung der Geschossgeschwindigkeit aus dem ersten Ausschlage des Pendels dieser in andere Energieformen verwandelte Theil der Bewegungsenergie des Geschosses vollständig berücksichtigt ist.

[1] L. c. S. 280.

Um diesen Nachweis zu führen, sei es gestattet, auf die Theorie des ballistischen Pendels kurz einzugehen.

Das Trägheitsmoment des Pendels sei K genannt. Es werde in einem Punkte, dessen Abstand von der Drehaxe $\rho$ heißen möge, von einem Projectil mit der Masse $m$ und der Geschwindigkeit $v_0$ im Augenblicke $t = 0$ getroffen. Der ganze Stoßvorgang soll die kleine Zeit $\vartheta$ dauern. In einem Zeitmomente $t$ während des Stoßes sei $v_t$ die noch vorhandene Geschwindigkeit des Geschosses, und daher ist die Kraft $P$, welche in diesem Augenblicke auf das Pendel ausgeübt wird, durch die Formel

$$P = -m \cdot \frac{dv_t}{dt}$$

gegeben. Diese Kraft wirkt im Abstande $\rho$ von der Drehaxe, und daher ist die Winkelbeschleunigung $\frac{dw_t}{dt}$ des Pendels in dem betrachteten Momente nach einem bekannten Satze der Mechanik durch die Gleichung

$$K \cdot \frac{dw_t}{dt} = -m \cdot \frac{dv_t}{dt} \cdot \rho$$

bestimmt.

Integriert man nun über die ganze Zeitdauer des Stoßes, so erhält man

$$K . w = m . \rho . (v_0 - v_\vartheta). \tag{1}$$

Hiebei bedeutet $w$ die Winkelgeschwindigkeit des Pendels, $v_\vartheta$ die Geschwindigkeit des Projectils nach dem Stoße, und es ist berücksichtigt, dass das Pendel vor dem Stoße in Ruhe war.

Von den Größen, welche die Gleichung 1) verknüpft, lässt sich die eine, $w$, durch den ersten Ausschlag des Pendels messen und kann daher als experimentell bestimmt angesehen werden. Nachdem sie jedoch noch mit zwei unbekannten Größen $v_0$ und $v_\vartheta$ verbunden ist, reicht die Gleichung 1) zur vollkommenen Berechnung des Stoßvorganges nicht aus und es muss noch eine zweite Gleichung hinzutreten. Eine solche lässt sich durch rein mechanische Betrachtungen nicht finden. Es kann dies auch gar nicht der Fall sein, denn die einzelnen möglichen Stoßvorgänge sind voneinander durch die materielle

Beschaffenheit der sich treffenden Körper verschieden. Je nach derselben wird ein mehr oder weniger großer Theil der lebendigen Kraft des Projectils während des Stoßes in Wärme oder moleculare Arbeit verwandelt, und je nach dem Betrage dieser zerstreuten Energie muss die Beziehung zwischen Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses und Winkelgeschwindigkeit des Pendels anders ausfallen. Die zweite Gleichung, welche noch zur Bestimmung des ganzen Vorganges fehlt, kann sich somit nicht aus allgemeinen mechanischen Principien ergeben, sondern sie muss in jedem einzelnen Falle besonders gewonnen werden. Hat man sie aber gefunden, dann ist der Stoßvorgang ganz bestimmt, und es ist klar, dass man jedes Detail desselben, also auch den Betrag der zerstreuten Energie, berechnen kann.

Bei dem ballistischen Pendel älterer Form wird diese zweite Beziehung durch die Beobachtung geliefert, dass das Projectil in der Blei- oder Sandmasse des Receptors stecken bleibt und sich mit derselben weiter bewegt. Es müssen daher bei dem Stoße solche besonderen Energiezerstreuungen stattfinden, dass die Endgeschwindigkeit des Geschosses gleich der Geschwindigkeit der getroffenen Stelle des Receptors im Augenblicke $\vartheta$ wird. Die zweite Gleichung ist daher

$$v_\vartheta = \rho . w. \qquad 2)$$

Beide Gleichungen zusammen bestimmen den Stoßvorgang vollkommen, und es wird

$$w = \frac{m\rho}{K + m\rho^2} \cdot v_0.$$

Nachdem durch die Einführung der in der Relation 2) ausgedrückten experimentellen Beobachtung der specielle, hier stattfindende Stoßvorgang ganz bestimmt ist, kann man auch berechnen, welcher Theil der lebendigen Kraft des Projectils zu Wärme und molecularer Arbeit verwendet worden ist.

Es war vor dem Stoße die Bewegungsenergie von Geschoss und Pendel zusammen

$$E_0 = \frac{1}{2} m . v_0^2,$$

nach dem Stoße ist die noch vorhandene lebendige Kraft beider gleich

$$E_\vartheta = \frac{1}{2} K . w^2 + \frac{1}{2} m . \rho^2 w^2$$

oder auch

$$E_\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \rho^2}{K + m\rho^2} : v_0^2.$$

Der Überschuss der Bewegungsenergie vor über die nach dem Stoße ist gleich dem Betrage der zerstreuten Energie

$$E_Z' = E_0 - E_\vartheta = \frac{K}{K + m\rho^2} \cdot \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Immer wenn von der Bewegungsenergie des Projectils der Bruchtheil $\frac{K}{K + m\rho^2}$ derselben bei dem Stoße in andere Energieformen verwandelt wird, bewegt sich nach dem Stoße das Geschoss mit dem Pendel gemeinsam weiter und umgekehrt, wenn Geschoss und Pendel sich nach dem Stoße gemeinsam weiter bewegen, wird von der ganzen lebendigen Kraft des Projectils der $\frac{m . \rho^2}{K + m\rho^2}$ te Theil auf das Pendel übertragen, und der $\frac{K}{K + m\rho^2}$ te Theil wird zerstreut.

Bei dem ballistischen Pendel von Herrn Oberst v. Minarelli trifft das Geschoss eine Stahlpanzerplatte, also einen Receptor von ganz anderer Beschaffenheit. Es ist der Stoßvorgang daher ein gänzlich verschiedener, und es muss eine andere Gleichung 2) zu seiner Bestimmung gefunden werden. Es ergibt sich dieselbe aus der Beobachtung, dass das Geschoss an der Platte vollkommen zerschellt, ohne sie zu verletzen, und dass die Splitter des zerstörten Projectils nur in der Ebene des Pendels, also senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung wegfliegen. Es ist daher die Endgeschwindigkeit des Geschossschwerpunktes nach dem Stoße gleich null, und die diesen besonderen Stoßvorgang bestimmende Gleichung ist in diesem Falle

$$v_\vartheta = 0. \tag{2)}$$

Man erhält also jetzt

$$w = \frac{m.\rho}{K} \cdot v_0.$$

Die Energiezerstreuung ist jetzt eine ganz andere, als in dem früheren Falle. Es ist

$$E''_Z = E_0 - E_\vartheta = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} K.w^2,$$

also

$$E''_Z = \frac{K - m\rho^2}{K} \cdot \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Das Geschoss gibt den $\frac{m\rho^2}{K}$ ten Theil seiner Energie an das Pendel ab, während der $\frac{K - m\rho^2}{K}$ te Theil zerstreut wird. Vergleicht man die Energiezerstreuung bei dem Pendel alter Form mit dem Betrage derselben Größe bei der neuen Form des Apparates, so findet man die Differenz

$$E'_Z - E''_Z = \frac{1}{2} m v_0^2 . \left\{ \frac{K_a}{K_a + m\rho^2} - \frac{K_n - m\rho^2}{K_n} \right\}.$$

Hiebei ist angenommen, dass beide Pendel von gleich schweren und gleich schnellen Projectilen getroffen werden und dass die Trägheitsmomente des Apparates alter und des neuer Form mit $K_a$, beziehungsweise $K_n$ bezeichnet werden. Man sieht aus der Form dieser Differenz, dass stets

$$E'_Z > E''_Z$$

ist, wenn nur, was hiezu hinreichend ist,

$$K_a \geqq K_n$$

ist. Diese Bedingung ist wohl immer erfüllt. Die Energiezerstreuung ist unter sonst gleichen Umständen größer bei dem ballistischen Pendel alter Form, als bei dem Pendel neuer Form.

Dies Resultat scheint verständlich, wenn man bedenkt, dass die Zerstörung des Geschosses im großen wohl dieselbe

in beiden Fällen sein dürfte, dass aber bei der alten Form des Apparates hiezu noch die in der Masse des Receptors geleistete Arbeit tritt, welche bei der neuen Form nicht geleistet wird.

Die Thatsache, dass zur Erzeugung von Wärme und Deformationsarbeit Energie des Projectils verbraucht und dem reinen Bewegungsvorgang entzogen wird, bedeutet keinen Fehler bei der Verwendung des ballistischen Pendels. Sie ist vielmehr bei der Berechnung der Beziehung zwischen Anfangsgeschwindigkeit des Pendels und Geschwindigkeit des Geschosses vor dem Stoße dadurch vollkommen berücksichtigt, dass diese Relation auf einen experimentellen, den Vorgang charakterisierenden Satz begründet worden ist.

Ein Fehler bei der Messung der Geschossgeschwindigkeit aus diesen Ursachen könnte nur dann eintreten, wenn die grundlegende Beobachtung, dass alle Geschossplitter nur in der Ebene des Pendels fliegen, nicht erfüllt wäre. Dann müsste die Gleichung $v_\vartheta = 0$ durch eine andere ersetzt werden.

Es wäre von besonderem Interesse, diese Verhältnisse auch experimentell zu prüfen. Dies ließe sich durch eine Aichung des ballistischen Pendels in seiner neuen Form mittels einer der anderen zur Messung von Geschossgeschwindigkeiten geeigneten Methoden durchführen. Es müsste diese Methode jedoch die Geschwindigkeit des Projectils nahezu an einer bestimmten Stelle seiner Bahn zu messen gestatten, wie dies mit dem ballistischen Pendel möglich ist. Diese Bedingung erfüllt die Methode der aperiodischen Condensatorentladungen, da sie die Messung der mittleren Geschossgeschwindigkeit auf wenigen Centimetern gestattet. Leider haben äußere Umstände mich an der Ausführung einer solchen Aichung verhindert.

Mit Hinblick auf den interessanten Verlauf der Geschossgeschwindigkeit in der nächsten Umgebung der Laufmündung wären weitere Geschwindigkeitsmessungen sehr zu wünschen. Hiezu könnte das ballistische Pendel in seiner neuen Form sehr erfolgreich Verwendung finden.

Es sei mir gestattet, zu bemerken, dass auch die Methode der aperiodischen Condensatorentladungen sich zu diesem Zwecke noch weiter ausgestalten lässt; man kann sie so modificieren, dass man an zwei Stellen der Bahn desselben

Projectils die Geschwindigkeit misst und somit eine Zu- oder Abnahme derselben unabhängig von den Variationen der Geschossgeschwindigkeit bei verschiedenen Schüssen bestimmen kann.

Es wäre von großem Interesse, in dieser Weise namentlich solche Gewehre zu untersuchen, deren Geschosse eine der Schallgeschwindigkeit nahe Anfangsgeschwindigkeit besitzen. Leider kann ich auch in dieser Richtung gegenwärtig keine Untersuchungen anstellen.

---

# Das Messen des Dampfdruckes durch Verdunstung

von

**W. Müller-Erzbach.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Mai 1901.)

Das durch die bekannte Formel $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}$ ausgedrückte Graham'sche Gesetz gilt nicht nur für die Diffusion durch poröse Scheidewände, sondern auch für die freie Diffusion. Graham selbst hat für diese weitere Giltigkeit einzelne Versuche mitgetheilt, bewiesen wurde sie jedoch erst durch die zahlreichen Beobachtungen von J. Loschmidt[1] und erklärt durch die theoretischen Erwägungen Stefans.[2] Nur in wenig Fällen gehen die Abweichungen der Versuchsergebnisse über die Grenze der Beobachtungsfehler etwas hinaus und werden von Loschmidt auf die in der Formel nicht berücksichtigten Unterschiede in der Form und Größe der Molecüle zurückgeführt.

Setzt man in der von mir angegebenen Weise[3] die Abhängigkeit der Diffusion vom Dampfdruck und vom Quadrate der absoluten Temperatur voraus, so findet man nach den

---

[1] J. Loschmidt, diese Sitzungsber., 61, S. 367 und 62, S. 468 (1870).

[2] J. Stefan, l. c. 63, S. 63 (1871).

[3] Müller-Erzbach, Wied. Ann., 34, S. 1047.

Dichten $d_1$ und $d_2$, wie nach den Spannungen $p_1$ und $p_2$ für das Verhältnis der Volumina $(v)$ die Gleichung

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_1}{p_2}\sqrt{\frac{d_2}{d_1}}$$

und für das Verhältnis der Gewichtsmengen $(g)$

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{p_1}{p_2}\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}.$$

Sind die Spannungen mit den Gewichtsmengen der ausgeströmten Gase oder Dämpfe zugleich gegeben, so erhält man nach der Formel $T_1^2 = \frac{sT^2 p_1}{s_1 p}$ die während des Ausströmens herrschende absolute Temperatur.[1] Nach zahlreichen eigenen, wie nach den von Großmann an der Hamburger Seewarte ausgeführten Beobachtungen lässt sich damit die Durchschnittstemperatur ebenso bequem wie zuverlässig[2] bestimmen. Ebenso ergibt sich aus $s_1 = \frac{sT^2 p_1}{T_1^2 p}$ die Spannung für jede beliebige Temperatur aus der Menge des entwickelten Gases, wenn nur für eine Temperatur der Gasdruck $s$ bekannt ist.

Um auf diese Weise den Dampfdruck des Wasserdampfes zu finden, ließen sich zunächst meine schon erwähnten, in der Zeitschrift für Instrumentenkunde mitgetheilten Versuche über die Bestimmung der nach dem Schmelzpunkte des Eises bezeichneten Temperatur benutzen. Sie ergeben die Druckresultate in demselben Grade genauer, wie die Durchschnittstemperatur zuverlässiger bestimmt werden kann.

---

[1] Zeitschr. für Instrumentenkunde, 10, S. 88 (1890).

[2] L. c. S. 95.

| Beobachtete Durchschnitts-temperatur | Schwan-kungen der Temperatur | Versuchsdauer | Nach der Ver-dunstung berechneter Dampfdruck | Dampfdruck beim Barometer-stand von 760 *mm* | Dampfdruck nach Regnault | Unterschied |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4·9° | 0·7° | 6 Tage | 6·45 *mm* | 6·43 *mm* | 6·49 | —0·06 |
| 4·9 } (an derselben Verdunstungsröhre) | 0·7 | 6 | 6·50 | 6·48 | | —0·01 |
| 4·9 | 0·7 | 6 | 6·51 | 6·49 | | ±0·0 |
| 4·9 | 0·7 | 6 | 6·55 | 6·53 | | +0·04 |
| 9·9 | 0·7 | 5 | 9·1 | 9·25 | 9·11 | +0·14 |
| 9·9 | 0·7 | 5 | 8·9 | 9·05 | | —0·05 |
| 9·9 | 0·7 | 5 | 8·8 | 8·95 | | —0·06 |
| 9·8 | 2·5 | 4 | 9·3 | 9·3 | 9·0 | —0·3 |
| 11·8 | 0·7 | 6 | 10·4 | 10·4 | 10·3 | +0·1 |
| 11·8 | 0·7 | 6 | 10·2 | 10·2 | | —0·1 |
| 11·8 (vorige Röhre) | 1·2 | 3 | 10·4 | 10·3 | | ±0·0 |
| 16·2 | 2·2 | 7 | 13·4 | 13·5 | 13·7 | —0·2 |
| 26·7 | 1·5 | 2 | 25·6 | 26·1 | 26·05 | +0·05 |
| 27·3 | 1·6 | 1 | 26·5 | 27·1 | 27·0 | +0·1 |
| 27·7 | 0·8 | 1 | 27·4 | 27·9 | 27·6 | +0·1 |
| 36·3 | 2·0 | 1 | 43·8 | 44·2 | 44·9 | —0·7 |
| 36·3 | 2·0 | 1 | 44·6 | 45·0 | | +0·1 |
| 45·7 | 2·6 | 1 | 73·0 | 73·2 | 73·7 | —0·5 |
| 45·7 | 2·6 | 1 | 71·2 | 71·4 | | —2·3 |
| 51·8 | 5·5 | 1 | 94·8 | 96·5 | 100·5 | —4·0 |
| 52·1 | 3·8 | 1 | 97·3 | 98·3 | 102·1 | —3·8 |

Wo die Temperatur nicht künstlich zu erhöhen war und nur in engen Grenzen schwankte, stehen die Resultate hinter denen der besten statischen Messungen nicht zurück. Ist diese Bedingung aber nicht mehr erfüllt, wie in der letzten Gruppe der angeführten Versuche, so werden die Beobachtungsfehler zu groß und die Resultate unbrauchbar. Um nun die Wärmeschwankungen zu verringern, ließ ich mir von C. Gerhardt in Bonn einen Thermostaten herstellen, der durch die Wirkung einer größeren Luftblase über dem Quecksilberbehälter eine scharfe und wenig veränderliche Einstellung zuließ. In der Höhe von 50° giengen die Schwankungen über 0·2° selten und über 0·4° überhaupt nicht hinaus. Innerhalb des Thermostaten sind natürlich auch noch kleine Temperaturunterschiede vorhanden, und ich sah nur den Wert als maßgebend an, welchen ein in Schwefelsäure eingetauchtes Thermometer zeigte, wenn diese Schwefelsäure im Thermostaten unmittelbar neben derjenigen aufgestellt war, die im Inneren der Versuchsflasche die Verdunstungsröhre umgab. Die beiden verwendeten Verdunstungsröhren hatten eine solche Größe, dass die eine *(A)* bei 0° und normalem Luftdruck in 24 Stunden 3·42 *mg*, die andere *(B)* 4·015 *mg* Wasserdampf an die durch Schwefelsäure getrocknete Luft verlor. Bei den sechs zuerst angegebenen Versuchen waren beide Verdunstungsröhren in derselben Flasche aufgestellt. Nachher befand sich jede Röhre in einer besonderen Flasche.

| Abgelesene Versuchs-temperatur | Versuchsdauer | Barometerstand | Wasserverlust in einer Stunde | Nach dem Barometerstande corrigiert | Berechneter Dampfdruck | Dampfdruck nach Regnault | Unterschied |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 49·9° | 5·9 Stunden | 758 *mm* | 3·98 (Röhre *A*) | 3·97 *mg* | 91·6 *mm* | 91·5 *mm* | +0·1 |
| | | | 4·66 (*B*) | 4·65 | 91·4 | | —0·1 |
| 48·8 | 15·3 | 761 | 3·71 (*A*) | 3·71 | 86·2 | 86·6 | —0·4 |
| | | | 4·38 (*B*) | 4·38 | 86·7 | | +0·1 |
| 46·2 | 8 | 762 | 3·19 (*A*) | 3·20 | 75·6 | 75·9 | —0·3 |
| | | | 3·75 (*B*) | 3·76 | 75·6 | | —0·3 |
| 46·6 | 7 | 749 | 3·33 (*A*) | 3·29 | 77·3 | 77·5 | —0·2 |
| | | | 3·93 (*B*) | 3·88 | 77·8 | | +0·3 |
| 53·0 | 6·92 | 753 | 5·59 (*A*) | 5·54 | 106·6 | 106·6 | ±0 |

Der Durchschnitt aller neun Versuche ergibt eine Abweichung von —0·1*mm*. Also erweist sich die Methode trotz der großen Bequemlichkeit ihrer Anwendung für den Wasserdampf unbedingt zuverlässig. Sie ist jedoch nur für diejenigen Temperaturen brauchbar, die vom Siedepunkt einen gewissen Abstand haben. In der Nähe des Siedepunktes werden beim Wasser wie bei anderen Flüssigkeiten die Werte viel zu groß.

Die innere Weite der Verdunstungsröhren betrug beim Wasser nicht über 7·5*mm*. Den Angaben Stefans entsprechend fand ich die Verdampfungsgeschwindigkeit beim Einströmen des Dampfes in freie Luft vom Querschnitte der Röhre unabhängig. Stefan bezeichnet 0·6*mm* und 6*mm* als Grenzen für den Durchmesser der Röhren. Für gewöhnliche Temperatur und Wasserdampf kann aber der Durchmesser ohne Änderung des Verhältnisses in der Verdunstungsmenge viel größer werden. Röhren von 75*mm* Länge ergaben bei Durchmessern von 6 und fast 23*mm* ohne Erwärmung im Zimmer aufgestellt ihren Querschnitten entsprechend für die weitere eine über 14mal größere Dampfmenge als für die kleinere. Bei verschiedenen Zimmertemperaturen blieb dieses Verhältnis unverändert. Als die Röhren aber nur bis 27° oder 28° künstlich erwärmt wurden, stieg für die weitere der Verlust auf das 70- und 90fache der kleineren. Zu der Bewegung der Diffusion war vermuthlich diejenige der Strömung hinzugetreten. Und das geschieht auch bei gewöhnlicher Temperatur, wenn die Weite der durchströmten Röhren über 23*mm* hinaus noch erheblich wächst. Ein Becherglas von 46*mm* Durchmesser verlor bei Zimmertemperatur mehr als das Dreifache der nach seinen Dimensionen berechneten Menge an Wasserdampf. Nimmt man dagegen schwerer flüchtige Substanzen, wie Oxaläther oder Citronenöl, so zeigen sich jene als Strömungen aufgefassten Störungen noch nicht, wenn auch die Durchmesser der durchströmten Cylinder auf 60 und mehr Millimeter anwachsen. Ich konnte deshalb mit solchen Gefäßen aus dem Verdunstungsverlust den Dampfdruck des Quecksilbers bestimmen.[1]

[1] Verh. Deutsche Phys. Ges., 2, S. 127 (1900).

Wie die obere ist auch die untere Grenze für den Durchmesser der Verdunstungsröhren wesentlich von der Flüchtigkeit der verdampfenden Flüssigkeit abhängig, sie lag nach meinen Beobachtungen für leichter siedende Körper viel höher, als sie Stefan angibt. Bis zu fast 5 *mm* Durchmesser ließ sich noch ein schwacher Einfluss der Röhrenweite auf das Durchströmen der verschiedenen Dämpfe erkennen. Ich habe deshalb nur Röhren von 5·5 *mm* bis 8 *mm* Durchmesser als Verdunstungsröhren benutzt, wenn auch für leichter siedende Flüssigkeiten in der beschriebenen Weise der Dampfdruck bestimmt werden sollte. Bleiben sie eingehalten, so lassen sich für weite Temperaturabstände die Mengen oder die Spannungen des Dampfes mit ähnlicher Genauigkeit nach den angegebenen Formeln ausdrücken, wie es oben für Wasserdampf mitgetheilt ist.

Zum Belege mögen einige neu angestellte Beobachtungen über verdunstendes Chloroform dienen, welche mit den ausführlicheren Messungen von Regnault verglichen werden können. Kennt man für dieselbe Temperatur und denselben Druck das Vielfache $(V)$ vom Wasserdampfe, welches aus einer gleich gestalteten Verdunstungsröhre an Chloroform entweicht, so erhält man den Dampfdruck $(p_1)$ des Chloroforms aus demjenigen des Wassers $p_2$ und aus ihren Dichten $d$ nach der Formel

$$p_1 = p_2 V \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}.$$

Der bequemeren Übersicht wegen seien einige Verdunstungswerte der Normalröhre (1) für die hier vorkommenden Temperaturen und für die Zeit von 24 Stunden angeführt.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0° | 3·42 *mg* | 14° | 9·79 *mg* |
| 10 | 7·33 | 15 | 10·52 |
| 11 | 7·88 | 16 | 11·29 |
| 12 | 8·47 | 17 | 12·12 |
| 13 | 9·10 | 18 | 12·97 |

In der nachstehenden Tabelle findet sich unter $A$ die Bezeichnung der Verdunstungsröhre nach dem Factor, mit

welchem die vorstehenden Zahlen multipliciert werden müssen, um die Verdunstungsmenge der Röhre anzugeben. *B* enthält die nach dem Integrator festgestellte und durch directe Ablesung oft controlierte Versuchstemperatur, *C* die Versuchsdauer, *D* die Verdunstungsmenge des Chloroforms und *E* diejenige des Wasserdampfes aus der Normalröhre (1). Sie ist nicht ohne weiteres nach *B* zu berechnen, weil dazu der Barometerstand berücksichtigt werden muss, und dieser ist weggelassen, weil Wasser und Chloroform unter demselben Drucke verdampften. Die Reihe *V* gibt, wie schon erwähnt, das Vielfache von *E* an, welches in der Verdunstungsmenge *D* ausgedrückt ist und bei abweichender Größe der Röhre in der zweiten Zahl den dieser Größe entsprechenden Quotienten. Der Wasserverlust wurde nur mit einer Röhre von der Größe 1 ermittelt. Unter *S* sind die nach dem Versuche aus der Verdunstungsmenge berechneten Spannungen angeführt, denen dann in der Reihe *R* die Werte von Regnault gegenübergestellt werden.

| *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *V* | *S* | *R* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10·0 ° | 22·5 Stunden | 197 *mg* | 6·8 *mg* | 28·5 | 100·5 *mm* | 100·1 *mm* |
| 0·9432 | 12·2 | 48 | 453 | 17·4 | 26·0 —27·56 | 112·3 | 111·5 |
| 0·9432 | 16·9 | 24 | 292 | 12·2 | 23·9 —25·3 | 138·8 | 138·1 |
| 0·9432 | 17·0 | 48 | 587·5 | 24·6 | 23·9 —25·3 | 140·1 | 139·9 |
| 1·532 | 16·25 | 24 | 445 | 11·4 | 39·03—25·58 | 135·2 | 135·1 |
| 1·532 | 15·5 | 24 | 427·5 | 10·8 | 39·7 —25·83 | 130·1 | 130·4 |

Regnault leitete aus seinen Beobachtungen zwei Formeln ab, nach welchen die Werte des Dampfdruckes zu berechnen sind. Die Resultate weichen nach den beiden Formeln für einzelne Temperaturen um mehr als 2 *mm* voneinander ab. Ich habe vorstehend die nach der großen Formel berechneten Zahlen benutzt, die sich am genauesten an Regnault's Messungen anschließen und die er selbst für gewisse Temperaturen mitgetheilt hat.[1] Sie sind nach der dynamischen Methode der

[1] Pogg. Ann., 111, S. 402 (186).

Beobachtung des Siedepunktes bei bestimmtem Druck entstanden und wichen von den unmittelbar gemessenen Druckhöhen zum Theil erheblich, beispielsweise für 36° um 29 *mm* ab. Regnault glaubte diese Abweichungen auf geringe Verunreinigungen des Chloroforms zurückführen zu müssen und gab seiner dynamischen Methode den Vorzug, weil sie weniger beeinflusst würde. Doch auch bei Anwendung derselben Methode ergaben sich für Regnault nicht unerhebliche Unterschiede unter früheren[1] und späteren Versuchen, die bei 40° 2 *mm*, bei 50° über 6 *mm* ausmachten. Im Vergleiche damit erscheinen meine ja ebenfalls nach einer dynamischen Methode erhaltenen Resultate recht constant, sie weichen für nahe liegende Temperaturen untereinander nur wenig ab und stimmen auch mit den letzten genaueren Angaben Regnault's so vollständig überein, dass die neue dynamische Methode trotz der viel leichteren Ausführbarkeit mindestens als ebenso leistungsfähig hingestellt werden kann als die ältere.

Die größere unter den angeführten Verdunstungsröhren zeigte für 17° in 24 Stunden einen Zuwachs in der Verdunstungsmenge des Chloroforms von mehr als 3 *mg*, wenn die Temperatur um $^1/_{10}$° gestiegen war. Chloroform erweist sich demnach für solche Temperaturen ebenfalls wohl geeignet zur Herstellung eines empfindlichen Integrators, doch gebe ich noch immer dem Vierfach-Chlorkohlenstoff den Vorzug, weil er, ebenso unabhängig vom Feuchtigkeitsgehalte der Luft wie Chloroform und demnach gleich leicht verwendbar, in weiten Temperaturgrenzen sich als brauchbar bewährte.

Das beschriebene Verfahren erscheint besonders geeignet, den Dampfdruck solcher Körper zu messen, deren Siedepunkt hoch liegt und für welche die Spannung bekanntlich bei niedrigen Temperaturen nur sehr schwer festgesetzt werden kann, wie ja das Beispiel des Quecksilbers beweist. Quecksilber als Flüssigkeit stellt denn auch wie andere Körper desselben Aggregatzustandes weitere Schwierigkeiten nicht entgegen. Anders aber liegt es bei starren Körpern, für welche

---

[1] Pogg. Ann., 93, S. 537 (1854).

erst nachgewiesen werden muss, dass sie mit ihrer Maximalspannung entweichen. Von diesen habe ich oxalsaures Methyl und Naphtalin nach meiner Versuchsweise geprüft, weil beide ohne Schwierigkeit auch als Flüssigkeiten beobachtet werden konnten und weil für beide ältere Druckmessungen vorlagen.

Die zur Verdunstung benutzten Gefäße waren entweder wie bei den früheren Versuchen engere Röhren oder kleine Flaschen, deren Hals nicht über 10 *mm* Durchmesser hatte. Nur für Versuche bei gewöhnlicher Zimmertemperatur kamen aus dem oben angegebenen Grunde Flaschen mit weiterer Öffnung zur Verwendung. Sie sind wie alle anderen durch den Verdunstungsfactor nach der oben erwähnten Verdunstungsröhre 1 bezeichnet und zeigen in der nicht künstlich erhöhten Temperatur jedenfalls keine wesentlich abweichenden Resultate, wie aus den nachstehend mitgetheilten Beobachtungen hervorgeht. Die Versuche bis zu 61·5° abwärts wurden der größeren Verdampfungsmenge halber an freier Luft ausgeführt, das Verdunstungsgefäß war außen bis an den oberen Rand in einem Becherglase mit Wasser umgeben, und das Becherglas selbst befand sich in einem weiten Behälter, der ebenfalls Wasser enthielt und durch eine Gasflamme erwärmt wurde. Die Temperatur änderte sich dabei nur langsam, und ich halte meine Angaben bis zur Grenze von einem halben Grad für genau. Von 55·7° bis 42·6° erfolgte die Verdunstung innerhalb des Thermostaten, doch wurde bei längeren Versuchen mit den beiden größten Verdunstungsröhren zur Vermeidung eines stärkeren Gegendruckes die Seitenthür vorübergehend kurze Zeit geöffnet. Bei den Versuchen von 31° bis 26° standen die Verdunstungsgefäße in einem mit Wasser gefüllten Becherglase auf dem Thermostaten, und bei noch geringeren Wärmegraden standen sie in freier Luft.

Oxalsaures Methyl, für welches im Vergleiche mit Wasser der Ausdruck aus den Dampfdichten $\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$ mit 2·56 berechnet ist, ergab die folgenden Resultate:

| Factor der Verdunstungsröhre | Versuchstemperatur | Versuchsdauer | Verlust in einer Stunde | Verhältnis zum Wasserverlust | Berechneter Dampfdruck | Dampfdruck nach Regnault |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6·2 | 83 ° | 2 1/2 Stunden | 32 *mg* | 0·246 | 38·4 *mm* | 37·1 *mm* |
| 6·2 | 82 | 3 | 29 | 0·234 | 35·3 | 35·4 |
| 6·2 | 81 | 2 | 28·5 | 0·24 | 34·6 | 33·7 |
| 6·2 | 81 | 1 1/2 | 27·5 | 0·23 | 33·2 | 33·7 |
| 6·2 | 78·5 | 2 1/2 | 24 | 0·23 | 29·9 | 29·7 |
| 6·2 | 78 | 1 1/2 | 23 | 0·22 | 28·5 | 29·2 |
| 6·5 | 68 | 1 1/2 | 15 | 0·22 | 18·4 | 17·7 |
| 6·45 | 63 | 2 | 11·2 | 0·22 | 14·5 | 13·6 |
| 7·5 | 61·5 | 3 | 12·2 | 0·22 | 13·3 | 12·5 |
| 6·6 | 55·7 | 5 | 4 | 0·11 | 5·2 | 9·1 Thermostat |
| 1·87 | 55·7 | 5 | 1·1 | 0·11 | 5·2 | 9·1 Thermostat |
| 6·6 | 51·3 | 3 1/2 | 3·2 | 0·44 | 4·3 | 7·4 Thermostat |
| 1·87 | 51·3 | 7 | 1·1 | 0·12 | 4·6 | 7·4 Thermostat |
| 6·6 | 46·1 | 5 | 2·3 | 0·11 | 3·2 | 5·4 Thermostat |
| 1·87 | 46·1 | 8 | 0·65 | 0·107 | 3·1 | 5·4 Thermostat |
| 6·6 | 44·6 | 17 | 2·0 | 0·10 | 2·7 | 4·9 Thermostat |
| 6·45 | 42·6 | 6 | 1·7 | 0·10 | 2·5 | 4·3 |
| 6·2 | 29·5 | 20 | 0·57 | 0·07 | 0·93 | 1·75 |
| 6·3 | 29 | 22 | 0·66 | 0·09 | 1·2 | 1·71 |
| 6·3 | 29 | 24 | 0·58 | 0·08 | 0·9 | 1·71 |
| 6·3 | 28·1 | 22 | 0·41 | 0·06 | 0·6 | 1·68 |
| 6·3 | 28·0 | 22 | 0·43 | 0·06 | 0·6 | 1·68 |
| 6 3 | 27·5 | 22 1/2 | 0·56 | 0 09 | 0·96 | 1·65 |
| 3·1 | 27·5 | 22 1/2 | 0·29 | 0 09 | 0·96 | 1·65 |
| | | | Der ganze Verlust | | | |
| 6·45 | 16·5 | 2 Tage | 5·5 | 0·038 | 0·20 | 0·77 |
| 6·45 | 16·6 | 4 | 11·6 | 0·038 | | |
| 6·45 | 15·3 | 4 | 10 | 0·036 | 0·18 | 0·69 |
| 12·6 | 14·4 | 21 | 95 | 0·036 | | |
| 12·6 | 15·9 | 15 | 84 | 0·039 | | |
| 12·6 | 13·4 | 13 | 55·5 | 0·036 | 0·16 | 0·54 |

Alle Beobachtungen der ersten Gruppe für höhere Temperaturen und über das flüssige oxalsaure Methyl zeigen eine befriedigende Übereinstimmung mit Regnault's Messungen. Durch Benutzung eines Thermostaten, der einen Abzug der Dämpfe gestattet, wäre die Bestimmung der Temperatur und damit des Dampfdruckes wahrscheinlich noch etwas weniger schwankend gewesen. Doch genügen die erzielten Resultate vollständig, um die Brauchbarkeit meiner Methode für höhere Temperaturen zu beweisen. Anders aber liegt es bei den Versuchen in geringerer Temperatur. Noch über dem Schmelzpunkte fällt in seiner Nähe bei 55° die Zahl für den relativen Verlust, die vorher nur langsam abgenommen hatte, plötzlich von 0·22 auf 0·11, und ähnlich stark sind die Abweichungen des berechneten Dampfdruckes von Regnault's Beobachtung. Die Zahl meiner Versuche geht über die vorstehend angegebenen weit hinaus, aber sie zeigen keine irgend wesentliche Abweichung. In demselben Wasserbehälter auf dem Thermostaten können zwei ganz gleiche Verdunstungsröhren im Laufe von 24 Stunden, also lange Zeit hindurch, Verluste aufweisen, die sich um mehr als 30% unterscheiden. Die Maximalspannung des festen Salzes war also durch künstliche Erwärmung irgend sicher nicht zu erzielen. Bei gewöhnlicher Lufttemperatur erhielt ich wieder besser unter sich übereinstimmende Resultate, aber ihr Verhältnis zum wahren Dampfdruck ist nicht festgestellt. Jedenfalls lassen sich für das feste Salz in der beschriebenen Weise nur untere Grenzen des Dampfdruckes erkennen. In einem Falle zeigte das vorher geschmolzene Salz einige Tage hindurch einen etwas höheren Dampfdruck als die pulverisierten Krystalle, aber in keinem von vier neuen Versuchen wiederholte sich diese Erscheinung.

Naphtalin mit dem Schmelzpunkte 79·2° ergab die folgende Versuchsreihe, in welcher $\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}$ mit 2·71 bewertet ist.

| Factor der Verdunstungsröhre | Versuchstemperatur | Versuchsdauer | Verlust in einer Stunde | Verhältnis zum Wasserverlust | Berechneter Dampfdruck | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7·5 | 82·5° | 2 Stunden | 12·5 *mg* | 0·080 | 11·6 *mm* | flüssig |
| 7·5 | 80·5 | 1 | 11 | 0·079 | 10·7 | |
| 7·4 | 80·5 | 2 | 10·4 | 0·074 | 10·1 | |
| 7·5 | 79·5 | 2 | 10 | 0·073 | 9·2 | |
| 4·3 | 79·5 | 2 | 5·6 | 0·070 | 8·9 | |
| 7·5 | 78 | 2 | 8·8 | 0·070 | 8·5 | 9 *mm* von Naumann beobachtet |
| 2·3 | 76 | 2 | 2·5 | 0·071 | | |
| 7·5 | 70 | 2 | 6 | 0·071 | 6·1 | |
| 7·5 | 68 | 2 1/2 | 5 | 0·065 | | |
| 7·5 | 63 | 2·2 | 3 | 0·050 | 3·2 | |
| 6·2 | 63 | 3 | 2·8 | 0·052 | | |
| 7·5 | 58·5 | 6 | 1·5 | 0·033 | | |
| 7·5 | 57·2 | 17 | 0·79 | 0·018 | | mit Thermostat |
| 7·5 | 53·5 | 9 | 0·59 | 0·016 | | |
| 7·5 | 46·1 | 19 | 0·40 | 0·017 | | |
| 7·5 | 45·2 | 14 1/2 | 0·46 | 0·019 | | |
| 6·3 | 28 | 48 | 0·05 | 0·008 | | |
| 6·3 | 27·5 | 17 | 0·12 | 0·02 | | |
| | | | Gesammtverlust | | | |
| 13·0 | 18·7 | 4 1/2 Tage | 6 *mg* | 0·0075 | | |
| 8·0 | 18·5 | 6 | 4·5 | 0·0070 | 0·04 | |
| 1·5 | 17·5 | 17 | 2·2 | 0·0069 | | |
| 14·2 | 16·2 | 16 | 19 | 0·0074 | | |
| 7·4 | 16·2 | 14 | 7·4 | 0·0061 | | |
| 14·2 | 15·2 | 8 | 8 | 0·0067 | | |
| 14·2 | 14·5 | 21 | 21 | 0·0069 | | |
| 14·2 | 13·6 | 45 | 41 | 0·0067 | | |
| 14·2 | 13·5 | 13 | 10·5 | 0·0060 | | |

Naumann[1] hat über den Dampfdruck des Naphtalins einige statische Messungen ausgeführt und für 100° einen Druck von 20·5 *mm*, für 78° von 9 *mm* angegeben. Sucht man in bekannter Weise nach der ersten Zahl und dem von Naumann angegebenen Siedepunkte des Naphtalins 218 den constanten Quotienten, so erhält man aus $\frac{218-100}{100-22\cdot7}$ die Zahl 1·53, welche für den von Kopp gefundenen Siedepunkt des Naphtalins 216·8 nur wenig kleiner ausfällt. Nach diesem Quotienten ergibt sich in genügender Übereinstimmung mit Naumanns Messung für 78° durch Rechnung ein Druck von 8·3 *mm*.

Berechnet man in derselben Weise die Druckwerte für

| | |
|---|---|
| 82·5°, so erhält man | 10·1 *mm*, |
| 80·5°, | 9·7 |
| 79·5° und | 9·3 |
| 70° | 5·8 |

Diese Zahlen stimmen mit den aus der Verdunstung gefundenen noch ziemlich gut überein. Auch das Verhältnis der Verdunstung von Naphtalin und Wasser nimmt von 82·5° bis 70° stetig und langsam ab. Weiter abwärts aber erfolgt eine starke und zuweilen unregelmäßige Abnahme, die jedoch im ganzen erheblich gleichmäßiger blieb als beim oxalsauren Methyl. Unterhalb des Schmelzpunktes hält sich der Dampfdruck des Naphtalins zweifellos ungleich beständiger, und bei gewöhnlicher Luftwärme zeigt sich bei beiden Stoffen der Verdunstungsverlust viel constanter als bei den Versuchen in etwas höherer Temperatur. Wie schon bemerkt, konnte im letzteren Falle durch das Einstellen des Verdunstungsgefäßes in weitere Wasserbehälter selbst bei Anwendung größerer Mengen der festen Substanz die Verschiedenheit der Verdunstung keineswegs verhindert werden. Ein local stärkeres Zuströmen der Wärme erscheint ausgeschlossen und deshalb lässt sich nicht annehmen, dass die auffallende Ungleichheit durch verschiedene Zersetzbarkeit einzelner Theile der Sub-

[1] Ann. Chem. Pharm., 159, S. 334 (1871).

stanz verursacht sein könnte. Eine vorübergehende Ungleichmäßigkeit wird bei den Versuchen bei gewöhnlicher Temperatur durch ihre lange Dauer unzweifelhaft theilweise verdeckt, ob aber ganz, halte ich nicht für wahrscheinlich. Jedenfalls ist die größere Gleichmäßigkeit der Verdunstung in nicht künstlich erwärmter Luft zu beachten. Sie zeigte sich in unveränderter Weise, ja noch bestimmter, in der durch eine Wasserluftpumpe verdünnten Luft. Mit der Verdünnung nahm in befriedigender Proportionalität die Menge des aus dem oxalsauren Methyl, wie aus dem Naphtalin entweichenden Dampfes zu. Die dabei angewandten Verdünnungen lagen in den Grenzen von $^1/_3$ und $^1/_{28}$ des gewöhnlichen Luftdruckes, wie ich durch Barometerproben oder aus der Menge von mit verdunstetem Jodamyl feststellte. Nach dieser Erfahrung setzte die Luft der Verdunstung ein specifisches Hindernis nicht entgegen.

Der besseren Beurtheilung wegen wurde noch an einem dritten festen Körper, dem Anderthalb-Chlorkohlenstoff ($C_2Cl_6$), die Verdunstung beobachtet. Er schmilzt bei 160° und siedet bei 182°. Das Dichteverhältnis $\sqrt{\frac{8\cdot 157}{0\cdot 622}}$ ist mit 3·62 zu berechnen. Die Versuche wurden ähnlich wie vorher bei Temperaturen von 77·5° abwärts ausgeführt und haben zu dem nachstehenden Ergebnisse geführt.

| Factor der Verdunstungsflasche | Versuchstemperatur | Versuchsdauer | Verlust in einer Stunde | Verhältnis zum Wasserverlust | Berechneter Dampfdruck | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6·45 | 77·5° | | 17 *mg* | 0·16 | 13·2 *mm* | 13·5 *mm* bei 78° von Naumann gefunden. |
| 7·66 | 75 | | 14 | 0·13 | 10·4 | |
| 3·1 | 75 | | 6 | 0·13 | | |
| 3·9 | 72·5 | | 5·5 | 0·12 | | |
| 3·1 | 72 | | 5·1 | 0·13 | | |
| 6·45 | 72 | | 9·4 | 0·11 | | |
| 3·9 | 71·5 | | 6 | 0·12 | | |
| 6·45 | 69 | | 9 | 0·12 | – | |

| Factor der Verdunstungsflasche | Versuchstemperatur | Versuchsdauer | Verlust in einer Stunde | Verhältnis zum Wasserverlust | Berechneter Dampfdruck | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3·8 | 68 ° | 2 1/2 Stunden | 6 *mg* | 0·14 | | |
| 4 | 68 | 2 1/2 | 6·2 | 0·14 | | |
| 6·45 | 57·6 | | 5 [1] | 0·13 | 4·8 *mm* | [1] In einem zweiten Versuche bestätigt. |
| 3·9 | 57·2 | | 2·2 | 0·10 | | |
| 5·7 | 55·7 | 7 | 2·5 | 0·082 | | |
| 6·2 | 51·3 | 8 | 2·45 | 0·091 | | |
| 6·2 | 46·1 | 6 | 1·7 | 0·085 | | |
| 6·2 | 44·8 | 16 | 1·4 | 0·078 | | |
| 6·45 | 42·6 | | 1·54 | 0·091 | | |
| 6·45 | 30 | 24 | 0·51 | 0·065 | | |
| 6·45 | 29·5 | | 0·51 | 0·066 | | |
| 6·45 | 28 | 8 1/2 | 0·55 | 0·081 | | |
| 6·45 | 27·5 | 17 1/5 | 0·57 | 0·086 | | |
| 6·45 | 27·2 | 8 3/5 | 0·57 | 0·087 | | |
| 5·8 | 29 | | 0·56 | 0·085 | | |
| | | | Gesammtverlust | | | |
| 6·45 | 16·6 | 4 Tage | 12 *mg* | 0·0397 | | |
| 12·6 | 16·5 | 6 | 33·7 | 0·039 | 0·15 | nach Naumanns Beobachtung. |
| 5·8 | 16·5 | 4 | 11·4 | 0·041 | | |
| 6·45 | 16·2 | 10 | 27·5 | 0·0364 | | |
| 6·45 | 15·3 | 4 | 10 | 0·036 | | |
| 6·85 | 15·3 | 4 | 11·7 | 0·0365 | | |
| 6·45 | 14·9 | 7 | 24 | 0·0372 | | |

Die Druckabnahmen zeigen eine ungleich größere Stetigkeit als die der beiden vorhergehenden Körper nach ihrer Erstarrung, doch kommt trotzdem beim künstlichen Erwärmen in einem der mitgetheilten Fälle noch eine Abweichung von fast $^3/_{10}$ vor. Aus Naumann's Beobachtungen l. c. kann man nach den Druckwerten für Chlorkohlenstoff 13·5 *mm* bei 18°

und 31 *mm* bei 100° den constanten Quotienten für die Ermittelung der Dampfspannung nicht benutzen, denn keine dieser Zahlen passt in ähnlicher Weise wie oben beim Naphtalin für die übrigen Fälle. Da jedoch die relative Verdampfungsmenge im ganzen eine gleichmäßige Veränderlichkeit zeigt, so darf man annehmen, dass beim Chlorkohlenstoff in der Regel die Maximalspannung wirksam gewesen war. Dafür spricht außerdem der folgende Versuch.

Eine vorher nicht benutzte neue Glasflasche von 860 $cm^3$ Inhalt wurde durch Quecksilber abgesperrt und auf das Quecksilber in den Hals der Flasche eine nach oben offene Glasröhre mit Anderthalb-Chlorkohlenstoff gelegt. Der Integrator ergab für die 37 ersten Tage eine Temperatur von 19·4°, für die 23 letzten von 17·6°. Nach 10 Tagen waren von dem Chlorkohlenstoff aus der Glasröhre 1·7 *mg* verschwunden, nach 37 Tagen noch 0·2, also im ganzen 1·9 *mg*. Dabei war die Flasche inwendig blank geblieben und ließ nichts von einem Beschlage von Chlorkohlenstoff erkennen, wie er anscheinend leichter bei älteren Gefäßen durch locale Abkühlung gebildet wird. 23 Tage später war von neuem 1 *mg*, also viel mehr als in den vorangehenden 27 Tagen verdunstet, und jetzt war die Glasflasche auf der Innenseite deutlich mit einem sternförmigen Krystallbeschlage bedeckt. Nach 37 Tagen darf die Luft in der Flasche jedenfalls als mit dem Dampfe von Chlorkohlenstoff gesättigt angesehen werden. Dazu sind 1·9 *mg* oder 0·18 $cm^3$ aufgenommen, was einem Drucke von 0·16 *mm* entsprechen würde, während man nach meinen Beobachtungen aus der Verdunstungsmenge für 19·40 0·18 *mm* berechnet. Eine Flasche von 1260 $cm^3$ Inhalt nahm bei 19·4° in 37 Tagen 0·6±0·2 *mg* oder 0·1 $cm^3$ Naphtalindampf auf. Daraus ergibt sich für 19·4° ein Dampfdruck von 0·06±0·2 *mm*, während aus der Verdunstung für 18·5° 0·04 *mm* zu folgern ist. Der Versuch ist für Naphtalin noch einwandfreier, weil in den 23 folgenden Tagen keine weitere Abnahme des Naphtalins und kein Niederschlag auf der Innenseite der Flasche erfolgte. Selbst für feste Körper findet man demnach trotz der genannten Abweichungen ihren meist geringen Dampfdruck aus der Verdunstung sicherer als durch directe Messung von Quecksilberhöhen, welche durch

anhaftendes Gas so sehr erschwert wird. So beobachtete Naumann für Naphtalin bei 19° den Dampfdruck von 2 *mm*, der sehr viel höher war als der entsprechende des Chlorkohlenstoffes, während bei 78° und 100° der Dampfdruck des Naphtalins ungefähr $^2/_8$ von demjenigen des Chlorkohlenstoffes ausmachte. Auch würde man nach Naumann's Resultaten für die höhere Temperatur infolge des dabei ermittelten Quotienten für 19° nur eine Dampfspannung des Naphtalins von 0·37 *mm* erwarten dürfen. Naumann hebt hervor, dass sowohl beim Naphtalin, als auch beim Chlorkohlenstoff das Quecksilber des Manometers in auffallend kurzer Zeit einen festen Stand erreichte, wenn er die Temperatur von 100° auf 78° herabsetzte oder umgekehrt wieder erhöhte. Das entspricht auch meinen Wahrnehmungen über die Verdunstung bei Temperaturen von dieser Höhe. Bei geringeren Wärmegraden aber machten sich die mitgetheilten Unregelmäßigkeiten bemerklich, und sie müssen in ähnlicher Weise die manometrischen Messungen stören, da sie wiederholt stundenlang andauerten. Sie sind von der Natur der untersuchten Körper abhängig und waren beim oxalsauren Methyl ungleich größer als beim Naphtalin und Chlorkohlenstoff. Auch für das Methylsalz stimmen bei gewöhnlicher Temperatur die auf die umstehend beschriebene Weise und durch Verdunstung bestimmten Druckwerte entsprechend überein, während Regnault's Zahl um die Hälfte größer ist.

Das Hauptergebnis meiner Untersuchung sei schließlich dahin zusammengefasst:

1. Der Dampfdruck der vorstehend genannten flüssigen Körper lässt sich durch Verdunstung leichter und ebenso genau bestimmen als durch manometrische Messung.

2. Feste Körper können je nach ihrer Natur längere oder kürzere Zeit in einem Zustande verharren, in welchem der von ihnen entwickelte Dampf erheblich geringere als die normale Spannkraft zeigt.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

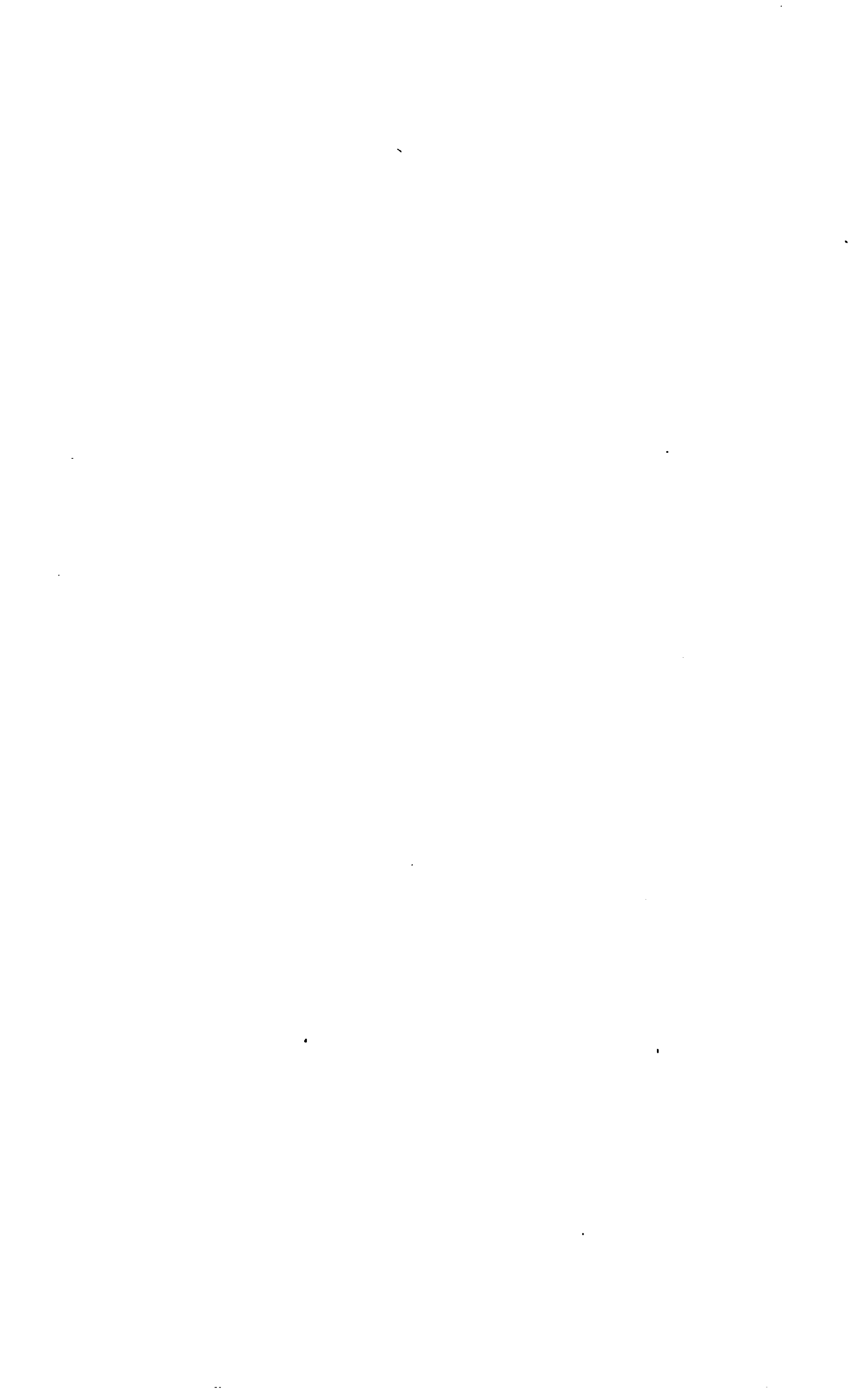
**MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.**

CX. BAND. VI. HEFT.

—

ABTHEILUNG II. a.

**ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.**



## XIV. SITZUNG VOM 7. JUNI 1901.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXII, Heft IV (April 1901).

Herr Dr. Vincenz Hilber, a. ö. Professor an der Universität in Graz, sendet eine vorläufige Mittheilung ein unter dem Titel: »Geologische Reisen in Nordgriechenland und Makedonien 1899 und 1900«.

Das w. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine im Privatlaboratorium des Verfassers zur Ausführung gelangte Arbeit von Herrn stud. phil. Rudolf v. Hasslinger, betitelt: »Über Potentialdifferenzen in Flammengasen und einigen festen Elektrolyten«.

Herr Prof. E. Lippmann übersendet eine Arbeit aus dem III. chemischen Universitätslaboratorium von Herrn Arnold Nabl, betitelt: »Über Einwirkungen von Hydroperoxyd«.

Herr Otto Weininger in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Eros und Psyche. Biologisch-psychologische Studie«.

Herr Dr. Karl Hillebrand überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Die Anwendung der Beugungserscheinungen auf astronomische Messungen«.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben überreicht das II. und III. Heft des II. Bandes der »Wissenschaftlichen Ergebnisse der Reisen in Madagaskar und Ostafrika in den Jahren 1889 bis 1895«, von Herrn Dr. A. Voeltzkow, welche der Verfasser der kaiserlichen Akademie als Geschenk übermittelt.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine im physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit vor, betitelt: »Magnetisierungszahlen seltener Erden«, von Herrn Dr. Stefan Meyer.

Herr Prof. Rud. Wegscheider überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Über simultane Gleichgewichte und die Beziehungen zwischen Thermodynamik und Reactionskinetik homogener Systeme«.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Koelliker A., Die Medulla oblongata und die Vierhügelgegend von *Ornithorhynchus* und *Echidna*. Leipzig, 1901. 4°.

# Magnetisierungszahlen seltener Erden

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1901.)

Die Elemente aus der Gruppe der seltenen Erden zeigen ein so ausgeprägtes magnetisches Verhalten, dass es nützlich erscheint, auf diese Eigenschaft der genannten Körper näher einzugehen. Leider ist es außerordentlich schwer, wirklich reines Material, d. h. solches zu erhalten, das bloß je eines der fraglichen Elemente enthält. Da ich nun neuerdings in der Lage war, an derartigen Substanzen oder auch solchen, bei welchen mir die Beimengungen bekannt waren, Messungen vornehmen zu können, sollen im folgenden die in gleicher Weise, wie ich es früher beschrieben habe,[1] mit der eisenfreien Wage gewonnenen Resultate mitgetheilt werden. Mit Rücksicht auf das besondere Interesse, welches der Susceptibilität dieser Körper entgegengebracht werden muss, seien dazu auch noch die bisher in den letzten Jahren erhaltenen Daten kritisch zusammengestellt.

Alle Angaben sind durch Vergleichung mit Quecksilber $\varkappa.10^6 = -2\cdot05$ erhalten und beziehen sich auf Zimmertemperatur. Die Bezeichnungen sind aus den citierten Abhandlungen beibehalten ($\mu$ = Moleculargewicht; $g$ = zur Verwendung gelangte Substanzmenge in Grammen; $a$ = Anzahl von Grammen,

[1] Diese Sitzungsber., 108 (II. a), S. 171 und S. 861 (1899); 109 (II. a), S. 284 und 400 (1900).

die bei gleicher Raumerfüllung auf 1000 $cm^3$ kämen; $g.m$ = Zahl der Gramm-Molecüle im Liter; $p$ = Zug in Grammen; $\varkappa$ = Magnetisierungszahl; $k$ = Molecularmagnetismus). Da für einzelne Elemente, wie Holmium, $\mu$ nicht genau bekannt ist, wird unter $k_v$ in den Tabellen auch diejenige Susceptibilität angeführt, die bei einer Raumerfüllung von 1000 $g$ im Liter erhalten wurde. Diese Angabe kann in Anbetracht der geringen Abweichungen der Atomgewichte der ganzen Gruppe für analoge Verbindungen auch ähnlich wie der Molecularmagnetismus $k$ zu Vergleichungen herangezogen werden. In der letzten Rubrik sind dort, wo die Messungen nicht von mir gemacht sind, die Beobachter angegeben.

Es ist fraglos, dass man die Untersuchungen bei denjenigen Substanzen, bei welchen der Zug $p$ sehr groß ist, dadurch erheblich genauer gestalten könnte, dass man die Pulver durch Beimischung bestimmter Mengen schwach magnetischer Substanzen von bekannter Susceptibilität (etwa $SiO_2$), die sich chemisch leicht wieder trennen ließen, gleichmäßig verdünnen würde. Mit Rücksicht darauf aber, dass der Gewinn an Exactheit neben der noch bestehenden Unsicherheit der Zusammensetzung nicht von Belang ist, wurde auf derartige Beobachtungen vorläufig noch nicht eingegangen.[1]

Die Werte sind in den Tabellen in derjenigen Folge angegeben, in der sie zeitlich nacheinander erhalten wurden. Die Angaben für metallisches Lanthan und Cer, sowie für die von G. Wiedemann und G. Quincke untersuchten Salze sind wegen zu großer Unbestimmtheit der Beimengungen der Substanzen nicht weiter angeführt.

[1] Herr J. Königsberger hat (Drude, Ann., I, S. 176, 1900) andeutungsweise vorgeschlagen, eine auf obigem Princip basierende Nullmethode anzuwenden. Für die stark magnetischen Substanzen halte ich dies nicht für zweckmäßig, weil allzu geringe Mengen dieser Körper schon zur Aufhebung des Diamagnetismus selbst der stärkst negativen Elemente hinreichen und dann eine homogene Mischung illusorisch wird.

## Lanthan.

| Nr. | Substanz | μ | $g$ | $a$ | $g.m$ | $p$ | $\varkappa.10^6$ | $k_v.10^6$ | $k.10^6$ | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $La_2O_3$ | 324 | . | . | . | . | diamagnetisch | | | K. Ångström[1] |
| 2 | $La_2(SO_4)_3$ | 570·2 | . | . | . | . | diamagnetisch | | | A. P. Wills und O. Liebknecht[2] |
| 3 | $La(NO_3)_3+2(NH_4)NO_3$ | 466·3 | 1·316 | 1268 | 2·7 | —0·009 | —0·297 | -0·234 | —0·108 | [3] |
| 4 | $La_2O_3$ | 324 | 0·778 | 706 | 2·2 | —0·0065 | —0·160 | -0·226 | —0·073 | |

Das Sesquioxyd $La_2O_3$ ist nunmehr als unzweifelhaft diamagnetisch sichergestellt. Das unter (4) verzeichnete Material verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Herrn Dr. L. Haitinger.

Die Präparate des Herrn Brauner-Prag ($La_2O_3$)[4] waren offenbar noch mit geringen Mengen anderer seltener Erden vermengt. Auch das seinerzeit von mir untersuchte $LaCl_3$[4] war sicher noch nicht völlig rein, so dass jetzt auf Grund des diamagnetischen Verhaltens von Oxyd, Sulfat und Ammonnitrat auch mit einiger Wahrscheinlichkeit das Metall als diamagnetisch angesprochen werden darf,[5] worauf auch, wie im folgenden gezeigt wird, die quantitativen Verhältnisse hindeuten.

[1] K. Ångström, Berl. Ber., 13, S. 1465 (1880).

[2] A. P. Wills und O. Liebknecht, Verh. d. D. Phys. Ges., I, S. 172 (1899).

[3] St. Meyer, diese Sitzungsber., 108 (II. a), S. 873 (1899).

[4] Diese Sitzungsber., l. c. S. 873.

[5] Auf Grund des Ergebnisses an Sulfat allein haben dies schon früher die Herren H. du Bois und O. Liebknecht, l. c. S. 239 angenommen. Vergl. hiezu auch ebendort St. Meyer, S. 276.

## Cer.

| Nr. | Substanz | $\mu$ | $g$ | $a$ | $g.m$ | $p$ | $\varkappa.10^6$ | $k_v.10^6$ | $k.10^6$ | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $CeO_2$ | 172 | 1·760 | 1700 | 9·9 | +0·0034 | +0·113 | +0·066 | +0·011 | [1] |
| 2 | $CeCl_3$ | 246·4 | 1·1174 | 1077 | 4·4 | +0·1573 | +5·20 | +4·829 | +1·19 | [1] |
| 3 | $Ce_2(CO_3)_3$ | 460 | 0·750 | 714 | 1·6 | +0·175 | +5·10 | +7·142 | +2×1·64 | [1] |
| 4 | $Ce(CO_3)_2$ | 260 | 1·072 | 1016 | 3·9 | +0·094 | +2·73 | +2·697 | +0·698 | [1] |
| 5 | $Ce_2(SO_4)_3$ | 568·3 | 1·252 | 1187 | 2·1 | +0·264 | +7·68 | +6·470 | +2×1·84 | [1] |
| 6 | $Ce(NO_3)_3+2(NH_4)NO_3$ | 468·3 | 1·345 | 1296 | 2·8 | +0·1296 | +4·28 | +3·302 | +1·53 | [1] |
| 7 | $CeCl_3$ | 246·4 | aus unmagnetischen Lösungen | | | | | | +2·43 | H. du Bois und O. Liebknecht[2] |
| 8 | $CeBr_3$ | 379·9 | aus unmagnetischen Lösungen | | | | | | +2·40 | H. du Bois und O. Liebknecht[2] |
| 9 | $CeO_2$ | 172 | 0·6720 | 610 | 3·6 | +0·0015 | +0·037 | +0·061 | +0·010 | |

[1] Diese Sitzungsber., l. c. S. 874.

[2] Verh. d. D. Physik. Ges., I, S. 238.

Sämmtliche Verbindungen sind paramagnetisch. Als die sorgfältigst gereinigten dürften das Oxyd (1) und (9) anzusehen sein. Das erstere Präparat stammt von Herrn Brauner-Prag, das letztere von Herrn L. Haitinger. Trotz der verschiedenen Provenienz uud Darstellungsweise zeigen die beiden Substanzen nahezu gleiches magnetisches Verhalten und ergeben auch die geringsten Werte der Susceptibilität, was, da sie von Lanthan und anderen diamagnetischen Beimengungen frei sind, darauf hinweist, dass das Cer überhaupt als schwach magnetisches Element zu betrachten ist. Den Angaben 2 bis 6 ist, als an zweifellos minder reinem Material erhalten, geringeres Gewicht beizulegen. Über die chemische Natur der von Schottländer[1] hinterlassenen Substanzen 8 und 9 ist es wohl nicht möglich, ein Urtheil abzugeben, doch dürfen die neueren Präparate der Herren Brauner und Haitinger mit Rücksicht auf die in letzterer Zeit durch diese Forscher verbesserten Reindarstellungsverfahren jedenfalls als einheitlichere Substanzen angesehen werden. Das magnetische Verhalten von 7 und 8 weist auf Beimengung eines oder mehrerer der Elemente Nd, Sa, Gd, Er, Ho hin.

Der Wert von $k$ für $CeO_2$ wäre zum Vergleiche mit Sesquioxyden zu erhöhen.[2]

---

[1] Verh. d. D. Phys. Ges., l. c. S. 237.

[2] Diese Sitzungsber., 108 (II. a), S. 887.

## Praseodym.

| Nr. | Substanz | μ | $g$ | $a$ | $g.m$ | $p$ | $k.10^6$ | $k_v.10^6$ | $\mathbf{k}.10^6$ | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Pr_4O_7$ | 672 | 1·3682 | 1319 | 1·96 | +0·512 | +16·95 | +12·85 | +4×2·16 | 1 |
| 2 | $PrCl_3$ | 246 | 0·226 | 697 | 2·83 | +0·194 | + 9·52 | +13·65 | +3·36 | 1 |
| 3 | $PrCl_3$ | 246 | aus unmagnetischer Lösung | | | | | | +3·28 | H. du Bois und O. Liebknecht[2] |

Bei dem Brauner'schen Präparat (1) (schwarzes Pulver) ist es nicht ganz sicher, ob nicht ein Gemenge verschiedener Oxydationsstufen vorliegt. Zum Vergleiche mit Sesquioxyden ist der aus diesem Oxyd gewonnene Molecularmagnetismus jedenfalls nach der von mir aufgestellten Regel[3] zu erhöhen, keineswegs demnach die Thatsache, dass die Susceptibilität dieses Körpers kleiner als diejenige von (2) und (3) ist, als Kennzeichen für größere Reinheit der Substanz anzusehen. Das Chlorid (2) ist aus einem schwarzen Oxyd, das von Herrn Nilson stammte, gebildet, dasjenige Nr. 3[4] rührt von Herrn Scheele her. Als Beimengungen sind nach den Untersuchungen der Funkenspectra durch die Herren F. Exner und E. Haschek in (2) Spuren von Lanthan und Neodym, vielleicht (kaum nachweisbar) auch solche von Samarium, hingegen sicher kein Holmium, Erbium und Gadolinium anzunehmen.

Die Übereinstimmung des $k$ von (2) und (3) ist, trotzdem das eine an trockenem Oxyd, das andere aus unmagnetischer Lösung bestimmt ist, eine recht gute zu nennen und weist auf die gleiche Reinheit der beiden Präparate hin.

---

[1] Diese Sitzungsber., l. c. S. 874. [2] L. c. S. 328. [3] L. c. S. 887. [4] L. c. S. 237.

## Neodym.

| Nr. | Substanz | μ | g | a | g.m | p | ϰ.10⁶ | $k_v$.10⁶ | k.10⁶ | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Nd_2O_3$ | 336 | 0·302 | 524 | 1·56 | +0·2911 | +13·88 | +26·5 | +2×4·5 | 1 |
| 2 | $Nd(NO_3)_3+2NH_4(NO_3)$ | 490·4 | 1·3205 | 1199 | 2·45 | +0·3125 | +10·43 | + 8·70 | +4·3 | 1 |
| 3 | $Nd(NO_3)_3+2NH_4(NO_3)+4H_2O$ | 562·4 | 1·166 | 1059 | 1·88 | +0·220 | + 7·35 | + 6·94 | +3·9 | 1 |
| 4 | $NdCl_3$ | 250·0 | aus unmagnetischer Lösung | | | | | | +5·25 | H. du Bois und O. Liebknecht[2] |
| 5 | $Nd(NO_3)_3$ | 329·7 | | | | | | | +5·19 | |
| 6 | $Nd_2O_3$ | 336 | 0·987 | 906 | 2·70 | +1·10 | +27·3 | +30·1 | +2×5·05 | |

Präparat (1) von Herrn Brauner enthielt nach dessen Angabe noch mehrere Procent Praseodymoxyd, der Wert von *k* ist also als zu gering anzusehen. Die Angaben von (2) und (3) gestatten gemäß der complicierten Natur der Verbindungen keine unmittelbaren Vergleiche. Hingegen stimmt die Größe des erhaltenen Molecularmagnetismus bei (4), (5) und (6) recht gut überein, so dass vorläufig deren Mittelwert als charakteristisch für Neodym angesprochen werden darf. Die Substanzen (4) und (5) stammten dabei von Schottländer,[3] (6) von Herrn Haitinger, welcher dieses Oxyd als noch nicht vollkommen rein bezeichnete.

In Präparat (2) ließen sich im Funkenspectrum La, Ce, Pr in Spuren nachweisen, jedoch kein Holmium und Erbium; Samarium und Gadolinium waren nicht sicher zu constatieren. Die gleichen Beimengungen dürfen in (6) angenommen werden. Dermaßen geringe Verunreinigungen nicht stark magnetischer Substanzen vermögen das Resultat aber nicht wesentlich zu beeinflussen.

[1] L. c. S. 874. [2] L. c. S. 238. [3] L. c. S. 237.

## Samarium.

| Nr. | Substanz | μ | $g$ | $a$ | $g.m$ | $p$ | $\varkappa.10^6$ | $k_v.10^6$ | $\mathbf{k.10^6}$ | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Sa_2O_3$ | 348 | 1·202 | 1160 | 3·33 | +2·023 | +66·8 | +57·6 | +2×10·1 | [1] |
| 2 | $Sa(NO_3)_3$ | 336 | 0·212 | 610 | 1·82 | +0·433 | +21·9 | +35·9 | +12·1 | [1] |
| 3 | $SaCl_3$ | 150 | aus unmagnetischer Lösung | | | | | | +11·6 | H. du Bois und O. Liebknecht[2] |
| 4 | $Sa_2(SO_4)_3+8H_2O$ | 732 | 0·7915 | 1415 | 1·9 | +1·39 | +43·1 | +30·5 | +2×11·2 | [3] |

Sämmtliche Präparate stammten von Herrn Cleve-Upsala. Ihr Mittelwert für $10^6.k$ ergibt als charakteristische Constante +11·2. Als Beimengungen für 1, 2 und 4 ergaben sich nach den Untersuchungen der Funkenspectra durch die Herren F. Exner und E. Haschek ziemlich beträchtliche Quantitäten von Gadolinium (mehrere Procent), dann Yttrium und spurenweise Holmium und Neodym.

Dieselben Verunreinigungen sind entsprechend der gleichen Quelle auch bei Präparat (3) anzunehmen. Der Wert von $k$ ist demnach (da Gd eine höhere Magnetisierungszahl besitzt als Sa) als etwas zu hoch anzusehen.

[1] L. c. S. 874.

[2] L. c. S. 238.

[3] Diese Sitzungsber., 109 (II. a), S. 403.

## Gadolinium.

| Nr. | Substanz | $\mu$ | $g$ | $a$ | $g.m$ | $p$ | $\varkappa.10^6$ | $k_v.10^6$ | $k.10^6$ | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Gd_2O_3$ | 360 | 0·366 | 1344 | 3·73 | +2·65 | +172·0 | +128 | +2×23·2 | [1] |
| 2 | $Gd(NO_3)_3$ | 732 | 0·111 | 439 | 1·28 | +0·422 | + 24·7 | + 56 | +19·3 | [1] |
| 3 | $GdCl_3$ | 262·4 | aus unmagnetischer Lösung | | | | | | +25·6 | H. du Bois und O. Liebknecht[2] |
| 4 | $Gd_2O_3$ | 360 | 0·881 | 1244 | 3·5 | +6·22 | +205 | +165 | +2×28·6 | [3] |
| 5 | $Gd_2O_3$ | 360 | 1·362 | 1254 | 3·5 | +7·5 | +188·6 | +150 | +2×27·1 | |
| 6 | $Gd_2O_3$ | 360 | 1·332 | 1227 | 3·4 | +7·1 | +178·6 | +146 | +2×26·3 | |

Das Oxyd Nr. 1 stammte von Marignac, (2) ist daraus erhalten. Das Chlorid (3) rührte von Herrn Benedicks[4] her, (4) von Herrn Cleve, (5) und (6) von Herrn Haitinger.

Das erste Präparat enthielt nach dem Resultate der Spectraluntersuchung Samarium und Yttrium, wenig Holmium, kein Erbium. Nr. 5 und 6 waren weit samariumfreier und enthielten außer Spuren dieses Elementes noch solche von Yttrium und sehr wenig Holmium, kein Erbium.

Als derzeit bester Wert dürfte das Mittel aus 4, 5 und 6, das ist $k.10^6 = 27·3$ anzusetzen sein.

[1] L. c. S. 875.
[2] L. c. S. 238.
[3] L. c. 109 (II. a), S. 403.
[4] L. c. S. 237.

## Erbium.

| Nr. | Substanz | $\mu$ | $g$ | $a$ | $g.m$ | $p$ | $\varkappa.10^6$ | $k_v.10^6$ | $k.10^6$ | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Er_2O_3$ | 380 | 0·949 | 1998 | 5·26 | +8·64 | +417·8 | +209·1 | +2×39·7 | [1] |
| 2 | $Er(NO_3)_3+5H_2O$ | 442 | 0·387 | 970 | 2·2 | +2·23 | + 97·9 | +100·9 | +44·5 | [1] |
| 3 | $ErCl_3$ | 272·4 | aus unmagnetischer Lösung | | | | | | +36·7 | H. du Bois und O. Liebknecht[2] |

Präparat 1 stammte von Herrn Cleve, 2 ist aus 1 gewonnen, 3 stammt aus gleicher Quelle. Das Nitrat zeigt einen auffallend hohen Wert gegenüber den beiden anderen Daten, jedoch ist die Formel nicht ganz sichergestellt. Wäre die Substanz wasserfrei, $Er(NO_3)_3$ ($\mu = 352$), so ergäbe sich $k.10^6 = +35$, mit einem geringeren Wassergehalt als 5 Molecülen, erhielte man demnach eine übereinstimmendere Zahl. Als Mittelwert empfiehlt es sich demgemäß, vorläufig bloß denjenigen aus (1) und (3), d. i. $k.10^6 = 38 \cdot 2$ festzuhalten.

An Beimengungen stellten die Herren F. Exner und E. Haschek nur kaum nachweisliche Spuren von Yttrium, Lanthan und Ytterbium fest, hingegen enthielt die Substanz kein Holmium, Gadolinium und Samarium.

[1] L. c. S. 875. Die Resultate an unzuverlässigem Material sind nicht weiter angeführt.

[2] L. c. S. 238.

## Holmium.

| Nr. | Substanz | $\mu$ | $g$ | $a$ | $g.m$ | $p$ | $\varkappa.10^6$ | $k_v.10^6$ | $k.10^6$ | Bezeichnung der Fraction |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Ho_2O_3$ | Für $H = 160$, $\mu = 368$ | 0·743 | 702 | 1·9 | + 7·4 | +191 | +272 | +2×50 | Σ 14 α (Abraham-Langlet) |
| 2 | $Ho_2O_3$ | | 1·082 | 993 | 2·7 | +10·8 | +228 | +230 | +2×42·5 | Haitinger *D* 1 |
| 3 | $Ho_2O_3$ | | 1·343 | 1232 | 3·3₅ | +13·3 | +281 | +228 | +2×42 | Haitinger *D* 2 |
| 4 | $Ho_2O_3$ | | 1·108 | 1020 | 2·8 | + 8·8 | +221 | +217 | +2×39·5 | Haitinger *Ac* 1 |
| 5 | $Ho_2O_3$ | | 0·884 | 811 | 2·2 | + 8·2 | +173 | +214 | +2×39 | Haitinger *U* 1 |
| 6 | $Ho_2O_3$ | | 1·301 | 1181 | 3·2 | +10·0 | +250 | +212 | +2×39 | Haitinger *E* 1 |
| 7 | $Ho_2O_3$ | | 1·144 | 1050 | 2·8₅ | + 8·0 | +222 | +211 | +2×38·5 | Haitinger *D* 5 |
| 8 | $Ho_2O_3$ | | 1·030 | 935 | 2·5 | + 7·8 | +196 | +210 | +2×38·5 | Haitinger $N_4$ *F* |
| 9 | $Ho_2O_3$ | | 1·487 | 1349 | 3·7 | +10·3 | +258 | +191 | +2×35 | *E* 2 |

Magnetische Angaben über das Holmium liegen bisher noch nicht vor. Das Präparat 1, gelbbraun gefärbt, stammte von Herrn Abraham Langlet-Gothenburg. Es enthielt nach der Untersuchung der Funkenspectra sehr wenig Yttrium und Spuren von Erbium. Nr. 2 bis 9 sind aus den Resultaten an zahlreichen Holmiumfractionen (braunen bis braungelben Pulvern) des Herrn Haitinger, als diejenigen mit dem größten Holmiumgehalt und gleichzeitig der bedeutendsten Susceptibilität herausgegriffen. *Ac* 1 enthielt außer Ho fast nur noch Yttrium, die übrigen Präparate außerdem mehr oder minder Gadolinium, manche wie *D* 1 auch ganz geringe Mengen von Erbium.

Man erkennt unmittelbar, dass Holmium in gleichartiger Verbindung weitaus das stärkst magnetische unter allen bisher untersuchten Elementen ist.

Da auch die Fractionen 1 und 2 noch nicht frei von Beimengungen schwächer magnetischer Substanzen sind, ist auch der größte Wert noch als untere Grenze für den Molecularmagnetismus anzusehen.

Es schien von Interesse, zu untersuchen, ob diese Oxyde Abhängigkeit von der Feldstärke zeigen. Hiezu wurden in gleicher Weise, wie dies in einer früheren Mittheilung beschrieben ist,[1] die Fractionen Nr. 1, 6 und 9 herangezogen

| Substanz | $10^{-6}M^2$ | $p$ | $100\frac{p}{M^2}$ |
|---|---|---|---|
| $Ho_2O_3$ Nr. 1<br>Fraction $\Sigma$ 14 $\alpha$ | 100<br>68<br>37 | 9·8<br>6·8<br>4·0 | 9·8<br>10<br>11 |
| Nr. 6<br>Fraction *E* 1 | 100<br>65<br>37 | 10·0<br>6·5<br>4·0 | 10<br>10<br>11 |
| Nr. 9<br>Fraction *E* 2 | 100<br>67<br>37 | 10·3<br>6·8<br>4·1 | 10<br>10<br>11 |

[1] Diese Sitzungsber., 108 (II. a), S. 890 (1899).

Es scheint mit abnehmender Feldstärke *(M)* die Susceptibilität zuzunehmen, ähnlich, wenn auch in weit schwächerem Maße wie beim Eisenoxyd, wodurch sich dieser Körper von den anderen seltenen Erden unterscheidet. Möglicherweise würde sich bei geringeren Feldintensitäten stärkere Abhängigkeit nachweisen lassen.

## Ytterbium.

| Nr. | Substanz | μ | *g* | *a* | *g.m* | *p* | $\varkappa.10^6$ | $k_v.10^6$ | $k.10^6$ | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Yb_2O_3$ | 394 | 2 676 | 2549 | 6·5 | +2·66 | +77·5 | +30·4 | +2×5·99 | 1 |
| 2 | $Yb(NO_3)_3$ | 359 | 0·215 | 717 | 2·0 | +0·204 | +10·85 | +15·1 | +5·43 | 1 |
| 3 | $YbCl_3$ | 279·4 | aus unmagnetischer Lösung | | | | | | +7·11 | H. du Bois und O. Liebknecht[2] |

Das Präparat (1) stammt von Herrn Nilson, (2) ist daraus erhalten, (3) wurde den Herren du Bois und Liebknecht von Fräulein Cleve-Stockholm überlassen.

Nach der Spectraluntersuchung sind in 1 und 2 als Beimengung anzunehmen Spuren von Yttrium und Lanthan, hingegen kein Holmium und Erbium.

Da das Präparat (3) wesentlich magnetischer ist als die anderen, dürften in demselben mehr Beimengungen vorhanden gewesen sein.

[1] L. c. S. 876.
[2] L. c. S. 238.

## Yttrium.

| Nr. | Substanz | μ | g | a | g.m | p | κ.10⁶ | $k_v$.10⁶ | k.10⁶ | Beobachter |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Y_2O_3$ | 226 | 1·1796 | 1137 | 5·03 | +0·1745 | +5·77 | +5·07 | +2×0·58 | [1] |
| 2 | $YCl_3$ | 195·4 | aus unmagnetischer Lösung | | | | | | +0·21 | H. du Bois und O. Liebknecht [2] |
| 3 | $Y_2O_3$ | 226 | 0·7705 | 661 | 2·93 | +0·0155 | +0·365 | +0·55 | +2×0·062 | |

Die paramagnetischeren Angaben seien hier nicht weiter angeführt. Präparat (1) stammte von Herrn Brauner-Prag, (2) von Herrn Cleve-Upsala, (3) von Herrn Haitinger. Alle Präparate enthielten noch ein wenig Erbium, man sieht aber, wie mit steigender Reinheit der Molecularmagnetismus abnimmt. Das Oxyd (3) enthielt, wie Herr Haitinger aus Absorptionsspectren nachweisen konnte, noch mehr als $\frac{2{\cdot}5}{1000}$ an Erbiumoxyd. Da nun aber bereits $\frac{1{\cdot}5}{1000}$ $Er_2O_3$ genügen würden, um eine Substanz von der Susceptibilität Null bis zu obigem Betrage magnetisch zu machen, ist damit der diamagnetische Charakter des Yttriumoxydes präcise nachgewiesen. Das Yttrium ist dementsprechend auch gemäß seiner Stellung im periodischen System der Elemente als diamagnetisch anzusehen.[3]

[1] L. c. S. 870.
[2] L. c. S. 238.
[3] Vergl. diese Sitzungsber., 108 (II. a), S. 770 (1899).

Die folgenden Substanzen gehören wohl nicht zur eigentlichen Gruppe der seltenen Erden, die an ihnen gewonnenen Resultate seien aber mit Rücksicht auf das besonders reine Material, das mir zur Verfügung stand, gleichwohl hier angeführt.

**Niob, Tantal, Austrium, Thorium.**

| Nr. | Substanz | $\mu$ | $g$ | $a$ | $g.m$ | $p$ | $\varkappa.10^6$ | $k.10^6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Nb_2O_5$ | 268 | 1·909 | 1822 | 6·80 | +0·0018 | +0·0519 | +0·0076 | |
| 2 | $Ta_2O_5$ | 446 | 2·396 | 2286 | 5·13 | —0·0055 | —0·1589 | —0·0310 | |
| 3 | Austriumsulfat | — | 0·557 | — | — | | | | |
| 4 | $ThO_2$ | 264 | 1·861 | 1793 | 6·8 | —0·0027 | —0·089 | —0·013 | |
| 5 | $ThO_2$ | 264 | 1·1064 | 1066 | 3·8 | —0·0028 | —0·092 | —0·024 | |
| 6 | $ThO_2$ | 264 | 2·2035 | 2000 | 7·6 | —0·0065 | —0·160 | —0·021 | |
| 7 | $ThO_2$ | 264 | 1·6065 | 1458 | 5·5 | —0·0055 | —0·137 | —0·024 | |

Präparat 1 und 2 verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Herrn W. Muthmann-München. Die Spectraluntersuchung der Doppelfluoride dieser Substanzen durch die Herren F. Exner und E. Haschek ergab nur mehr sehr geringe wechselseitige Verunreinigung. Das magnetische Resultat ist insoferne überraschend, als ein zweifellos viel minder reines $Nb_2O_5$, das ich früher untersuchte,[1] sich diamagnetisch erwies. Es scheint dies damit in Einklang zu stehen, dass ein großer Theil der Niob und Tantal im Funkenspectrum gemeinschaftlichen Linien, auf Grund welcher die genannten Herren ein in den beiden Elementen noch vorhandenes gemeinsames Element annehmen, bei den reinen Präparaten nunmehr im Niob stärker auftreten.

Das Austriumsulfat wurde mir von Herrn R. Přibram-Czernowitz zur Verfügung gestellt. Ein bestimmtes Urtheil über das magnetische Wesen dieses neuen Elementes[2] abzugeben, ist auf Grund der angeführten Messung leider noch nicht möglich.[3]

Von den Thoroxyden stammte die Substanz (4) von Herrn Brauner-Prag; (5), (6) und (7) von Herrn Haitinger. Nr. 5 wurde schon vor geraumer Zeit gemessen,[4] (6) und (7) neuerdings. Die letzten drei Werte stimmen so gut überein, dass ihr Mittel $10^6 k = -0 \cdot 023$ als maßgebend für Thoroxyd betrachtet werden darf.

In seinem Bericht für den Pariser Congress 1900 hat Herr du Bois[4] das magnetische Wesen von sieben Elementen (Be, Mg, Sc, Nb, La, Ta, Th), wozu Y hinzuzufügen gewesen wäre, noch als zweifelhaft bezeichnen müssen. Nach den vorliegenden Resultaten scheint die Entscheidung für Yttrium und Lanthan als diamagnetische Körper sicher zu stehen, für Tantal und Thor der gleiche Charakter wahrscheinlich gemacht.

Die an den reinsten bisher dargestellten seltenen Erden in der geschilderten Weise erhaltenen Zahlen des Molecular-

[1] L. c. S. 871.

[2] Diese Sitzungsber., 109 (II.b), S. 16 (1900).

[3] Es könnte sich z. B. das Austriumsulfat ähnlich verhalten, wie das Kupfersulfat, vergl. diese Sitzungsber., 109 (II.a), S. 287 (1900).

[4] L. c. S. 878.

[5] Rapports, Congrès intern. d. Phys., Paris, II, p. 487 (1900).

magnetismus sind in der Anordnung nach steigendem Atomgewicht die folgenden für Verbindungen der nachstehenden Elemente:

| | Y | La | Ce |
|---|---|---|---|
| $k.10^6 =$ | diamagnetisch | $-0·23$ | $+0·06$ |

| | Pr | Nd | Sa | Gd | Ho | Er | Yb |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k.10^6 =$ | $+3·3$ | $+5·2$ | $+11·2$ | $+27·3$ | $+50$ | $+38·2$ | $+6$ |

Die Analogie mit der Eisengruppe ist unverkennbar.

| | V | Cr | Mn | Fe | Co | Ni[1] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k.10^6 =$ | 1·3 | 6·3 | 15 | 12·5 | 10 | 5 |

Die magnetischen Unterschiede sind in der Gruppe der seltenen Erden noch schroffere als in der Eisengruppe, und schon dieser Umstand spricht dafür, dass das Lanthan nicht unter die paramagnetischen Substanzen zu zählen ist.

Die Reihenfolge der überhaupt stärkst magnetischen bisher bekannten Elemente ist für abnehmenden Molecularmagnetismus analoger Verbindungen:

Ho, Er, Gd, Mn, Fe, Sa, Co, Cr, Yb, Nd, Ni, Pr, V.

Dabei fehlt nur der Sauerstoff, den man leider, da eine analoge Verbindung fehlt, nicht ohneweiters relationieren kann. Aus den Angaben von Fleming und Dewar[2] ist $\varkappa.10^6 = 324$ für flüssigen Sauerstoff. Das Atomvolumen für diesen ist nach Dewar[3] gleich 13·7, die Dichte 1·17. Daraus bestimmt sich $g.m = 73$ und der Atommagnetismus für flüssigen Sauerstoff $k.10^6 = 4·44$.

Nimmt man den Temperaturcoefficienten $\frac{1}{273}$ an, was die Herren Fleming und Dewar als entsprechend bezeichnen, so wird für Zimmertemperatur $\mathbf{k.10^6 = 2·5}$.

Daraus sieht man, dass der Magnetismus des elementaren Sauerstoffes von gleicher Größenordnung ist, wie der-

[1] Vergl. diese Sitzungsber., 107 (II. a), S. 13 (1898) und 109 (II. a), S. 401 (1900).

[2] Wied. Beibl., 22, S. 881.

[3] Wied. Beibl., 22, S. 516.

jenige der Verbindungen der magnetischen Metalle. Dürfte man, was allerdings kaum statthaft erscheint,[1] die gleiche Relation für eine diesen Verbindungen entsprechende Substanz einführen, wie sie etwa zwischen der Susceptibilität der Oxyde und derjenigen der Metalle der Eisengruppe besteht, so würde ein Wert resultieren, der so weit hinter den angeführten Zahlen für die Eisengruppe und diejenige der seltenen Erden zurückbleibt, dass der Sauerstoff nicht in gleichem Sinne als stark magnetisches Element bezeichnet werden könnte.

In welcher Weise die gewonnenen Zahlen zu analytischen Zwecken verwendet werden können, zeigt das folgende Beispiel.

Es lag mir ein Gemisch von Erbium und Yttriumoxyd vor, das keine merklichen Beimengungen anderer seltener Erden enthielt, und es fragte sich, wie viel Procente Erbiumoxyd in dem Präparat enthalten seien. Die Messung ergab

| $g$ | $a$ | $p$ | $\varkappa.10^6$ |
|---|---|---|---|
| 0·913 | 870 | +1·65 | +40·2 |

Nun darf man neben der Susceptibilität des Erbiumoxydes diejenige des Yttriumoxydes gleich Null setzen, hat also so zu rechnen, als ob die geringere Menge des $Er_2O_2$ in minder dichter Weise den ganzen Raum des Gemisches erfüllte. Wären demgemäß etwa 28%, 25%, 22% $Er_2O_3$ vorhanden, so wären die entsprechenden Zahlen

| | für | | |
|---|---|---|---|
| | 28% | 25% | 22% $Er_2O_3$ |
| $g'$ ........ | 0·256 | 0·228 | 0·201 |
| $a'$ ........ | 244 | 217 | 191 |
| $g.m'$ ..... | 0·64 | 0·57 | 0·50 |
| $k.10^6$ ..... | $+2\times31·4$ | $+2\times35·3$ | $+2\times40·2$ |

Setzt man die moleculare Susceptibilität für $Er_2O_3$ $k.10^6 = 2\times38·2$, so ergibt dies durch Interpolation den Gehalt von

[1] Dass man dabei zu ganz falschen Schlüssen kommen kann, ergeben ja schon die Verhältnisse an Eisen und Mangan und deren Verbindungen. Für die Größenordnung kann man gleichwohl in erster Annäherung diese Annahme wagen.

23 % Erbiumoxyd im Gemisch. Diese Angabe ist weitaus rascher erhältlich und erheblich genauer, als sie nach irgendwelcher anderen Methode bisher gegeben werden kann, denn selbst bei einer Unverlässlichkeit der Magnetisierungszahl zwischen 38 und 40 würde bloß eine Unsicherheit der Gehaltsangabe um ein Procent resultieren.

In der Magnetisierungszahl besitzen wir nach dem Vorstehenden eine für jede einzelne Substanz gerade in der Gruppe der seltenen Erden, deren chemisches Verhalten einander so ähnlich ist, wesentlich verschiedene charakteristische Eigenschaft. Vielleicht ist dieselbe berufen, mehr als dies bisher geschehen ist, zu analytischen Zwecken herangezogen zu werden.



# Über simultane Gleichgewichte und die Beziehungen zwischen Thermodynamik und Reactionskinetik homogener Systeme

von

**Rud. Wegscheider.**

Aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien.

**(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1901.)**

Vor einiger Zeit[1] habe ich gezeigt, wie die die Reactionsgeschwindigkeit betreffenden Fragen bei nebeneinander verlaufenden Reactionen in homogenen Systemen behandelt werden können. Im folgenden will ich mich mit Beziehungen zwischen der chemischen Kinetik und der Gleichgewichtslehre homogener Systeme beschäftigen, insbesondere für den Fall, dass mehrere zu Gleichgewichten führende Reactionen nebeneinander stattfinden.

Zwar sind verwickeltere Fälle von simultanen Gleichgewichten, die sich mit messbarer Geschwindigkeit einstellen, noch kaum untersucht. Ich sehe mich aber doch veranlasst, diesem Gegenstande näher zu treten, da derartige Probleme immerhin schon bei theoretischen Erörterungen in Betracht gezogen worden sind. Insbesondere hat Hans Euler[2] eine Theorie der Katalyse veröffentlicht, welche ihn zu weittragenden Schlüssen veranlasste, z. B. zu dem, dass sich eine Aussicht eröffne, Geschwindigkeitsconstanten aus Gleichgewichtscoefficienten zu berechnen. Mir scheinen seine Darlegungen keineswegs einwandfrei. Bei der Wichtigkeit der Sache will ich

[1] Monatshefte für Chemie, XXI, 693; Zeitschrift für physikal. Chemie, XXXV, 513 (1900).

[2] Ber. der Deutschen chem. Gesellsch., XXXIII, 3202 (1900).

daher klarzulegen versuchen, in welchen Punkten Euler nach meiner Meinung geirrt hat, und daran anschließend eine Darstellung der Beziehungen zwischen Gleichgewichts- und Geschwindigkeitsconstanten geben, wie sie sich aus den gegenwärtig herrschenden theoretischen Anschauungen ergibt. Hiebei wird sich Veranlassung finden, die Grundlagen der Thermodynamik chemischer Vorgänge einer Erörterung zu unterziehen.

## I. Die Euler'sche Ableitung.

Euler beschäftigt sich insbesondere mit der Wechselwirkung zwischen Säure, Alkohol, Ester und Wasser. Er nimmt an, dass diese Körper theilweise ionisiert seien (beim Äthylacetat unter Bildung der Ionen $CH_3CO$ und $OC_2H_5$). Hiedurch wird die Einwirkung von Wasser auf die Ester analog der hydrolytischen Spaltung von Salzen in Säure und Basis. Aus dieser Annahme leitet er für die Geschwindigkeit der Esterverseifung unter Berücksichtigung der Gegenreaction (Esterbildung) die Gleichung ab:

$$-\frac{dE}{dt} = \varkappa\{[CH_3CO][C_2H_5O]\times[H][OH]-$$
$$-[C_2H_5O][H]\times[CH_3CO][OH]\},$$

wo $[CH_3CO]$ u. s. w. die Concentrationen der $CH_3CO$-Ionen u. s. w. bedeuten. In Worten drückt er diese Gleichung so aus: »Die Reactionsgeschwindigkeit ist gleich der Differenz der Ionenproducte der in den beiden entgegengesetzten Richtungen reagierenden Körper«.

Die erwähnten Concentrationen treten bei seiner Ableitung in die Gleichung dadurch ein, dass die Gleichungen für die Dissociationsgleichgewichte des Äthylalkohols, des Äthylacetats, der Essigsäure und des Wassers benutzt werden. Indem er diese Gleichgewichtsbedingungen in die Geschwindigkeitsgleichung für die Reaction zwischen Wasser, Ester, Säure und Alkohol einführt, macht er die Annahme, dass die Gleichgewichtsbedingungen für die vier Dissociationen in jedem Augenblicke erfüllt sind, dass also diese vier Gleichgewichte sich mit unendlich großer Geschwindigkeit einstellen.

Euler scheint vorauszusetzen, dass beispielsweise das $[CH_3CO]$ links vom Minuszeichen in der Klammer verschieden sei von dem $[CH_3CO]$ rechts vom Minuszeichen, indem das eine die aus dem Ester, das andere die aus der Säure entstandenen $CH_3CO$-Ionen bedeuten soll. Diese Voraussetzung ist aber irrig; die $[CH_3CO]$ u. s. w. bedeuten links und rechts vom Minuszeichen in der Klammer die Gesammtconcentrationen der $CH_3CO$-Ionen u. s. w. in der Lösung und haben daher links und rechts vom Minuszeichen denselben Wert. Die Klammer ist also identisch Null und daher ergibt sich die Reactionsgeschwindigkeit gleich Null.[1] Dieses Resultat widerspricht aber der Erfahrung, derzufolge die Reaction mit messbarer Geschwindigkeit erfolgt.

Dass die $[CH_3CO]$ u. s. w. in den Dissociationsgleichgewichten die Gesammtconcentration der betreffenden Ionenarten bedeuten, ergibt sich sowohl aus der thermodynamischen, wie aus der kinetischen Begründung der Gleichgewichtsformel. Das ist auch immer so aufgefasst worden. Nur aus dieser Auffassung der Ionenconcentrationen heraus wurde beispielsweise die Dissociationsverminderung der Salze (im weitesten Sinne) beim Zusatz gleichioniger Salze abgeleitet. Würde in der Gleichgewichtsbedingung für die Dissociation der Essigsäure

$$k = \frac{C_{CH_3COO} C_H}{C_{CH_3COOH}}$$

$C_H$ sich bloß auf die aus der Essigsäure entstehenden H-Ionen beziehen, so wäre der Zusatz von Salzsäure ohne Einfluss auf den Dissociationsgrad.

Da sonach die eingangs mitgetheilte Euler'sche Formel bei richtiger Deutung zu einem der Erfahrung widersprechenden Ergebnis führt, muss die Frage aufgeworfen werden, ob nicht in den Voraussetzungen ein Fehler liegt. In der That liegt der

[1] Demgemäß ist auch die von Euler (l. c. und Z. f. physikal. Ch., *36*, 648, [1901]) gegebene Gleichung

$$[CH_3CO][C_2H_5O] \times [H][OH] = [C_2H_5O][H] \times [CH_3CO][OH]$$

eine selbstverständliche Identität.

Fehler darin, dass Euler annimmt, dass die vier Dissociationsgleichgewichte für Ester, Wasser, Säure und Alkohol sich mit unendlicher Geschwindigkeit einstellen.

Man hat nach Euler im System acht Molekelarten: $CH_3COOC_2H_5$, $C_2H_5OH$, $CH_3COOH$, $H_2O$ und die Ionen $CH_3CO$, $OC_2H_5$, H und OH. Bezeichnet man die Concentrationen dieser Molekelarten der Reihe nach mit $c_1$ bis $c_8$, so müssen diese Concentrationen zunächst drei Gleichungen erfüllen, welche das Gesetz der Erhaltung der Masse ausdrücken:

$$c_1+c_3+c_5 = A_1,$$
$$c_1+c_2+c_6 = A_2,$$
$$c_3+c_4+c_8 = A_3.$$

Ferner muss die stöchiometrische Beziehung

$$c_2+c_4+c_7 = A_2+A_3-A_1$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Bedingung für die Gleichheit der Zahl der positiven und negativen Ionen

$$c_5+c_7 = c_6+c_8$$

erfüllt sein.

Nimmt man nun außerdem die vier Bedingungen für die Dissociationsgleichgewichte als in jedem Augenblicke erfüllt an, so hat man im ganzen acht voneinander und von der Zeit unabhängige Gleichungen, mit deren Hilfe man für die acht Concentrationen von der Zeit unabhängige (nur von der Constanten $A$ und den Gleichgewichtscoefficienten abhängige) Werte erhält.

Unter den gemachten Voraussetzungen können also die Concentrationen nicht von der Zeit abhängen. Vom Standpunkte der Reactionskinetik bedeutet das, dass die zwei in dem System mit endlicher Geschwindigkeit verlaufenden Reactionen keine endlichen Änderungen der Concentrationen hervorrufen können, da die mit unendlicher Geschwindigkeit verlaufenden Reactionen etwaige Änderungen im Sinne der langsamer verlaufenden Reactionen sofort rückgängig machen. Diese Verhältnisse werden im Abschnitt IV noch an einem einfacheren Beispiele erörtert werden.

Fasst man die Esterverseifung als Hydrolyse eines Salzes auf, so ergibt sich schon aus der bekannten Formel $K_5 = \frac{K_1 K_4}{K_2 K_3}$, dass die Hydrolyse durch die Annahme von vier bestehenden Dissociationsgleichgewichten bereits vollständig bestimmt ist.

Das gleiche würde auch noch gelten, wenn man die von Euler in einer späteren Abhandlung[1] gemachte Annahme heranziehen würde, dass auch die Ionen $CH_3CO\acute{O}$ und $C_2\dot{H}_5$ im System vorhanden sind. Dann würde sich sowohl die Zahl der Ionenarten, als auch die der unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen um zwei vermehren.

Die von Euler an seine Ableitung geknüpften Folgerungen, insbesondere auch die Berechenbarkeit von Geschwindigkeitsconstanten aus Gleichgewichtscoefficienten, werden hiemit hinfällig.

Hiemit soll nicht gesagt sein, dass der Versuch Eulers, die Bildung und Verseifung der Ester auf Ionenreactionen zurückzuführen, unberechtigt sei.[2] Nur darf man nicht annehmen, dass alle Dissociationsgleichgewichte sich mit unendlicher Geschwindigkeit einstellen, und darf daher die betreffenden Gleichgewichtsbedingungen nicht in die Geschwindigkeitsgleichung für die Esterverseifung einführen.

Wie die Annahme von Ionenreactionen mathematisch behandelt werden könnte, ergibt sich aus meiner eingangs erwähnten Abhandlung über die allgemeinste Form der Gesetze der chemischen Kinetik homogener Systeme. Die rechnerischen Schwierigkeiten wären allerdings sehr bedeutend.

## II. Die Beziehungen zwischen Gleichgewichtscoefficienten und Geschwindigkeitsconstanten bei simultanen Gleichgewichten in homogenen Systemen.

Beziehungen zwischen Gleichgewichtscoefficienten und Geschwindigkeitsconstanten können in der Regel nur in Betracht kommen, wenn in einem System Vorgänge möglich sind, die

---

[1] Z. f. physikal. Chem., XXXVI, 409 (1901).

[2] Für diesen Gedanken beansprucht Zengelis (Ber. d. Deutsch. ch. Ges., *34*, 198 [1901]) die Priorität.

nach beiden Richtungen verlaufen (Gegenwirkungen).[1] Tritt in einem System nur ein zu einem Gleichgewichte führendes Reactionspaar auf, so ist bekanntlich der Gleichgewichtscoefficient gleich dem Quotienten der beiden Geschwindigkeitsconstanten. Dasselbe gilt auch noch, wenn in einem System mehrere derartige Reactionspaare stattfinden, die hinsichtlich der daran betheiligten Molekelarten völlig verschieden sind. Dann haben die verschiedenen Gleichgewichte keinen Einfluss aufeinander, insoferne nicht etwa eine Änderung des Mediums anzunehmen ist.

Dagegen ist bisher die Frage nicht untersucht worden, ob diese Beziehung auch noch gelten muss, wenn mehrere Gegenwirkungen nebeneinander stattfinden, die hinsichtlich der betheiligten Molekelarten nicht völlig voneinander verschieden sind. Euler hat in der eingangs erwähnten Abhandlung[2] die erwähnte Beziehung auch in diesem Falle als giltig vorausgesetzt. Es ist aber leicht einzusehen, dass diese Beziehung in dem jetzt in Rede stehenden Falle nicht nothwendig erfüllt sein muss.

Um dies zu zeigen, sollen zwei simultane Gleichgewichte betrachtet werden, deren Reactionsgleichungen eine Molekelart gemeinsam haben. Die Reactionsgleichungen seien

$$n_1 M_1 + X \rightleftarrows Y \quad \text{und} \quad o_1 M_1 + Z \rightleftarrows U.$$

Darin bedeuten $M_1$ die beiden Gleichgewichten gemeinsame Molekelart, $X$, $Y$, $Z$ und $U$ Molekelarten oder Complexe von Molekelarten, die untereinander völlig verschieden sind oder auch gemeinsame Molekelarten enthalten können. Nur soll die Molekelart $M_1$ nicht auf beiden Seiten einer Reactionsgleichung denselben Coefficienten haben.

Bezeichnet $C_1$ die Concentration von $M_1$ beim Gleichgewichte, $C_x$ das Product der Concentrationen der in $X$ enthaltenen Molekelarten, erhoben zu den durch die stöchiometrischen Coefficienten angegebenen Potenzen, und seien $C_y$, $C_z$, $C_u$ die analogen Producte für die Complexe $Y$, $Z$ und $U$, so hat man die Gleichgewichtsbedingungen

[1] Eine Einschränkung dieses Satzes wird sich aus dem folgenden ergeben.

[2] S. 3203.

$$K_1 = \frac{C_y}{C_1^{n_1} C_x} \qquad \ldots 1)$$

und

$$K_2 = \frac{C_u}{C_1^{o_1} C_z}. \qquad \ldots 2)$$

Nach dem Begriff der Reactionsgleichungen hat $(n_1 M_1 + X)$ dieselbe elementare Zusammensetzung wie $Y$, ferner $(o_1 M_1 + Z)$ dieselbe elementare Zusammensetzung wie $U$. Daher hat auch $(n_1 - o_1) M_1 + X - Z$ dieselbe elementare Zusammensetzung wie $Y - U$, oder $(n_1 - o_1) M_1 + X + U$ dieselbe Zusammensetzung wie $Y + Z$. Man kann daher in dem System auch das Reactionspaar

$$(n_1 - o_1) M_1 + X + U \rightleftarrows Y + Z$$

annehmen. Für dieses lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{C_y C_z}{C_1^{n_1 - o_1} C_x C_y} = K_3. \qquad \ldots 3)$$

Wenn nun die Gleichgewichtsbedingungen 1) und 2) erfüllt sind, so hat auch

$$\frac{C_y C_z}{C_1^{n_1 - o_1} C_x C_u} = \frac{K_1}{K_2}$$

einen constanten Wert. Es herrscht daher hinsichtlich des dritten Reactionspaares nothwendigerweise Gleichgewicht, wenn hinsichtlich der beiden ersten Reactionspaare Gleichgewicht herrscht.

Das Vorhandensein von zwei simultanen Gleichgewichten, welche eine Molekelart gemeinsam haben, bedingt also immer das Vorhandensein eines dritten Gleichgewichtes, dessen Constante durch die beiden anderen Gleichgewichtscoefficienten bestimmt ist.

Für diesen Fall soll nun die Beziehung zwischen den Gleichgewichtscoefficienten und den Geschwindigkeitsconstanten der einzelnen Reactionen behandelt werden. Zum Gleichgewicht ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Mengen von $M_1$, $X$, $Y$, $Z$ und $U$ constant bleiben (sich mit der Zeit nicht ändern).

Diese Constanz tritt aber nicht nur ein, wenn jedes einzelne Reactionspaar für sich allein die Concentrationen unver-

ändert lässt, sondern auch dann, wenn zwar jedes Reactionspaar eine Concentrationsänderung bewirkt, aber die drei Concentrationsänderungen sich gegenseitig aufheben. Beispielsweise könnte das erste Reactionspaar in der Zeiteinheit einen bestimmten Bruchtheil des Formelgewichtes des Complexes $n_1 M_1 + X$ in $Y$ verwandeln und das zweite Reactionspaar in derselben Zeit denselben Bruchtheil des Formelgewichtes des Complexes $U$ in $o_1 M_1 + Z$ umwandeln. Das dritte Reactionspaar könnte gleichzeitig dieselben Quantitäten von $Y$ und $Z$ in $(n_1 - o_1) M_1$, $X$ und $U$ verwandeln.

Die durch die drei Reactionspaare in der Zeiteinheit gebildeten Mengen der vorhandenen Stoffe können dann ausgedrückt werden durch

| | $M_1$ | $X$ | $Y$ | $Z$ | $U$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Reactionspaar.... | $-\alpha n_1 M_1$ | $-\alpha X$ | $\alpha Y$ | 0 | 0 |
| 2. » .... | $\alpha o_1 M_1$ | 0 | 0 | $\alpha Z$ | $-\alpha U$ |
| 3. » .... | $\alpha (n_1 - o_1) M_1$ | $\alpha X$ | $-\alpha Y$ | $-\alpha Z$ | $\alpha U$ |

Man sieht, dass bei dieser Annahme im ganzen keine Concentrationsänderung eintritt, also Gleichgewicht herrscht. Man sieht ferner, dass auch Gleichgewichte ohne eigentliche Reactionen mit Gegenwirkungen denkbar sind. Nimmt man nämlich an, dass bloß die Reactionen

$$n_1 M_1 + X \rightarrow Y, \quad U \rightarrow Z + o_1 M_1 \quad \text{und} \quad Y + Z \rightarrow U + (n_1 - o_1) M_1$$

ohne die betreffenden Gegenreactionen stattfinden, so ist in derselben Weise ein Gleichgewicht möglich.

Bezeichnet man die Geschwindigkeitsconstanten der sechs Reactionen mit $k_1$ bis $k_6$, so sind bei der besprochenen Art von Gleichgewicht die Gleichungen

$$K_1 = \frac{k_1}{k_2}, \quad K_2 = \frac{k_3}{k_4}, \quad K_3 = \frac{k_5}{k_6}$$

nicht erfüllt.

Ein Gleichgewicht dieser Art ist durchaus möglich. Auf Reactionen, welche in homogenen Systemen ohne Änderung der Zusammensetzung des Systems erfolgen, lässt sich kein Perpetuum mobile gründen, ebensowenig wie auf die Be-

wegungen, welche die kinetische Theorie der Aggregatzustände in allen Körpern annimmt.

Für die Ermittelung der Beziehung zwischen den Gleichgewichtscoefficienten und den Geschwindigkeitsconstanten können ebenso wie bei einzelnen, so auch bei simultanen Gleichgewichten nur die Gesetze der chemischen Kinetik benutzt werden. Denn in den thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen kommen die Geschwindigkeitsconstanten nicht vor, wie denn überhaupt die Thermodynamik über Reactionsgeschwindigkeiten nichts aussagt. Dagegen lassen sich aus den Gesetzen der chemischen Kinetik in allen Fällen Gleichgewichtsbedingungen ableiten, in denen die Geschwindigkeitsconstanten vorkommen. Die Beziehung zwischen Gleichgewichtscoefficienten und Geschwindigkeitsconstanten ergibt sich dann, indem man in den thermodynamischen Gleichgewichtsformeln die durch die Kinetik gelieferten Werte der Gleichgewichtsconcentrationen einsetzt. Es soll daher nunmehr die kinetische Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen besprochen werden.

## III. Kinetische Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen.

Zur Ermittelung der Gleichgewichtsbedingungen aus den Gesetzen der Kinetik können zwei Wege dienen:

1. Man integriert die Geschwindigkeitsgleichungen und erhält dadurch die jeweiligen Concentrationen der vorhandenen Molekelarten als Functionen der Zeit. Die Concentrationen beim Gleichgewichte sind nun jene Concentrationen, welche sich nach unendlich langer Zeit einstellen. Setzt man also in den Ausdrücken für die Concentrationen die Zeit gleich unendlich, so erhält man die Gleichgewichtsconcentrationen als Functionen der Anfangsconcentrationen und der Geschwindigkeitsconstanten. Mit Hilfe der so ermittelten Gleichgewichtsconcentrationen lässt sich dann der Gleichgewichtscoefficient als Function der Geschwindigkeitsconstanten ausdrücken.

2. Viel einfacher erhält man die kinetischen Gleichgewichtsbedingungen auf folgendem Wege. In einer früheren Abhandlung[1] habe ich untersucht, unter welchen Umständen die

[1] Monatshefte für Chemie, XXI, 733; Z. f. physikal. Chemie, XXXV, 545 (1900).

Concentration einer Molekelart im ganzen unverändert bleibt, obwohl sie an mehreren Reactionen derart betheiligt ist, dass die einzelnen Reactionen ihre Concentration verändern können. Bei dieser Gelegenheit habe ich eine nothwendige, aber nicht hinreichende Bedingung (Gleichung 18)[1] für die Constanz der Concentration einer Molekelart erhalten, welche eine Beziehung zwischen den Anfangsconcentrationen und den Geschwindigkeitscoefficienten darstellt. Diese Gleichung 18) lässt sich nun verwenden, um Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln. Soll nämlich ein System von Anfang an im Gleichgewichte sein, so müssen die Anfangsconcentrationen so gewählt sein, dass alle Molekelarten constante Concentrationen haben. Man hat also für jede Molekelart die betreffende Gleichung 18) zu bilden und erhält so viele Gleichungen zwischen den Concentrationen und Geschwindigkeitsconstanten, als Molekelarten da sind. Diese Gleichungen sind nicht alle voneinander unabhängig, da ja die Mengenänderungen der einzelnen Molekelarten durch das Gesetz der Erhaltung der Masse miteinander verknüpft sind.

Während die Gleichung 18) für eine einzelne Molekelart nur eine nothwendige, aber nicht immer hinreichende Bedingung für die Unveränderlichkeit ihrer Concentration ist, gibt die Aufstellung der Gleichung 18) für alle vorhandenen Molekelarten die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass keine Molekelart ihre Concentration ändern kann, also die vollständige Gleichgewichtsbedingung. Die Gleichung 18) folgte nämlich daraus, dass die Concentrationsänderung einer Molekelart jedenfalls nur dann für alle Zeiten den Wert Null haben kann, wenn sie zur Zeit $t = 0$ den Wert Null hat. Sind daneben Molekelarten von veränderlicher Concentration da, so ist das Nullwerden des Differentialquotienten der Concentration einer Molekelart nach der Zeit für $t = 0$ nicht genügend, um für alle Zeiten unveränderliche Concentration dieser Molekelart sicherzustellen; die Änderung der Concentration der anderen Molekelarten kann bewirken, dass auch jener Differentialquotient, welcher für $t = 0$ Null war, in späterer Zeit endliche Werte

[1] §. 41 (Mon. S. 734, Z. f. ph. Ch. S. 546); siehe auch §. 47 (Mon. S. 738, Z. f. ph. Ch. S. 549).

annimmt. Wenn dagegen zur Zeit $t = 0$ alle Molekelarten unveränderliche Concentration haben, so kann auch später keine Änderung eintreten.

Mathematisch lässt sich die Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen aus den Geschwindigkeitsgleichungen in folgender Weise formulieren.[1]

Die Reactionsgleichungen sollen von folgender Form vorausgesetzt werden:

$$\text{I.} \quad n_1 M_1 + n_2 M_2 + \ldots \rightarrow \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots$$
$$\text{II.} \quad o_1 M_1 + o_2 M_2 + \ldots \rightarrow \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bezeichnet man die gesammten Concentrations**abnahmen** der Molekelarten $M_1$, $M_2$ u. s. w. zur Zeit $t$ mit $\xi_1$, $\xi_2$ u. s. w., so hat man die Gleichungen

$$\frac{d\xi_1}{dt} = (n_1 - \alpha_1)\frac{dx}{dt} + (o_1 - \beta_1)\frac{dy}{dt} + \ldots$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = (n_2 - \alpha_2)\frac{dx}{dt} + (o_2 - \beta_2)\frac{dy}{dt} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Darin bedeutet $x$ die zur Zeit $t$ durch die Reaction I umgesetzte Menge, ausgedrückt in Bruchtheilen der in der Reactionsgleichung stehenden Menge. Dieselbe Bedeutung hat $y$ hinsichtlich der Reaction II u. s. w. $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ... sind die Geschwindigkeiten der Reactionen I, II...

Bezeichnet man die Concentrationen der Molekelarten $M_1$, $M_2$... im Gleichgewichte mit $C_1$, $C_2$..., so sind die Geschwindigkeiten der Reactionen beim Gleichgewichte gegeben durch

$$\left[\frac{dx}{dt}\right] = k_1 C_1^{n_1} C_2^{n_2} \ldots$$
$$\left[\frac{dy}{dt}\right] = k_2 C_1^{o_1} C_2^{o_2} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[1] Die Bezeichnungen sind im Einklang mit der eingangs citierten Abhandlung gewählt.

Die eckigen Klammern sollen andeuten, dass die Geschwindigkeiten nur für den Gleichgewichtszustand gelten.

Die Gleichgewichtsbedingung ist nun, dass beim Gleichgewichte keine Molekelart ihre Concentration verändern kann. Setzt man also $\frac{d\xi_1}{dt}$, $\frac{d\xi_2}{dt}$ u. s. w. gleich Null, so bedeuten dann die $\frac{dx}{dt}$ u. s. w. Geschwindigkeiten beim Gleichgewichte. Durch Einführung der Werte erhält man die Gleichgewichtsbedingungen

$$0 = (n_1 - \alpha_1) k_1 C_1^{n_1} C_2^{n_2} \ldots + (o_1 - \beta_1) k_2 C_1^{o_1} C_2^{o_2} \ldots + \ldots$$
$$0 = (n_2 - \alpha_2) k_1 C_1^{n_1} C_2^{n_2} \ldots + (o_2 - \beta_2) k_2 C_1^{o_1} C_2^{o_2} \ldots + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man die Gleichgewichtsconcentrationen und damit auch die Beziehungen zwischen Gleichgewichtscoefficienten und Geschwindigkeitsconstanten berechnen. Diese Rechnung lässt sich nicht allgemein durchführen, da man Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades aufzulösen hat, wo $n$ unbestimmt bleibt. Ich beschränke mich daher darauf, die Durchführung derartiger Rechnungen an einfachen Beispielen zu zeigen. Die Ergebnisse zeigen entsprechend den Ausführungen des Abschnittes II, dass bei simultanen Gleichgewichten nicht für jedes einzelne Reactionspaar Gleichgewicht zu herrschen braucht, und dass die Beziehungen zwischen Gleichgewichtscoefficienten und Geschwindigkeitsconstanten nicht die einfache Form haben müssen, welche bei isolierten Reactionspaaren auftritt und bisher als allgemein giltig betrachtet wurde.

## IV. Die gegenseitige Umwandlung von drei Isomeren.

Befinden sich in einem homogenen Systeme drei isomere Molekelarten $M_1$, $M_2$ und $M_3$, die sich ineinander umwandeln können, so sind folgende sechs Reactionen möglich:

I. $M_1 \rightarrow M_2$, II. $M_2 \rightarrow M_3$, III. $M_3 \rightarrow M_1$.
I'. $M_2 \rightarrow M_1$, II'. $M_3 \rightarrow M_2$, III'. $M_1 \rightarrow M_3$.

Sind die Concentrationen der drei Stoffe im Gleichgewichte $C_1$, $C_2$ und $C_3$, so gibt die Thermodynamik die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{C_2}{C_1} = K_1, \quad \frac{C_3}{C_2} = K_2, \quad \frac{C_1}{C_3} = K_3.$$

Dabei ist bekanntlich

$$K_3 = \frac{1}{K_1 K_2}.$$

In diesem Falle lässt sich auch die Kinetik der Umwandlung ohne Schwierigkeit vollständig entwickeln, da man es mit simultanen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten zu thun hat.

Bezeichnet man die Geschwindigkeitscoefficienten der sechs Reactionen I, I', II, II', III und III' der Reihe nach mit $k_1$ bis $k_6$, ihre Geschwindigkeiten mit

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \quad \frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt},$$

ferner die Anfangsconcentrationen der drei Molekelarten mit $A_1$, $A_2$, $A_3$ und die zur Zeit $t$ eingetretenen Concentrationsabnahmen derselben mit $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, so hat man für die Geschwindigkeiten der sechs Reactionen die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(A_1-\xi_1), \quad \frac{dz}{dt} = k_3(A_2-\xi_2), \quad \frac{dv}{dt} = k_5(A_3-\xi_3),$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2(A_2-\xi_2), \quad \frac{du}{dt} = k_4(A_3-\xi_3), \quad \frac{dw}{dt} = k_6(A_1-\xi_1).$$

Die Geschwindigkeiten der Concentrationsabnahmen der drei Stoffe $M_1$, $M_2$, $M_3$ sind dann

$$\frac{d\xi_1}{dt} = k_1(A_1-\xi_1)-k_2(A_2-\xi_2)-k_5(A_3-\xi_3)+k_6(A_1-\xi_1),$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = -k_1(A_1-\xi_1)+k_2(A_2-\xi_2)+k_3(A_2-\xi_2)-k_4(A_3-\xi_3),$$

$$\frac{d\xi_3}{dt} = -k_3(A_2-\xi_2)+k_4(A_3-\xi_3)+k_5(A_3-\xi_3)-k_6(A_1-\xi_1).$$

Die Summe der drei $\frac{d\xi}{dt}$ ist Null, da nach dem Gesetze von der Erhaltung der Masse $\xi_1+\xi_2+\xi_3 = 0$ ist. Durch Einführung dieser Beziehung vermindert sich die Zahl der Differentialgleichungen auf zwei.

Das Ergebnis der Integration ist folgendes. Führt man nachstehende Abkürzungen ein:

$$T_1 = (k_1+k_6)A_1-k_2A_2-k_5A_3,$$

$$T_2 = -k_1A_1+(k_2+k_3)A_2-k_4A_3,$$

$$S_1 = k_1+k_5+k_6,$$

$$S_2 = k_2+k_3+k_4,$$

$$\vartheta' = \frac{S_1+S_2}{2}+\sqrt{\frac{(S_1-S_2)^2}{4}+(k_1-k_4)(k_2-k_5)},$$

$$\vartheta'' = \frac{S_1+S_2}{2}-\sqrt{\frac{(S_1-S_2)^2}{4}+(k_1-k_4)(k_2-k_5)},$$

$$\lambda' = \frac{k_2-k_5}{S_2-\vartheta'},$$

$$\lambda'' = \frac{k_2-k_5}{S_2-\vartheta''},$$

$$T' = T_1+\lambda'T_2,$$

$$T'' = T_1+\lambda''T_2,$$

so erhält man

$$\xi_1 = \frac{1}{\lambda'-\lambda''}\left[\frac{\lambda''T'}{\vartheta'}(e^{-\vartheta't}-1)-\frac{\lambda'T''}{\vartheta''}(e^{-\vartheta''t}-1)\right],$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\lambda'-\lambda''}\left[-\frac{T'}{\vartheta'}(e^{-\vartheta't}-1)+\frac{T''}{\vartheta''}(e^{-\vartheta''t}-1)\right],$$

$$\xi_3 = \frac{1}{\lambda'-\lambda''}\left[-(\lambda''-1)\frac{T'}{\vartheta'}(e^{-\vartheta't}-1)+(\lambda'-1)\frac{T''}{\vartheta''}(e^{-\vartheta''t}-1)\right].$$

Aus diesen Formeln folgen die Gleichgewichtsbedingungen, indem man $t = \infty$ setzt. Die Gleichgewichtsconcentrationen $C_1$, $C_2$, $C_3$ sind die Werte, welche die Concentrationen der drei Molekelarten $A_1-\xi_1$, $A_2-\xi_2$ und $A_3-\xi_3$ für $t = \infty$ annehmen. Man erhält so

$$C_1 = [A_1 - \xi_1]_{t=\infty} = \frac{1}{\vartheta' \vartheta''}(k_2 k_4 + k_2 k_5 + k_3 k_5)(A_1 + A_2 + A_3),$$

$$C_2 = [A_2 - \xi_3]_{t=\infty} = \frac{1}{\vartheta' \vartheta''}(k_1 k_4 + k_1 k_5 + k_4 k_6)(A_1 + A_2 + A_3),$$

$$C_3 = [A_3 - \xi_3]_{t=\infty} = \frac{1}{\vartheta' \vartheta''}(k_1 k_3 + k_2 k_6 + k_3 k_6)(A_1 + A_2 + A_3).$$

Die Beziehungen zwischen Gleichgewichtscoefficienten und Geschwindigkeitsconstanten ergeben sich hienach folgendermaßen:

$$K_1 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{k_1 k_4 + k_1 k_5 + k_4 k_6}{k_2 k_4 + k_2 k_5 + k_3 k_5},$$

$$K_2 = \frac{C_3}{C_2} = \frac{k_1 k_3 + k_2 k_6 + k_3 k_6}{k_1 k_4 + k_1 k_5 + k_4 k_6},$$

$$K_3 = \frac{C_1}{C_3} = \frac{k_2 k_4 + k_2 k_5 + k_3 k_5}{k_1 k_3 + k_2 k_6 + k_3 k_6} = \frac{1}{K_1 K_2}.$$

Die Concentrationsverhältnisse, welche nach der Thermodynamik von der Gesammtconcentration unabhängig sind, haben somit auch nach der kinetischen Ableitung einen von den Anfangsconcentrationen unabhängigen Wert.

Die gleichen Gleichgewichtsbedingungen erhält man sehr viel einfacher auf dem zweiten im vorigen Abschnitte angegebenen Wege. Setzt man in die Gleichungen für die $\frac{d\xi}{dt}$ die Gleichgewichtsconcentrationen $C_1$, $C_2$, $C_3$ ein, so müssen die $\frac{d\xi}{dt}$ Null werden. Man erhält dadurch folgende drei Gleichungen, welche entsprechend der Gleichung 18) der früher erwähnten Abhandlung die Bedingungen für die Unveränderlichkeit der Concentrationen der drei Molekelarten ausdrücken:

$$0 = k_1 C_1 - k_2 C_2 - k_5 C_3 + k_6 C_1,$$

$$0 = -k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_2 - k_4 C_3,$$

$$0 = -k_3 C_2 + k_4 C_3 + k_5 C_3 - k_6 C_1.$$

Die dritte dieser Gleichungen entsteht durch Addition der beiden ersten nach Multiplication mit —1.

Aus diesen Gleichungen erhält man für die Concentrationsverhältnisse im Gleichgewichte dieselben Werte wie früher. Eliminiert man beispielsweise aus zwei Gleichungen $C_1$, so erhält man eine Beziehung zwischen $C_2$ und $C_3$, welche mit der obigen identisch ist.

Die kinetisch abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen stimmen also mit den thermodynamischen überein. Dabei können alle sechs Geschwindigkeitsconstanten beliebige Werte haben. Dagegen sieht man, dass die Beziehungen $K_1 = \frac{k_1}{k_2}$, $K_2 = \frac{k_2}{k_3}$, $K_3 = \frac{k_3}{k_1}$, welche gelten würden, wenn jedes einzelne Gleichgewicht allein da wäre, bei simultanen Gleichgewichten nicht erfüllt zu sein brauchen. Die Giltigkeit der Gleichung $K_1 = \frac{k_1}{k_2}$ würde bedeuten, dass beim Gleichgewichte die Reactionen I und I′ auch für sich allein im Gleichgewichte stehen, oder dass $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = 0$ ist. Die im vorstehenden abgeleitete kinetische Gleichgewichtsbedingung schließt auch den im Abschnitt II erörterten Fall ein, dass die simultanen Paare von Gegenwirkungen nicht für sich allein im Gleichgewichte stehen, sondern dass sie nur durch ihr Zusammenwirken das Gleichgewicht herstellen; dann ist $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$ auch beim Gleichgewichte nicht Null.

Damit auch beim simultanen Gleichgewichte die einzelnen Paare von Gegenwirkungen für sich allein im Gleichgewichte stehen, muss eine bestimmte Beziehung zwischen den Geschwindigkeitsconstanten bestehen. Man erhält nämlich beim Gleichgewichte folgende Werte für die Differenzen der Geschwindigkeiten der Paare von Gegenwirkungen:

$$\left[\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right] = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{\vartheta' \vartheta''} (k_1 k_3 k_5 - k_2 k_4 k_6),$$

$$\left[\frac{dz}{dt} - \frac{du}{dt}\right] = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{\vartheta' \vartheta''} (k_1 k_3 k_5 - k_2 k_4 k_6),$$

$$\left[\frac{dv}{dt} - \frac{dw}{dt}\right] = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{\vartheta' \vartheta''} (k_1 k_3 k_5 - k_2 k_4 k_6).$$

Die drei Geschwindigkeitsdifferenzen sind also im Gleichgewichte gleich, wie es nach Abschnitt II der Fall sein muss. Aber nur für $k_1k_3k_5 = k_2k_4k_6$ werden sie Null. Nur dann stehen die drei Reactionspaare auch für sich allein im Gleichgewichte und nur dann gelten die Beziehungen $K_1 = \frac{k_1}{k_2}$ u. s. w. Man überzeugt sich leicht, dass diese einfacheren Beziehungen aus der früher abgeleiteten allgemeinen hervorgehen, wenn man $k_1k_3k_5 = k_2k_4k_6$ setzt.

Die einfachere Form der Beziehungen zwischen Gleichgewichtsconstanten und Geschwindigkeitsconstanten gilt unter anderem immer, wenn eines der drei Reactionspaare wegfällt, z. B. wenn $k_1 = k_2 = 0$ ist.

Einfache Beziehungen treten auch auf, wenn ein Gleichgewicht eintritt, ohne dass Gegenwirkungen vorhanden sind. Finden z. B. nur die Reactionen I′, II′ und III′ statt, so sind $k_1$, $k_3$ und $k_5$ Null und man erhält $K_1 = \frac{k_6}{k_2}$, $K_2 = \frac{k_2}{k_4}$, $K_3 = \frac{k_4}{k_6}$.

---

Euler hat bei seiner theoretischen Behandlung der Kinetik der Esterbildung aus Säure und Alkohol die Annahme gemacht, dass die vier Dissociationsgleichgewichte für Säure, Alkohol, Ester und Wasser sich unendlich rasch einstellen, da er die betreffenden Gleichgewichtsbedingungen als in jedem Augenblicke erfüllt einführt. Mit dieser Annahme ist, wie ich im ersten Abschnitte ausgeführt habe, die mit messbarer Geschwindigkeit eintretende Bildung und Verseifung der Ester nicht verträglich. Bei der Umwandlung von drei Isomeren lässt sich der analoge Fall leicht rechnerisch verfolgen. Es ergibt sich, dass bei der Annahme, dass ein Reactionspaar mit endlicher Geschwindigkeit verläuft, die beiden anderen dagegen mit unendlicher, keine endliche Reactionsgeschwindigkeit zur Beobachtung gelangen kann.

Beobachtbar sind Änderungen der $\xi$ mit der Zeit. Nun ergibt sich beispielsweise aus der Formel für $\xi_1$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{1}{\lambda'-\lambda''}[-\lambda'' T' e^{-\vartheta' t} + \lambda' T'' e^{-\vartheta'' t}]$$

$$= \frac{1}{\vartheta'-\vartheta''}\Big\{-[(S_2-\vartheta')T_1+(k_2-k_5)T_2]e^{-\vartheta' t}+$$

$$+[(S_2-\vartheta'')T_1+(k_2-k_5)T_2]e^{-\vartheta'' t}\Big\}.$$

Die Größen $\vartheta'$, $\vartheta''$, $S_2$, $T_1$, $T_2$ sind homogene Functionen ersten Grades der $k$. Man kann sie daher darstellen als Producte aus einem der $k$-Werte (z. B. $k_6$) und Functionen der Verhältnisse $\frac{k_1}{k_6}$, $\frac{k_2}{k_6}$ u. s. w.

Ist $k_6$ das größte von den $k$, so sind die vorkommenden Verhältnisse $\frac{k_1}{k_6}$ u. s. w. in keinem Falle unendlich. Sonach lässt sich $\frac{d\xi_1}{dt}$ auf die Form bringen

$$\frac{d\xi_1}{dt} = a k_6 e^{-bk_6 t} + c k_6 e^{-dk_6 t},$$

wo $a$, $b$, $c$ und $d$ in keinem Falle unendlich werden. Man kann sich ferner durch Ausrechnen leicht überzeugen, dass $b$ und $d$ wesentlich positive Größen sind, welche nicht Null werden können, solange man keine negativen Geschwindigkeitsconstanten annimmt.

Sollen nun die Reactionen I und I' mit endlicher, die übrigen mit unendlicher Geschwindigkeit verlaufen, so hat man $k_6 = \infty$, $\frac{k_1}{k_6} = \frac{k_2}{k_6} = 0$, $\frac{k_3}{k_6}$, $\frac{k_4}{k_6}$ und $\frac{k_5}{k_6}$ endlich vorauszusetzen. Nun geht für $k_6 = \infty$ der Ausdruck $k_6 e^{-k_6 bt}$ über in $\frac{1}{bte^{k_6 bt}}$. Da $b$ positiv, ist dieser Ausdruck für endliche $t$ Null. Nur für $t = 0$ kann er von Null verschieden sein. Daher kann auch $\frac{d\xi_1}{dt}$ nur für $t = 0$ von Null verschieden sein. Wenn daher nur ein Reactionspaar mit endlicher Geschwindigkeit verläuft, stellt sich zur Zeit $t = 0$ sofort das Gleichgewicht ein; es kann dann keine beobachtbare Reactionsgeschwindigkeit auftreten.

### V. Entstehung und Umlagerung eines Anlagerungsproductes.

Sobald bimoleculare Reactionen an simultanen Gleichgewichten betheiligt sind, ist die Integration der Differentialgleichungen entweder überhaupt nicht in geschlossener Form ausführbar, oder doch mindestens außerordentlich umständlich. Ich beschränke mich daher beim folgenden Beispiele auf die kinetische Ermittelung der Gleichgewichtsbedingung nach dem zweiten im Abschnitt III angegebenen Verfahren.

Die Reactionsgleichungen seien: I. Bildung und Zerfall des Anlagerungsproductes, $M_1 + M_2 \rightleftarrows M_3$; II. Umlagerung des Anlagerungsproductes, $M_3 \rightleftarrows M_4$. Dann ist noch ein weiteres Reactionspaar möglich, nämlich: III. Zerfall des Umlagerungsproductes in die Componenten und directe Bildung daraus, $M_4 \rightleftarrows M_1 + M_2$.

Die kinetische Gleichgewichtsbedingung ergibt sich daraus, dass beim Gleichgewicht keine der vorhandenen Molekelarten eine Concentrationsänderung erleiden kann.

Sind $k_1$ bis $k_6$ die Geschwindigkeitsconstanten der sechs Reactionen, $C_1$ bis $C_4$ die Gleichgewichtsconcentrationen der vier Molekelarten, so muss wegen der Unveränderlichkeit der Concentration von $M_1$ sein

$$0 = k_1 C_1 C_2 - k_2 C_3 - k_5 C_4 + k_6 C_1 C_2.$$

Diese Gleichung drückt zugleich die Unveränderlichkeit der Concentration von $M_2$ aus.

Ferner liefert die Unveränderlichkeit der Concentration von $M_3$ die Gleichung

$$0 = -k_1 C_1 C_2 + k_2 C_3 + k_3 C_3 - k_4 C_4.$$

Die Gleichung, welche die Unveränderlichkeit der Concentration von $M_4$ ausdrückt, ist in diesen beiden Gleichgewichtsbedingungen bereits enthalten.

Zur Bestimmung der vier $C$ hat man außer diesen beiden Gleichungen noch zwei stöchiometrische Beziehungen

$$A_1 = C_1 + C_3 + C_4 \quad \text{und} \quad A_2 = C_2 + C_3 + C_4.$$

$A_1$ und $A_2$ sind Constante und bedeuten die Concentrationen von $M_1$ und $M_2$, welche man erhielte, wenn man $M_3$ und $M_4$ vollständig in $M_1$ und $M_2$ verwandeln würde.

Der Einfachheit halber habe ich die Rechnung für den Fall durchgeführt, dass $A_1 = A_2 = A$ ist, also $M_1$ und $M_2$ in äquivalenten Mengen da sind. Die Gleichgewichtsbedingungen gehen dann über in

$$0 = (k_1+k_6)(A-C_3-C_4)^2-k_2C_3-k_5C_4$$

und

$$0 = -k_1(A-C_3-C_4)^2+(k_2+k_3)C_3-k_4C_4.$$

Setzt man

$$\mu_1 = k_1k_4+k_1k_5+k_4k_6,$$
$$\mu_2 = k_2k_4+k_2k_5+k_3k_5,$$
$$\mu_3 = k_1k_3+k_2k_6+k_3k_6,$$
$$x = \frac{\mu_1+\mu_3}{\mu_1},$$
$$x_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

so erhält man

$$C_1 = C_2 = x\left(-\frac{x_1}{2x^2}+\sqrt{\frac{x_1}{x^3}A+\frac{x_1^2}{4x^4}}\right),$$

$$C_3 = \frac{A}{x}+\frac{x_1}{2x^2}-\sqrt{\frac{x_1}{x^3}A+\frac{x_1^2}{4x^4}},$$

$$C_4 = \frac{\mu_3}{\mu_1}\left(\frac{A}{x}+\frac{x_1}{2x^2}-\sqrt{\frac{x_1}{x^3}A+\frac{x_1^2}{4x^4}}\right).$$

Diese Gleichgewichtsconcentrationen stehen in den von der Thermodynamik geforderten Beziehungen, und zwar für beliebige Werte der Geschwindigkeitsconstanten. Denn man erhält durch Ausrechnen der Concentrationsverhältnisse aus den vorstehenden $C$-Werten oder viel einfacher direct aus den eingangs dieses Abschnittes aufgestellten zwei Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{C_4}{C_3} = \frac{\mu_3}{\mu_1} = K_1, \quad \frac{C_3}{C_1^2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = K_2,$$

wo $K_1$ und $K_2$ bei gegebener Temperatur constant, d. h. von den Anfangsconcentrationen unabhängig sind.

Dagegen ist es auch hier wieder für das Gleichgewicht nicht nothwendig, dass jedes einzelne Paar von Gegenwirkungen für sich allein im Gleichgewichte steht. Dann müsste sein:

$$0 = k_1 C_1^2 - k_2 C_2 \quad \text{und} \quad 0 = k_3 C_3 - k_4 C_4$$

oder

$$\frac{C_2}{C_1^2} = \frac{k_1}{k_2}, \quad \frac{C_4}{C_3} = \frac{k_3}{k_4}.$$

Dieser besondere Fall der Gleichgewichtsbedingung tritt nur ein, wenn zwischen den sechs Geschwindigkeitsconstanten eine bestimmte Beziehung besteht, und zwar $k_1 k_3 k_5 = k_2 k_4 k_6$.

## VI. Ein Paradoxon der chemischen Dynamik.

Während in den vorigen Beispielen die mit Hilfe der Anschauungen der chemischen Kinetik abgeleiteten Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Werte der Geschwindigkeitsconstanten mit jenen übereinstimmen, welche aus der üblichen thermodynamischen Ableitung des Massenwirkungsgesetzes folgen, ist das nicht der Fall beim Stattfinden folgender sechs Reactionen:

$$M_1 \rightleftarrows M_2, \qquad M_2 + M_3 \rightleftarrows M_1 + M_4, \qquad M_4 \rightleftarrows M_3,$$

Man erhält die unabhängigen kinetischen Gleichgewichtsbedingungen

$$0 = k_1 C_1 - k_2 C_2 - k_3 C_2 C_3 + k_4 C_1 C_4,$$
$$0 = k_3 C_2 C_3 - k_4 C_1 C_4 - k_5 C_4 + k_6 C_3.$$

Außerdem hat man die stöchiometrischen Gleichungen

$$C_1 + C_2 = A, \qquad C_3 + C_4 = B,$$

wo $A$ und $B$ Constanten sind und die Mengen von $M_1$ und $M_3$ angeben, welche man erhalten würde, wenn $M_2$ und $M_4$ vollständig in $M_1$ und $M_3$ verwandelt würden.

Setzt man $x_1 = k_1 + k_2$, $x_3 = k_3 - k_4$, $x_5 = k_5 + k_6$, so erhält man:

$$C_1 = \frac{x_5}{2x_3}\left\{\left[1+A\left(\frac{k_3}{x_5}+\frac{x_3k_2}{x_1x_5}\right)+B\left(\frac{k_4}{x_1}+\frac{x_3k_5}{x_1x_5}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left[1+A\left(\frac{k_3}{x_5}-\frac{x_3k_2}{x_1x_5}\right)+B\left(\frac{k_4}{x_1}+\frac{x_3k_5}{x_1x_5}\right)\right]^2+4AB\frac{x_3}{x_1^2x_5^2}(k_2k_4k_6-k_1k_3k_5)}\right\}.$$

$$C_3 = \frac{x_1}{2x_3}\left\{-\left[1+A\left(\frac{k_3}{x_5}-\frac{x_3k_2}{x_1x_5}\right)+B\left(\frac{k_4}{x_1}-\frac{x_3k_5}{x_1x_5}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left[1+A\left(\frac{k_3}{x_5}-\frac{x_3k_2}{x_1x_5}\right)+B\left(\frac{k_4}{x_1}+\frac{x_3k_5}{x_1x_5}\right)\right]^2+4AB\frac{x_3}{x_1^2x_5^2}(k_2k_4k_6-k_1k_3k_5)}\right\}.$$

Bezeichnet man im folgenden den Wurzelausdruck, der in den Ausdrücken von $C_1$ und $C_3$ in gleicher Weise vorkommt, schlechtweg mit $\sqrt{\phantom{x}}$, so erhält man ferner

$$C_2 = A-C_1 = \frac{x_5}{2x_3}\left\{-\left[1+A\left(\frac{k_4}{x_5}-\frac{x_3k_1}{x_1x_5}\right)+B\left(\frac{k_4}{x_1}+\frac{x_3k_5}{x_1x_5}\right)\right]+\sqrt{\phantom{x}}\right\},$$

$$C_4 = B-C_3 = \frac{x_1}{2x_3}\left\{\left[1+A\left(\frac{k_3}{x_5}-\frac{x_3k_2}{x_1x_5}\right)+B\left(\frac{k_3}{x_1}+\frac{x_3k_6}{x_1x_5}\right)\right]-\sqrt{\phantom{x}}\right\}.$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen ist im allgemeinen kein vollständiges Quadrat. Bildet man die Verhältnisse $\frac{C_3}{C_4}$, $\frac{C_2}{C_1}$ und $\frac{C_1C_4}{C_2C_3}$, so lassen sie sich nicht rational machen und sind demzufolge von $A$ und $B$ abhängig. Statt die unförmlichen allgemeinen Ausdrücke für diese Verhältnisse anzuschreiben, begnüge ich mich damit, ein Zahlenbeispiel zu geben.

Es sei

$$k_1 = k_2 = k_4 = k_5 = k_6 = 1, \quad k_3 = 2.$$

Für $A = B = 1$ wird

$$C_1 = C_4 = 0\cdot 55051, \quad C_2 = C_3 = 0\cdot 44949.$$

Dadurch wird

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_4}{C_3} = 1\cdot 2247, \quad \frac{C_1C_4}{C_2C_3} = 1\cdot 50.$$

Für $A = 1$, $B = 2$ dagegen erhält man

$$C_1 = 0\cdot5779,\quad C_2 = 0\cdot4221,\quad C_3 = 0\cdot9222,\quad C_4 = 1\cdot0778;$$

$$\frac{C_1}{C_2} = 1\cdot369,\quad \frac{C_4}{C_3} = 1\cdot169,\quad \frac{C_1 C_4}{C_2 C_3} = 1\cdot60.$$

Die Thermodynamik dagegen führt zu

$$\frac{C_3}{C_4} = K_3,\qquad \frac{C_2}{C_1} = K_1,\qquad \frac{C_1 C_4}{C_2 C_3} = K_2,$$

wo die $K$ von $A$ und $B$ unabhängig sind.

Es stehen also in diesem Falle die Grundannahmen der Kinetik nicht im Einklange mit den Forderungen der Thermodynamik, wenigstens, wie sie bisher aufgefasst wurden.

Nur wenn zwischen den Geschwindigkeitsconstanten die Beziehung $k_1 k_3 k_5 = k_2 k_4 k_6$ besteht, lässt sich die Wurzel ziehen. Man erhält dann

$$C_1 = \frac{k_2 A}{x_1},\quad C_2 = \frac{k_1 A}{x_1},\quad C_3 = \frac{k_5 B}{x_5},\quad C_4 = \frac{k_6 B}{x_5}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{k_5}{k_6},\quad \frac{C_2}{C_1} = \frac{k_1}{k_2},\quad \frac{C_1 C_4}{C_2 C_3} = \frac{k_2 k_6}{k_1 k_5} = \frac{k_3}{k_4}.$$

In diesem besonderen Falle stellt sich das Gleichgewicht geradeso ein, als wenn nur die Reactionen $M_1 \rightleftarrows M_2$ und $M_4 \rightleftarrows M_3$ stattfinden würden, und jedes Paar von Gegenwirkungen steht für sich allein im Gleichgewicht.

Die Bedingung für das Verschwinden des Paradoxons, beziehungsweise für die Übereinstimmung der üblichen thermodynamischen und der kinetischen Gleichgewichtsbedingung ($k_1 k_3 k_5 = k_2 k_4 k_6$) ist insbesondere immer dann erfüllt, wenn eines der drei Reactionspaare infolge Nullwerdens der betreffenden Geschwindigkeitsconstanten wegfällt.

### VII. Bedingungen für das Auftreten des Paradoxons.

Es ist von Interesse, zu erwägen, wie die Reactionen beschaffen sind, bei denen die Kinetik und die Thermodynamik zu verschiedenen Gleichgewichtsbedingungen führen. Da die

Frage rechnerisch schwerlich allgemein lösbar ist, muss ich mich darauf beschränken, einige Gesichtspunkte anzudeuten, die in Betracht kommen können.

Man könnte vielleicht vermuthen, dass das Paradoxon immer auftritt, wenn die simultanen Gleichgewichte von verschiedener Ordnung sind. Diese Vermuthung wird jedoch durch das im Abschnitt V gegebene Beispiel widerlegt.

Ebensowenig sind die Fälle des Paradoxons lediglich dadurch charakterisiert, dass dieselbe Umwandlung nach zwei verschiedenen Reactionsgleichungen eintreten kann. Das trifft allerdings am Beispiele des Abschnittes VI zu; die Umwandlung von $M_1$ in $M_2$ erfolgt nach den Gleichungen $M_1 \rightleftarrows M_2$ und $M_1 + M_4 \rightleftarrows M_2 + M_3$. Aber wenn man nur diese beiden Reactionspaare annimmt, tritt das Paradoxon nicht auf.

Wohl aber ist das Eintreten derselben Umwandlung nach zwei vom Standpunkte der Kinetik verschiedenen Reactionsgleichungen anscheinend eine nothwendige Bedingung für das Auftreten des Paradoxons. Denn dasselbe tritt, soweit ich es übersehe, immer auf, wenn die Reactionsgleichungen derart beschaffen sind, dass eine derselben durch bloße Summierung von zwei anderen, in dem Systeme wirklich auftretenden (ohne weitere Änderung, wie etwa Weglassung gleicher Glieder auf beiden Seiten der durch Summierung gebildeten Reactionsgleichung) entsteht. Die durch Summierung entstandenen Reactionsgleichungen sind als vollständige[1] Reactionsgleichungen aufzufassen.

Diesem Kennzeichen entspricht zunächst der Fall des Abschnittes VI. Die Reactionsgleichung $M_1 + M_4 = M_2 + M_3$ entsteht durch Summierung von $M_1 = M_2$ und $M_4 = M_3$. Das Paradoxon verschwindet, wenn eine der drei Reactionsgleichungen aus der Reihe der wirklich stattfindenden ausscheidet.

An den Beispielen der Abschnitte IV und V tritt das Paradoxon nicht auf, sie fallen auch nicht unter das erwähnte Kennzeichen. Dagegen liefert die Umwandlung von drei Isomeren das Paradoxon, sobald das erwähnte Kennzeichen

[1] Wegscheider, Mon. f. Chem. XXI, 703; Z. f. physik. Chem. XXXV 521 (1900).

zutrifft. Das ist der Fall, wenn man folgende Reactionsgleichungen annimmt:

$$M_1 \rightleftarrows M_2, \quad M_2 \rightleftarrows M_3, \quad M_3+M_2 \rightleftarrows M_1+M_2.$$

Setzt man z. B. die Geschwindigkeitsconstante der Reaction $M_3+M_2 \rightarrow M_1+M_2$ gleich 2, alle anderen Geschwindigkeitsconstanten gleich 1, so gibt die kinetische Gleichgewichtsbedingung, wenn die Gesammtconcentration des umwandelbaren Körpers mit $A$ bezeichnet wird, folgende Werte der Gleichgewichtsconcentrationen:

$$C_1 = \frac{A(3+4A)}{9(1+A)}, \quad C_2 = \frac{A}{3}, \quad C_3 = \frac{A(3+2A)}{9(1+A)}.$$

Daraus folgt

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{3+4A}{3(1+A)}, \quad \frac{C_3}{C_2} = \frac{3+2A}{3(1+A)}.$$

Die Concentrationsverhältnisse werden nicht von $A$ unabhängig.

Entsprechend dem erwähnten Kennzeichen tritt das Paradoxon auch auf bei den Reactionspaaren $M_1 \rightleftarrows M_2$ und $2M_1 \rightleftarrows 2M_2$. Die zweite Reactionsgleichung entsteht, indem man die erste zu sich selbst hinzuaddiert. Für das Gleichgewicht hat man die stöchiometrische Bedingung $C_2 = A - C_1$, wo $A$ constant ist, und die kinetische Bedingung $0 = k_1 C_1 - k_2 C_2 + k_3 C_1^2 - k_4 C_2^2$.

Daraus folgt

$$C_1 = \frac{1}{2(k_3-k_4)} \left\{ -(k_1+k_2+2k_4A) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{(k_1+k_2)^2+4(k_1k_4+k_2k_3)A+4k_3k_4A^2} \right\}.$$

Dieser Wert von $C_1$ erfüllt im allgemeinen die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung nicht. Setzt man z. B. $k_1 = k_2 = k_4 = 1$, $k_3 = 2$, $A = 1$, so erhält man $C_1 = 0 \cdot 449$, $C_2 = 0 \cdot 551$, $\frac{C_2}{C_1} = 1 \cdot 23$. Für dieselben Werte der Geschwindigkeitsconstanten, aber $A = 2$, erhält man $C_1 = 0 \cdot 873$, $C_2 = 1 \cdot 127$, $\frac{C_2}{C_1} = 1 \cdot 29$. Das Paradoxon verschwindet jedoch, wenn zwischen den Geschwindigkeitsconstanten die Beziehung

$k_1\sqrt{k_4} = k_2\sqrt{k_3}$ besteht. Dann wird $\frac{C_2}{C_1} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}}$ und es steht jedes Reactionspaar für sich allein im Gleichgewichte. Die Wurzel wird auch durch $k_3 = k_4$ rational. Aber für diesen Fall wird obige Formel für $C_1$ unbrauchbar. Man erhält dann $C_1 = A\frac{k_2+k_3A}{k_1+k_2+2k_3A}$. Zur Erfüllung des thermodynamischen Massenwirkungsgesetzes ist dann neben $k_3 = k_4$ auch $k_1 = k_2$ erforderlich; das entspricht aber der früher angegebenen Bedingung.

In ähnlicher Weise dürfte das Paradoxon wohl immer auftreten, wenn man Reactionen von der Form $X \rightleftarrows Y$ und $nX \rightleftarrows nY$ annimmt, wo $X$ und $Y$ Complexe von Molekeln bedeuten und $n$ eine positive, von Eins verschiedene Zahl ist. In diesen Fällen existiert nur eine unabhängige kinetische Gleichgewichtsbedingung; im übrigen sind die Concentrationen der Molekelarten durch stöchiometrische Beziehungen verknüpft.

Für den Fall, dass die Zahl der unabhängigen kinetischen Gleichgewichtsbedingungen zwei ist, also nach Einführung der stöchiometrischen Beziehungen die Concentrationen von zwei Molekelarten unbestimmt bleiben, lässt sich allgemein zeigen, dass das Zutreffen des früher erwähnten Kennzeichens nothwendig das Auftreten des Paradoxons zur Folge hat. Die eintretenden Reactionen seien

$$X \rightleftarrows Y, \quad Z \rightleftarrows U, \quad X+Z \rightleftarrows Y+U.$$

$X$, $Y$, $Z$ und $U$ sollen Complexe von Molekelarten bedeuten. Das früher erwähnte Kennzeichen ist erfüllt, wenn man alle drei Reactionspaare als wirklich stattfindend annimmt, d. h. wenn man nicht die Geschwindigkeitsconstanten eines Reactionspaares gleich Null setzt. Denn die letzte Reactionsgleichung ist die Summe der beiden anderen.

Es soll nun $F(X)$ das in den Geschwindigkeitsgleichungen auftretende Concentrationsproduct der in $X$ enthaltenen Molekelarten sein. Ist $X = n_1M_1+n_2M_2+\ldots$, so ist

$$F(X) = C_1^{n_1}C_2^{n_2}\ldots,$$

wo $C_1$, $C_2\ldots$ die Concentrationen der Molekelarten $M_1$, $M_2\ldots$ bedeuten. Die analoge Bedeutung sollen $F(Y)$, $F(Z)$, $F(U)$ haben.

Nach der Thermodynamik sollen die Verhältnisse

$$A = \frac{F(Y)}{F(X)} \text{ und } B = \frac{F(U)}{F(Z)}$$

von den Gesammtconcentrationen unabhängig sein. Diese Verhältnisse kann man auf Grund der kinetischen Annahmen in folgender Weise berechnen.

Es seien $M_1$ und $M_2$ zwei an den Reactionen betheiligte Molekelarten, deren Concentrationsänderungen nicht in einem rein stöchiometrischen Verhältnisse stehen. Es ist nothwendig, zur Aufstellung der kinetischen Gleichgewichtsbedingungen zwei Molekelarten zu wählen, welche dieser Bedingung genügen, da man sonst nicht zwei voneinander unabhängige Gleichungen erhält.

Wenn $X$ in der oben angegebenen Weise zusammengesetzt ist, wenn ferner $Y = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \ldots$ ist, und wenn man $n_1 - \alpha_1 = \lambda_1$, $n_2 - \alpha_2 = \lambda_2$ setzt, so bedeuten $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Anzahlen der durch die Reaction $X \rightarrow Y$ verschwindenden Molekeln von $M_1$ und $M_2$, wenn die in der Reactionsgleichung stehenden Quantitäten umgesetzt werden. $-\lambda_1$ und $-\lambda_2$ sind dann die bei der entgegengesetzten Reaction $(Y \rightarrow X)$ verschwindenden Molekelzahlen. Die gleiche Bedeutung sollen $\mu_1$ und $\mu_2$ hinsichtlich des zweiten, $\nu_1$ und $\nu_2$ hinsichtlich des dritten Reactionspaares haben. Es sollen ferner $\xi_1$ und $\xi_2$ die Gesammtabnahmen der Molekelzahlen von $M_1$ und $M_2$ in der Volumeinheit zur Zeit $t$ bedeuten.[1]

Dann sind die Geschwindigkeiten der drei Reactionspaare

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = k_1 F(X) - k_2 F(Y),$$

$$\frac{dz}{dt} - \frac{du}{dt} = k_3 F(Z) - k_4 F(U),$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{dw}{dt} = k_5 F(X) F(Z) - k_6 F(Y) F(U).$$

[1] Siehe die eingangs dieser Arbeit citierte Abhandlung.

Führt man die Verhältnisse $\frac{F(Y)}{F(X)} = A$ und $\frac{F(U)}{F(Z)} = B$ ein, so erhält man

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1 F(X)(k_1 - k_2 A) + \mu_1 F(Z)(k_3 - k_4 B) + \\ + \nu_1 F(X) F(Z)(k_5 - k_6 AB),$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \lambda_2 F(X)(k_1 - k_2 A) + \mu_2 F(Z)(k_3 - k_4 B) + \\ + \nu_2 F(X) F(Z)(k_5 - k_6 AB).$$

Beziehen sich nun die $F$, sowie $A$ und $B$ auf die Gleichgewichtsconcentrationen, so sind $\frac{d\xi_1}{dt}$ und $\frac{d\xi_2}{dt}$ Null. Die so erhaltenen Gleichungen kann man noch $A$ und $B$ auflösen. Setzt man

$$\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = [\lambda\mu], \quad \lambda_1\nu_2 - \lambda_2\nu_1 = [\lambda\nu], \quad \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = [\mu\nu],$$

so erhält man

$$A = \frac{1}{2[\lambda\nu]k_2k_6F(X)} \Big\{ -[\lambda\mu]k_2k_4 + [\lambda\nu]k_1k_6F(X) + [\mu\nu]k_3k_6F(Z) \\ + \sqrt{\begin{array}{l}\{[\lambda\mu]k_2k_4 + [\lambda\nu]k_1k_6F(X) - [\mu\nu]k_3k_6F(Z)\}^2 + \\ + 4[\lambda\nu][\mu\nu]F(X)F(Z)k_6(k_1k_3k_6 - k_2k_4k_5)\end{array}} \Big\},$$

$$B = \frac{1}{2[\mu\nu]k_4k_6F(Z)} \Big\{ [\lambda\mu]k_2k_4 + [\lambda\nu]k_1k_6F(X) + [\mu\nu]k_3k_6F(Z) \\ - \sqrt{\begin{array}{l}\{[\lambda\mu]k_2k_4 + [\lambda\nu]k_1k_6F(X) - [\mu\nu]k_3k_6F(Z)\}^2 + \\ + 4[\lambda\nu][\mu\nu]F(X)F(Z)k_6(k_1k_3k_6 - k_2k_4k_5)\end{array}} \Big\}.$$

Damit $A$ und $B$ den Forderungen der Thermodynamik entsprechen, müssen sie von $F(X)$ und $F(Z)$ unabhängig sein. Denn die $F$ sind jedenfalls von den Gesammtconcentrationen abhängig. Für $A$ und $B$ gleichzeitig kann das nur eintreten, wenn entweder $k_1k_3k_6 = k_2k_4k_5$ oder $[\lambda\nu] = [\mu\nu] = 0$ ist. Man hat dann $A = \frac{k_1}{k_2}$, $B = \frac{k_3}{k_4}$.

Die Bedingung $k_1k_3k_6 = k_2k_4k_5$ gibt wieder an, dass das Paradoxon bei der betrachteten Form der Reactionsgleichungen für bestimmte Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitsconstanten verschwindet. Dagegen würde die Bedingung $[\lambda\nu] = [\mu\nu] = 0$ Formen von Reactionsgleichungen angeben, bei denen das Paradoxon auch dann nicht eintritt, wenn man die Geschwindigkeitsconstanten beliebig wählt. Aber diese Bedingung ist nicht erfüllbar. Anders geschrieben lautet sie nämlich $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$. Dann stehen aber die Concentrationsänderungen von $M_1$ und $M_2$ in einem rein stöchiometrischen Verhältnisse, was der gemachten Annahme widerspricht.

Hiedurch ist bewiesen, dass das Paradoxon immer auftritt, wenn drei Reactionspaare stattfinden, deren Reactionsgleichungen so beschaffen sind, dass eine Gleichung die Summe der beiden anderen ist und dass nicht die Concentrationsänderungen a l l e r Molekelarten durch rein stöchiometrische Beziehungen miteinander verknüpft sind.

Wenn bloß $[\lambda\nu] = 0$ ist, so ist zwar $B$ von den Gesammtconcentrationen unabhängig, aber nicht $A$. Dieser Fall kann jedoch nicht eintreten. Denn da die dritte Reactionsgleichung die Summe der beiden anderen ist, ist $\lambda_1+\mu_1 = \nu_1$ und $\lambda_2+\mu_2 = \nu_2$. Dann folgt aber aus $[\lambda\nu] = 0$ auch $[\lambda\mu] = [\mu\nu] = 0$.

In welchen Fällen das Paradoxon verschwindet, wenn die dritte Reactionsgleichung nicht einfach die Summe der beiden anderen ist, sondern durch Weglassung gleicher Glieder auf beiden Seiten der durch Summierung gebildeten Reactionsgleichung entsteht, habe ich nicht allgemein untersucht. In diesem Falle geht die Geschwindigkeitsgleichung des dritten Reactionspaares über in

$$\frac{dv}{dt} - \frac{dw}{dt} = k_5 \frac{F(X)F(Z)}{F(V)} - k_6 \frac{F(Y)F(U)}{F(V)},$$

wo $F(V)$ das Concentrationsproduct der weggelassenen Glieder bedeutet. Z. B. ist bei den Reactionsgleichungen $M_1 \rightleftarrows M_2$ und $M_2 \rightarrow M_3$ die durch Summierung entstandene Reactionsgleichung $M_1+M_2 \rightleftarrows M_2+M_3$. Durch Weglassung von $M_2$

entsteht daraus $M_1 \rightleftarrows M_3$. $F(V)$ ist dann $C_2$. Die Formeln für $A$ und $B$ ändern sich dann in der Weise, dass überall statt $k_5$ und $k_6$ $\frac{k_5}{F(V)}$ und $\frac{k_6}{F(V)}$ auftritt. Da aber $V$ jedenfalls in Beziehungen zu $X$, $Y$, $Z$ und $U$, daher auch zu $A$ und $B$ steht, werden die Formeln je nach der Natur dieser Beziehungen eine andere Gestalt annehmen. Für bestimmte Beziehungen zwischen den $F$ verschwindet jedenfalls das Paradoxon. Setzt man z. B. $Y = Z = V$, so wird $F(Z) = AF(X)$ und man erhält eine allgemeinere Form des im Abschnitte IV behandelten Falles (Umwandlung von drei Isomeren), bei der das Paradoxon nicht auftritt. Die Reactionsgleichungen sind dann $X \rightleftarrows Y$, $Y \rightleftarrows U$, $X \rightleftarrows U$, wo die $X$, $Y$, $U$ nicht einzelne Molekelarten sein müssen, sondern Complexe von Molekelarten bedeuten können. Hieher gehört unter anderen das im Abschnitte V behandelte Beispiel.

Die vorstehenden Darlegungen lassen allerdings die Möglichkeit offen, dass das Paradoxon (d. i. die Nichtübereinstimmung zwischen der thermodynamischen und der kinetischen Gleichgewichtsbedingung bei beliebig gewählten Geschwindigkeitsconstanten) auch in Fällen auftritt, wo nicht eine Reactionsgleichung durch directe Summierung von zwei anderen gebildet ist. Ich halte es aber für wahrscheinlich, dass das Stattfinden derselben Umwandlung nach zwei verschiedenen Reactions- und Geschwindigkeitsgleichungen für das Zustandekommen des Paradoxons wesentlich ist. Als zweite Bedingung kommt hinzu, dass das Paradoxon nur auftritt, wenn die einzelnen Reactionspaare nicht für sich allein im Gleichgewichte stehen, sondern das Gleichgewicht dadurch zustande kommt, dass die Wirkungen der einzelnen Reactionspaare sich gegenseitig aufheben.

## VIII. Die thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen.

Aus den in den früheren Abschnitten enthaltenen Erörterungen geht hervor, dass in gewissen Fällen die kinetischen Gleichgewichtsbedingungen nicht im Einklange stehen mit jenen Gleichgewichtsbedingungen, welche man gegenwärtig als nothwendige Folgerungen aus den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik betrachtet.

Der Widerspruch verschwindet allerdings, wenn man annimmt, dass bei bestimmten Gruppen von simultanen Gleichgewichten die Geschwindigkeitsconstanten der Reactionen nicht voneinander unabhängig sind. Aber bei der theoretischen Wichtigkeit der Sache darf auch die Frage nicht unerörtert bleiben, ob denn die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen unanfechtbar sind. Es liegt mir ferne, die Giltigkeit des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik anzweifeln zu wollen. Dagegen lässt sich wohl die Frage aufwerfen, ob denn die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen mit Nothwendigkeit aus den beiden Hauptsätzen folgen. Bei der Erörterung dieses Problems werde ich die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung in jener Form zugrunde legen, welche Planck in seinen ausgezeichneten »Vorlesungen über Thermodynamik«[1] benutzt hat.

Diese Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\Sigma(\varphi_1 - R \log \text{nat}\, c_1)\delta n_1 = 0.$$

Bei der Ableitung dieser Formel sind folgende Voraussetzungen gemacht: 1. die Giltigkeit des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik; 2. dass die homogenen Phasen als verdünnte Lösungen betrachtet werden dürfen, derart, dass ihr Volum und ihre innere Energie homogene Functionen ersten Grades der vorhandenen Molekelzahlen sind; 3. dass die Vorgänge bei constantem Druck und constanter Temperatur eintreten und dass die Wechselwirkung mit der Umgebung sich auf den Wärmeausgleich und die mit den Volumänderungen verbundenen Arbeitsleistungen beschränkt.

Die Größen der obigen Formel haben folgende Bedeutung. Die $\varphi$ sind für die einzelnen Molekelarten charakteristische Größen, welche nur von Temperatur und Druck, sowie von der Natur der Molekelart und des Lösungsmittels, aber nicht von der Menge abhängen, in der die betreffende Molekelart vorhanden ist. $R$ ist die Gasconstante. Die $c$ sind die numerischen[2] Concentrationen, d. h. die Anzahl der vorhandenen Molekeln

[1] Leipzig, Veit, 1897, S. 204, 217.

[2] Planck, Wied. Ann. XXXII, 491 [1887].

des betreffenden Stoffes, dividiert durch die Gesammtzahl der Molekeln in der betrachteten Phase. Die $\delta n$ endlich sind mit den Bedingungen des Systems verträgliche Änderungen der Molekelzahlen der betreffenden Stoffe.

Die in Rede stehende thermodynamische Gleichgewichtsbedingung gilt allgemein, auch für heterogene Systeme, wenn die Summierung über alle Phasen durchgeführt wird. Im folgenden sollen nur homogene Systeme betrachtet werden.

Die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung erhält einen bestimmten Inhalt erst dadurch, dass man über die Natur der im Systeme möglichen Vorgänge bestimmte Annahmen macht; die Grundlagen für diese Annahmen müssen durch die Erfahrung geliefert werden. Diese Annahmen liefern die Bedingungen, denen die $\delta n$ unterworfen sind.

Würde man annehmen, dass die $\delta n$ voneinander völlig unabhängig sind, dass also jedes einzelne beliebig gewählt werden kann, so könnte die Gleichgewichtsbedingung nur dadurch erfüllt werden, dass die Factoren der $\delta n$ alle gleich Null werden. Man hätte dann Gleichgewichtsbedingungen von der Form $\log \operatorname{nat} c_1 = \frac{\varphi_1}{R}$ oder $c_1 = \text{Const.}$ (bei constantem Druck und constanter Temperatur). Es würde also von allen möglichen verdünnten Lösungen gegebener Stoffe nur eine einen Gleichgewichtszustand darstellen. Man hätte so viele Bedingungen, als Molekelarten; die Gleichgewichtsconcentrationen wären durch die Thermodynamik allein völlig bestimmt. Diese Gleichgewichtsbedingungen widersprechen der Erfahrung, entsprechend dem Umstande, dass die gemachte Annahme der Erfahrung widerspricht. Denn es ist ein System vorausgesetzt, in welchem keine Stoffe ein- oder austreten. Die Annahme willkürlich wählbarer $\delta n$ bedeutet daher die Annahme, dass innerhalb des Systems Massen entstehen oder verschwinden können.

Die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen erhält man erst, wenn man die Variationen $\delta n$ als durch die stöchiometrischen Gesetze beschränkt einführt und die Molekelzahlen jener Stoffe, welche unter den herrschenden Bedingungen erfahrungsgemäß keine Veränderungen erleiden, als unvariierbar betrachtet. Diese Annahmen erhalten ihren

Ausdruck am einfachsten durch Aufstellung der in dem System möglichen Reactionsgleichungen.

Kann in dem System nur eine Reaction, und zwar nach beiden Richtungen stattfinden, so stehen die $\delta n$ der an dem Reactionspaare betheiligten Molekelarten in dem durch die Reactionsgleichung angegebenem stöchiometrischen Verhältnisse. Die $\delta n$ der an dem Reactionspaare nicht betheiligten Stoffe sind gleich Null zu setzen, weil diese Stoffe als nicht umwandlungsfähig vorausgesetzt werden, und fallen daher aus der Gleichgewichtsbedingung weg. Man kann dann alle übrigbleibenden $\delta n$ durch eines derselben ausdrücken und erhält eine Gleichgewichtsbedingung von der Form

$$[(\varphi_1-Rlc_1)+a_2(\varphi_2-Rlc_2)+a_3(\varphi_3-Rlc_3)+\ldots]\delta n_1 = 0.$$

Die $a$ in dieser Formel sind algebraische (positive oder negative) rationale Zahlen. Da $\delta n_1$ willkürlich bleibt, kann die Gleichung nur erfüllt werden, wenn der mit $\delta n_1$ multiplicierte Factor Null wird. Hiedurch bekommt man eine Gleichgewichtsbedingung von der Form $c_1 c_2^{a_2} c_3^{a_3} \ldots = \text{Const.}$ Man erhält nur eine thermodynamische Gleichgewichtsbedingung. Erst wenn man die stöchiometrischen Bedingungen hinzuzieht, hat man so viele Gleichungen, als nöthig sind, um die Gleichgewichtsconcentrationen zu berechnen. Diese sind selbstverständlich von den Constanten der stöchiometrischen Gleichungen (den Gesammtconcentrationen unveränderlicher Atomgruppen) abhängig; aber das in der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung auftretende Concentrationsverhältnis ist von den Gesammtconcentrationen unabhängig, da die $\varphi$ nicht davon abhängen.

Handelt es sich nicht um ein einziges Reactionspaar, sondern um simultane Gleichgewichte, so nimmt man an, dass virtuelle Verschiebungen im Sinne jeder einzelnen möglichen Reaction für sich allein ausführbar sind. Dadurch bekommt man selbstverständlich auch bei simultanen Gleichgewichten dieselbe Gleichgewichtsbedingung für jedes Reactionspaar, als wenn dieses allein da wäre.[1]

[1] Siehe z. B. Planck, Thermodynamik, S. 209, 225, 241, 244; Ostwald, Lehrbuch der allg. Chemie, 2. Aufl., II., S. 329.

Im Falle der gegenseitigen Umwandlung von drei Isomeren (Abschnitt IV) hat man z. B. die Gleichgewichtsbedingung

$$(\varphi_1 - Rlc_1)\delta n_1 + (\varphi_2 - Rlc_2)\delta n_2 + (\varphi_3 - Rlc_3)\delta n_3 = 0.$$

Man setzt nun voraus, dass virtuelle Verschiebungen im Sinne der Reaction $M_1 \rightleftarrows M_2$ (ohne Berücksichtigung der anderen Umwandlungen) möglich sind. Dann wird $\delta n_3 = 0$, $\delta n_2 = -\delta n_1$, und man erhält

$$\left(\varphi_1 - \varphi_2 - Rl\frac{c_1}{c_2}\right)\delta n_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{c_1}{c_2} = \text{Const.}$$

Analog ergibt sich die Constanz der Verhältnisse $\frac{c_2}{c_3}$ und $\frac{c_3}{c_1}$.

Die Annahme, dass virtuelle Verschiebungen im Sinne jedes einzelnen Reactionspaares möglich seien, ist übrigens in den meisten Fällen nicht nöthig. Wenn man sie fallen lässt, aber die Voraussetzung macht, dass die $\delta n$ nur durch stöchiometrische Bedingungen (entsprechend den angenommenen Reactionsgleichungen) verknüpft sind, bekommt man in der Regel dieselben Gleichgewichtsbedingungen. Im Falle der Umwandlung von drei Isomeren besteht zwischen den $\delta n$ die stöchiometrische Beziehung $\delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3 = 0$. Eliminiert man mit Hilfe dieser Gleichung $\delta n_3$ aus der Gleichgewichtsbedingung, so erhält man

$$\left(\varphi_1 - \varphi_3 - Rl\frac{c_1}{c_3}\right)\delta n_1 + \left(\varphi_2 - \varphi_3 - Rl\frac{c_2}{c_3}\right)\delta n_2 = 0.$$

Die Annahme, dass die $\delta n$ nur durch stöchiometrische Beziehungen miteinander verknüpft sind, schließt die Annahme in sich, dass in der vorstehenden Gleichung $\delta n_1$ und $\delta n_2$ voneinander unabhängig sind und daher beliebig variiert werden können. Dann kann die Gleichgewichtsbedingung nur erfüllt werden, wenn die Factoren von $\delta n_1$ und $\delta n_2$ für sich Null sind. Man bekommt also die Bedingungen

$$l\frac{c_1}{c_3} = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R} = lK_3, \qquad l\frac{c_3}{c_2} = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R} = lK_2.$$

In diesen Bedingungen ist die dritte Gleichgewichtsbedingung

$$l\frac{c_2}{c_1} = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{R} = lK_1 = -lK_2-lK_3$$

bereits enthalten.

Allgemein lassen sich die stöchiometrischen Beziehungen zwischen den $\delta n$ in folgender Weise ermitteln. Es sollen folgende Reactionspaare stattfinden:

$$\text{I.}\quad \alpha_1 M_1+\alpha_2 M_2+\ldots \rightleftarrows \alpha_1' M_1+\alpha_2' M_2+\ldots$$
$$\text{II.}\quad \beta_1 M_1+\beta_2 M_2+\ldots \rightleftarrows \beta_1' M_1+\beta_2' M_2+\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Eine virtuelle Verschiebung im Sinne der Reactionsgleichung I soll die Molekelzahlen um $\delta' n_1$, $\delta' n_2, \ldots$ ändern, eine Verschiebung im Sinne der Reactionsgleichung II um $\delta'' n_1$, $\delta'' n_2$ u. s. w.

Dann ist jede mögliche Variation von $M_1$ gleich der Summe der möglichen Variationen von $M_1$ nach den einzelnen Reactionsgleichungen; also

$$\delta n_1 = \delta' n_1 + \delta'' n_1 + \ldots$$

Ebenso ist

$$\delta n_2 = \delta' n_2 + \delta'' n_2 + \ldots$$

u. s. w.

Ferner liefert jede Reactionsgleichung stöchiometrische Beziehungen zwischen den $\delta' n$ von der Form

$$\frac{\delta' n_1}{\alpha_1-\alpha_1'} = \frac{\delta' n_2}{\alpha_2-\alpha_2'} = \ldots$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann man die stöchiometrischen Beziehungen zwischen den $\delta n$ ermitteln und diese in die Gleichgewichtsbedingung einführen.

Als Beispiel sollen folgende Reactionen angenommen werden:

$$\alpha_1 M_1 + M_2 \rightleftarrows M_3,$$
$$\beta_1 M_1 + M_4 \rightleftarrows M_5,$$
$$(\alpha-\beta) M_1 + M_2 + M_5 \rightleftarrows M_3 + M_4.$$

Man hat

$$\delta n_1 = \delta' n_1 + \delta'' n_1 + \delta''' n_1 \text{ u. s. w.}$$

(fünf Gleichungen, da fünf Molekelarten in Betracht kommen), ferner acht stöchiometrische Beziehungen:

$$\frac{\delta' n_1}{\alpha} = \delta' n_2 = -\delta' n_3,$$

$$\frac{\delta'' n_1}{\beta} = \delta'' n_4 = -\delta'' n_5,$$

$$\frac{\delta''' n_1}{\alpha - \beta} = \delta''' n_2 = \delta''' n_5 = -\delta''' n_3 = -\delta''' n_4.$$

Durch Elimination der $\delta'$ folgt

$$\delta n_2 = -\delta n_3,$$

$$\delta n_4 = -\delta n_5,$$

$$\alpha \delta n_2 + \beta \delta n_4 = \delta n_1.$$

Nimmt man nun an, dass zwischen den $\delta n$ nur diese stöchiometrische Beziehungen bestehen, so geht die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma(\varphi_1 - Rlc_1)\delta n_1$ durch Elimination von $\delta n_3$, $\delta n_4$ und $\delta n_5$ über in

$$\left[(\varphi_1 - Rlc_1) + \frac{1}{\beta}\left(\varphi_4 - \varphi_5 - Rl\frac{c_4}{c_5}\right)\right]\delta n_1 +$$

$$+\left[\left(\varphi_2 - \varphi_3 - Rl\frac{c_2}{c_3} - \frac{\alpha}{\beta}\left(\varphi_4 - \varphi_5 - Rl\frac{c_4}{c_5}\right)\right]\delta n_2 = 0,$$

wo $\delta n_1$ und $\delta n_2$ voneinander unabhängig sind. Hieraus folgen die Gleichgewichtsbedingungen

$$c_1\left(\frac{c_4}{c_5}\right)^{\frac{1}{\beta}} = K_1, \qquad \frac{c_2}{c_3}\left(\frac{c_5}{c_4}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = K_2,$$

wo $K_1$ und $K_2$ Constanten sind. Diese Gleichgewichtsbedingungen sind mit den gewöhnlichen identisch. Denn es ist

$$\frac{c_1^\alpha c_2}{c_3} = K_1^\alpha K_2, \quad \frac{c_1^\beta c_4}{c_5} = K_1^\beta, \quad \frac{c_1^{\alpha-\beta} c_2 c_5}{c_3 c_4} = K_1^{\alpha-\beta} K_2.$$

In vielen (aber nicht in allen) Fällen, in denen das Paradoxon auftritt, versagt diese Art zu rechnen insoferne, als es nicht möglich ist, die $\delta'$ zu eliminieren. Im Falle des Abschnittes VI hat man

$$\delta' n_1 = -\delta' n_2, \quad \delta'' n_2 = \delta'' n_3 = -\delta'' n_1 = -\delta'' n_4,$$

$$\delta''' n_4 = -\delta''' n_3, \quad \delta n_1 = \delta' n_1 + \delta'' n_1$$

und ähnliche Gleichungen für $\delta n_2$, $\delta n_3$ und $\delta n_4$. Daraus folgt

$$\delta n_2 = -\delta n_1 \quad \text{und} \quad \delta n_4 = -\delta n_3.$$

Für $\delta n_1$ und $\delta n_3$ hat man

$$\delta n_1 = \delta' n_1 + \delta'' n_1 \quad \text{und} \quad \delta n_3 = \delta'' n_3 + \delta''' n_3,$$

wobei $\delta'' n_1 = -\delta'' n_3$ ist. $\delta n_1$ und $\delta n_3$ sind also nicht völlig voneinander unabhängig, da sie ein Glied gemeinsam haben. Die Art der Abhängigkeit und somit die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung bleibt aber unbestimmt, so lange man nicht über die $\delta'$ bestimmte Annahmen macht.

Hiedurch wird bereits die Annahme nahegelegt, dass zwischen den $\delta n$ auch Beziehungen nicht stöchiometrischer Art bestehen können. Die gewöhnliche thermodynamische Gleichgewichtsbedingung erhält man, wenn man annimmt, dass virtuelle Verschiebungen im Sinne jedes einzelnen Reactionspaares möglich sind, oder allgemeiner, wenn virtuelle Verschiebungen wenigstens nach zwei Reactionsgleichungen beliebig gewählt werden können. Sind z. B. $\delta' n_1$ und $\delta''' n_3$ willkürlich, so gilt das Gleiche auch für $\delta n_1$ und $\delta n_3$. Dann folgt

$$l \frac{c_2}{c_1} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R} \quad \text{und} \quad l \frac{c_4}{c_3} = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{R}.$$

Bei den Reactionsgleichungen $M_1 \rightleftarrows M_2$ und $2 M_1 \rightleftarrows 2 M_2$, in welchem Falle ebenfalls das Paradoxon auftritt, findet man dagegen $\delta n_1 = -\delta n_2$ und damit ohne weitere Annahmen die gewöhnliche Gleichgewichtsbedingung.

Wie aus dem Vorhergegangenen ersichtlich ist, beruhen die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen auf der Annahme, dass die Variationen

der Molekelzahlen *nur* durch stöchiometrische Bedingungen beschränkt sind, dass also die im reagierenden System herrschenden Bedingungen alle Änderungen zulassen, welche mit den angenommenen Reactiongleichungen im Einklange, mit den stöchiometrischen Beziehungen also nicht im Widerspruche stehen.

Nun erhebt sich die Frage, ob diese Annahme nothwendig ist. Ich will vorläufig hiezu nicht Stellung nehmen; aber immerhin kann ich augenblicklich keine Thatsache anführen, welche die entgegengesetzte Annahme unmöglich machen würde, nämlich die, dass die möglichen Variationen der Molekelzahlen nicht bloß durch stöchiometrische Bedingungen, sondern auch noch durch andere Bedingungen beschränkt sind. Lässt man die letztere Annahme zu, so können die thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen eine wesentlich andere Gestalt annehmen.

Ich beschränke mich darauf, das an dem Beispiele der Umwandlung der drei Isomeren zu zeigen. Angenommen, es gebe zwischen den $\delta n$ eine nicht stöchiometrische Beziehung, welche eine Abhängigkeit der durch die stöchiometrischen Gesetze unbestimmt gelassenen Variationen $\delta n_1$ und $\delta n_2$ herstellt, und diese Beziehung habe die Form $\delta n_1 = a \delta n_2$, wo $a$ auch eine Function der Gesammtconcentration sein kann, so geht die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung über in

$$\left[a\left(\varphi_1-\varphi_3-Rl\frac{c_1}{c_3}\right)+\left(\varphi_2-\varphi_3-Rl\frac{c_2}{c_3}\right)\right]\delta n_2 = 0.$$

Daraus folgt

$$l\left(\frac{c_1}{c_3}\right)^a + l\frac{c_2}{c_3} = \frac{a(\varphi_1-\varphi_3)}{R} + \frac{\varphi_2-\varphi_3}{R}$$

oder

$$\left(\frac{c_1}{c_3}\right)^a \left(\frac{c_2}{c_3}\right) = f(a).$$

Die Annahme, dass die Variationen der Molekelzahlen nur durch stöchiometrische Gesetze beschränkt sind, hatte zwei thermodynamische Gleichgewichtsbedingungen geliefert, welche zusammen mit der stöchiometrischen Bedingung, dass die

Gesammtconcentration unveränderlich ist, zur Bestimmung der drei Gleichgewichtsconcentrationen ausreichen. Die Annahme einer weiteren außer der stöchiometrischen Bedingung führt dagegen nur zu einer thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung; diese gibt für ein willkürlich gewähltes $c_1$ unzählig viele Wertepaare von $c_2$ und $c_3$, die sämmtlich die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung erfüllen. Welches von diesen Wertepaaren wirklich dem Gleichgewichte entspricht, kann nur mit Hilfe der sonstigen, dem Systeme auferlegten Bedingungen entschieden werden.

Die Concentrationsverhältnisse, welche nach der üblichen Gleichgewichtsbedingung von der Gesammtconcentration unabhängig sind, können nunmehr von ihr abhängig sein, wenn $a$ eine Function derselben ist; sie müssen es aber nicht sein. Denn $l\frac{c_1}{c_3} = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R}$ und $l\frac{c_2}{c_3} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R}$ sind immer Lösungen der neuen, unter geänderten Voraussetzungen abgeleiteten thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung. Diese Lösungen müssen aber nicht nothwendig mit den im Systeme herrschenden Bedingungen im Einklange stehen; es ist ebensowohl möglich, dass nur andere Lösungen der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung mit den erwähnten Bedingungen des Systems im Einklange stehen und daher die wahren Gleichgewichtsbedingungen darstellen. Dann könnte eine Abhängigkeit der Concentrationsverhältnisse von der Gesammtconcentration auftreten.

Vielleicht darf sogar die Frage aufgeworfen werden, ob die Molekelzahlen in einem im Gleichgewichte befindlichen homogenen Systeme überhaupt als variierbar angesehen werden dürfen. Würde man sie als unvariierbar ansehen, so würde die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung wegen

$$\delta n_1 = \delta n_2 = \ldots = 0$$

erfüllt sein; das Gleichgewicht würde lediglich durch die sonstigen, dem Systeme auferlegten Bedingungen und nicht durch die Thermodynamik bestimmt sein. Auf diesen Punkt werde ich noch zurückkommen.

Analoge Möglichkeiten bestehen bei mechanischen Problemen. Für vertical verschiebbare Massen gilt $\Sigma p_1 \delta s_1 = 0$. Hat

man bloß zwei Massen und sind die $\delta s$ voneinander unabhängig, so ist die Gleichgewichtsbedingung $p_1 = p_2 = 0$. Besteht die Beziehung $\delta s_1 = -\delta s_2$ (Verbindung durch eine über eine Rolle laufende Schnur), so muss sein $p_1 = p_2$. Sind endlich die Massen festgeklemmt, so ist $\delta s_1 = \delta s_2 = 0$. Die $p$ bleiben dann willkürlich.

Die vorstehenden Betrachtungen genügen jedenfalls, um zu zeigen, dass die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen mit der Annahme stehen und fallen, dass die Variationen der Molekelzahlen nur durch die stöchiometrischen Bedingungen beschränkt sind. Ob man von dieser Annahme abgehen kann, lasse ich vorläufig dahingestellt. Aber so lange nicht bewiesen ist, dass diese Annahme nothwendig ist, können die kinetischen Gleichgewichtsbedingungen, auch wenn sie von den üblichen thermodynamischen abweichen, nicht ohneweiters als unrichtig bezeichnet werden.

Man könnte vielleicht meinen, dass die Annahme von lediglich stöchiometrischen Beziehungen zwischen den Variationen darum nothwendig sei, weil man die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen mittels halbdurchlässiger Wände[1] ableiten kann. Es ist aber leicht einzusehen, dass die Van t'Hoff'sche Ableitung nur dann in der üblichen Weise durchgeführt werden kann, wenn man die Annahme macht, dass es Wände gibt, die nur je eine der reagierenden Molekelarten durchlassen, die anderen dagegen nicht. Die Annahme von anderen, als rein stöchiometrischen Beziehungen zwischen den Variationen würde zu der Annahme nöthigen, dass man einem homogenen Systeme nicht jede beliebige Molekelart für sich allein mittels halbdurchlässiger Wände entziehen kann. Ich sehe in letzterer Annahme nichts Unzulässiges. Die Durchlässigkeit der Wände für verschiedene Molekelarten hängt jedenfalls in gesetzmäßiger Weise von der Natur derselben ab; es ist kaum wahrscheinlich, dass es Wände gibt, die von zwei einander nahestehenden Molekelarten die eine leicht durchlassen, die andere dagegen gar nicht. Überdies hat

[1] Van t'Hoff, Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie, 1. Heft, S. 100 (Braunschweig, Vieweg, 1898).

Planck[1] darauf aufmerksam gemacht, dass die übliche Thermodynamik zu dem Schlusse führt, dass es keine im absoluten Sinne semipermeable Wand geben kann. Somit kann die Annahme, dass es in bestimmten Fällen unmöglich sei, zwei Molekelarten einzeln und voneinander unabhängig einem homogenen Systeme durch semipermeable Wände zu entziehen, nicht als ausgeschlossen betrachtet werden.

## IX. Die Beziehungen zwischen Kinetik und Thermodynamik.

Bei der Erörterung der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen sind die numerischen Concentrationen benutzt worden, während sich die Kinetik der räumlichen Concentrationen bedient, d. h. der Molekelzahlen in der Volumeinheit. Indes kann man für verdünnte Lösungen alles, was für die eine Art von Concentrationen gilt, auf die andere übertragen.

Die numerische Concentration des Stoffes $M_1$ ist definiert durch $c_1 = \frac{n_1}{\Sigma n_1}$, die räumliche durch $C_1 = \frac{n_1}{V}$. Für ideale Gase ist $V = \frac{RT\Sigma n_1}{p}$, daher $C_1 = \frac{n_1 p}{RT\Sigma n_1} = \frac{p}{RT} c_1 = Ec_1$, wo $E$ bei constantem $p$ und $T$ constant ist. Dadurch wird $\Sigma(\varphi_1 - Rlc_1)\delta n_1 = \Sigma(\varphi_1 + RlE - RlC_1)\delta n_1$. Benutzt man also die räumlichen Concentrationen, so ist nur die Constante $\varphi_1$ durch die Constante $\varphi_1 + RlE$ zu ersetzen. Für verdünnte Lösungen gilt ähnliches. Denn für Lösungen ist $C_1 = \frac{\Sigma n_1}{V} c_1$. Da aber in verdünnten Lösungen die Molekelzahlen der gelösten Stoffe gegenüber der des Lösungsmittels vernachlässigt werden können, ist $\frac{\Sigma n_1}{V}$ annähernd gleich der räumlichen Concentration des Lösungsmittels, welche ebenfalls als annähernd constant betrachtet werden kann und daher dieselbe Rolle spielt, wie der Factor $E$ bei den Gasen.

Ferner ist zu beachten, dass die verwendeten thermodynamischen Formeln sich auf constanten Druck, die kinetischen

[1] Vorlesungen über Thermodynamik, Leipzig, Veit, 1897, S. 220.

auf constantes Volum[1] beziehen. Aber auch hiedurch wird die Vergleichbarkeit der beiden Gleichgewichtsbedingungen nicht gestört. Für flüssige und feste Lösungen kommt in Betracht, dass Druckänderungen auf das Gleichgewicht nur geringen Einfluss haben. Für Gase lässt sich thermodynamisch leicht ableiten, dass die aus den räumlichen Concentrationen gebildeten Concentrationsverhältnisse vom Drucke unabhängig sind. Sie sind daher auch bei constantem Volum constant.

Nachdem dies vorausgeschickt ist, lässt sich ein Grund angeben, warum die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen mit den kinetischen nicht immer im Einklange stehen. Indem die gewöhnliche Thermodynamik voraussetzt, dass zwischen den möglichen Variationen nur stöchiometrische Beziehungen bestehen, nimmt sie an, dass bei simultanen Gleichgewichten in der Regel mehr als eine Molekelzahl unabhängig veränderlich ist. Für die Kinetik gibt es nur eine unabhängige Veränderliche, die Zeit.

Man könnte nun folgende Überlegung anstellen. Statt der Zeit kann man auch die Molekelzahl einer der vorhandenen Molekelarten (z. B. $M_1$) als unabhängige Veränderliche wählen. Durch diese sind dann alle anderen Molekelzahlen und die Zeit bestimmt. Demgemäß setzt die Kinetik voraus, dass nur eine Molekelzahl unabhängig veränderlich ist; ist eine Variation gewählt, so sind die anderen dadurch bestimmt. Man könnte nun setzen

$$\delta n_2 : \delta n_1 = -\delta \frac{n_2}{V} : -\delta \frac{n_1}{V} = \delta \xi_2 : \delta \xi_1,$$

da die Formeln der Kinetik für constantes Volum gelten. Ferner könnte man annehmen

$$\delta n_2 : \delta n_1 = \delta \xi_2 : \delta \xi_1 = \left[\frac{d\xi_2}{dt} : \frac{d\xi_1}{dt}\right],$$

wo der eingeklammerte Ausdruck sich auf das Gleichgewicht beziehen soll. Durch Einführung dieser Beziehung zwischen den Variationen bekommt man thermodynamische Gleich-

[1] Wegscheider, Mon. f. Chemie, XXI, 773; Z. f. physikal. Chemie, XXXV, 577 [1900].

gewichtsbedingungen, welche die auf S. 598 angegebene Form haben und die Möglichkeit einer Abhängigkeit der Concentrationsverhältnisse von den Gesammtconcentrationen zulassen. Die Verhältnisse $\left[\frac{d\xi_2}{dt} : \frac{d\xi_1}{dt}\right]$ erscheinen unter der Form $\frac{0}{0}$. Bestimmt man ihren Wert, so findet man, soweit ich es übersehe, in allen Fällen, in denen das Paradoxon auftritt und mindestens zwei stöchiometrisch voneinander unabhängige Variationen vorkommen, Werte, welche von den Gesammtconcentrationen abhängen.

Ich gehe auf diese Betrachtungsweise nicht näher ein, denn sie reicht nicht aus, um bei den simultanen Gleichgewichten $M_1 \rightleftarrows M_2$ und $2M_1 \rightleftarrows 2M_2$ Übereinstimmung zwischen Thermodynamik und Kinetik herzustellen. Auch in diesem Falle tritt das Paradoxon auf; es tritt aber bei der üblichen thermodynamischen Ableitung der Gleichgewichtsbedingung nur eine unabhängige Variable auf und es kann daher von der Einführung weiterer Beziehungen zwischen den stöchiometrisch unabhängigen Variablen keine Rede sein. Hier kann die Thermodynamik mit der Kinetik nur in Einklang gebracht werden, wenn man das nach Einführung der stöchiometrischen Bedingung übrigbleibende $\delta n$ gleich Null setzt, also die betreffende Molekelzahl als beim Gleichgewichte nicht variierbar ansieht. Hieraus geht besonders klar der Unterschied zwischen der üblichen thermodynamischen und der kinetischen Gleichgewichtsbedingung hervor; die Thermodynamik setzt in der Formel $\Sigma(\varphi_1 - Rlc_1)\delta n_1 = 0$ nach Einführung der stöchiometrischen Beziehungen die Factoren der übrigbleibenden $\delta n$ gleich Null, die Kinetik dagegen die $\delta n$ selbst. Ich kann dieses Verfahren der Kinetik nicht ohneweiters als unzulässig erklären, und zwar auf Grund folgender Erwägung.

Die kinetischen Annahmen führen schon bei den einfachen Gleichgewichten zu der Annahme, dass beim Gleichgewichte nicht jede Umwandlung aufhört, sondern ein stationärer Zustand eintritt, derart, dass zwei entgegengesetzte Umwandlungen mit gleicher Geschwindigkeit vor sich gehen.[1] In jenen

[1] S. Nernst, Theoretische Chemie, 2. Aufl., S. 538.

Fällen, wo das Paradoxon auftritt, ist die kinetische Gleichgewichtsbedingung so beschaffen, dass zwei oder mehrere, durch verschiedene Reactionsgleichungen auszudrückende Umwandlungen fortwährend stattfinden und ihre Geschwindigkeiten Werte haben, vermöge deren die durch die einzelnen Umwandlungen hervorgebrachten Concentrationsveränderungen sich gegenseitig aufheben. Es scheint mir denkbar, dass die Bedingungen für solche stationäre Umwandlungen überhaupt nicht thermodynamisch bestimmt werden können, ebenso wie die Bedingungen für das Auftreten stationärer oder periodischer Bewegungen sich nicht aus dem Principe der virtuellen Verschiebungen oder aus der Bedingung des Minimums der potentiellen Energie ergeben.

Beim mathematischen Pendel z. B. sind virtuelle Verschiebungen auf einer Kugelfläche möglich. Das Minimum der potentiellen Energie tritt ein, wenn der Schwerpunkt sich lothrecht unter dem Aufhängepunkte befindet. Aber nichtsdestoweniger dauert die Pendelschwingung ewig, wenn Dämpfungen fehlen und wenn nicht andere Körper herbeigebracht werden, welche dem Pendel die kinetische Energie entziehen. Das dämpfungsfreie Pendel stellt, insolange sein Gang nicht künstlich gestört wird, ein unveränderliches, abgeschlossenes System vor, dessen kinetische Energie ein Bestandtheil seiner inneren Energie ist.

Eine noch bessere Analogie zum chemischen Gleichgewichte nach der kinetischen Auffassung, als das gewöhnliche Pendel, dessen Schwingungen in einer Verticalebene stattfinden, liefert ein mathematisches Pendel, dessen Massenpunkt in einer Horizontalebene einen Kreis, und dessen gewichtsloser Faden eine Kegelfläche beschreibt (conisches Pendel). Auch hier ist ein Zustand beständig, bei dem die potentielle Energie kein Minimum ist. Würde man diesen Zustand irrthümlich als ein Gleichgewicht auffassen, so müsste man bei Anwendung des Princips der virtuellen Verschiebungen alle Variationen als mit den Bedingungen des Systems unverträglich ansehen, welche eine verticale Componente liefern, obwohl in Wirklichkeit alle Verschiebungen des Massenpunktes in einer Kugelfläche mit den vorhandenen starren Verbindungen verträglich sind.

Analog können vielleicht die chemischen Gleichgewichte aufgefasst werden. Wenn sie in Wirklichkeit nicht Gleichgewichte, sondern stationäre Umwandlungen sind, wird man vielleicht ähnlich wie beim letzterwähnten Pendel die Bedingung für das Auftreten dieses stationären Zustandes aus der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung nur erhalten können, wenn man den Variationen Bedingungen auferlegt, die nicht in der Natur des Gleichgewichtsproblems begründet sind. In diesem Sinne kann man die Variationen in der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung gleich Null setzen. Derartige Umwandlungen repräsentieren einen bestimmten Vorrath von verwandelbarer Energie, der nicht von selbst kleiner werden kann; er kann nur in andere Energien umgewandelt werden, wenn durch Hinzufügung anderer Stoffe oder sonstige Änderungen der äußeren Bedingungen eine Umwandlung erzwungen wird, welche den bestehenden Zustand in einen anderen überführt.

Bei Annahme derartiger stationärer Umwandlungen lässt sich noch ein weiterer Grund angeben, der die Nichtübereinstimmung der kinetischen und thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen erklärlich macht. Bei der thermodynamischen Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen wird vorausgesetzt, dass die innere Energie $U$ einer Lösung gegeben ist durch $U = n_0 u_0 + n_1 u_1 + \dots$, wo die $n$ die Molekelzahlen, die $u$ Größen bedeuten, die nicht von den Molekelzahlen, sondern nur von Druck, Temperatur und der Beschaffenheit der vorhandenen Molekeln abhängen. Die Abhängigkeit von der Beschaffenheit der Molekeln wird überdies derart angenommen, dass, wenn der Index Null sich auf das Lösungsmittel bezieht, $u_1$ nur von der Natur der Molekelart $M_1$ und von der Natur des Lösungsmittels, aber nicht von den anderen mitgelösten Substanzen abhängt.[1] Wenn die Gleichgewichte thatsächlich stationäre Umwandlungen sind, derart, dass die Umwandlung selbst einen bestimmten Energieinhalt repräsentiert, so kann die von der Thermodynamik gemachte Annahme über die innere Energie der Lösungen nicht mehr zutreffend sein. Betrachtet man

---

[1] Planck, Thermodynamik, S. 212.

z. B. den im Abschnitte VI behandelten Fall des Paradoxons, so wird die Energie der Lösung, wenn nur $M_1$ und $M_2$ anwesend und im Gleichgewichte sind, gegeben sein durch $n_0u_0+n_1u_1+n_2u_2$. Sind nur $M_3$ und $M_4$ anwesend, so erhält man einen ähnlichen Ausdruck. Sind dagegen alle vier Molekelarten anwesend, so kann beim Bestehen einer stationären Umwandlung, die nur bei Gegenwart aller vier Stoffe möglich ist, die innere Energie nicht mehr $\Sigma nu$ sein, sondern es muss ein Glied hinzukommen, welches von der Wechselwirkung zwischen $M_1$ und $M_2$ einerseits, $M_3$ und $M_4$ anderseits abhängt.

Die Kinetik setzt also voraus, dass die homogenen Systeme Abweichungen von den Gesetzen verdünnter Lösungen zeigen. Damit setzt sie sich keineswegs in Widerspruch mit den Thatsachen; denn es gibt wohl keine idealen Gase und keine idealen verdünnten Lösungen.

Dass nicht bei jeder stationären chemischen Umwandlung die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung ungiltig werden muss, findet ein Analogon darin, dass bei einer Kugel, die sich in einer Horizontalebene in einer starren und reibungslosen kreisförmigen Rinne bewegt, die Bedingung des Minimums der potentiellen Energie erfüllt ist.

Die im vorstehenden angedeutete Auffassung des chemischen Gleichgewichtes ist nur möglich, wenn die angenommenen stationären Umwandlungen keiner Dämpfung unterliegen oder wenn die vorhandenen Dämpfungen durch die wirkenden Kräfte gerade compensiert werden. Diese Annahme kann nicht als unzulässig betrachtet werden, so lange man hinsichtlich der Bewegungen der Molekeln in der kinetischen Gastheorie ähnliche Annahmen macht.

Somit führen die gegebenen Betrachtungen zu dem Schlusse, dass die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen nicht nothwendig mit der Wirklichkeit übereinstimmen müssen. Ich bin mir wohl bewusst, dass die hier angeregten Fragen noch einer gründlichen Prüfung bedürfen. Diese Zeilen haben nur den Zweck, eine Besprechung des Problems der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen herbeizuführen.

## X. Die Bedeutung des Paradoxons.

Der Widerspruch zwischen der thermodynamischen und der kinetischen Gleichgewichtsbedingung entsteht dadurch, dass man gleichzeitig folgende zwei Annahmen macht:

1. Bei der thermodynamischen Ableitung der Gleichgewichtsbedingung sind die möglichen Variationen der Molekelzahlen nur durch die stöchiometrischen Bedingungen beschränkt.

2. Die Geschwindigkeitsconstanten sämmtlicher simultaner Reactionen sind voneinander unabhängig.

Sobald eine von diesen beiden Annahmen fallen gelassen wird, verschwindet das Paradoxon.

Betrachtungen, welche das Fallenlassen der ersteren Annahme als zulässig erscheinen lassen, habe ich in den beiden vorhergehenden Abschnitten gegeben.

Auch die zweite Annahme ist nicht unerlässlich. Die Grundannahmen der Kinetik nöthigen zwar nicht, Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitsconstanten anzunehmen. Aber immerhin ist das Bestehen solcher Beziehungen nicht unwahrscheinlich. Die Geschwindigkeitsconstanten sind jedenfalls Functionen der Natur der an den Reactionen betheiligten Molekelarten (bei gegebener Temperatur und gegebener Beschaffenheit des Mediums). Diese Functionen werden sich als Gleichungen darstellen lassen, in denen von der Natur der Molekelarten abhängige Parameter vorkommen. Es ist möglich, dass sich aus diesen Gleichungen durch Elimination der auf die Natur der reagierenden Molekelarten bezüglichen Größen Gleichungen zwischen den Geschwindigkeitsconstanten ergeben, in denen keine anderen Größen vorkommen. Nothwendig ist das jedoch nicht, und zwar selbst dann nicht, wenn die Zahl der Reactionen größer ist als die der reagierenden Molekeln; es ist ja möglich, dass für eine Molekelart mehrere voneinander unabhängige Parameter in die Gleichungen für die Geschwindigkeitsconstanten eintreten.[1] Aber die Möglichkeit, dass Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitsconstanten bestehen,

---

[1] Vergl. Wegscheider, Österr. Chemikerzeitung, 1901, S. 5 bis 6.

welche das chemisch-dynamische Paradoxon zum Verschwinden bringen, kann gegenwärtig nicht ausgeschlossen werden.

Ich kann derzeit keine theoretischen Erwägungen beibringen, welche zwischen den beiden miteinander unverträglichen Annahmen entscheiden könnten. Aber auch die Erfahrungsthatsachen gestatten keine sichere Entscheidung.

Für die Annahme, dass die kinetischen Gleichgewichtsbedingungen beim Auftreten des Paradoxons keine reelle Bedeutung haben, scheint das experimentell gefundene Princip der Einfachheit der Reactionsgleichungen[1] zu sprechen. Das Paradoxon tritt, wie früher gezeigt wurde, nur bei Annahme von Reactionsgleichungen auf, welche auf Grund des erwähnten Princips als unwahrscheinlich zu bezeichnen sind. Aber es ist zu beachten, dass auch katalytisch beschleunigte Reactionen, die ja sehr häufig vorkommen, sich dem Princip der Einfachheit nicht fügen, wenigstens, wenn man den Katalysator als an der Reaction betheiligt ansieht und die Reactionsgleichungen dementsprechend formuliert.[2] Ich werde übrigens im nächsten Abschnitte zeigen, dass auch bei katalytischen Wirkungen ein Widerspruch zwischen der Thermodynamik und der Kinetik auftritt.

Die übliche thermodynamische Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen ist jedenfalls aufzugeben, wenn Gleichgewichte existieren, bei denen das Massenwirkungsgesetz nicht erfüllt ist. Das könnte bei der elektrolytischen Dissociation guter Leiter der Fall sei. Indes ist es bisher nicht völlig ausgeschlossen, dass die hier auftretenden Abweichungen vom Massenwirkungsgesetz nur scheinbare sind und daher kommen, dass die Leitfähigkeit keinen Maßstab für den Dissociationsgrad bildet. Insolange diese Erklärung der Abweichungen vom Ostwald'schen Verdünnungsgesetze möglich ist, wird man schwerlich die verwickeltere Erklärung durch Annahme von nicht stöchiometrischen Beziehungen zwischen den möglichen Variationen der Molekelzahlen, beziehungsweise durch das Auftreten

[1] Ostwald, Lehrb. der allg. Chemie, 2. Aufl., II², 239; Van t'Hoff, Vorlesungen über theor. und phys. Chemie, I, 196, 197.

[2] Vergl. Wegscheider, Mon. f. Chemie, XXI, 372, 702; Z. f. physikalische Chemie, XXXIV, 299; XXXV, 520 [1900].

von merkwürdigen simultanen Gleichgewichten bevorzugen können. Aber immerhin scheint mir die letztere Erklärung möglich; es wird darauf näher einzugehen sein, wenn sich auf anderen denkbaren Wegen unüberwindliche Schwierigkeiten ergeben sollten und wenn insbesonders auch Erklärungen auf Grund der Annahme einer mit der Concentration des Elektrolyten veränderlichen Beschaffenheit des Mediums oder durch andere einfachere Abweichungen von den Gesetzen verdünnter Lösungen nicht haltbar sind.

Indem ich diese Betrachtungen veröffentliche, möchte ich mich keineswegs dem Verdachte aussetzen, als wollte ich die Preisgebung der bisher angenommenen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen befürworten. Vielmehr halte ich die Annahme, dass die Geschwindigkeitsconstanten simultaner Reactionen nicht von einander völlig unabhängig sind, für viel wahrscheinlicher. Aber es scheint mir nützlich, darauf aufmerksam zu machen, dass Zweifel an der Nothwendigkeit der üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen möglich sind. »Man kann nicht mathematisch beweisen, dass die Natur so sein müsse, wie sie ist«.[1] Die übliche thermodynamische und die kinetische Behandlungsweise der chemischen Gleichgewichte sind zwei verschiedene Versuche, die Erscheinungen unter einen Gesichtspunkt zusammenfassen. Die aus ihnen zu ziehenden Folgerungen unterscheiden sich selbst bei Annahme voneinander unabhängiger Geschwindigkeitsconstanten nur in verhältnismäßig wenigen, zum Theile vielleicht gar nicht existierenden Fällen. Ob beide Betrachtungsweisen brauchbar sind, oder eine von beiden, oder gar keine, wird am sichersten die Erfahrung entscheiden.

## XI. Über den Einfluss gelöster Katalysatoren auf das chemische Gleichgewicht.

Ich will an dieser Stelle den Einfluss gelöster Katalysatoren auf das chemische Gleichgewicht nicht erschöpfend behandeln,

---

[1] Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt. Leipzig, Brockhaus, 1883, S. 72.

sondern nur darauf aufmerksam machen, dass auch in dieser Frage die übliche Thermodynamik und die Kinetik nicht immer zu denselben Ergebnissen führen.

Die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung für Gase und verdünnte Lösungen $\Sigma(\varphi_1 - Rlc_1)\delta n_1 = 0$ sagt aus, dass gelöste Katalysatoren das Gleichgewicht nicht beeinflussen. Da der Katalysator bei der Reaction keine Veränderung seiner Molekelzahl erfährt, ist seine Molekelzahl als nicht variierbar anzusehen, also das betreffende $\delta n_1$ gleich Null zu setzen. Dadurch fallen die auf Katalysatoren bezüglichen Glieder aus der Gleichgewichtsbedingung heraus. Die $\varphi$ jener Stoffe aber, welche in der Gleichgewichtsbedingung stehen bleiben, hängen nach den gemachten Voraussetzungen nur von der Natur der betreffenden Molekelart, des Lösungsmittels (nur bei flüssigen und festen Lösungen), sowie von Temperatur und Druck ab, aber nicht von anderen Substanzen, die in kleiner Menge in der Lösung vorhanden sind. Wird die Menge des Katalysators durch die Reaction verändert (Autokatalyse), so tritt der katalytisch wirksame Stoff genau so in die Gleichgewichtsbedingung ein, als wenn er nicht katalytisch wirksam wäre, da die $\delta n$ nur von den stöchiometrisch möglichen Concentrationsveränderungen abhängen, aber nicht von sonstigen Eigenschaften oder Wirkungen der Stoffe.

Vom Standpunkte der üblichen kinetischen Annahmen stellt sich die Sache so dar. Wenn das Reactionspaar

$$n_1 M_1 + n_2 M_2 + \ldots \rightleftarrows n_1' M_1' + n_2' M_2' + \ldots$$

stattfindet und beide Reactionen durch einen Katalysator von der Concentration $c$ beschleunigt werden, und wenn man ferner annimmt, dass die Geschwindigkeitscoefficienten beider Reactionen die Form $k_1 + k_1' c$, beziehungsweise $k_2 + k_2' c$ haben, so ist die kinetische Gleichgewichtsbedingung

$$(k_1 + k_1' c)\, c_1^{n_1} c_2^{n_2} \ldots = (k_2 + k_2' c)\, c_1'^{n_1'} c_2'^{n_2'} \ldots$$

oder

$$\frac{c_1'^{n_1'} c_2'^{n_2'} \ldots}{c_1^{n_1} c_2^{n_2} \ldots} = \frac{k_1 + k_1' c}{k_2 + k_2' c}.$$

Der Ausdruck für das Concentrationsverhältnis beim Gleichgewichte ist also im allgemeinen von der Concentration des Katalysators abhängig. Er wird aber in zwei Fällen davon unabhängig, nämlich

1. wenn $k_1$ und $k_2$ Null sind, wenn also keine der beiden Reactionen bei Abwesenheit des Katalysators eintritt $\left(\text{Wert des Concentrationsverhältnisses } \frac{k'_1}{k'_2}\right)$;

2. wenn zwischen den Constanten die Beziehung

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{k'_1}{k'_2} = a$$

besteht. Dann wird

$$\frac{k_1 + k'_1 C}{k_2 + k'_2 C} = \frac{a(k_2 + k'_2 C)}{k_2 + k'_2 C} = a.$$

Der erste Fall kann auch als ein besonderer Fall des zweiten betrachtet werden.

Es ist leicht einzusehen, dass die Nichtübereinstimmung zwischen Thermodynamik und Kinetik hinsichtlich des Einflusses der Katalysatoren auf das Gleichgewicht mit dem im Abschnitte VI behandelten Paradoxon eine weitgehende Ähnlichkeit aufweist (complicierte Annahmen über die Reactionsgleichungen, Auftreten einer stationären Umwandlung, Möglichkeit eines Gleichgewichtes ohne Gegenwirkungen, Eintreten der Übereinstimmung zwischen Kinetik und Thermodynamik bei bestimmten Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitsconstanten, Annahme von Wechselwirkungen zwischen den gelösten Stoffen bei der kinetischen Auffassung).

Ich habe früher[1] darauf aufmerksam gemacht, dass man katalytisch beschleunigte Reactionen, welche auch ohne Gegenwart des Katalysators eintreten, als Nebenwirkungen betrachten kann. Dann hat man zwei Paare von Gegenwirkungen; das eine Paar stellt die ohne den Einfluss des Katalysators eintretende Reaction dar, das andere die durch den Katalysator

---

[1] Mon. f. Chemie, XXI, 704; Z. f. physikal. Chemie, XXXV, 521 [1900].

bewirkte. Die Abweichung zwischen Thermodynamik und Kinetik tritt nur auf, wenn man die compliciertere Annahme macht, dass beide Reactionspaare nebeneinander eintreten; sie verschwindet, wenn man eines der Reactionspaare weglässt.

Auch hier stehen die einzelnen Reactionspaare nicht für sich allein im Gleichgewichte. Für den Fall der Umwandlung zweier Isomeren hat man z. B. die Reactionsgleichungen

$$M_1 \rightleftarrows M_2 \quad \text{und} \quad M_1 + M_3 \rightleftarrows M_2 + M_3.$$

Sind die Geschwindigkeitsconstanten der vier Reactionen $k_1$ bis $k_4$ und die Gesammtconcentration von $M_1$ und $M_2$ gleich $A$, so folgt aus der kinetischen Gleichgewichsbedingung und der stöchiometrischen Beziehung $C_1 + C_2 = A$

$$C_1 = \frac{(k_2 + k_4 C_3) A}{k_1 + k_2 + (k_3 + k_4) C_3}, \qquad C_2 = \frac{(k_1 + k_3 C_3) A}{k_1 + k_2 + (k_3 + k_4) C_3}.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeiten der vier Reactionen mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, so findet man beim Gleichgewichte

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = \frac{A C_3 (k_1 k_4 - k_2 k_3)}{k_1 + k_2 + (k_3 + k_4) C_3},$$

$$\frac{dz}{dt} - \frac{du}{dt} = \frac{A C_3 (k_2 k_3 - k_1 k_4)}{k_1 + k_2 + (k_3 + k_4) C_3}.$$

Diese Geschwindigkeiten sind entgegengesetzt gleich; wenn die erste Reaction beim Gleichgewichte $M_1$ in $M_2$ verwandelt, so bewirkt das zweite die entgegengesetzte Umwandlung mit derselben Geschwindigkeit. Ein derartiges Gleichgewicht kann auch auftreten, wenn man $k_2 = k_3 = 0$ setzt, also bloß die Reactionen $M_1 \rightarrow M_2$ und $M_2 + M_3 \rightarrow M_1 + M_3$ annimmt.

Für eine bestimmte Beziehung zwischen den Geschwindigkeitsconstanten $(k_1 k_4 = k_2 k_3)$ verschwindet die Abweichung zwischen Thermodynamik und Kinetik, geradeso wie beim

Paradoxon. Zugleich werden $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt} - \frac{du}{dt}$ Null.

Es handelt sich also nach der kinetischen Auffassung hier wie beim Paradoxon nicht um ein Gleichgewicht im Sinne der Mechanik, sondern um eine stationäre Umwandlung von bestimmter Beschaffenheit.

Auch darin ist die Katalyse mit dem Paradoxon analog, dass Abweichungen von den idealen Gesetzen verdünnter Lösungen anzunehmen sind. Die Katalyse deutet ja auf eine Beeinflussung des Zustandes der reagierenden Stoffe durch andere in geringer Menge vorhandene Körper hin, während man bei idealen verdünnten Lösungen solche Wechselwirkungen als ausgeschlossen ansieht.

Wie beim Paradoxon kann auch bei der Katalyse die Übereinstimmung zwischen Thermodynamik und Kinetik hergestellt werden, indem man bestimmte Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitsconstanten annimmt. Bei willkürlichen Werten der Geschwindigkeitsconstanten kann dagegen die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung mit der kinetischen nur in Einklang gebracht werden, wenn man das stöchiometrisch unbestimmt bleibende $\delta n$ gleich Null setzt.

Eine experimentelle Entscheidung zwischen Thermodynamik und Kinetik liegt auf dem Gebiete der Katalyse ebensowenig vor wie auf dem Gebiete der simultanen Gleichgewichte; sie ist auch nicht so leicht zu erbringen, als es vielleicht scheint.

Es wäre verfehlt, zu glauben, dass die Frage schon dadurch entschieden sei, dass ein auffälliger Einfluss der Concentration des Katalysators auf das Gleichgewicht bisher nicht beobachtet wurde. Für Reactionen, welche nur bei Gegenwart des Katalysators eintreten, fordert auch die Kinetik die Einflusslosigkeit des Katalysators auf das Gleichgewicht. Daher eignen sich u. a. Versuche über die Esterbildung nicht zur Entscheidung der Frage. Hier wirken die Wasserstoffionen als Katalysator. Ob in ihrer Abwesenheit überhaupt Reaction eintritt, ist unbekannt, da sie nie völlig ausgeschlossen werden können. Zwar theoretisch, aber nicht experimentell brauchbar sind ferner Reactionen, die für sich allein nur sehr langsam

eintreten und durch Katalysatoren sehr stark beschleunigt werden. In solchen Fällen können in dem Ausdrucke $\frac{k_1+k'_1 c}{k_2+k'_2 c}$ $k_1$ und $k_2$ vernachlässigt werden; die Kinetik lässt daher annähernde Unabhängigkeit des Gleichgewichtes vom Katalysator erwarten. Es wird in der Regel nicht möglich sein, die Versuchsfehler so klein zu halten, dass eine etwaige Abhängigkeit sichergestellt werden kann. Gut brauchbar sind nur Reactionen, die ohne Katalysator mit erheblicher Geschwindigkeit verlaufen und durch Katalysatoren nur mäßig beschleunigt werden. Solche Fälle sind aber kaum untersucht; vielleicht ist es kein Zufall, dass sie so schwer zu finden sind.

Anderseits muss beachtet werden, dass ein kleiner Einfluss der Concentration des Katalysators auf das Gleichgewicht nicht zum Aufgeben der üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen nöthigt. Letztere sind sehr wahrscheinlich Grenzgesetze, die in Wirklichkeit immer nur annähernd erfüllt sind. Es gibt ja keine idealen Gase. Wahrscheinlich gibt es ebensowenig verdünnte Lösungen im Sinne der Definition, dass ihre Eigenschaften lineare Functionen der Molekelzahlen sind; diese Definition liegt aber der Planck'schen Ableitung der Gleichgewichtsbedingung zugrunde. Wenn die Abweichungen vom additiven Charakter bei verdünnten Lösungen nicht mehr messbar sind, so beweist das nicht, dass sie nicht vorhanden sind. Es ist denkbar, dass die Abweichungen von den Gesetzen verdünnter Lösungen hinsichtlich der katalytischen Wirkungen noch in das Gebiet des Messbaren fallen, wenn Verdünnungswärmen oder Volumänderungen beim Mischen nicht mehr messbar sind.

Somit ist auch die Betrachtung der katalytischen Vorgänge derzeit nicht imstande, das Problem der Beziehungen zwischen Thermodynamik und Kinetik beim Gleichgewichte zur Erledigung zu bringen.

---

## Zusammenfassung.

1. Die von Euler angenommene Analogie zwischen der Esterverseifung und der Hydrolyse von Salzen besteht nicht, wenigstens nicht in der von ihm angenommenen Art. Hiedurch

entfallen die von ihm darauf aufgebauten Schlüsse hinsichtlich der Theorie der Katalyse und des Zusammenhanges zwischen Gleichgewichtsconstanten und Geschwindigkeitsconstanten.

2. Die Form der Beziehungen zwischen den Gleichgewichtscoefficienten und den Geschwindigkeitsconstanten kann bei simultanen Gleichgewichten mit gemeinsamen Molekelarten eine andere sein als bei einzelnen Gleichgewichten. Das tritt dann ein, wenn das Gleichgewicht so beschaffen ist, dass die einzelnen Reactionspaare nicht für sich allein im Gleichgewichte stehen, sondern nur alle zusammen ihre Wirkungen gegenseitig aufheben.

3. Es sind Gleichgewichte denkbar, an deren Zustandekommen keine Gegenwirkungen betheiligt sind (z. B. indem nur die drei Reactionen stattfinden, die in gleichen Zeiten gleiche Mengen von $M_1$ in $M_2$, von $M_2$ in $M_3$ und von $M_3$ in $M_1$ verwandeln).

4. Es wird gezeigt, wie im allgemeinen aus den Gesetzen der Kinetik die Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden können. Als Beispiele werden die gegenseitige Umwandlung von drei Isomeren und das Stattfinden einer Anlagerungsreaction mit nachfolgender Umlagerung des Anlagerungsproductes besprochen. Für diese Beispiele wird die Beziehung zwischen den Gleichgewichtscoefficienten und den Geschwindigkeitsconstanten abgeleitet und gezeigt, dass die einzelnen Paare von Gegenwirkungen nur dann beim Gleichgewichte auch für sich allein im Gleichgewichte sind, wenn zwischen den Geschwindigkeitsconstanten eine bestimmte Beziehung besteht.

5. An dem Beispiele der gegenseitigen Umwandlung von drei Isomeren wird gezeigt, dass keine endlichen Reactionsgeschwindigkeiten zur Beobachtung gelangen können, wenn man annimmt, dass nur eines der drei Reactionspaare mit endlicher, die beiden anderen dagegen mit unendlicher Geschwindigkeit verlaufen.

6. An einem besonderen Beispiele von simultanen Gleichgewichten wird gezeigt, dass die durch die Kinetik gegebenen Gleichgewichtsbedingungen bisweilen mit den üblichen thermodynamischen nicht im Einklange stehen, indem jene Con-

centrationsverhältnisse, welche nach der Thermodynamik von den Gesammtconcentrationen unabhängig sein sollen, nach der Kinetik davon abhängig werden. Dieses Paradoxon verschwindet, wenn man eine bestimmte Beziehung zwischen den Geschwindigkeitsconstanten annimmt, welche derart beschaffen ist, dass die einzelnen Paare von Gegenwirkungen beim Gleichgewichte auch für sich allein im Gleichgewichte stehen.

7. Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen dieses Paradoxon auftritt.

8. Es werden die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen besprochen. Es zeigt sich, dass sie auf der Annahme beruhen, dass die denkbaren Variationen der Molekelzahlen beim Gleichgewichte nur durch stöchiometrische Beziehungen beschränkt sind. Ob diese Annahme mit Nothwendigkeit gemacht werden muss, ist zweifelhaft. Es wird ein Rechenschema angegeben, mit Hilfe dessen man diese stöchiometrischen Beziehungen aus den angenommenen Reactionsgleichungen erhalten kann. Ferner ergibt sich, dass in manchen Fällen, in denen das Paradoxon auftritt, die üblichen thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen nur erhalten werden können, wenn man außerdem die Annahme macht, dass auch bei simultanen Gleichgewichten Variationen im Sinne jeder einzelnen Reactionsgleichung möglich sind. Diese Annahme wurde bisher in allen Fällen gemacht; sie ist aber in den meisten Fällen nicht nothwendig, um die üblichen Gleichgewichtsbedingungen zu erhalten. Es wird gezeigt, dass die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung eine Abhängigkeit der Concentrationsverhältnisse von der Gesammtconcentration zulässt, wenn man andere als rein stöchiometrische Beziehungen zwischen den Variationen der Molekelzahlen annimmt.

9. Es wird gezeigt, dass die Schlussfolgerungen aus den angewendeten thermodynamischen und aus den kinetischen Gleichgewichtsbedingungen miteinander vergleichbar sind, obwohl sich die ersteren auf constanten Druck und numerische Concentrationen, die letzteren auf constantes Volum und räumliche Concentrationen beziehen.

10. In den Fällen, wo das Paradoxon auftritt, ist das chemische Gleichgewicht nach der kinetischen Auffassung nicht ein

wirkliches Gleichgewicht im Sinne der Mechanik, sondern eine stationäre Umwandlung. In diesem Umstande wird die Ursache der Abweichungen zwischen Thermodynamik und Kinetik vermuthet, da es nach mechanischen Analogien wahrscheinlich ist, dass die übliche Ableitung der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung nicht die Bedingungen für das Auftreten stationärer Umwandlungen angeben kann. Außerdem schließt diese Auffassung des Gleichgewichtes die Annahme von Abweichungen von den Gesetzen verdünnter Lösungen in sich. Die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung beruht aber gerade auf diesen Gesetzen.

11. Der bisweilen auftretende Widerspruch zwischen der thermodynamischen und der kinetischen Gleichgewichtsbedingung kann gehoben werden, wenn man für diese Fälle annimmt, dass die bei der Ableitung der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung auftretenden Variationen der Molekelzahlen nicht lediglich durch stöchiometrische Bedingungen beschränkt sind oder wenn man annimmt, dass die Geschwindigkeitsconstanten bei simultanen Reactionen im allgemeinen nicht voneinander unabhängig sind. Beide Annahmen scheinen möglich zu sein. Die letztere Annahme lässt sich zu dem Principe der Einfachheit der Reactionsgleichungen in Beziehung bringen, da das Paradoxon nur bei Annahme von Reactionen auftritt, die nach diesem Principe unwahrscheinlich sind. Für die erstere Annahme könnten die Abweichungen der starken Elektrolyse vom Massenwirkungsgesetze ins Treffen geführt werden. Diese Abweichungen sind jedoch derzeit kein genügender Grund, um die übliche thermodynamische Ableitung der Gleichgewichtsbedingung fallen zu lassen, da vorerst andere, einfachere Erklärungen hiefür als zulässig erscheinen.

12. Auch hinsichtlich des Einflusses gelöster Katalysatoren auf das chemische Gleichgewicht stimmen die Thermodynamik und die Kinetik nicht überein. Erstere fordert, dass das Gleichgewicht von der Concentration des Katalysators unabhängig sei, während die letztere im allgemeinen die Abhängigkeit vorhersehen lässt, welche nur bei bestimmten Beziehungen zwischen den Geschwindigkeitsconstanten ver-

schwindet. Dieser Fall erweist sich als dem früher erwähnten Paradoxon völlig analog. Zur experimentellen Entscheidung zwischen den Forderungen der Thermodynamik und der Kinetik eignen sich nur Reactionen, welche ohne Katalysator bereits mit erheblicher Geschwindigkeit verlaufen und durch den Katalysator nur mäßig beschleunigt werden. Bisher ist eine experimentelle Entscheidung zwischen den thermodynamischen und kinetischen Gleichgewichtsbedingungen nicht erbracht.

# Über die von den Chinesen »Tê-sing« oder Tugendgestirn genannte Himmelserscheinung

von

Dr. **Franz Kühnert,**

*Privatdocent für chinesische Sprache an der k. k. Universität in Wien.*

**(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Mai 1901.)**

Unter 德星 *Tê-sing*, dem Tugendgestirne, auch 景星 *King-sing*, das glänzende Gestirn zubenannt, ist zweifelsohne eine besonders augenfällige und seltene Himmelserscheinung zu verstehen, da dieselbe seitens der Chinesen mit der Geburt erlauchter und tugendhafter Männer nach astrologischer Deutung in Verbindung gebracht wird.

Weil es sich nach den chinesischen Beschreibungen um die Erscheinung einer Art Mondes neben dem eigentlichen Mond handelt, war es vom philologischen Standpunkte aus vollkommen gerechtfertigt, dass G. Schlegel hiefür den Namen Nebenmond, Paraséléne, wählte. Allerdings kann dieser Name unter Umständen den Nachtheil haben, dass, was vom philologischen Standpunkte naheliegt, diese rein sprachlich gewählte Ausdruckweise mit dem Terminus technicus der exacten Wissenschaften confundiert wird, welcher nur für eine einzige ganz bestimmt umschriebene Art jener Erscheinungen gilt, die mit dem sprachlichen Ausdrucke »Nebenmond« belegt werden könnten.

Eine solche Identificierung darf aber a priori nicht als zwingende Nothwendigkeit angesehen werden, da ja, wie jeder Fachmann weiß, bei den exacten Wissenschaften im allgemeinen nicht die nächstliegende sprachliche Etymologie das Ausschlaggebende ist, sondern im Gegentheile das Wesen der Sache, aus

welchem allein die richtige Bedeutung des sprachlichen Ausdruckes als Terminus technicus und der diesem zukommende Begriffsumfang und Begriffsinhalt abzuleiten ist. Man denke nur z. B. an die Ausdrucksweise »Sinus« eines Winkels für die entsprechende trigonometrische Linie, bei der wohl nicht ohneweiters aus der Bedeutung des lateinischen sinus = Busen das Wesen der Sache zu erkennen sein dürfte.

Für den Fachmann bedürfte es hiezu keiner weiteren Bemerkungen mehr. Weil jedoch diese Arbeit auch für jene Kreise bestimmt ist, denen das Gebiet und die Eigenheiten der exacten Wissenschaften ferner liegen, so möge es gestattet sein, auf diesen Umstand mit Rücksicht auf das Folgende etwas weiter einzugehen, getreu dem Grundsatze: »Qui bene distinguit, bene docet«.

In den exacten Wissenschaften hält man sich eben nicht zunächst an die aus dem Sprachgebrauche folgende Etymologie des gewählten Ausdruckes, sondern an die für diesen technischen Ausdruck gegebene Definition des Begriffes. Nur mit diesem verbindet man den Terminus und behält stets und immer den differenzierten Begriff hiebei im Auge.

Hiedurch kann jedoch, wenn dies nicht ausdrücklich betont wird, die Misslichkeit sich ergeben, dass der Philologe, sich vor allem an die sprachliche Etymologie haltend, einen total anderen und fremden Begriff diesem Terminus beilegt und deshalb zu Schlüssen Veranlassung finden kann, die dem Wesen der Sache und den in den exacten Wissenschaften gegebenen Thatsachen widerstreiten. Dies gilt z. B. gleich von den landläufigen Ausdrucksweisen für die Phasen des Mondes, welche für den Astronomen nur einen absolut scharf umgrenzten, unzweifelhaften Sinn haben, die jedoch nach sprachlicher Etymologie und Sprachgebrauch mehrdeutig sind und nicht unmittelbar das bezeichnen, was der Astronom einzig und allein damit verbunden wissen will.

Für den Astronomen bezeichnet der Ausdruck »Neumond« einzig und allein den Moment der Conjunction von Sonne und Mond in Länge, nach der sprachlichen Etymologie und dem Sprachgebrauche jedoch das erste Sichtbarwerden des Mondes unmittelbar nach der Conjunction.

Unter »ersten« und »letztem Viertel« versteht der Astronom die Momente der beiden Quadraturen, wo der Mond genau um 90° in Länge je nach der einen oder anderen Seite von der Sonne absteht, also die Momente, wenn die Distanz zwischen Sonne und Mond 90° oder 270° ist. Die Bezeichnung »Viertel« des Mondes hingegen ist nach der ursprünglichen Bedeutung nicht von der Phase genommen, sondern bezieht sich auf die Dauer des (synodischen) Mondmonates, wie sich aus der Bedeutung »Halbmond« klar ergibt, welch letzterer Ausdruck, gleichwertig mit Mondesviertel gebraucht, unzweifelhaft von der Phase oder dem erleuchteten Theile der scheinbaren Mondesscheibe im Gegensatze zu Vollmond genommen. Denn zur Zeit der Viertel ist, wie bekannt, thatsächlich die halbe Mondesscheibe erleuchtet; diese Momente fallen aber an die Grenzen des ersten und letzten Mondmonatsviertels. Oft soll »Halbmond« nicht mehr bedeuten, als dass der Mond noch nicht voll ist, im Gegensatze zu Vollmond, wird also auch bei größerer oder kleinerer als halber Scheibe angewandt. Unter »Vollmond« versteht man in der Astronomie nur den Moment der Opposition, wo der Mond in Länge genau 180° von der Sonne absteht. Die sprachliche Bezeichnung nimmt hier nur auf die ganz erleuchtete Mondscheibe Rücksicht, und da ein kleiner Mangel in dieser Beziehung nicht sehr in die Augen fällt, so ist in der sprachlichen Bezeichnung nicht die Präcision des einzigen Augenblickes gegeben, in dem allein nur die Distanz 180° betragen kann. Allerdings kann diese Schwankung auch nicht das Intervall eines Tages überschreiten.

Hiemit ergibt sich zunächst die für jeden Astronomen selbstverständliche Thatsache, dass bezüglich der Phasen des Mondes nicht von einem »ersten« Tage gesprochen werden kann, weil ja kein zweiter oder dritter möglich ist, indem es nur einen Augenblick gibt, in welchem die Conjunction, Quadratur oder Opposition statthat. Man kann deshalb nur von dem Tage sprechen, an welchem ein solcher Moment eintritt. Ich werde mich deswegen im folgenden, wenn ich von den Phasen spreche, stets der Ausdrücke »Conjunction«, »Quadratur« und »Opposition« bedienen, um Zweifel und Missverständnisse hintanzuhalten.

Weil nun G. Schlegel, dieser hervorragende Kenner des Chinesischen, als er bei Veröffentlichung seiner bewunderungswerten »La loi du parallélisme en style chinois« diese Frage des *Tè-sing* streifte, der Vermuthung zuneigte, es dürfte die von den Chinesen beschriebene Erscheinung mit jener identisch sein, welche man in den exacten Wissenschaften mit dem technischen Ausdrucke »Nebenmond, Parasélène« belegt,[1] so ist es vor allem nothwendig, die Bedingungen anzuführen, welche für das Zustandekommen einer solchen Erscheinung nöthig und hinreichend sind, um dann durch einen Vergleich mit den von den Chinesen für eine solche Erscheinung angegebenen Bedingungen zu erkennen, ob eine solche Identificierung zulässig sei oder nicht.

Hiezu sind allerdings entsprechende Sprachkenntnisse nothwendige Bedingung, jedoch nicht allein hinreichend, weil im Chinesischen, wie Fr. Hirth sich treffend ausdrückt, »jeder Satz zwar nur einen und den richtigen Sinn hat, dieser jedoch nicht so auf flacher Hand liegt wie bei den griechischen oder römischen Classikern«, und erst durch entsprechende Sachkenntnis entschieden werden muss, welche von den zulässigen grammatischen Auffassungen des Textes den richtigen Sinn gibt.

Die Erscheinung der Nebenmonde und Nebensonnen ist wie jene der Halo's nach den Untersuchungen von G. Galle (Poggendorff's Annalen, Bd. 49, S. 1 und 241 ff.), A. Bravai's (Journal de'École Polytechnique XVIII, p. 77 ff. 1845 und p. 1 ff. 1847), von denen sich ein sehr reichhaltiger Auszug in eleganter Form in M. E. Mascart's Traité d'Optique (Bd. III, p. 471 ff.) findet, als eine Brechungserscheinung[2] an in der Luft

---

[1] On voit donc que le *King-sing* n'est encore autre chose qu'une espèce de parasélène, c'est-à-dire la réflection de la lune sur un nuage. V. La loi du parallélisme. Leide, E. J. Brill, 1896, p. 43.

[2] Und nicht als eine Spiegelung an oder auf den Wolken. Denn, nachdem es sich um Neben- und nicht Gegenmonde handelt, müsste, soferne die Wolke als spiegelnde Fläche angenommen werden dürfte, diese uns zugekehrt sein, damit ein uns sichtbares virtuelles Bild entstünde, dann wäre aber die spiegelnde Fläche von der Lichtquelle abgewandt, weil die Wolke zwischen Mond und Beobachter steht, und es kann überhaupt keine uns wahrnehmbare Spiegelung entstehen.

schwebenden Eiskrystallen zu betrachten. Es erfordern dieselben sonach als nothwendige und hinreichende Bedingungen:

*a)* eine entsprechend starke Lichtquelle, von welcher die der Brechung unterliegenden Lichtstrahlen ausgehen, um nach derselben ins Auge des Beobachters zu gelangen;

*b)* das Vorhandensein einer Schicht von Eiskrystallen in der Luft;

*c)* eine bestimmte Lagerung und Stellung dieser Eiskrystalle.

Daraus folgt zunächst, dass die Erscheinung der Nebenmonde

1. absolut nicht an eine bestimmte Phase des Mondes, also auch nicht an einen bestimmten Tag des Mondmonates gebunden sein können, sondern, falls die anderen Bedingungen erfüllt sind, stets erscheinen werden, wenn das Licht des Mondes genügend stark ist. Sohin ist diese Erscheinung absolut unmöglich zur Zeit der Conjunction und unwahrscheinlich in der Nähe derselben, weil im letzteren Falle der Lichtstrahl nach der Brechung zu schwach sein dürfte, um auf das Auge noch einen Eindruck hervorzubringen. In der übrigen Zeit während der Sichtbarkeit des Mondes können sie an jedem beliebigen Tage eintreten, wenn die übrigen Bedingungen vorhanden sind;

2. dass sie nicht stets und immer an der absolut gleichen Seite des Mondes erscheinen müssen, sondern je nach den gegebenen Verhältnissen bald links, bald rechts, bald auf beiden Seiten des Mondes erscheinen werden;

3. dass im Momente ihrer Erscheinung der Himmel absolut nicht rein sein kann, weil die nöthigen Eiskrystalle denselben mit einem Schleier überziehen und trüben.

Betrachtet man nun im Hinblicke auf das Vorangeführte die Beschreibungen der Chinesen, welche ich zunächst nach der Übersetzung von G. Schlegel anführe, später aber auf Grund des Originaltextes discutieren werde, so ergibt sich Folgendes:

Die erste Stelle, welche wir betrachten wollen und die aus dem *Sy-ki* genommen, im Wörterbuche *Kang-hi* citiert ist, lautet nach Schlegel's Übersetzung:

»Quand le Ciel est serein, on voit l'astre lumineux«.[1]

Diese Stelle widerspricht bereits der Annahme von Nebenmonden mit Rücksicht auf den Punkt 3. Denn wenn der Himmel rein ist, kann es weder Wolken noch auch einen Schleier über denselben geben, also auch nicht jenen Dunstschleier, durch schwebende Eiskrystalle hervorgerufen, welcher zur Bildung der Nebenmonde erforderlich ist.

Die zweite Stelle lautet nach Schlegel's Übersetzung:

»Le *King-sing* (Etoile brillante) est la „Sérénité céleste"; elle a la forme d'une demi-lune (croissant), elle se voit au premier jour du dernier quartier de la lune et elle seconde la lune. Elle n'apparaît que quand des princes éclairés ne font pas de préjudice au peuple«.[2]

Hier stoßen wir zunächst auf eine Schwierigkeit im französischen Ausdrucke. Soll hier, wie es der Sprachgebrauch fordert, »dernier quartier de la lune« die Phase, also die Quadratur bezeichnen, dann hat der Ausdruck »premier jour«, wie oben bereits bemerkt, keinen Sinn, weil es eben keinen zweiten Tag, also auch keinen ersten Tag bei Quadratur 270° geben kann. Soll also überhaupt ein widerspruchsfreier Sinn in den Worten »au premier jour du dernier quartier de la lune« liegen, so können sie nur in dem Sinne aufgefasst werden: Am ersten Tage des letzten Monatsviertels; das ist aber dann der Tag, an welchem der Moment der Quadratur bei 270° statthat. Ohne Rücksicht auf alle weiteren Consequenzen, die mit einer solchen Annahme verbunden sind, will ich vorläufig diesen einzig möglichen widerspruchsfreien Sinn genannter Worte annehmen; aber auch hiemit ist es unmöglich, die Stelle auf die Erscheinung eines Nebenmondes (Term. technic.) zu beziehen.

Zunächst widerstreitet dieser Annahme schon das Gebundensein an eine bestimmte Phase (vergl. Punkt 1), da, wie gezeigt, die Nebenmonde nicht an eine bestimmte Phase gebunden sein können. Aber es ist auch in der Stelle selbst, wie sie in der Übersetzung vorliegt, noch ein weiterer Widerspruch in sich.

---

[1] Schlegel, l. c. p. 41.

[2] L. c. p. 41.

Angenommen, aber nicht zugegeben, dass d es der wirkliche Sinn der chinesischen Originalstelle sei, ist nicht abzusehen, warum das letzte Viertel geeigneter sein sollte. als das erste Viertel, nachdem in den beiden Quadraturen die Lichtstärke und die Phasengröße des Mondes absolut die gleiche ist. Ja noch mehr, wenn überhaupt hier ein derartiger Unterschied platzgreifen könnte, dann müsste vor allem die Phase bei der Opposition (der Vollmond) den Vorrang einnehmen, weil bei derselben die volle Mondscheibe wirkt, also die Intensität des Lichtes ein Maximum ist. Noch weiter; auch das Vorhandensein der Eiskrystalle kann absolut nicht von dem Laufe des Mondes abhängen, sondern ist durch andere zufällige atmosphärische Verhältnisse bedingt. Aber noch mehr, diese Phase der Quadratur bei 270° hätte, selbst wenn die Erscheinung an eine bestimmte Lichtphase gebunden wäre — was sie aber nicht ist — viel weniger Wahrscheinlichkeit für sich als jene der Quadratur bei 90° (erstes Viertel), und zwar aus folgenden Gründen:

Zur Zeit der Quadratur 90° (erstes Viertel) geht der Mond zu Mittag auf und erreicht seinen höchsten Stand bei Sonnenuntergang, die Erscheinung müsste also zwischen Sonnenuntergang und Mitternacht im Westen gesehen werden. Zur Zeit der Quadratur 270° (letztes Viertel) geht der Mond erst um Mitternacht auf und erreicht seinen höchsten Stand bei Sonnenaufgang. Demnach könnte die Erscheinung nur zwischen Mitternacht und Sonnenaufgang und im Osten beobachtet werden. Zu dieser Zeit pflegt man aber in China ebenso wie in Europa der Ruhe und ist somit der Möglichkeit benommen, während dieser Zeit eine derartige Erscheinung wahrzunehmen.

Es widerspricht sonach auch diese Stelle, selbst wie sie übersetzt vorliegt, der Annahme eines Nebenmondes (Terminus technicus). Die Übersetzung an sich aber kommt mit den beiden folgenden Stellen in Collision, nämlich mit:

»Quand je sortis de ma porte pour rejoindre mes amis intimes, le Ministre du Ciel rapporta (l'apparition des) Astres-de-vertu« — und

»*Tchin Tch'oung-Koung* se rendit **un soir**[1] avec ses fils et petit-fils dans la maison de *Siun-ki* afin de concilier le père et le fils. En ce moment des étoiles-de-vertu s'assemblèrent. Le Grand Annaliste rapporta à l'Empereur, que (cela signifiait que) des sages d'une distance de 500 li (milles) s'étaient assemblés«, wo in der zweiten Stelle ausdrücklich »abends« gesagt wird, was der Quadratur 270° (dem letztem Viertel) widerspricht. Auch die erste Stelle weist auf diese Tageszeit, indem es in China ebensowenig Sitte ist, wie bei uns, seine Freunde erst zwischen Mitternacht und morgens zu empfangen, sondern abends.

Aber auch das »seconder la lune«, »suppléer à la lune« der zuvor angeführten Stelle widerstreitet der Annahme eines Nebenmondes, da niemand, der die Erscheinung eines Nebenmondes gesehen, wird behaupten können, dass der Nebenmond (Term. technic.) die Leuchtkraft des eigentlichen Mondes unterstütze.

Es kann also, wegen der angeführten Widersprüche in sich zwischen den einzelnen Textstellen, so muss weiter gefolgert werden, in den Worten »au premier jour de la dernier quartier de la lune« nicht »der einzige und allein richtige Sinn wiedergegeben sein«, sondern es müssen andere mögliche grammatische Verhältnisse hier angenommen werden.

Dies geht klar aus der Zeichnung und Beschreibung des *Siang-i-t'u-shuo*[1] (Tables et descriptions des présages étranges) hervor, welche Schlegel mit folgenden Worten anführt:

»Notons enfin que le 祥異圖說, ou „Tables et descriptions des présages étranges“ publié par autorité impérial, donne, dans son 4[e] Chapitre, fol. 18 recto, la figure ci contre du *King-sing*

○☽

Lune parasélène

avec l'explication suivante:

„Le *King-sing* est le *Têh-sing*; il a la forme d'un croissant de lune, et si montre au premier jour du dernier quartier de la

[1] L. c. p. 41; »un soir« habe ich unterstrichen.

lune; il seconde la clarté et grandeur de la lune et se voit au milieu du ciel. Quand les ordres donnés par le Maître des hommes conviennent à l'esprit du peuple, et que les cérémonies qu'il pratique et la musique qu'il fait faire sont agréables au Ciel, il apparait"«.

Hier liegt zunächst dasselbe vor bezüglich des »ersten Tages vom letzten Viertel«. Es ist nämlich absolut unmöglich, dass die Erscheinung wahrnehmbar wird »au milieu du ciel«, weil zu dem Momente, wo der Mond in der Mitte des Himmels steht, die Sonne bereits aufgegangen ist, so dass überhaupt keine Erscheinung wahrgenommen werden kann, umsoweniger die optisch verhältnismäßig schwache Erscheinung eines Nebenmondes (Term. technic.).

Des weiteren weist die Zeichnung auf einen ferneren Widerspruch mit dem Texte. China gehört nämlich seiner Lage nach unzweifelhaft der nördlichen Hemisphäre an, für welche das Sprichwort gilt: »Luna mendax«. Die gezeichnete Sichel zeigt uns augenfällig die Form des ☽ = decrescens, abnehmend, also müsste der Mond zunehmend, sonach unmittelbar nach der Conjunction und vor der Quadratur 90° (erstes Viertel) sein und nicht bei der Quadratur 270° (letztes Viertel), weil dann die Sichel verkehrt stünde.[1]

Die Zeichnung widerspricht aber ferner dem Wesen des Nebenmondes (Term. technic.), da nach derselben der fictive Mond stets auf der gleichen Seite des wahren Mondes erscheinen müsste, was dem Wesen eines Nebenmondes (Term. technic.) widerstreitet, wie früher gezeigt. Hiezu kommt ferner, dass die horizontalen Nebenmonde, die Maxima der Helligkeit in den Brechungsstreifen, zu beiden Seiten des Mondes etwa in der Entfernung von 40 oder sogar 92 Monddurchmessern vom Mondmittelpunkt entfernt erscheinen, was mit der Zeichnung bei der bekannten Genauigkeit der chinesischen Aufzeichnungen nicht in Einklang zu bringen.

Somit widerstreitet auch diese Stelle, abgesehen von dem in der Übersetzung vorliegenden Widerspruche, einer Suppo-

[1] Hier kann in der Zeichnung nur die Sichelgestalt als der wahre Mond und die volle Gestalt als Nebenmond (Term. technic.) genommen werden, wenn der Mond in der Quadratur stehen soll, wie die Übersetzung besagt.

sition, dass es sich da um einen Nebenmond (Term. technic.) handelt.

Für Jeden, der nicht nur mit den astronomischen Verhältnissen vollkommen vertraut, sondern auch mit dem Wesen der chinesischen Sprache und ihren Eigenheiten bekannt ist — eines ohne das andere genügt nicht — konnte es auf den ersten Blick kaum zweifelhaft sein, um welche Erscheinung es sich handelt. Den deutlichsten Aufschluss gibt darüber auch nach der vorliegenden Übersetzung folgende Stelle:

»Au premier mois du printemps de la deuxième année de (l'époque) *Tai-t'sing* des Liang (A. D. 548), au jour *Konei-sze* de la nouvelle lune,[1] deux luns, proches l'une de l'autre (*siang-tching*) comme des crochets (= croissants) se montraient à l'occident«.

Hier liegt es zur Evidenz klar, dass in diesem Citate unter Neumondstag der Tag der ersten Sichtbarkeit der Sichel und nicht der Tag der Conjunction zu verstehen ist, an dem überhaupt gar nichts zu sehen, sowie dass es sich hier unter keiner Bedingung um Nebenmonde (Terminus technicus) handeln könne, weil an diesem Tage überhaupt keiner möglich ist; ferner, dass die Zeichnung im *Siang-i-t'u-shuo* die Verhältnisse vollkommen correct wiedergibt und dass daher die der Übersetzung zugrunde gelegten grammatischen Verhältnisse nicht auf den richtigen Sinn führten, der lediglich mit Hilfe der entsprechenden Sachkenntnis zu gewinnen war, dass daher anders übersetzt werden müsse.

Die darauf bezügliche Discussion soll nunmehr gemacht werden.

Bezüglich der Übersetzung genügt es, über die Hauptstelle, von der alle andere genommen sind, die sachliche Discussion anzustellen. Es ist jene aus dem *Siang-i-t'u-schu*.

Ich sagte, dass nur sachliche Gründe auf den richtigen Sinn führen können, und zwar deshalb, weil im Chinesischen alle derartigen Marken fehlen, welche bei uns durch die Formen

[1] Schlegel, l. c. p. 40. »La nouvelle lune« ließ ich unterstreichen; ob die Übersetzung von »*tsheng yüeh*« hier als »premier mois« möglich oder nicht, darüber später.

gegeben. Stehen zwei Schriftcharaktere nebeneinander, deren Bedeutungen Begriffe betreffen, welche bei uns durch Nomina ausgedrückt werden, so deutet **nichts** im chinesischem Satze darauf, ob diese zwei Schriftzeichen in einem solchen Verhältnisse stehen, das wir durch einen Genetiv wiedergeben, oder in einem solchen, das wir durch das Attribut wiedergeben, es findet sich kein Merkzeichen, ob es lediglich Coordination oder Disjunction ist oder schließlich gar ein Satz mit einem Nomen als Prädicat.

Dieser Fall trifft eben die fragliche Stelle. G. Schlegel nahm nun von den vier möglichen Fällen, nämlich Genetivverhältnis, Attribut, Coordination oder Disjunction, Satz an, dass zwischen den beiden Worten ein Genetivverhältnis obwalte und musste so zur Übersetzung »au premier jour **du** dernier quartier de la lune« kommen. Dass dies aus sachlichen Gründen nicht möglich sei, weil bei den Quadraturen nicht von einem ersten Tage gesprochen werden könne, lehrt uns nur die Astronomie.

Es verhält sich damit etwa so wie mit dem isoliert hingestellten mathematischen Ausdrucke

$$d^2y = adx^2,$$

bei dem man, isoliert wie er steht, auch nicht angeben kann, ob hier $d^2y$ und somit $dx^2$ als Differentiale aufzufassen sind oder, ob die Gleichung nur als gewöhnliche Gleichung zu gelten hat, welche auch in der Form

$$dy = ax^2$$

geschrieben werden dürfte. So wie hier müssen eben auch im Chinesischen sachliche Gründe entscheiden.

Die fragliche Stelle nun soweit sie hier in Betracht kommt, lautet: 景星德星也、狀如半月、生於晦朔、助月、爲明大而中空。

Betreffend die Worte 晦 und 朔 ist zunächst zu bemerken:

Dass nach dem Wörterbuche Shuo-wen: »*hoei*« den Mond bedeutet, wenn er ausgeschöpft ist,[1] das will sagen, wenn er erloschen ist. Man ersieht dies aus dem weiteren Citat im Wörterbuche Kang-hi unter dem Titel »Worterklärung«, wo es heißt: (das Wort) »*Hoèi* (beim Monde) kommt von *hoêi* (Asche); denn erlischt das Feuer, so gibt es (dunkle) Asche, ist die Helligkeit des Mondes erschöpft, so gleicht er ihr (der Asche)«. Drum bedeutet *hoei* den letzten Tag des Monates, wo von dem Monde nichts mehr zu sehen ist.[2]

Von 朔 *Sô* jedoch heißt es im Shuo-wen: »*Sô* ist der erste Tag des Monates, wo der Mond wieder aufzuleben beginnt«.[3] Im Pe-hu-tung heißt es: »Der Name *So* (Neumond) rührt von *Sû* (= wieder lebendig werden) her; die Helligkeit war erloschen und beginnt wieder aufzuleben, daher der Name *So*«. An einem anderen Orte wird gesagt: »Der Anfangstag des Monates wird *So*-Tag genannt«.[3] Man sieht aus diesen Citaten deutlich, dass *So* unter allen Umständen den ersten Tag des Monates bedeutet, der in früheren Zeiten mit dem ersten Sichtbarwerden der Mondessichel identisch war, später aber mit dem Tage identificiert wurde, an welchem die Conjunction von Sonne und Mond eintrat, i. e. also, *So* bedeutet den »Neumond«[4] als »neuen Mond« aufgefasst.

Die Mondesviertel hingegen werden mit 弦 *hiên* bezeichnet, und zwar das erste Viertel mit 上弦, das letzte mit

---

[1] 說文、月盡也。釋名、晦灰也、火死爲灰、月光盡、似之也。Wörterbuch Kang-hi s. v. 晦

[2] 晦月終 ibid.

[3] 說文、月一日始蘇也、Wörterbuch Kang-hi s. v. 朔白虎通、朔之言蘇也、明消更生故言朔也、ibid. 疏月之始日謂之朔日。ibid.

[4] Vergleiche das oben über Neumond etc. Gesagte.

下弦, wie auch Wells-Williams im »Syllabic Dictionary« (p. 197) angibt: 弦 the moon in her quarters on the 8[th] and 23[d] days; a crescent; Vollmond ist 望 *wàng* = the moon in opposition, the fifteenth day or full of the moon (Wells-Will., p. 1045).

*Hoèi-so* bedeutet demnach sachlich nichts anderes als »letzter oder erster Tag« des Monates, ist demnach als Coordination und nicht als Genetivverhältnis grammatisch aufzufassen. Und es ist deshalb statt »am ersten Tage des letzten Viertels« zu übersetzen: »am letzten oder ersten Tage des Monates«, das will sagen kurz vor oder nach der Conjunction, oder mit anderen Worten um die Zeit des Neumondes, weil in der früheren Zeit *hoèi* meist den Tag der Conjunction angab, so dass die Sonnenfinsternisse an diesem, dem letzten Tage des Monates eintraten und nicht an dem folgenden, *sò*, »Neumond« genannten, dem ersten des Monates, weil nicht der Begriff der Conjunction ursprünglich mit *sò* verbunden war, gerade so wenig wie bei uns mit dem Worte Neumond.

Aus sachlichen Gründen auch kann 中空 hier nicht mit »se voit au milieu du ciel« übersetzt werden. 空中 heißt allerdings »in emptiness, space, the sky; a humming top«.[1] Hier ist aber die Redewendung invertiert und lautet nicht *K'ung-tschung* = Himmelmitte, sondern ist *tschúng-k'ung* mit dem *Kiü-schêng* zu lesen = in die Höhlung treffen, d. h. das *Tê-sing* (= Tugendgestirn) trifft in die Höhlung der schmalen Sichel des eigentlichen Mondes.

Demnach muss aus sachlichen Gründen, die mit den Sprachgesetzen des Chinesischen vollkommen im Einklange sind, übersetzt werden:

»Das *King-sing* ist das *Tê-sing*; es erscheint wie ein Halbmond, entsteht am letzten oder ersten Tage des Monates (d. i. um die Zeit des Neumondes), unterstützt den Mond, indem es

---

[1] Giles, Chinese-English-Dictionary, p. 683, Wells-Williams, Syllabic Dictionary, p. 464.

ihn hell und groß macht,[1] weil es in der Mitte der Höhlung (der schmalen, glänzenden Mondsichel) steht«.

Und durch diese Übersetzung, die auf Grund der Sprachgesetze und aus sachlichen Betrachtungen hervorgegangen, stehen die betreffenden Stellen nunmehr alle im richtigen Einklang ohne den geringsten Widerspruch in sich und unter sich.

Es ist demnach unter *King-sing* oder *Tê-sing* jene Erscheinung zu verstehen, wo der Mond uns als sehr schmale Sichel erscheint und der sonst dunkle Theil der scheinbaren Mondscheibe durch das von der Erde reflectierte Sonnenlicht besonders auffällig sichtbar wird,[2] etwa wie eine totale Sonnenfinsternis.

Hier könnte nun vom Standpunkte des Philologen der Einwand gemacht werden: Diese Erscheinung müsste ja dann nach jeder Conjunction, also alle Mondmonate eintreten, und könnte sonach nicht auf die Geburt eines hervorragenden Mannes deuten; denn nicht alle Monate erblickt ein Hero das Licht der Welt.

Der Einwand scheint auf den ersten Blick berechtigt zu sein, aber auch nur auf den ersten Blick. Es ist allerdings hier die Zeit in der Nähe der Conjunction von Sonne und Mond, welche thatsächlich alle Monate eintritt, eine nothwendige Bedingung, ob sie aber auch die hinreichende Bedingung ist, steht noch keineswegs fest. Hier könnten ja z. B. ähnliche Verhältnisse obwalten wie bei den Sonnenfinsternissen, für welche die Conjunction von Sonne und Mond die nothwendige Bedingung ist, und trotzdem findet, wie jedermann weiß, nicht jeden Monat, sondern verhältnismäßig selten eine Sonnenfinsternis für einen bestimmten Ort statt. Für Sonnenfinsternisse ist eben die Conjunction allerdings die nothwendige, aber nicht die hinreichende Bedingung, es wird hiezu noch erfordert, dass im Moment der Conjunction Sonne und Mond in der Nähe der Mondknoten stehen, erst

[1] Lit. bewirkt die Helligkeit und Größe.

[2] Ich vermeide mit Absicht hier den üblichen Terminus technicus, weil mich die praktische Erfahrung gelehrt, dass die Anwendung desselben außerhalb der Fachkreise leicht Missverständnisse veranlasst.

hiemit sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen gegeben.

Demnach stellt sich hiemit für die weitere Untersuchung die Frage: Unter welchen Bedingungen kann der Fall eintreten, dass durch das von der Erde reflectierte Sonnenlicht der sonst unbeleuchtete und uns zugewandte Theil der Mondscheibe für das freie Auge in auffälliger Weise sichtbar werden kann?

Die Beantwortung der Frage hängt von der Betrachtung zweier wesentlicher Punkte ab, welche den Haupteinfluss hier ausüben, nämlich:

*a*) des Zustandes der Atmosphäre und deren Einfluss auf den Lichtstrahl;

*b)* der Stellung von Erde, Sonne und Mond.

Bekanntlich wird durch die die Erde umgebenden Luftschichten ein Theil der Lichtstrahlen, welche von auswärts gegen die Erdoberfläche hin sich bewegen, ausgelöscht und gelangt nie in das Auge des Beobachters. Diese Extinction und daher Schwächung der Lichtintensität hängt ab von der Länge des Weges, den der Lichtstrahl in der Luft zurücklegen muss; außerdem werden auch Luftdruck, Feuchtigkeitsgehalt und Temperatur der Luft Änderungen in der Absorption hervorrufen. Die Erfahrung aus den Beobachtungen lehrt, dass bei hohen Barometerständen und trockener Luft die Absorption der Lichtstrahlen in der Atmosphäre eine geringere ist, als bei niederen Barometerständen und größerer Feuchtigkeit. Mit anderen Worten: je klarer und reiner uns der Himmel erscheint, desto geringer ist die Absorption der Lichtstrahlen in der Atmosphäre; sie wird also am geringsten bei ganz klarem Himmel und wir erhalten dann das Maximum der Intensität des Lichtes von einer auswärtigen Lichtquelle unter sonst gleichen Verhältnissen.

Für unsere Frage ist dieses Factum aber außerordentlich wichtig wegen des Weges, den das Licht zu durchlaufen hat, welches uns die vom Sonnenlicht unbeleuchtete Mondscheibe sichtbar macht.

Die von der Sonne auf die Erde gelangenden Lichtstrahlen passieren zunächst einmal die Atmosphäre und verlieren

hiedurch entsprechend dem Absorptionscoefficienten für einen bestimmten Zustand der Atmosphäre an Intensität, so dass, wann $J$ die ursprüngliche Intensität war, die zur Erde gelangende Intensität

$$i = J(1-\alpha)$$

ist, wenn $a$ den Absorptionscoefficienten bedeutet. Würde nun das Licht an der Erdoberfläche nach der diffusen Reflection[1] mit derselben Intensität $i$ gegen den Mond sich bewegen, so würde es den gleichen Verlust bei seinem Durchgang durch die Atmosphäre erleiden und mit der Intensität $i_1 = i(1-\alpha)$ auf den Mond treffen. Von dort zurückgeworfen, hat es abermals den Weg durch die Atmosphäre zurückzulegen und verliert wieder gleich viel, so dass es schließlich mit einer Intensität $i_2$ zur Erde gelangt, die durch die Extension der Atmosphäre allein bei dieser dreimaligen Einbuße nur mehr $i_2 = J(1-\alpha)^3$ ist.

Je größer also $\alpha$ ist, je mehr demnach bei einem einmaligen Durchgange durch die Atmosphäre verloren geht, desto mehr nähert sich die von dem Mond zurücklangende Intensität der Null, und zwar umsomehr, als die Schwächung der dritten Potenz proportional ist. Es kann demnach schon bei für andere Lichtquellen noch passablen Extinctionsverhältnissen, für das von dem Mond zurückgeworfene Erdlicht infolge der dreimaligen Extinction die Intensität so gering werden, dass die anlangenden Lichtstrahlen keinen merkbaren Eindruck auf das Auge machen, geschweige denn eine auffallende Erscheinung hervorrufen könnten.

1. Demnach ist die eine Bedingung: vollständig klarer und reiner Himmmel; das ist die durch die rein atmosphärischen Verhältnisse sich ergebende Bedingung.

Die Intensität ist aber ferner noch abhängig mit Rücksicht auf den Weg von der Zenithdistanz des Mondes, denn die Helligkeit nimmt mit wachsender Zenithdistanz ab. Je kleiner also unter sonst gleichen Verhältnissen die Zenithdistanz des Mondes ist, oder was dasselbe, je größer die Höhe des Mondes, desto heller wird uns das Licht erscheinen. Hieraus ergibt sich

[1] Wo demnach kein virtuelles Bild entstehen kann.

2. die weitere Bedingung: möglichst große Höhe des Mondes über dem Horizont.

Ferner hängt die Intensität ab von dem Incidenz- und Emissionswinkel und dem sogenannten Phasenwinkel, wie man aus den Untersuchungen von Lambert, Seeliger etc. weiß. Der Incidenz- und Emissionswinkel, sowie der Phasenwinkel kommt in doppelter Weise in Betracht, einmal bei dem Auffallen der Sonnenstrahlen auf die Erde und der diffusen Reflexion an derselben, das zweitemal beim Auffallen des Erdlichtes auf den vom Sonnenlicht unbeleuchteten Theil der Mondscheibe. Incidenz- und Emissionswinkel hängen aber innig zusammen mit dem Phasenwinkel und dieser wieder in unserem Falle mit dem Winkel an der Erde, den die Richtungen nach Sonne und Mond bilden.

Wäre die Erde eine Ebene, so würde die Intensität der von der Erde auf den Mond ausfallenden Strahlen direct dem Cosinus des Winkels an der Erde proportional sein, da dem aber nicht so ist, so muss sie eine Function dieses Winkels sein, die ihr Maximum erreicht, wenn der Cosinus ebenfalls sein Maximum erreicht. Dies ergibt sich auch, ob man die Formel nach Euler, Lambert und anderen anwendet, oder sich der Näherungsformel bedient:

$$\text{Helligkeit} = \frac{r_0^2(r_0-1)^2}{r^2\Delta^2}\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\log\text{nat}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{4}\right),$$

wo $\alpha$ den Phasenwinkel, also den Winkel an der Sonne bedeutet. Hier tritt auch für das Minimum von $\alpha$ das Maximum der Helligkeit ein. Wir erhalten sonach als dritte Bedingung:

3. Der Phasenwinkel oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Winkel zwischen den Richtungen von der Erde nach dem Monde und der Sonne muss, unter sonst gleichen Verhältnissen, um die größte Wirkung des vom Monde zurückgeworfenen Erdlichtes zu erhalten, ein Minimum sein. Auch die Stellung der Sonne gegen den Horizont hat eine Bedeutung und einen Einfluss auf die Intensität, mit der das vom Monde zurückgeworfene Erdlicht in unser Auge gelangt. Die Ursache

hiefür liegt in der Reflexion und Diffusion des Lichtes innerhalb der Atmosphäre. Bei vollkommener Durchsichtigkeit der Atmosphäre nämlich wäre jede Reflexion durch dieselbe ausgeschlossen und das Himmelsgewölbe müsste uns also, selbst wenn die Sonne über dem Horizonte, schwarz erscheinen, ja dort, wo die Sonne nicht unmittelbar hinscheint, müsste vollkommene Finsternis herrschen. Die Reflexion des Lichtes in der Atmosphäre ist aber so stark, dass bei Tage, wenn die Sonne sonach über dem Horizonte steht, das ganze Himmelsgewölbe mehr oder weniger lebhaft erleuchtet erscheint, so dass die Sterne vor diesem gleichmäßigen Glanze erbleichen und dem freien Auge unsichtbar sind; ja selbst durch das Licht des Mondes erscheint das Himmelsgewölbe so stark erhellt, dass zur Zeit des Vollmondes nur noch die helleren Sterne sichtbar bleiben. Vermöge dieser Reflexion und Diffusion des Lichtes in der Atmosphäre entsteht die Dämmerung, und sie ist der Grund, dass man für die heliakischen Auf- und Untergänge und die verwandten Erscheinungen auf den Sehungsbogen Rücksicht nehmen muss, d. h. auf jenen Stand der Sonne unter dem Horizonte, wo das durch dieselbe in der Atmosphäre erzeugte diffuse Licht an der Stelle des Sternaufganges nicht mehr die Gegend dortselbst derart beeinflusst, dass der Stern unsichtbar wäre.

Da nun, wie sich aus dem Früheren ergibt, das vom Monde rückgesandte Erdlicht ohnedem schon bedeutenden Schwächungen unterworfen, so muss, um den Einfluss der Diffusion und Reflexion des Sonnenlichtes darauf hintan zu halten, die Sonne, analog wie bei den heliakischen Aufgängen, eine bestimmte Stellung unter dem Horizonte haben, welche sich nur praktisch bestimmen lässt. Als Anhaltspunkte hiefür können die Stellungen für die bürgerliche (—6°) und die astronomische Dämmerung (—18°), sowie der Sehungsbogen für Sterne erster Größe (—11°) dienen.

Vermöge dieser Erscheinung folgt aber weiter auch bezüglich des Mondes, dass die Phase desselben **klein** sein muss, damit durch das von dem Monde reflectierte Sonnenlicht nicht in der Atmosphäre eine derartige Diffussion und Reflexion des Lichtes erzeugt wird, welche das bedeutend

schwächere von dem Monde zurückgeworfene Erdlicht übertönt. Wir erhalten also als vierte Bedingung:

4. Eine bestimmte, praktisch zu bestimmende Tiefe der Sonne unter dem Horizonte und möglichste Kleinheit der Mondphase, jedoch so,

5. dass der Mond sichtbar ist, also über dem Horizonte steht, wie früher angegeben (siehe S. 635, Punkt 2) und die Sichel des Mondes nicht zu schmal ist.

Hiemit sind aber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen gegeben, damit das in der Nähe der Conjunction auf den Mond fallende und von diesem zurückgeworfene Erdlicht eine dem freien Auge auffallende und glänzende Erscheinung werde. Und damit ist auch der Angelpunkt gegeben, durch den Calcül die günstigsten Verhältnisse für alle diese Bedingungen aufzusuchen. Dies soll nun im folgenden geschehen.

Die Frage hängt also wesentlich von der Phase des Mondes und in weiterer Folge von dem Winkel zwischen den Richtungen von der Erdoberfläche nach Sonne und Mond ab.

## Bestimmung der Phase.

Um die Phase zu bestimmen, denke man sich durch den Beobachtungsort auf der Erdoberfläche, die Mittelpunkte von Sonne und Mond eine Ebene gelegt. In dieser Ebene sei eine gemeinschaftliche Tangente an die als Kreise gedachten Schnitte des Sonnen- und Mondkörpers gelegt. Dieselbe wird mit der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte einen Winkel $f$ einschließen, welcher als Erzeugungswinkel des durch den Mond verursachten Schattenkegels zu betrachten ist und der implicite auch die Beleuchtungsgrenze des Mondkörpers durch die Sonne vermittelt.

Sind $s'$ und $s$ die in Einheiten des Erdäquatorhalbmessers ausgedrückten Halbmesser von Sonne ($s'$) und Mond ($s$) und $\rho$ die Entfernung von Mond und Sonnenmittelpunkt, dann ist

$$\sin f = \frac{s' - s}{\rho}, \qquad \ldots 1)$$

weil die beiden Halbmesser auf der gemeinschaftlichen Tangente senkrecht stehen.

Um die weiteren Verhältnisse zu bestimmen, denke man sich vom Beobachtungsorte aus einen Kegel an den Mondkörper gelegt. Nun ist aber die Gleichung eines geraden Kegels, welcher eine Kugel vom Radius $s$ berührt

$$x^2(c^2-s^2)+y^2(c^2-s^2)=z^2s^2,$$

wenn der Coordinatenursprung im Scheitel des Kegels liegt, die $Z$-Axe mit der Kegelaxe zusammenfällt und der Abstand des Kugelmittelpunktes vom Coordinatenursprunge $c$ ist.

Die Gleichung eines schiefen Kreiskegels, dessen Spitze im Coordinatenursprunge liegt und dessen Directrixebene parallel der $XY$-Ebene steht, lautet

$$\left(\frac{c_1x_1}{z_1}-a_1\right)^2+\left(\frac{c_1y_1}{z_1}-b_1\right)^2=s_1^2,$$

wenn die Coordinaten des Directrixmittelpunktes $x=a_1, y=b_2$, $z=c_1$ und der Halbmesser der Directrix $s_1$ sind.

Um beide Gleichungen auf einerlei Coordinatensystem zu beziehen, werde das erste Coordinatensystem des geraden Kegels im Betrage des Winkels $p$ um die $X$-Axe gedreht, so dass

$$y=\eta\cos p-\zeta\sin p$$
$$z=\eta\sin p+\zeta\cos p$$

ist. Die Coordinaten des Kugelmittelpunktes im neuen System seien $\eta', \zeta'$, weswegen die Bedingungen

$$o=\eta'\cos p-\zeta'\sin p$$
$$c=\eta'\sin p+\zeta'\cos p$$

bestehen müssen.

Es sind demnach, auf dasselbe Coordinatensystem bezogen, die Gleichungen der beiden Kegel

$$\eta^2(\zeta'^2-s^2)-2\eta\zeta\eta'\zeta'+x^2(\eta'^2+\zeta'^2-s^2)+\zeta(\eta'^2-s^2)=0$$

für den geraden Kegel, und

$$\left(\frac{c_1x_1}{\zeta_1}-a_1\right)^2+\left(\frac{c_1\eta_1}{\zeta_1}-b_1\right)^2=s_1^2$$

für den schiefen Kegel.

Denkt man sich nun eine Ebene gelegt, deren Normale $c'$ mit der Coordinatenaxe der $\zeta$ den Winkel $G$ bildet und die senkrecht auf der $\eta\zeta$-Ebene steht, so ist

$$\eta \sin G + \zeta \cos G = c' \qquad \ldots 2)$$

die Gleichung derselben.

Wird nun der Winkel $\chi$ eingeführt, der durch die folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r_1' \cos \chi &= c' \\ \eta &= r_1' \sin (G - \chi) = c' \sec \chi \sin (G - \chi) \\ \zeta &= r_1' \cos (G - \chi) = c' \sec \chi \cos (G - \chi) \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

definiert sei, dann genügen die so definierten Werte von $\eta$ und $\zeta$ der Gleichung 2) für die Ebene.

Soll nun diese Ebene die beiden Kegel schneiden, so müssen die durch die Gleichungen 3) bestimmten Werte von $\eta\zeta$ auch den Gleichungen der beiden Kegel genügen und wir bekommen dann die Gleichung der Schnittcurve in der genannten Ebene, wenn wir eine, und zwar die entsprechende Coordinate eliminieren.

Sei nun

$$\left.\begin{aligned} c &= r_1, & \eta' &= r_1 \sin G \\ c_1 &= r_1 \cos G - s \sin f, & \zeta' &= r_1 \cos G \\ c' &= r_1 - s \sin \Delta_1, & a_1 &= 0 \\ s &= r_1 \sin \Delta_1, & b_1 &= r_1 \sin G \\ s_1 &= s \cos f, & & \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

wodurch gesagt ist, dass die beiden Kegelaxen in der $\eta\zeta$-Ebene liegen und $s_1$ eine Sehne des Kreisschnittes von der Kugel mit dem Radius $s$ in der $\eta\zeta$-Ebene ist. $\Delta_1$ stellt dann den Winkel vor, unter welchem der Kugelhalbmesser $s$ vom Coordinatenursprunge aus gesehen wird.

Identificiert man nun die $\eta\zeta$-Ebene mit jener Ebene, welche, wie oben S. 19 angegeben, durch den Beobachtungsort auf der Erdoberfläche, die Mittelpunkte von Sonne und Mond gelegt

wurde, so bedeutet dann $r_1$ die Entfernung des Mondmittelpunktes vom Beobachtungsorte, $s$ den Mondhalbmesser in Einheiten des Erdäquatorhalbmessers, $\Delta_1$ den scheinbaren Mondhalbmesser im Winkelmaß, $G$ den Winkel am Mondmittelpunkte, welchen die durch die Mittelpunkte von Sonne und Mond gezogene Linie mit der Entfernung $r_1$ bildet, und $s_1$ ist der in Einheiten des Erdäquators ausgedrückte Halbmesser der Schattengrenze am Monde, wenn der Öffnungswinkel des Schattenkegels wieder durch $f$ bezeichnet wird. $s \sin \Delta_1$ ist dann die Entfernung der im Punkte $c'$ errichteten Ebene, wodurch definiert ist, dass diese Ebene durch die Berührungspunkte jenes geraden Kegels mit dem Monde geht, der vom Beobachtungsorte aus an denselben gelegt wird und uns die scheinbare Mondscheibe definiert. Der Halbmesser derselben ist somit $s \cos \Delta_1$ in Einheiten des Erdäquatorhalbmessers.

Durch diese Wahl erhalten wir in den Schnittcurven der beiden Kegel in der auf $\eta\zeta$ im Punkte $c'$ senkrecht errichteten Ebene die jeweilige Größe und Figur der beleuchteten Mondscheibe oder die wechselnden Formen der Mondsicheln bis zur Gestalt des Vollmondes.

Die Coordinaten, welche diese Schnittcurven in der genannten Ebene definieren, sind daher $x$ und $\eta$, so dass $\zeta$ zu eliminieren ist. Dass die Schnittcurve des geraden Kreiskegels immer ein Kreis sein muss, versteht sich von selbst, da die Schnittebene normal zur Axe dieses Kegels liegt. Die Schnittcurve des schiefen Kegels oder der Schattengrenze jedoch bedarf dieser Untersuchung. Eliminiert man $\zeta$ und stellt die Bedingungen auf, welche die Gattung des Schnittes bestimmen, so ergibt sich, weil der Coefficient des Productes von $x\eta$ immer Null ist, dass die Schnittcurve der Schattengrenze nie eine Hyperbel sein kann, sondern eine Ellipse ist, so lange

$$(r_1 \cos G - s \sin f)^2 [(r_1 - s \sin f)^2 - s^2 \cos^2 f \sin^2 G] \cos^2 G$$

von Null verschieden ist; eine Parabel wird, wenn dieser Ausdruck den Wert Null erhält.

Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann nie Null werden, weil $r_1$ etwa 60, $s = 0 \cdot 3$ ist, daher bleiben nur die beiden Fälle über

$$r_1 \cos G - s \sin f = 0$$

oder

$$\cos G = 0,$$

welche sich wegen der Kleinheit von $s = 0 \cdot 27, f$ etwa $16'$ und der Größe $r_1$ etwa 60 durch die Bedingung ausdrücken lassen, der Schnitt wird eine Parabel, wenn $G$ nahe an $90°$ oder gleich $90°$ wird, d. h. also zur Zeit der Quadraturen.

Substituiert man nun die Werte der Coordinaten aus den Gleichungen 3), wodurch gleichzeitig der Bedingung der Schnittcurven in der senkrechten Ebene genügt wird, so kann der Winkel $\chi$ innerhalb gewisser Grenzen als unabhängig Variable aufgefasst werden. Er stellt infolge der zuvor festgesetzten Lage des Coordinatensystems den Winkel zwischen der Entfernung des Mondmittelpunktes von der Erde und der Linie dar, welche in der $\eta\zeta$-Ebene vom Ursprunge des Coordinatensystems zum Fußpunkte der $X$-Coordinate auf der $\eta\zeta$-Fbene gezogen wird.

Die Substitution ergibt nach entsprechender Zusammenziehung für den geraden Kegel

$$x^2 + r_1^2 \cos^2 \Delta_1 \sec^2 \chi \{ \sin^2 \chi - \sin^2 \Delta_1 \} = 0,$$

für den schiefen Kegel, wenn wir $\chi_1$ und $x_1$ schreiben zur Unterscheidung:

$$\frac{(\cos G - \sin \Delta_1 \sin f)^2 x_1^2}{r_1^2 \cos^4 \Delta_1 \sec^2 \chi_1 \cos^2 (G - \chi_1)} + \\ + \frac{(\sin \chi + \sin \Delta_1 \sin f \sin (G - \chi_1))^2}{\cos^2 (G - \chi_1)} = \sin^2 \Delta_1 \cos^2 f.$$

Setzt man nun

$$x_1 = r_1 \cos \Delta_1 \sec \chi . \xi$$
$$x_1 = r_1 \cos \Delta_1 \sec \chi_1 . \xi_1 \cos \Delta_1,$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 &= \sin^2 \Delta_1 - \sin^2 \chi \\ \xi^2 &= \frac{\sin^2 \Delta_1 \cos^2 f \cos^2 (G - \chi_1) - [\sin \chi_1 + \sin \Delta_1 \sin f \sin (G - \chi_1)]^2}{(\cos G - \sin \Delta_1 \sin f)^2}. \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Sollen hier für $\xi$ und $\xi_1$ reelle Werte erhalten werden, dann muss

$$\sin^2 \Delta_1 \geqq \sin^2 \chi$$

$$\sin^2 \Delta_1 \cos^2 f \cos^2 (G-\chi_1) \geqq [\sin \chi + \sin \Delta_1 \sin f \sin (G-\chi_1)]^2$$

sein. Die Grenzen von $\chi$ und $\chi_1$ bestimmen sich durch die entsprechenden Kegel.

Für den größten Abstand der beiden Schnittcurven voneinander, also die größte Breite der Sichel, welche in der $\eta\zeta$-Ebene und in der Verticalebene liegen muss, ist die Bedingung

$$\xi = 0$$

$$\xi_1 = 0,$$

woraus sich ergibt

$$\sin \chi = \sin \Delta_1$$

$$\sin \Delta_1 \cos f \cos (G-\chi_1) = \sin \chi_1 + \sin \Delta_1 \sin f \sin (G-\chi_1'),$$

oder, wenn wir diese Werte mit $\varkappa$ bezeichnen

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \Delta_1 \\ \sin \varkappa_1 &= \sin \Delta_1 \cos (G+f-\varkappa_1), \\ \text{was sich auch} \\ \operatorname{tg} \varkappa_1 &= \frac{\sin \Delta_1 \cos (G+f)}{1-\sin \Delta_1 \sin (G+f)} \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

schreiben lässt.

Für die beiden Durchschnittspunkte der Schnittcurven in der Verticalebene, d. h. also für die beiden Hörnerspitzen muss $x = x_1$, also $\xi = \cos \Delta_1 \xi_1$ und $\chi = \chi_1$ werden; dies ergibt:

$$\begin{aligned} [\sin^2 \Delta_1 - \sin^2 \chi](\cos G - \sin \Delta_1 \sin f)^2 = \\ = \cos^2 \Delta_1 [\sin^2 \Delta_1 \cos^2 f \cos^2 (G-\chi) - \\ - \{\sin \chi + \sin \Delta_1 \sin f \sin (G-\chi)\}^2] \quad \ldots 7a) \end{aligned}$$

Entwickelt man hierin die Functionen von $G-\chi$, so erhält man zunächst:

$$\sin^2 \Delta_1 (\cos G - \sin \Delta_1 \sin f)^2 + \sin^2 f \cos^2 \Delta_1 \sin^2 \Delta_1 -$$
$$- \cos^2 \Delta_1 \sin^2 \Delta_1 \cos^2 G = \sin^2 \chi \{ (\cos G - \sin \Delta_1 \sin f)^2 -$$
$$- \cos^2 \Delta_1 + 2 \cos^2 \Delta_1 \sin^2 \Delta_1 \sin f \cos G +$$
$$+ \cos^2 \Delta_1 \sin^2 \Delta_1 (\sin^2 G - \cos^2 G) \} +$$
$$+ 2 \sin \chi \cos \chi \cos^2 \Delta_1 \sin \Delta_1 \sin G (\sin \Delta_1 \cos G - \sin f).$$

Das Glied links vom Gleichheitszeichen lässt sich schreiben:

$$\sin^2 \Delta_1 (\cos G - \sin \Delta_1 \sin f)^2 + \sin^2 f \cos^2 \Delta_1 \sin^2 \Delta_1 -$$
$$- \cos^2 \Delta_1 \sin^2 \Delta_1 \cos^2 G = \sin^2 \Delta_1 (\sin \Delta \cos G - \sin f)^2.$$

Setzt man in den Coefficienten von $\sin^2 \chi$ den aus vorstehender Gleichung resultierenden Wert von

$$(\cos G - \sin \Delta_1 \sin f)^2$$

ein, so wird derselbe:

$$(\sin \Delta_1 \cos G - \sin f)^2 - \cos^2 \Delta_1 [\cos^2 G \sin^2 \Delta_1 -$$
$$- 2 \sin \Delta_1 \sin f \cos G + \sin^2 f] + \cos^2 \Delta_1 \cos^2 G +$$
$$+ \cos^2 \Delta_1 \sin^2 \Delta_1 \sin^2 G - \cos^2 \Delta_1$$

oder

$$(\sin \Delta \cos G - \sin f)^2 (1 - \cos^2 \Delta_1) + \cos^2 \Delta_1 \sin^2 G (\sin^2 \Delta_1 - 1).$$

Es wird somit die obige Bedingungsgleichung 7*a)* für $\chi$:

$$\sin^2 \Delta_1 (\sin \Delta_1 \cos G - \sin f)^2 =$$
$$= \sin^2 \chi \{ \sin^2 \Delta_1 (\sin \Delta_1 \cos G - \sin f)^2 - \cos^4 \Delta_1 \sin^2 G \} +$$
$$+ 2 \sin \chi \cos \chi \cos^2 \Delta_1 \sin \Delta_1 \sin G (\sin \Delta_1 \cos G - \sin f),$$

die sich auf die Gestalt:

$$[\sin \Delta_1 (\sin \Delta_1 \cos G - \sin f) \cos \chi - \cos^2 \Delta_1 \sin \chi \sin G]^2 = 0 \quad \ldots 7)$$

reduciert.

Nennen wir also den den Hörnerspitzen entsprechenden Wert von $\chi$ analog $\varkappa_s$, so ist

$$\operatorname{tg} \varkappa_s = \frac{\sin \Delta_1 (\sin \Delta_1 \cos G - \sin f)}{\cos^2 \Delta_1 \sin G}, \quad \ldots 8)$$

in welchem Ausdrucke $\varkappa_s$ ebenso wie früher $\varkappa$ und $\varkappa_1$ stets kleiner als 90° oder gleich 90° zu nehmen ist und mit dem

Vorzeichen, das der Bruch rechter Hand vom Gleichheitszeichen hat. Die Winkel $\chi$ und $\chi_1$ müssen zwischen den Grenzen

$$o \lesseqq \chi \lesseqq \pm \Delta_1$$
$$\varkappa_s \lesseqq \chi_1 \lesseqq \varkappa_1$$

eingeschlossen sein, wenn es sich um die beleuchtete Sichel handelt.

Bezieht man alles auf die Schnittebene, in welcher der Ursprung des ebenen Coordinatensystems in den Mittelpunkt des Kreisschnittes vom geraden Kegel gelegt wird, wobei die $\eta'$-Coordinate in der Ebene liegen soll, die durch die Mittelpunkte von Sonne, Mond und den Beobachtungsort geht, die $\xi'$-Coordinate darauf senkrecht, und nennt man den Radius vector $s'$, den Polarwinkel $\vartheta$, und zwar von der positiven $\eta'$-Coordinatenaxe aus gezählt, dann wird

$$\eta' = s' \cos \vartheta$$
$$\xi' = s' \sin \vartheta.$$

Ferner ist auch mit Rücksicht auf die Definitionsgleichungen 3, 4) und die Bedeutung des Winkels $\chi$

$$\eta' = r_1' \sin \chi = c' \sec \chi \sin \chi = (r_1 - s \sin \Delta_1) \sec \chi \sin \chi$$
$$\xi' = x.$$

Da ferner für den geraden Kegel

$$s' = s \cos \Delta_1$$

ist, so wird für denselben mit Rücksicht auf die Gleichung $x = r_1 \cos \Delta_1 \sec \chi \xi$ und $s = r$

$$s \cos \Delta_1 \sin \vartheta = x = \frac{s \cos \Delta_1}{\sin \Delta_1} \sec \chi \xi$$

$$s \cos \Delta_1 \cos \vartheta = \frac{s \cos^2 \Delta_1}{\sin \Delta_1} \operatorname{tg} \chi.$$

Für den schiefen Kegel erhalten wir

$$s_1' \sin \vartheta_1 = \frac{s \cos^2 \Delta_1}{\sin \Delta_1} \sec \chi_1 \xi_1$$

$$s_1' \cos \vartheta_1 = \frac{s \cos^2 \Delta_1}{\sin \Delta_1} \operatorname{tg} \chi_1.$$

Drückt man alles in Einheiten des Halbmessers vom Kreisschnitte des geraden Kegels, also $s \cos \Delta_1$ aus und setzt daher

$$s_1' = s_2 . s \cos \Delta_1,$$

wodurch dann $s_2$ in Einheiten von $s \cos \Delta_1$ ausgedrückt erscheint, dann erhält man für den geraden Kegel

$$\sin \vartheta = \frac{\sec \chi}{\sin \Delta_1} \xi$$

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \Delta_1}{\sin \Delta_1} \operatorname{tg} \chi,$$

für den schiefen Kegel

$$s_2 \sin \vartheta_1 = \frac{\cos \Delta_1}{\sin \Delta_1} \sec \chi_1 \xi_1$$

$$s_2 \cos \vartheta_1 = \frac{\cos \Delta_1}{\sin \Delta_1} \operatorname{tg} \chi.$$

Bestimmt man nun $\chi$ und $\chi_1$, so dass

$$\vartheta = \vartheta_1$$

wird, dann erhält man die Breite der Sichel in der Lage des Radius vectors durch

$$\text{Sichelbreite} = 1 - s_2.$$

Es wird so einestheils

$$s_2 = \frac{\operatorname{tg} \chi_1}{\operatorname{tg} \chi},$$

andterntheils muss, damit $\vartheta = \vartheta_1$ werde, die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{\sec \chi}{\operatorname{tg} \chi} \xi = \cos \Delta_1 \frac{\sec \chi_1}{\operatorname{tg} \chi_1} \xi_1. \qquad \ldots 9)$$

Hiemit findet sich die größte Sichelbreite, wenn wir die Werte für $\varkappa$ und $\varkappa_1$ einsetzen, und durch diese ein Maß für die Phase, nämlich

$$F = \text{Phase} = 1 - s_2 = 1 - \frac{\operatorname{tg} \varkappa_1}{\operatorname{tg} \Delta_1}. \qquad \ldots 10)$$

Eine bequemere Form für $\chi_1$ zur Construction der Sichel lässt sich aufstellen, wenn man auf die Mittelpunktsgleichung der Schnittellipse übergeht.

Hiezu gelangt man leicht, sofern man bedenkt, dass der Maximalwert von $x_1$, somit auch von $\xi_1 \sec\chi_1$, den Wert der einen Axe des Ellipsenschnittes gibt. Nennt man den diesem Maximalwerte zugehörigen Wert von $\chi_1$ zur Unterscheidung $\nu$, dann ist selbstredend unter den hier vorhandenen Verhältnissen die zweite Axe durch $\operatorname{tg}\varkappa_1 - \operatorname{tg}\nu$ gegeben, wo $\varkappa_1$ der Winkel für die größte Breite der Phase ist, welcher durch Gleichung 6) bestimmt wurde. Nennt man den Maximalwert von $\xi_1 \sec\chi_1 = a$, dann hat man, mit Rücksicht auf Gleichung 5), die beiden Gleichungen:

$$a^2(\cos G - \sin\Delta_1 \sin f)^2 = \sin^2\Delta_1 \cos^2 f(\cos G + \sin G \operatorname{tg}\nu)^2 - \\ -[\operatorname{tg}\nu(1-\sin\Delta_1 \sin f \cos G) + \sin\Delta_1 \sin f \sin G]^2 \quad ..11)$$

$$o = \sin^2\Delta_1 \cos^2 f(\cos G + \sin G \operatorname{tg}\varkappa_1)^2 - \\ -[\operatorname{tg}\varkappa_1(1-\sin\Delta_1 \sin f \cos G) + \sin\Delta_1 \sin f \sin G]^2$$

durch deren Subtraction sich ergibt:

$$a^2(\cos G - \sin\Delta_1 \sin f)^2 = \\ (\operatorname{tg}\nu - \operatorname{tg}\varkappa_1)\{\sin^2\Delta_1 \cos^2 f \sin G[2\cos G + \sin G(\operatorname{tg}\varkappa_1 + \operatorname{tg}\nu)] - \\ -(1-\sin\Delta_1 \sin f \cos G)[(\operatorname{tg}\nu + \operatorname{tg}\varkappa_1)(1-\sin\Delta_1 \sin f \cos G) + \\ +2\sin\Delta_1 \sin f \sin G]\}$$

Differenziert man die erste der Gleichungen 11), um das Maximum zu bestimmen, nach $\operatorname{tg}\nu$ und setzt

$$\frac{d a^2(\cos G - \sin\Delta_1 \sin f)^2}{d \operatorname{tg}\nu} = 0,$$

so ergibt sich:

$$o = 2\sin^2\Delta_1 \cos^2 f(\cos G + \sin G \operatorname{tg}\nu)\sin G - \\ -2[\operatorname{tg}\nu(1-\sin\Delta_1 \sin f \cos G) + \\ +\sin\Delta_1 \sin f \sin G](1-\sin\Delta_1 \sin f \cos G).$$

Eliminiert man mit Hilfe dieser Gleichung aus vorstehender $\operatorname{tg}\nu$, hiebei den Wert für $\operatorname{tg}\varkappa_1$ berücksichtigend, der sich aus Gleichung 6 ergibt, und setzt

$$b = \operatorname{tg}\varkappa_1 - \operatorname{tg}\nu,$$

dann erhält man nach einigen entsprechenden und leichten Reductionen

$$a^2 = \frac{\operatorname{tg} \varkappa_1 \cos f}{\cos(G+f)[1+\sin\Delta_1 \sin(G-f)]} \sin\Delta_1 \cos f.$$

$$b = \frac{\operatorname{tg} \varkappa_1 \cos f}{\cos(G+f)[1+\sin\Delta_1 \sin(G-f)]} . (\cos G - \sin\Delta_1 \sin f)$$

oder wenn man

$$c = \frac{\operatorname{tg} \varkappa_1 \cos f}{\cos(G+f)[1+\sin\Delta_1 \sin(G-f)]}$$

setzt,

$$a^2 = c . \sin\Delta_1 \cos f,$$
$$b^2 = c^2 . (\cos G - \sin\Delta_1 \sin f)^2.$$

Und hiemit wird die Mittelpunktsgleichung des Ellipsenschnittes

$$\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\chi_1 - \operatorname{tg}\varkappa_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{\xi_1 \sec\chi'}{a}\right)^2 = 1,$$

welche Gleichung unsere Bedingungsgleichung für $\vartheta = \vartheta_1$ umformen lässt in

$$\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\chi_1 - \operatorname{tg}\varkappa_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg}\chi_1}{\operatorname{tg}\chi} \; \frac{\xi \sec\chi}{\cos\Delta_1}\right)^2 = 1$$

und mit Rücksicht auf

$$\xi^2 = \sin^2\Delta_1 - \sin^2\chi$$

in

$$\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\chi_1 - \operatorname{tg}\varkappa_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg}\chi_1}{\operatorname{tg}\chi}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{tg}^2\Delta_1}{\cos^2\chi} - \frac{\operatorname{tg}^2\chi}{\cos^2\Delta_1}\right) = 1$$

oder

$$\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\chi_1 - \operatorname{tg}\varkappa_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg}\chi_1}{\operatorname{tg}\chi}\right)^2 [\operatorname{tg}^2\Delta_1 - \operatorname{tg}^2\chi] = 1,$$

welche durch Versuche leicht den einem gegebenen $\chi$ zugehörigen Wert von $\chi_1$ finden lässt, der der Bedingung

$$\vartheta = \vartheta_1$$

genügt.

Für die praktische Rechnung wird man sich bei der Kleinheit von $\Delta_1$ und $f_1$ manche Abkürzungen gestatten dürfen, auf die ich jedoch vorläufig nicht eingehe.

### Bestimmung des Winkels $G$.

Die nächste Aufgabe muss nun sein, den Winkel $G$ zu bestimmen, von dem die Phase abhängt.

Zu diesem Zwecke gehen wir zuvörderst vom geocentrischen Coordinatensystem der Ekliptik aus. Seien $\lambda$, $\beta$, $r$ Länge, Breite und Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt, letztere Größe in Einheiten des Erdäquatorhalbmessers, so sind die rechtwinkeligen geocentrischen Eklipticalcoordinaten des Mondes

$$x = r \cos\beta \cos\lambda$$
$$y = r \cos\beta \sin\lambda$$
$$z = r \sin\beta;$$

für die Sonne seien die analogen Größen $\lambda'$, $\beta'$, $r'$, $x'$, $y'$, $z'$, so dass man die entsprechenden Ausdrücke für die Sonne erhält, wenn man in vorstehenden Gleichungen sämmtliche Buchstaben mit Accenten versieht.

Dreht man nun das Coordinatensystem im Betrage des Winkels $l$ um die $Z$-Axe, so dass

$$x_1 = x \cos l + y \sin l = r \cos\beta \cos(\lambda - l),$$
$$y_1 = y \cos l - x \sin l = r \cos\beta \sin(\lambda - l),$$
$$z_1 = z \qquad = r \sin\beta$$

wird; hierauf im Betrage des Winkels $b$ um die $X$-Axe, so dass

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos b + z_1 \sin b = r \cos\beta \cos b \cos(\lambda - l) + r \sin\beta \sin b \\ y_2 &= y_1 \qquad = r \cos\beta \sin(\lambda - l) \\ z_2 &= z_1 \cos b - x_1 \sin b = r \sin\beta \cos b - r \cos\beta \sin b \cos(\lambda - l) \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

ist, so kann man durch schickliche Wahl von $l$ und $b$ jede gewünschte Lage erhalten.

Die Coordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ lassen sich auch in der Form

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= r \cos g \\ y_2 &= r \sin g \sin s \\ z_2 &= r \sin g \cos s \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

darstellen, worin $g$ den Winkel zwischen den Richtungen nach den Punkten $\lambda$, $\beta$ und $l$, $b$ vom Coordinatenursprung aus bezeichnet, $s$ den Winkel, welchen die durch $\lambda\beta$ und $lb$ und den Ursprung gelegte Ebene mit jener, durch die $Z$-Axe im Coordinatensystem das Ekliptik und den Punkt $\lambda\beta$ gelegten bildet, also mit anderen Worten, $s$ ist der Positionswinkel des durch die Punkte $\lambda\beta$ und $lb$ gelegten größten Kreises mit dem Breitenkreise durch $lb$.

Bestimmt man $l$ und $b$ einmal so, dass im Systeme $X_2$, $Y_2$, $Z_2$

$$\left.\begin{aligned} x'_2 - x_2 &= \rho \\ y'_2 - y_2 &= 0 \\ z'_2 - z_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

ist, wobei $\rho$, wie früher, die Distanz der Mittelpunkte von Sonne und Mond bezeichnet, so sind dies die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die $X_2$-Axe der Verbindungslinie von Sonnen- und Mondmittelpunkt parallel liegt.[1]

Durch diese Wahl liegen dann die Punkte $\lambda\beta$, $\lambda'\beta'$ und $lb$ in einer und derselben Ebene, die durch den Coordinatenursprung geht.

Aus den Bedingungsgleichungen 14) folgt, wenn die Werte aus 13) substituiert werden:

$$r' \cos g' - r \cos g = \rho,$$
$$r' \sin g' \sin s' - r \sin g \sin s = 0,$$
$$r' \sin g' \cos s' - r \sin g \cos s = 0,$$

woraus in erster Linie

$$tg\, s' = tg\, s,$$

also

$$s' - s = 0$$

oder

$$s' - s = 180$$

folgt.

[1] Man erhält dadurch das von Hansen in seiner Theorie der Sonnenfinsternisse angewendete Coordinatensystem, wobei seiner Bezeichnung nach die hier gebrauchte Größen werden: $x_2 = Z$, $y_2 = P$, $z_2 = Q$.

Der erste Wert gilt, wenn die Richtung nach $lb$ nicht zwischen die Richtungen nach $\lambda\beta$ und $\lambda'\beta'$ fällt, der zweite, wenn sie zwischen dieselben fällt. Da in unserem Falle durch die Wahl die Richtung nach $lb$ die $X_2$-Axe gibt und diese parallel sein soll zur Verbindungslinie der Mittelpunkte von Sonne und Mond, so können hier nur die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} s' &= s \\ r' \sin g' &= r \sin g \\ r' \cos g' - r \cos g &= \rho \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

gelten.

Wählt man $l$, $b$ so, dass das neue System $\xi\eta\zeta$ den Bedingungen genügt:

$$\begin{aligned} \xi_2' &= r' \\ \eta_2' &= 0 \\ \zeta_2 &= 0, \end{aligned}$$

d. h. also, dass die $\xi$-Axe mit der Verbindungslinie Sonne-Erdmittelpunkt zusammenfällt und setzt man

$$\begin{aligned} \xi_2 &= r \cos \gamma \\ \eta_2 &= r \sin \gamma \sin \sigma \\ \zeta_2 &= r \sin \gamma \cos \sigma, \end{aligned}$$

dann werden die Bedingungen

$$\begin{aligned} l &= \lambda' \\ b &= \beta' \end{aligned}$$

und hiemit ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \cos \gamma &= \sin \beta \sin \beta' + \cos \beta \cos \beta' \cos (\lambda - \lambda') \\ \sin \gamma \sin \sigma &= \cos \beta \sin (\lambda - \lambda') \\ \sin \gamma \cos \sigma &= \sin \beta \cos \beta' - \cos \beta \sin \beta' \cos (\lambda - \lambda') \end{aligned}\right\} \quad 16)$$

Da nun $\gamma$ der Winkel zwischen den beiden Richtungen $rr'$ ist, so muss auch

$$\cos \gamma = \frac{x_2' x_2}{rr'} + \frac{y_2' y_2}{rr'} + \frac{z_2' z_2}{rr'}$$

sein, d. h. mit Rücksicht auf 13)

$$\cos\gamma = \sin g' \sin g \cos(s'-s) + \cos g' \cos g,$$

woraus im Hinblick auf $s'-s = 0$

$$\gamma = g - g' \qquad \ldots 17)$$

folgt.

Aus den Gleichungen 15), 16). 17) ergeben sich noch die Systeme:

$$\left.\begin{aligned}
\cos g &= \sin\beta \sin b + \cos\beta \cos b \cos(\lambda - l)\\
\sin g \sin s &= \cos\beta \sin(\lambda - l)\\
\sin g \cos s &= \sin\beta \cos b - \cos\beta \sin b \cos(\lambda - l)\\[1ex]
\cos g' &= \sin\beta' \sin b + \cos\beta' \cos b \cos(\lambda' - l)\\
\sin g' \sin s &= \cos\beta' \sin(\lambda' - l)\\
\sin g' \cos s &= \sin\beta' \cos b - \cos\beta' \sin b \cos(\lambda' - l)\\[1ex]
\cos(\lambda' - l) &= \cos s \cos\sigma + \sin s \sin\sigma \cos g'\\
\cos\beta' \sin(\lambda' - l) &= \sin s \sin g'\\
\sin\beta' \sin(\lambda' - l) &= \cos s \sin\sigma - \sin s \cos\sigma \cos g'\\[1ex]
\sin b &= \sin\beta' \cos g' - \cos\beta' \sin g' \cos\sigma\\
\cos b \cos s &= \sin\beta' \sin g' + \cos\beta' \cos\gamma' \cos\sigma\\
\cos b \sin s &= \cos\beta' \sin\sigma\\[1ex]
\cos b \cos(\lambda' - l) &= \sin\beta' \cos\sigma \sin g' + \cos\beta' \cos g'\\
\cos b \sin(\lambda' - l) &= \sin\sigma \sin g'\\[1ex]
\sin\sigma \cos\beta' &= \sin s \cos b\\
\sin\sigma \sin\beta' &= \cos s \sin(\lambda' - l) + \sin s \sin b \cos(\lambda' - l)\\
\cos\sigma &= \cos s \cos(\lambda' - l) - \sin s \sin b \sin(\lambda' - l)\\[1ex]
\sin\beta &= \cos\gamma \sin\beta' + \sin\gamma \cos\sigma \cos\beta'\\
\cos\beta \cos(\lambda' - \lambda) &= \cos\gamma \cos\beta' - \sin\gamma \cos\sigma \sin\beta'\\
\cos\beta \sin(\lambda' - \lambda) &= \sin\gamma \sin\sigma,
\end{aligned}\right\} 18)$$

die sich übrigens auch aus der Betrachtung der sphärischen Dreiecke, und zwar zwischen Eklipticalpol, Sonne, Punkt der $X_3$-Axe, worin die Seiten

$$90-b,\ 90-\beta',\ g'$$

die gegenüberliegenden Winkel

$$180-\sigma,\ s''-s,\ \lambda'-l,$$

und zwischen Eklipticalpol, Sonne, Mond dessen Seiten

$$90-\beta,\ 90-\beta',\ \gamma$$

und gegenüberliegende Winkel

$$\sigma,\ -,\ \lambda-\lambda'$$

ableiten lassen.

Aus den Bedingungsgleichungen 15) folgt mit Bezug auf 17)

$$r' \sin g' = r \sin (g'+\gamma) \qquad r' \sin (g-\gamma) = r \sin g$$
$$r' \cos g' - r \cos (g'+\gamma) = \rho \qquad r' \cos (g-\gamma) - r \cos g = \rho,$$

woraus sich ergibt:

$$\sin g'\left(1-\frac{r}{r'}\cos\gamma\right) = \frac{r}{r'}\cos g' \sin\gamma,$$

$$\sin g\left(\cos\gamma-\frac{r}{r'}\right) = \cos g \sin\gamma,$$

$$\cos g'\left(1-\frac{r}{r'}\cos\gamma\right) + \frac{r}{r'}\sin g' \sin\gamma = \frac{\rho}{r'},$$

$$\cos g\left(\cos\gamma-\frac{r}{r'}\right) + \sin g \sin\gamma = \frac{\rho}{r'}.$$

Aus diesen Gleichungen zwischen $g'$ und $\gamma$ einestheils und $g$ und $\gamma$ andrerntheils,[1] erhält man durch die Substitution

[1] Substituiert man die Werte 19) in die fünfte der Gleichungen 18) und beachtet dabei die Gleichungen 18), so findet man die folgenden Relationen, welche Hansen in seiner Theorie der Sonnenfinsternisse angibt:

$$\rho_1 \cos b \sin (l-\lambda') = -r \cos\beta \sin (\lambda-\lambda')$$
$$\rho_1 \cos b \cos (l-\lambda') = r' \cos\beta' - r \cos\beta \cos (\lambda-\lambda')$$
$$\rho_1 \sin b = r' \sin\beta' - r \sin\beta,$$

von denen hier jedoch kein weiterer Gebrauch gemacht wird.

$$\frac{r}{r'} = n$$

die Formen

$$\left.\begin{aligned} \sin g' (1-n \cos\gamma) &= n \cos g' \sin\gamma \\ \sin g (\cos\gamma - n) &= \cos g \sin\gamma \\ \cos g'(1-n\cos\gamma) + n \sin g' \sin\gamma &= \frac{\rho}{r'} \\ \cos g (\cos\gamma - n) + \sin g \sin\gamma &= \frac{\rho}{r'} \end{aligned}\right\} \quad 19)$$

und

$$\operatorname{tg} g' = \frac{n \sin\gamma}{1-n\cos\gamma}, \qquad \operatorname{tg} g = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma - n},$$

$$\cos g'(1-n\cos\gamma) + n \sin g' \sin\gamma = \cos g(\cos\gamma - n) + \sin g \sin\gamma.$$

Hiemit lassen sich durch die Gleichungen 18) $l$ und $b$ berechnen, und zwar in folgender Weise. Aus 16) bestimmt sich $\gamma$ und $\sigma$, aus 19) $g'$ und aus den 18, 3) $b$ und $l-\lambda'$. Hier handelt es sich jedoch auch um die Bestimmung von $s$ und $g$, die sich durch 18, 1) ergibt.

Die Größen $x_2, y_2, z_2$ beziehen sich auf den Erdmittelpunkt, der in der Phase erscheinende Winkel $G$ jedoch auf die Erdoberfläche, somit ist noch auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen.

Seien $\rho_1$, $L$, $B$, Entfernung, Länge und Breite des Beobachtungsortes, so sind nach 12) die Coordinaten dieses Punktes im System $x_2 y_2 z_2$, nämlich $u_2 v_2 w_2$, gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \rho_1 [\sin B \sin b + \cos b \cos B \cos (L-l)] \\ v_2 &= \rho_1 \cos B \sin (L-l) \\ w_2 &= \rho_1 [\sin B \cos b - \sin b \cos B \cos (L-l)]. \end{aligned}\right\} \quad 20)$$

Hiemit werden die auf die Erdoberfläche ($LB$) bezogenen Mondcoordinaten

$$X_2 = x_2 - u_2$$
$$Y_2 = y_2 - v_2$$
$$Z_2 = z_2 - w_2$$

und lassen sich, wenn man analog wie früher jetzt die Größen $G$ und $S$ einführt und die Entfernung des Mondes vom Punkte $(LB)$ $r_1$ nennt, schreiben:

$$\left.\begin{aligned} r_1 \cos G &= X_2 \\ r_1 \sin G \sin S &= Y_2 \\ r_1 \sin G \cos S &= Z_2, \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

woraus sich der bei der Phasenberechnung erforderliche Winkel $G$ bestimmt.

Da in 20)

$$\sin b \sin B + \cos b \cos B \cos (L-l)$$

der Cosinus des Winkels ist zwischen dem geocentrischen Zenith und dem Punkte $lb$, so ist dieser Winkel nur um Größen von der Ordnung der Erdabplattung von der Zenithdistanz des Punktes $lb$ verschieden. Wir setzen deshalb

$$\begin{aligned} u_2 &= \rho_1 \sin h_1, \\ v_2 &= \rho_1 \cos h_1 \sin q_1, \\ w_2 &= \rho_1 \cos h \cos q_1. \end{aligned}$$

Hierin ist $h_1$ nur um Größen von der Ordnung der Abplattung von der Höhe des Punktes $lb$ verschieden. $q_1$ ist der Neigungswinkel der durch $LB$ und $lb$ gelegten Ebene gegen jene durch $l, b$ und die $Z_2$-Axe gelegten, somit der Positionswinkel des durch $LB$ und $lb$ gelegten größten Kreises gegen den Breitekreis am Punkte $l, b$.

Somit also wird

$$\left.\begin{aligned} r_1 \cos G &= r \cos g - \rho_1 \sin h_1 \\ r_1 \sin G \sin S &= r \sin g \sin s - \rho_1 \cos h_1 \sin q_1 \\ r_1 \sin G \cos S &= r \sin g \cos s - \rho_1 \cos h_1 \cos q_1 \end{aligned}\right\} \quad 22)$$

und weiter

$$\left.\begin{aligned} \sin h_1 &= \sin b \sin B + \cos b \cos B \cos (L-l) \\ \cos h_1 \sin q_1 &= \cos B \sin (L-l) \\ \cos h_1 \cos q_1 &= \cos b \sin B - \sin b \cos B \cos (L-l) \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

Setzt man analog für den Mond

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \sin\beta \sin B + \cos\beta \cos B \cos(L-\lambda) \\ \cos h \sin q &= \cos B \sin(L-\lambda) \\ \cos h \cos q &= \cos\beta \sin B - \sin\beta \cos B \cos(L-\lambda) \end{aligned}\right\} \quad 23)$$

und für die Sonne

$$\left.\begin{aligned} \sin H &= \sin\beta' \sin B + \cos\beta' \cos B \cos(L-\lambda') \\ \cos H \sin N &= \cos B \sin(L-\lambda') \\ \cos H \cos N &= \sin B \cos\beta' - \cos B \sin\beta' \cos(L-\lambda'), \end{aligned}\right\} \quad 24)$$

so sind auch $h$ und $H$ nur um Größen von der Ordnung der Abplattung von den Höhen von Sonne und Mond verschieden.

Es ist also $(90-h)$ der Winkel zwischen den Leitstrahlen $r$ und $\rho$. Demnach folgt, weil $r_1$ der Leitstrahl von $LB$ nach $\lambda\beta$ ist, aus dem von den drei Seiten $r$, $\rho$, $r_1$ gebildeten Dreieck

$$r_1^2 = r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1 \sin h,$$

anderentheils aus 22)

$$r_1^2 = r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_1 \{\cos g \sin h_1 + \sin g \cos h_1 \cos(q_1 - s)\},$$

somit resultiert

$$\sin h = \sin h_1 \cos g + \sin g \cos h_1 \cos(q_1 - s). \quad \ldots 25)$$

Analog muss deshalb mit entsprechender Buchstabenvertauschung auch

$$\sin H = \sin h_1 \cos g' + \sin g' \cos h_1 \cos(q_1 - \sigma) \quad \ldots 26$$

sein.

Aus der Verbindung der Gleichungen 25), 26) leitet sich ab

$$\sin h \sin g' - \sin H \sin g =$$
$$= \sin h_1 \sin(g'-g) + \sin g' \sin g \cos h_1 \{\cos(q_1 - s) - \cos(q_1 - s')\},$$

$$\sin h \cos g' - \sin H \cos g =$$
$$= \cos h_1 \{\sin g \cos g' \cos(q_1 - s) - \sin g' \cos g \cos(q_1 - s')\}$$

oder wegen

$$s = s'$$
$$g - g' = \gamma$$

$$\sin h \sin g' - \sin H \sin g = -\sin h_1 \sin \gamma,$$
$$\sin h \cos g' - \sin H \cos g = +\cos h_1 \sin \gamma \cos(q_1 - s).$$

Diese Gleichungen führen mit Rücksicht auf 18), 24) zu den Relationen

$$\sin h_1 = \sin H \cos g' - \sin g' \cos H \cos(N - \sigma),$$
$$\cos h_1 \cos(q_1 - s) = \sin H \sin g' + \cos g' \cos H \cos(N - \sigma),$$
$$\cos h_1 \sin(q_1 - s) = \cos H \sin(N - \sigma),$$
$$\sin h = \sin H \cos \gamma + \sin \gamma \cos H \cos(N - \sigma).$$

Um noch Länge und Breite des Zeniths durch die Rectascension $\mu$ (= Sternzeit) und Declination $\varphi'$ (geoc. Breite) auszudrücken, bedenke man, dass die Eklipticalcoordinaten des Zeniths

$$x = \rho_1 \cos B \cos L,$$
$$y = \rho \cos B \sin L,$$
$$z = \rho \sin B$$

die Äquatorialcoordinaten

$$x_1 = \rho_1 \cos \varphi' \cos \mu,$$
$$y_1 = \rho_1 \cos \varphi' \sin \mu,$$
$$z_1 = \rho_1 \sin \varphi'$$

sind und zwischen $xyz$ und $x_1 y_1 z_1$ die Beziehungen bestehen:

$$x = x_1,$$
$$y = y_1 \cos \varepsilon + z_1 \sin \varepsilon,$$
$$z = z_1 \cos \varepsilon + y_1 \sin \varepsilon,$$

wenn $\varepsilon$ die Schiefe der Ekliptik bezeichnet. Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \cos B \cos L &= \cos \varphi' \cos \mu \\ \cos B \sin L &= \sin \varphi' \sin \varepsilon + \cos \varphi' \cos \varepsilon \sin \mu \\ \sin B &= \sin \varphi' \cos \varepsilon - \cos \varphi' \sin \varepsilon \sin \mu. \end{aligned}\right\} \quad 27)$$

Im Hinblick auf 21) sollen diese Gleichungen so transformiert werden, dass der Winkel $S-s = \psi$ erscheint; hiebei werde zur Abkürzung $N-\sigma = W$ gesetzt. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned}
\sin h &= \sin H \cos\gamma + \sin\gamma \cos H \cos W = \\
&= \sin(H+\gamma) - 2\sin\gamma \cos H \sin^2\frac{1}{2}W \\
r_1 \cos G &= r\cos g - \rho_1\{\sin H \cos g' - \sin g' \cos H \cos W\} \\
r_1 \sin G \sin\psi &= -\rho_1 \cos H \sin W \\
r_1 \sin G \cos\psi &= r\sin g - \rho_1\{\sin H \sin g' + \cos g' \cos H \cos W\}
\end{aligned}\right\} \quad 28)$$

Setzt man hierin

$$\cos\psi = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\psi,$$

$$\sin\psi = 2\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\psi,$$

also

$$\cos\psi = 1 - \sin\psi \operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi,$$

dann wird

$$r_1 \cos G = r\cos g - \rho_1\{\sin H \cos g' - \sin g' \cos H \cos W\},$$

$$r_1 \sin G = r\sin g -$$
$$-\rho_1\left\{\sin H \sin g' + \cos g' \cos H \cos W + \cos H \sin W \operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi\right\}$$

und wegen $g-g' = \gamma$

$$r_1\cos(g-G) = r - \rho_1\left\{\sin H\cos\gamma + \sin\gamma\cos H\cos W + \right.$$
$$\left. + \sin g\cos H \sin W \operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi\right\},$$

$$r_1\sin(g-G) = -\rho_1\left\{\sin H\sin\gamma - \cos\gamma\cos H\cos W - \right.$$
$$\left. - \cos g\cos H\sin W\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi\right\}$$

oder wenn

$$\cos h \cos V = \sin H \sin \gamma - \cos \gamma \cos H \cos W \quad \ldots 29)$$

gesetzt wird, wo dann $\cos h \sin V = \cos H \sin W$

$$\left.\begin{aligned} r_1 \cos(g-G) &= r - \rho_1 \sin h - \rho_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \sin g \cos H \sin W \\ r_1 \sin(g-G) &= -\rho_1 \cos h \cos V + \rho_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \cos g \cos H \sin W. \end{aligned}\right\} \quad 30)$$

Der Winkel $\psi$, die Neigung der beiden Ebenen durch Sonne-, Mond- und Erdmittelpunkt einerseits, Sonne- und Mondmittelpunkt und Beobachtungsort anderseits, ist eine Function der Horizontalparallaxe.

Aus der Division der beiden Gleichungen für $r_1 \sin G \sin \psi$ und $r \sin G \cos \psi$ leitet sich leicht ab, wenn man berücksichtigt, dass $\cos g'$ gleich 1 gesetzt werden darf, da $g'$ im Maximum 8′ werden kann und $r \sin \pi = 1$, $\sin \pi \sin g' = \sin \pi' \sin g$, $\sin g' = \dfrac{\sin \pi' \sin \gamma}{\sin \pi - \sin \pi' \cos \gamma}$ ist

$$\rho_1 \cos H \sin W - \psi)(\sin \pi - \sin \pi' \cos \gamma) =$$
$$= (\rho_1 \sin \pi' \sin H - 1) \sin \gamma \sin \psi$$

oder

$$\sin \psi = \frac{\rho_1 \sin \pi \cos H \sin(\psi - W)}{(1 - \rho_1 \sin \pi' \sin H) \sin \gamma} -$$
$$- \frac{\rho_1 \sin \pi' \cos \gamma' \cos H \sin(\psi - W)}{(1 - \rho_1 \sin \pi' \sin H) \sin \gamma},$$

wofür wohl meist

$$\sin \psi = \rho_1 \sin \pi \cos H \sin(\psi - W) \operatorname{cosec} \gamma$$

wird geschrieben werden können wegen der Kleinheit von $\pi' = 8''$. Hieraus ist ersichtlich, dass $\psi$ wesentlich durch die Größe von $\gamma$ bedingt, selbst nahe 90° werden kann, falls $\pi = \gamma$ ist.

Setzt man, was unter diesen Verhältnissen sicher erlaubt, da für unsere Zwecke $\gamma$ stets größer als $\pi$ sein muss,

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \cos H \sin W = \sin \psi_1,$$

dann erhalten unsere Gleichungen für $g—G$ die Form:

$$\left.\begin{aligned} r_1 \sin\pi \cos(g-G) &= r\sin\pi - (\rho_1 \sin h + \rho_1 \sin\psi_1 \sin g)\sin\pi \\ r_1 \sin\pi \sin(g-G) &= (-\rho_1 \cos h \cos V + \rho_1 \sin\psi_1 \cos g)\sin\pi. \end{aligned}\right\} \quad 31)$$

Da nun wegen $n = \frac{\sin\pi'}{\sin\pi}$ und $\frac{\sin g}{\cos g} = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma - n}$ geschrieben werden darf:

$$\sin g = \sin\gamma + \frac{\sin\pi'}{\sin\pi}\,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

$$\cos g = \cos\gamma,$$

so erhält man

$$r_1 \sin\pi \cos(g-G) =$$
$$= 1 - \rho_1 \sin\pi \sin h - \rho_1 \sin\pi \sin\psi_1 \sin\gamma - \rho_1 \sin\pi' \sin\psi_1\,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

$$r_1 \sin\pi \sin(g-G) = -\rho_1 \sin\pi \cos h \cos V + \rho_1 \sin\pi \sin\psi_1 \cos\gamma.$$

Ist $\gamma \leqq 45°$, dann kann unbedingt das Glied mit $\sin\pi'$ vernachlässigt werden.

Es ist noch eine Relation aus $\sin h$ abzuleiten. Setzt man nämlich einmal $\cos W = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}W$, das anderemal $\cos W = 2\cos^2\frac{1}{2}W - 1$ und bedenkt, dass

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

so erhält man

$$\cos\frac{H+h+\gamma}{2}\sin\frac{h-H-\gamma}{2} = -\sin\gamma\cos H\sin^2\frac{1}{2}W,$$

$$\cos\frac{H+h-\gamma}{2}\sin\frac{h-H+\gamma}{2} = \sin\gamma\cos H\cos^2\frac{1}{2}W,$$

woraus sofort folgt

$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}W = \frac{\sin\frac{H+\gamma-h}{2}\cos\frac{H+h+\gamma}{2}}{\sin\frac{h-H+\gamma}{2}\cos\frac{H+h-\gamma}{2}},$$

aus welcher Gleichung ersichtlich, dass

$$H+\gamma \geqq h$$

und

$$h+\gamma \geqq H$$

sein muss, soll $W$ reelle Werte erhalten.

## Aufsuchung der günstigsten Verhältnisse.

Nach dem früher Gesagten werden die günstigsten Verhältnisse eintreten, wenn bei einer gegebenen Sonnenhöhe der kleinste Wert der Phase statthat, bei der überhaupt die Sichel wahrzunehmen ist, und gleichzeitig die Höhe des Mondes den größtmöglichsten Wert erreicht, welchen sie unter diesen Verhältnissen erlangen kann. Denn je kleiner die Phase, also der Winkel $\gamma$, desto größer ist die Intensität des von der Erde auf den Mond diffus reflectierten Lichtes und somit auch die Intensität des vom Monde rückreflectierten Lichtes. Anderntheils je größer die Höhe des Mondes, desto geringer ist die Extinction des vom Monde zur Erde gelangenden Lichtes.

Dementsprechend stellt sich die Frage: 1. Wann hat überhaupt bei einer gegebenen Phase der Mond seine größtmöglichste Höhe über dem Horizont, bei einer gegebenen Höhe der Sonne unter dem Horizont, und 2. Welches ist der kleinste Wert von der Phase beziehlich des Winkels $\gamma$, bei dem die größtmöglichste Höhe des Mondes einen bestimmten Betrag erreicht.

Zur Lösung der ersten Frage liefert die Gleichung:

$$\sin h = \sin H \cos \gamma + \sin \gamma \cos H \cos W =$$
$$= \sin (H+\gamma) - 2 \sin g \cos H \sin^2 \frac{1}{2} W$$

für die Mondhöhe die Antwort.

Aus derselben ist ersichtlich, dass $h$ sein Maximum bei einem gegebenen $\gamma$ erreicht, wenn $W$ ein Minimum wird, wobei zu berücksichtigen, dass $W$ von der Sonnenhöhe unter dem Horizont abhängt.

Da nun $W = N - \sigma$ ist und $\sigma$ nach der Definition dieser Größe nahe bei 90° sein wird, so ist, wenn $\sigma = 90 - \sigma_1$ gesetzt wird, $W = N + \sigma - 90°$. Da nun $N$, die Sonne im Westen unter dem Horizonte vorausgesetzt, nicht viel sich von 90° unterscheiden soll, so muss $N$ ein Maximum werden. Differenziert man zu diesem Zwecke die Gleichungen 26), nachdem die Sonnenbreite = 0 gesetzt wurde, so ergibt sich:

$$-\sin B \cos L \frac{dB}{dt} - \cos B \sin L \frac{dL}{dt} = -\cos \varphi' \sin \mu \frac{d\mu}{dt},$$

$$-\sin B \sin L \frac{dB}{dt} + \cos B \cos L \frac{dL}{dt} = +\cos \varphi' \cos \varepsilon \cos \mu \frac{d\mu}{dt},$$

$$\cos B \frac{dB}{dt} = -\cos \varphi' \sin \varepsilon \cos \mu \frac{d\mu}{dt},$$

woraus sich mittels der Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \sin \mu &= \sin k \sin K, \\ \cos \mu \cos \varepsilon &= \cos k \cos K, \\ \cos \mu \sin \varepsilon &= \cos k \end{aligned}\right\} \quad 32a)$$

leicht ableitet

$$\left.\begin{aligned} -\sin B \cos (L-\lambda') \frac{dB}{dt} - \cos B \sin (L-\lambda') \frac{dL}{dt} &= \\ = -\cos \varphi' \sin k \sin (K-\lambda') \frac{d\mu}{dt}&, \\ -\sin B \sin (L-\lambda') \frac{dB}{dt} + \cos B \cos (L-\lambda') \frac{dL}{dt} &= \\ = +\cos \varphi' \sin k \cos (K-\lambda') \frac{d\mu}{dt}&, \\ \cos B \frac{dB}{dt} = -\cos \varphi' \cos k \frac{d\mu}{dt}&. \end{aligned}\right\} \quad 32)$$

Differenziert man die Geichungen 24), nachdem man zuvor die Sonnenbreite Null gesetzt hat, so wird wegen der Constanz von $H$

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\sin B\cos(L-\lambda')\frac{dB}{dt} - \cos B\sin(L-\lambda')\left[\frac{dL}{dt}-\frac{d\lambda'}{dt}\right],\\
\cos H\cos N\frac{dN}{dt} &= -\sin B\sin(L-\lambda')\frac{dB}{dt} + \\
&\qquad + \cos B\cos(L-\lambda')\left[\frac{dL}{dt}-\frac{d\lambda'}{dt}\right],\\
-\cos H\sin N\frac{dN}{dt} &= \cos B\frac{dB}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad 33)$$

und aus dem Vergleiche von 32) und 33), wenn man dabei 24) berücksichtigt

$$\cos H\sin N\frac{d\lambda'}{dt} = \cos\varphi'\sin k\sin(K-\lambda')\frac{d\mu}{dt},$$

$$\sin H\frac{d\lambda'}{dt} + \cos H\cos N\frac{dN}{dt} = \cos\varphi'\sin k\cos(K-\lambda')\frac{d\mu}{dt},$$

$$\cos H\sin N\frac{dN}{dt} = \cos\varphi'\cos K,$$

woraus sich ergibt

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{dN}{dt}\operatorname{tg} k\sin(K-\lambda')$$

oder

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\operatorname{cotg} k}{\sin(K-\lambda')}\frac{d\lambda'}{dt},$$

Da $\frac{d\lambda'}{dt}$ nie Null sein kann, so ist der Bedingung $\frac{dN}{dt} = 0$ nur zu genügen, wenn

$$\frac{\operatorname{cotg} k}{\sin(K-\lambda')} = 0$$

ist. — $K$ kann nun im allgemeinen für unseren Fall nicht gleich $\lambda'$ oder $180° + \lambda'$ sein, weil $(\mu-\lambda')$, beziehlich $(\mu - A)$ der Stundenwinkel nahe bei 90° sein muss, weil die Sonnenhöhe unterm Horizonte. Im Gegentheile wird vielmehr $K-\lambda'$ nahe bei 90° sein. Dieser Bedingungsgleichung kann daher nur durch

$$k = 90°,$$

oder

$$k = 270°$$

genügt werden, wovon der eine Wert dem Maximum, der andere dem Minimum entspricht.

Aus den Gleichungen 32*a*) folgt hieraus

$$k = 90°,\quad \mu = 90°,\quad K = 90°,\quad \mu = 270°,\quad K = 270°,$$
$$k = 270\quad \mu = 270\quad K = 90\quad \mu = 90\quad K = 270$$

und daher aus den 27) für $\mu = 90°$:

$$L = 90,\qquad B = \varphi' - \varepsilon;$$

für $\mu = 270°$:

$$L = 90,\qquad B = \varphi' + \varepsilon.$$

Damit wird aber für

$$\mu = 90°:\qquad \sin H = \cos(\varphi' - \varepsilon)\sin\lambda'_1,$$
$$\mu = 270°:\qquad \sin H = \cos(\varphi' + \varepsilon)\sin\lambda'_2.$$

Die Sonne soll nun im Westen, und zwar unter dem Horizonte stehen, sohin muss $H$ negativ und der Stundenwinkel $\mu - A$ nahe bei 90° sein, somit muss wegen

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg}\lambda'\cos\varepsilon$$

auch $\mu - \lambda'$ nahe bei 90° sein.

Daraus folgt für

$\mu = 90°$: $\lambda'$ nahe bei 0° (im IV. Quadranten),
$\mu = 270°$: $\lambda'$ nahe bei 180° (im III. Quadranten).

Aus den Gleichungen 24) ergibt sich weiter für

$$\mu = 90°:\qquad \cos H\sin N_1 = \cos(\varphi' - \varepsilon)\cos\lambda'_1,$$
$$\cos H\cos N_1 = \sin(\varphi' - \varepsilon),$$
$$\mu = 270°:\qquad \cos H\sin N_2 = \cos(\varphi' + \varepsilon)\cos\lambda'_2,$$
$$\cos H\cos N_2 = \sin(\varphi' + \varepsilon),$$

d. h. dass $N_1$ im I. Quadranten, $N_2$ im IV. Quadranten liegen muss.[1]

[1] $\varphi'$ positiv gedacht.

Setzt man also

$$\lambda_1' = -\lambda_1'',$$
$$\lambda_2' = 180+\lambda_2'',$$
$$H = -H_1,$$
$$N_1 = N_1',$$
$$N_2 = -N_2',$$

so wird

$$\sin\lambda_1'' = \frac{\sin H_1}{\cos(\varphi'-\varepsilon)} \qquad \begin{array}{l}\cos H \sin N_1' = \cos(\varphi'-\varepsilon)\cos\lambda_1'',\\ \cos H \cos N_1' = \sin(\varphi'-\varepsilon),\end{array}$$

$$\sin\lambda_2'' = \frac{\sin H_1}{\cos(\varphi'+\varepsilon)} \qquad \begin{array}{l}\cos H \sin N_2' = \cos(\varphi'+\varepsilon)\cos\lambda_2'',\\ \cos H \cos N_2' = \sin(\varphi'+\varepsilon),\end{array}$$

wo demnach $N_1'$ und $N_2'$ stets im I. Quadranten zu nehmen sind, ebenso wie $\lambda_1''$ und $\lambda_2''$.

Weil

$$\cos(\varphi'-\varepsilon) > \cos(\varphi'+\varepsilon),$$
$$\lambda_1'' < \lambda_2'',$$

infolgedessen auch

$$\cos\lambda_1'' > \cos\lambda_2'',$$

so ist somit

$$N_1' > N_2,$$

d. h. also $N_1'$ und somit $N_1$ das Maximum von $N$.

Nach dem früher entwickelten Ausdrucke für die Phase 10,6) und für den Unterschied zwischen $g$ und $G$ in 31) ersieht man in Zusammenhalt mit dem Ausdrucke für $h$ 28), dass dieselbe mit vom Winkel $\gamma$ abhängt. Schreibt man, die Sonnenbreite wieder Null setzend, da sie im Maximum nicht 1″ überschreitet,

$$\cos\gamma = \cos\beta\cos(\lambda-\lambda'),$$

so folgt aus dieser Gleichung sofort, da $\beta$ in den Grenzen

$$-i \leqq \beta \leqq +i$$

eingeschlossen ist, wo $i$ die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik bedeutet, dass für ein bestimmtes $\lambda-\lambda'$ die Größe des Winkels $\gamma$ von der Mondbreite abhängt, also unter diesen Verhältnissen eines Maximums oder Minimums fähig ist. $\lambda-\lambda'$ kann hier als Maß der Zeit und im gewissen Sinne auch als

Maß der Phase betrachtet werden. Setzt man nun $\gamma = \lambda - \lambda' + p$, so lässt sich die Gleichung für $\gamma$ schreiben

$$\cos(\lambda - \lambda' + p) = \cos(\lambda - \lambda') - 2\sin^2\frac{1}{2}\beta\cos(\lambda - \lambda')$$

oder

$$\sin\left(\lambda - \lambda' + \frac{p}{2}\right)\sin\frac{p}{2} = \sin^2\frac{1}{2}\beta\cos(\lambda - \lambda'), \qquad \ldots 34)$$

wofür mit hinreichender Genauigkeit, wenn $(\lambda - \lambda')$ nicht zu klein ist, gesetzt werden darf

$$\sin\frac{p}{2} = \sin^2\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{cotg}\,(\lambda - \lambda').$$

Im Falle $\lambda - \lambda' = 0$ wird, ist $\frac{p}{2} = \frac{\beta}{2}$, wie der strenge Ausdruck 34) zeigt. Deswegen ist für sehr kleine Werte von $(\lambda - \lambda')$ zu setzen

$$\sin^2\frac{p}{2} = \sin^2\frac{1}{2}\beta\cos(\lambda - \lambda').$$

Aber selbst für sehr kleine Werte $[\lambda - \lambda' = 6°]$ beträgt der Unterschied nur 0°005, was wohl zu vernachlässigen.

Im Maximum also wird $p = \beta = 5° 146$. Weil aber die Mondbewegung in einem Tage 12° und etwas beträgt, so kann der Unterschied von $\beta$ gegen $\lambda - \lambda' = \Gamma$ nur circa einen halben Tag betragen. Es ist sonach $\lambda - \lambda' = \Gamma$ als Maß für die Phase genommen, im Falle des Minimums von $\gamma$ dieser Wert im Maximum nur um 5° 1 von $\lambda - \lambda'$ verschieden. Dieser Unterschied kommt kaum in Betracht, da bei einer Distanz von 5° der Mond allzu nahe bei der Sonne steht und deshalb seine Phase viel zu klein ist, um bemerkt zu werden. Wir haben uns daher wegen der Höhe $h$ nur um die Größe des Winkels $\sigma$ zu bekümmern. Dieser Winkel ist definiert durch

$$\mathrm{tg}\,\sigma = \mathrm{cotg}\,\beta\sin(\lambda - \lambda').$$

Setzt man

$$\sigma = 90° - \sigma_1,$$

so wird

$$\mathrm{cotg}\,\sigma_1 = \mathrm{cotg}\,\beta\sin(\lambda - \lambda') = \mathrm{cotg}\,\beta\sin\Gamma,$$

woraus folgt, dass bei einem bestimmten $\Gamma$, wenn $\operatorname{tg} J \sin \Gamma = \operatorname{tg} i$ gesetzt wird, $\sigma_1$ zwischen den Grenzen

$$-J \leqq \sigma_1 \leqq +J$$

eingeschlossen sein muss. Das Minimum von $\sigma_1$ ist somit $-J$, das Maximum $+J$. Da ferner, wenn ☊ die Länge des Mondknotens bedeutet,

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} i \sin (\lambda - ☊)$$

ist, so sieht man, dass die Werte $+i$ und $-i$ eintreten, wenn der Mond um 90° vom auf- oder absteigenden Knoten absteht. Der Wert $\sigma$ ist somit für ein bestimmtes $\Gamma$ zwischen den Grenzen

$$90 + J \geqq \sigma \geqq 90 - J$$

eingeschlossen. Demnach müsste $N$ einen Wert $N'$ erhalten, wenn dies möglich ist, der zwischen die Grenzen fällt:

$$90 + J \geqq N' \geqq 90 - J,$$

damit der Winkel $W$ ein Minimum sei.

Den früheren Untersuchungen zufolge haben wir aber für den Maximalwert von $N$ gefunden:

$$\operatorname{tg} N' = \operatorname{cotg} (\varphi' - \varepsilon) \cos \lambda''.$$

Indem nun $\lambda''$ ein essentiell positiver Wert ist, der durch die Gleichung

$$\sin \lambda'' = \frac{\sin H_1}{\cos (\varphi' - \varepsilon)}$$

definiert wird, wo $H_1$ absolut, also positiv zu nehmen, so hängt die Größe von $N'$ speciell von dem Betrage der Differenz $(\varphi' - \varepsilon)$ ab. Denn setzt man

$$N' = 90° - P,$$

so wird

$$\operatorname{cotg} P = \operatorname{cotg} (\varphi' - \varepsilon) \cos \lambda'',$$

also im Maximum für $\lambda' = 0$, d. i. $H = 0$ ist

$$P = \varphi' - \varepsilon.$$

Je kleiner demnach die Differenz $\varphi'-\varepsilon$ ist, desto näher wird der Wert von $N'$ an 90° sein. Es ergeben sich somit für $\varphi'-\varepsilon$ die Grenzen

$$+J \geqq (\varphi'-\varepsilon) \geqq -J,$$

in denen es überhaupt liegen muss, oder wenn $\varphi'$ genommen wird

$$J+\varepsilon \geqq (\varphi') \geqq \varepsilon-J,$$

damit $N'$ nahe an 90° wird, weil ja $H_1$ eine gegebene Größe ist. Soll $\varphi'$ positiv bleiben (d. h. auf die nördliche Hemisphäre beschränkt sein), so ist der größte Wert, den $J$ annehmen kann, $J = \varepsilon$. Setzt man demnach $\varepsilon = 23\overset{\circ}{.}5$, so wird

$$\Gamma = \lambda - \lambda' = 13\overset{\circ}{.}05,$$

und wir erhalten sonach die Grenzen

$$47\overset{\circ}{.}0 \geqq \varphi' \geqq 0.$$

Da nun andererntheils $\Gamma$ nicht kleiner als 10°, im Gegentheile sogar größer als 10° sein muss, damit der Mond nicht zu nahe bei der Sonne steht (beachte Sehungsbogen 10°), so ist die weitere Grenze, bei der $\gamma$ ein Minimum werden kann, gegeben durch $J = 27\overset{\circ}{.}41$, und wir erhalten daher für $\varphi'$ die Grenzen

$$50\overset{\circ}{.}9 \geqq \varphi' \geqq 0.$$

Das absolute Maximum für eine bestimmte Phase kann demnach bei $h$ eintreten, wenn $\varphi$ zwischen 0 und 50°9 Nordbreite fällt und zur Zeit der angenommenen Phase die Länge der Sonne bei 0° eigentlich noch im IV. Quadranten liegt, der Mond jedoch nahezu 90° vom ab- oder aufsteigenden ☊ in der Richtung der Bewegung entfernt ist.

Für ein bestimmtes $\varphi'$ aber ist der kleinste Wert, den $P$ annehmen kann, $P = \varphi'-\varepsilon$, soll dann jedoch $\sigma_1 - P = W$ ein Minimum oder Null werden, so folgt weiter, dass der größte Wert, den $\beta$ überhaupt annehmen kann, gegeben durch

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\varphi'-\varepsilon)\sin\Gamma.$$

Es hängt also der größte Wert von $\beta$ mit von der Phase $\Gamma$ ab. Nun muss aber $\beta$ in den Grenzen $\pm 5\overset{\circ}{.}1$ eingeschlossen

sein, es ergibt sich somit daraus eine Bedingung für den Winkel Γ. Da nun aber Γ nicht kleiner werden kann als 10°, wie bereits angedeutet, so ist der kleinste mögliche Wert von β, damit $h$ noch ein Maximum und γ ein Minimum wird, gegeben durch

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\varphi'-\varepsilon)\sin 10^\circ,$$

woraus folgt, dass bei einem $\varphi' = 48^\circ$ $\beta = +4^\circ 5$ sein muss.

Ist hiedurch bereits der Größe der Phase eine untere Grenze gesetzt, so soll nunmehr eine weitere Discussion diesbezüglich platzgreifen. Setzen wir die günstigsten Bedingungen für $h$ voraus, nämlich $W = 0$, also $h = H+\gamma$, $V = 180^\circ$, so kann, da bei $W = 0$ auch $\psi_1 = 0$ sein muss, statt 30) geschrieben werden

$$\operatorname{tg}(g-G) = \frac{\rho_1 \sin\pi\cos(H+\gamma)}{1-\rho_1\sin\pi\sin(H+\gamma)}$$

oder, in die bekannte Reihe entwickelt,

$$g-G = \rho_1\sin\pi\cos(H+\gamma) + \frac{1}{2}(\rho_1\sin\pi)^2\sin 2(H+\gamma),$$

wobei die dritte Potenz, die im Maximum 0'5 gibt, zu vernachlässigen ist.

Weil nun $\sin\pi' : \sin\pi$ im Maximum nur 8′ werden kann, so darf statt

$$\sin(g-\gamma) = \frac{\sin\pi'}{\sin\pi}\sin g$$

gesetzt werden

$$\sin(g-\gamma) = \frac{\sin\pi'}{\sin\pi}\sin\gamma.$$

Entwickelt man hier $g-\gamma = \operatorname{arc}\sin\left(\frac{\sin\pi'}{\sin\pi}\sin\gamma\right)$ nach der arc sin-Reihe, so kann schon mit dem ersten Gliede abgebrochen werden, da das zweite im Maximum 0'0005 geben kann und man erhält

$$g-\gamma = \frac{\sin\pi'}{\sin\pi}\sin\gamma.$$

Hiedurch wird

$$G = \gamma + \frac{\sin \pi'}{\sin \pi} \sin \gamma - \rho_1 \sin \pi \cos (H+\gamma) + \\ + \frac{1}{2} (\rho_1 \sin \pi)^2 \sin 2 (H+\gamma)$$

oder

$$G = \gamma + \frac{n \sin \gamma}{\text{arc } 1^\circ} - \frac{\rho_1 \sin \pi}{\text{arc } 1^\circ} \cos (H+\gamma) + \\ + \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 \sin \pi)^2}{\text{arc } 1^\circ} \sin 2 (H+\gamma).$$

Für den Wert $r_1$ ergibt sich aus

$$r_1 \sin \pi = \frac{1 - \rho_1 \sin \pi \sin (H+\gamma)}{\cos (g-G)} = \\ = [1 - \rho_1 \sin \pi \sin (H+\gamma)] \left[1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} (g-G)\right]^{-1}$$

$$r_1 \sin \pi = [1 - \rho_1 \sin \pi \sin (H+\gamma)] \left[1 + 2 \sin^2 \frac{1}{2} (g-G)\right].$$

Hierin kann unbedingt das Glied $\sin^2 \frac{1}{2} (g-G)$ übergangen werden, wie aus der früheren Gleichung 31 *a*) erhellt, so dass demnach

$$r_1 \sin \pi = 1 - \rho_1 \sin \pi \sin (H+\gamma)$$

wird. Ist wieder der Mondhalbmesser in Theilen des Erdradius $s$, so ist bekanntlich $r_1 \sin \Delta_1 = s$, daher $r_1 \sin \pi = \frac{s \sin \pi}{\sin \Delta_1}$ oder

$$\sin \Delta_1 = \frac{s \sin \pi}{r_1 \sin \pi} = \frac{s \sin \pi}{1 - \rho_1 \sin \pi \sin (H+\gamma)}.$$

Nennt man den geocentrischen Mondhalbmesser im Winkelmaße $\Delta$, so ist $r \sin \Delta = s$ und wegen $r \sin \pi = 1$

$$\sin \Delta = s \sin \pi,$$

weswegen wir erhalten:

$$\sin \Delta_1 = \sin \Delta + \sin \Delta \rho_1 \sin \pi \sin (H+\gamma),$$

oder, da $\Delta$ im Maximum 17′ wird,

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta \rho_1 \sin \pi \sin (H+\gamma).$$

Die Phase ist aber bedingt durch die Größe $s_2 = \frac{\operatorname{tg} \varkappa_1}{\operatorname{tg} \Delta_1}$. Bei der Kleinheit von $\varkappa_1$ und $\Delta_1$, im Maximum 17′, darf der Cosinus mit der Einheit vertauscht und

$$s_2 = \frac{\sin \varkappa_1}{\sin \Delta_1}$$

gesetzt werden, woraus sofort mit Rücksicht auf Gleichung 6) folgt:

$$s_2 = \cos (G+f-\varkappa_1).$$

Setzt man nun $s_2 = \cos C$, so ist:

$$C = G+f-\varkappa_1,$$

und hier kann statt $\varkappa_1$ mit Rücksicht auf $s_2 = \frac{\sin \varkappa_1}{\sin \Delta_1} = \frac{\varkappa_1}{\Delta_1}$ geschrieben werden:

$$C = G+f-\Delta_1 \cos C.$$

Substituiert man hierin den Wert von $G$ und $\Delta$, dann wird:

$$C = \gamma+f-\Delta \cos C - \Delta \cos C \rho_1 \sin \pi \sin (H+\gamma) +$$

$$+ \frac{n}{\operatorname{arc} 1^\circ} \sin \gamma - \frac{\rho_1 \sin \pi}{\operatorname{arc} 1^\circ} \cos (H+\gamma) + \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 \sin \pi)^2}{\operatorname{arc} 1^\circ} \sin 2(H+\gamma)$$

oder

$$C = \gamma+f-\Delta+2\Delta \sin^2 \frac{1}{2} C + \frac{n}{\operatorname{arc} 1^\circ} \sin \gamma -$$

$$- \frac{\rho_1 \sin \pi}{\operatorname{arc} 1^\circ} [\cos (H+\gamma) + \sin \Delta \cos C \sin (H+\gamma)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 \sin \pi)^2}{\operatorname{arc} 1^\circ} \sin 2(H+\gamma),$$

wofür wegen der Kleinheit von $f$, im Maximum 16', zu setzen erlaubt ist

$$C = \gamma + f - \Delta + 2\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\gamma + \frac{n \sin \gamma}{\text{arc } 1^\circ} -$$

$$- \frac{\rho_1 \sin \pi}{\text{arc } 1^\circ} [\cos (H+\gamma) + \sin \Delta \cos \gamma \sin (H+\gamma)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 \sin \pi)^2}{\text{arc } 1^\circ} \sin 2(H+\gamma).$$

Da bei einem $H = 18^\circ$ und $\gamma = 48$ die beiden Glieder, nämlich

$$(R) = - \frac{\rho_1 \sin \pi}{\text{arc } 1^\circ} \sin \Delta \cos \gamma \sin (H+\gamma) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(\rho_1 \sin \pi)^2}{\text{arc } 1^\circ} \sin 2(H+\gamma)$$

den Wert von 21ʻ3 im Maximum erreichen, wobei das erste dieser Glieder 6ʻ3, das zweite 27ʻ6 wird, kann man dieselben wohl meist, mindestens aber das erste übergehen. Um den Wert $f$ durch die bekannten Größen zu ersetzen, bedenke man, dass

$$\sin f = \frac{s' - s}{\rho} = \frac{s' - s}{r' - r \cos g} = \frac{r' \sin \Delta' - r \sin \Delta}{r' - r \cos g}.$$

Hiefür kann man sofort, nur Glieder höherer Ordnung vernachlässigend,

$$\sin f = \frac{\sin \Delta' - n \sin \Delta}{1 - n \cos \gamma}$$

setzen oder

$$f = \Delta' - n\Delta + n\Delta' \cos \gamma,^{1} \qquad \ldots 35)$$

worin das Glied $n\Delta' \cos \gamma$ im Maximum 2ʻ4 ausgibt, und, wenn nicht $\gamma = 90^\circ$, sich nahe mit $n\Delta$ aufhebt.

---

[1] Für Sonnenfinsternisse wird daher

$$f = \Delta' - n\Delta + n\Delta'.$$

Unser Wert für $C$ wird somit

$$C = \gamma + \Delta' - n\Delta + n\Delta' \cos\gamma + 2\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\gamma - \Delta +$$

$$+ \frac{n \sin\gamma}{\text{arc } 1^\circ} - \frac{\rho_1 \sin\pi}{\text{arc } 1^\circ} \cos(H+\gamma) -$$

$$-\Delta\rho_1 \sin\pi \sin(H+\gamma)\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{(\rho_1 \sin\pi)^2}{\text{arc } 1^\circ} \sin 2(H+\gamma).$$

In den meisten Fällen genügt es wohl, sich für $C$ mit der Bogenminute zu begnügen, dann kann

$$C = \gamma + 2\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\gamma + \frac{n \sin\gamma}{\text{arc } 1^\circ} - \frac{\rho_1 \sin\pi}{\text{arc } 1^\circ} \cos(H+\gamma) \qquad \ldots 36)$$

angenommen werden. Die Phase in Theilen des Mondhalbmessers ist dann mit Rücksicht auf Gleichung 10)

$$F = 2\sin^2 \frac{1}{2} C,$$

in Theilen des Monddurchmessers

$$F' = \sin^2 \frac{1}{2} C \qquad \ldots 37)$$

Hieraus lässt sich die Phase für ein bestimmtes $\gamma$, beziehlich $C$ berechnen und umgekehrt.

Um jedoch die kleinstmöglichste Sichel kennen zu lernen, kann man sich nur auf die praktische Erfahrung zunächst stützen und sehen, wie dieselbe mit der Theorie stimmt. Aus der Formel 37) ergibt sich für eine Phase, bei der die größte Breite $F$ der Mondsichel in Theilen des Mondhalbmessers beträgt:

| | | |
|---|---|---|
| $F_1 = 0 \cdot 001$, | der Winkel | $C_1 = 2^\circ 562$ |
| $F_2 = 0 \cdot 005$ | | $C_2 = 5 \cdot 732$ |
| $F_3 = 0 \cdot 01$ | | $C_3 = 8 \cdot 110$ |
| $F_4 = 0 \cdot 05$ | | $C_4 = 18 \cdot 196$ |
| $F_5 = 0 \cdot 10$ | | $C_5 = 25 \cdot 842$ |
| $F_6 = 0 \cdot 15$ | | $C_6 = 31 \cdot 788$ |
| $F_7 = 0 \cdot 20$ | | $C_7 = 36 \cdot 870.$ |

Aus diesen Werten ist ersichtlich, da fünf Hundertel des Mondhalbmessers sicherlich an den Grenzen der Wahrnehmbarkeit liegen, welche für ein unbewaffnetes Auge einen auffälligen Eindruck macht (denn der Gesichtswinkel, unter dem diese Größe erscheint, beträgt 48″),[1] dass ein Winkel von 18° unter der unteren Grenze liegt. Nimmt man also 0·05 als unterste, gewiss zu tief gegriffene Grenze, dann ist der Winkel $C = 18^\circ 2$. Diesen Wert können wir für diese Schätzung mit dem Winkel $\gamma$ identificieren, woraus sich ergibt, dass im günstigsten Falle (nämlich $W = 0$) die Höhe des Mondes über dem Horizonte

$$h = 18^\circ 2 + H.$$

Nimmt man nun für $H$ jene Stellungen der Sonne, welche der bürgerlichen und astronomischen Dämmerung zukommen, d. h. $H = -6^\circ$ und $H = -18^\circ$, so ist dementsprechend die Höhe des Mondes

$$h = 12^\circ 2 \qquad h = 0^\circ,$$

d. h. der Mond geht mit dem Ende der astronomischen Dämmerung bereits unter und hat am Ende der bürgerlichen Dämmerung nur eine Höhe von 12°2 oder 24 Monddurchmessern. Es ist also unwahrscheinlich, dass man im allgemeinen einen solch außerordentlich schmalen Lichtfaden unter diesen Verhältnissen wahrnehmen wird, wie ihn die Mondsichel unter diesen Bedingungen darstellt.

Also diesen gewiss zu tief gegriffenen Wert als unterste Grenze vorausgesetzt, kann bei der Bewegung des Mondes, zufolge welcher der Winkel $\gamma$ von Tag zu Tag um 13° zunimmt, nur dann eintreten, wenn die Zeit der Conjunction des Mondes mit der Sonne auf Mittag fällt zur Zeit der Äquinoctien, etwa 2 Stunden nach Mittag zur Zeit des Sommersolstitiums und etwa 2 Stunden vor Mittag zur Zeit des Wintersolstitiums. Es tritt dann diese Phase an dem jenem Tage unmittelbar folgenden Tage ein, an welchem der Moment der Conjunction statthatte.

Somit ist bei dieser gewiss zu gering angenommenen Sichelbreite die Sichtbarkeit des Mondes auf den zweiten Tag

---

[1] Ein menschliches Haar, in deutlicher Sehweite gehalten, bedeckt 20″.

anzusetzen. Man wird deshalb in den meisten Fällen den thatsächlich möglichen Verhältnissen nahe kommen, wenn man sagt: Die erste Sichtbarkeit der Mondessichel falle auf den dritten Tag des synodischen Mondmonates, den Tag der Conjunction als ersten Tag gerechnet.[1]

Hiemit stimmen aber auch die Angaben der Chinesen überein, welche aus praktischen Erfahrungen abgeleitet.

Im Wörterbuche Kang-hi findet sich der Charakter *fói*, 朏 oder 朏 geschrieben, welcher aus »Mond« und »Herauskommen« besteht, nach dem Schuo-wen definiert, als 月末盛之明, d. h., »wenn die Helligkeit des Mondes sich noch nicht in einem vollkommenen Zustande befindet«; wozu noch in dem Commentar zu einer weiteren Stelle gesagt wird: 朏明月三日明生之名, d. h. »*fói* ist der Name für die Helligkeit des Mondes, wenn er am dritten Tage erglänzend sichtbar wird (wörtlich geboren wird, entsteht)«. Das Wu-fang yuen-yin definiert: 朏、月初生末盛明也, d. h. »*fói* bedeutet den Mond, wenn er sichtbar zu werden (lit. zu entstehen) beginnt und noch nicht in voller Helligkeit glänzt«.

Aus diesem geht hervor, dass der Hauptsache nach die Sichtbarkeit des Mondes nach der Conjunction von den Chinesen aus praktischen Erfahrungen auf den dritten Tag angesetzt wird. Zur Schätzung dieser Größe konnten sie aber bei ihren beständigen Beobachtungen leicht gelangen, wenn sie wiederholt die Zeit notierten, welche zwischen einer sichtbaren Sonnenfinsternis und dem ersten Sichtbarwerden der Mondsichel verstreicht.

Man wird sonach für die praktischen Fälle als obere Grenze des Winkels $C = 26°$ annehmen müssen. Aus der Art der Function für die Phase erhellt nun aber auch, dass bei dieser oberen Grenze Änderungen des Winkels $C$ von 5° fast ohne Einfluss sind, dass sonach der Unterschied der Mond-

[1] Sehr sorgfältige Angaben gibt bereits Maimonides, nach welchen es einer genauen Untersuchung bedarf, ob die Mondsichel sichtbar ist, wenn der Wert von $\Gamma$ die Grenzen $9° \leqq \Gamma \leqq 24°$ hat. Siehe diese Abh., Bd. 66, S. 459. C. v. Littrow, Zur Kenntnis der kleinsten sichtbaren Mondphasen.

breite von 5° und 0° nahezu belanglos für die Breite der Mondsichel unter diesen Verhältnissen ist. Denn bei einem Werte des Winkels $C$ von beziehlich 20°, 25°, 30° beträgt die größte Sichelbreite 0·06, 0·09, 0·13. Es ist daher auch der Einfluss der Mondbreite auf das Minimum des Winkels $\gamma$ für die Größe der Phase nahezu belanglos, und wir erhalten daher als unerlässliche Bedingungen für eine auffallende Erscheinung des durch das Erdlicht erhellten, von dem Sonnenlichte unbeschienenen Theiles des Mondes kurz nach der Conjunction die folgenden nothwendigen und hinreichenden Bedingungen:

1. Vollkommene Reinheit des Himmels, so dass das überhaupt erreichbarste Minimum der Extinction statthat. Eine Bedingung, die äußerst selten zutrifft.

2. Die Phase des Mondes muss so beschaffen sein, dass $C$ nicht über 26° (10 bis 26°) ist, und gleichzeitig muss

3. *a)* die Länge der Sonne zur Zeit dieser Phase im IV. Quadranten und nahe bei 360°,
   *b)* die Länge des Mondes so beschaffen sein, dass er zwischen 0 und 90° vom aufsteigenden Knoten in der Richtung der Bewegung entfernt steht,[1] für das absolute Maximum je nach der Breite des Beobachtungsortes;
   *c)* die geocentrische Breite des Beobachtungsortes oder, wenn man die Abplattung übergeht, die geographische Breite zwischen +0° und +50° ist, oder nicht allzuweit von 36° sich entfernt.

Somit treten, abgesehen von der ersten Bedingung, die günstigsten Verhältnisse nahe in ähnlicher Periode auf, wie die Sonnenfinsternisse, jedoch in einer größeren wie der halben Anzahl der Häufigkeit (wegen der Bedingung $\lambda'$ nahe bei 0° und der größeren Distanz bezüglich des ☊). Da nun etwa im Durchschnitte zwei Sonnenfinsternisse in einem Jahre und für einen und denselben Ort etwa alle zwei Jahre eine Sonnenfinsternis und etwa alle 200 Jahre eine totale eintritt, so muss die auffallende Sichtbarkeit des durch das

[1] $\varphi' \geqq \varepsilon$ vorausgesetzt.

reflectierte Erdlicht erleuchteten, sonst unsichtbaren Theiles des Mondes als eine sehr seltene bezeichnet werden. Sie wird es aber noch mehr infolge der ersten sehr selten eintretenden Bedingung der außerordentlichen Klarheit des Himmels, welche keinen angebbaren Gesetzen unterworfen ist, weil dem gleichzeitigen Zusammentreffen dieser Bedingung mit den schon sehr selten periodisch eintretenden anderen Bedingungen ein sehr kleiner Wert der Wahrscheinlichkeit zukommt.

Hiemit stimmen auch meine durch einen längeren Zeitraum, etwa 18 Jahre, eigens darauf gerichteten[1] Beobachtungen, in denen ich die Erscheinung nur etwa zweimal in einer solchen Helligkeit erblickte, dass man thatsächlich einen röthlichgelb beleuchteten Mond in die nicht übermäßig heller glänzende Mondsichel eingeschoben wahrnahm, wobei, jedenfalls als Irraditionserscheinung, an der Grenze, wo beide Körper zusammen zu kommen scheinen, eine lichtere glänzende Stelle sich befand. Es war die Erscheinung thatsächlich so, dass die Passanten, ohne dass ihre Aufmerksamkeit darauf gelenkt war, auf diese unerklärliche Erscheinung aufmerksam wurden. Um eine näherungsweise Schätzung der Häufigkeit dieser Erscheinung im absoluten Maximum[2] zu haben, genügt es, das Verhältnis der Perioden von $(\lambda - \lambda')$ und ☊, von denen sie hauptsächlich abhängt, in Näherungsbrüche zu entwickeln. Man wird dann finden, dass etwa in

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jahren . . . . . . . . . . . . . | 19, | 37, | 56, | 93, | 242, | 335, | 557, | 1489 | u. s. w. |
| absolute Maxima . . . . | 1, | 2, | 3, | 5, | 13, | 18, | 31, | 80 | u. s. w. |

eintreten.

Es ist somit auch vollkommen erklärlich und vollkommen im Einklange damit, dass die Chinesen diese seltene Erscheinung astrologisch mit der Geburt oder dem Wirken von Heroen in Zusammenhang brachten. Sie widerstreitet somit auch dieser Bedingung nicht.

---

[1] Demnach schon gespannte Aufmerksamkeit voraussetzend und nicht lediglich den Eindruck einer auffälligen Erscheinung.

[2] also $\lambda'$ nahe bei 0° im IV. Quadranten, $\beta$ nahe $+i$ und eine Breite bei 30° vorausgesetzt.

Um für die praktische Berechnung eines gegebenen Falles alles Erforderliche zur Hand zu haben, sollen nun die zur

**Berechnung der Fundamentalgrößen**

erforderlichen Ausdrücke gegeben werden. Es sind dies die Ausdrücke für die Berechnung von $\gamma$, $n$, $\sin\pi$, $\sin\pi'$, $\Delta'$, $\Delta$, $\beta$ in Reihenform, die nach den Sinussen und Cosinussen der betreffenden mittleren Anomalien fortschreiten. Ich setze dabei voraus, dass man sich mit der Genauigkeit von der Bogenminute begnügt und nehme deshalb, wenn

$M'$ die mittlere Anomalie des Mondes,
$M$ jene der Sonne,
$\omega$ den Abstand des Mondperigäums vom aufsteigenden Mondknoten,
$\omega'$ den Abstand des Sonnenperigäums vom aufsteigenden Mondknoten,
☊ die Länge des aufsteigenden Mondknotens,
$t$ die seit 1·0 Jänner 1900 in mittleren Sonnentagen verflossene Zeit (Greenwich),

$$\tau = \frac{t - 1\cdot 0 \text{ Jänner } 1900}{29\cdot 53059}$$

bedeutet,[1]

$$\begin{aligned}
☊ &= 259^\circ\!\cdot\!128 - 1^\circ\!\cdot\!564\,\tau = 259^\circ\!\cdot\!128 - 0^\circ\!\cdot\!0530\,t,\\
L' = M' + \omega' + ☊ &= 280\cdot683 + 29\cdot107\,\tau = 280\cdot683 + 0\cdot9857\,t,\\
L = M + \omega + ☊ &= 283\cdot623 + 29\cdot107\,\tau = 283\cdot623 + 13\cdot1764\,t,\\
M' + \omega' &= 21\cdot555 + 30\cdot671\,\tau = 21\cdot555 + 1\cdot0387\,t,\\
M + \omega &= 24\cdot495 + 30\cdot671\,\tau = 24\cdot495 + 13\cdot2294\,t,\\
\omega &= 75\cdot311 + 4\cdot854\,\tau = 75\cdot311 + 0\cdot1644\,t,\\
\omega' &= 22\cdot385 + 1\cdot565\,\tau = 22\cdot385 + 0\cdot0530\,t,\\
M' &= 359\cdot170 + 29\cdot108\,\tau = 359\cdot170 + 0\cdot9857\,t,\\
M &= 309\cdot184 + 25\cdot826\,\tau = 309\cdot184 + 13\cdot0653\,t
\end{aligned}$$

an. Bezeichnet ferner $t'$ die seit 1900 verflossene Zeit in Einheiten des julianischen Jahrhunderts (= 365·25 Tage), so ist

---

[1] Nach Hansen und Leverrier.

wegen $s = 0\cdot2730$ $\Delta_0' = 16'59"63$, $\Pi_0' = 8"80$ und $r \sin\Delta = s$, $r\sin\pi = 1$, $\sin\Delta = s\sin\pi$, $\sin\Delta' = \frac{\sin\Delta_0'}{\sin\Pi_0'}\cdot\frac{\sin\Pi_0'}{R} = \frac{\sin\Delta_0'}{R}$:

$$R = 1\cdot0001 - 0\cdot0168\cos M' - 0\cdot0001\cos 2M',$$

$$\sin\beta = -0\cdot0048 + 0\cdot0894\sin(M+\omega) + \\ +0\cdot0049\sin(2M+2\omega)+\ldots,$$

$$\cos\beta = +0\cdot9980 + 0\cdot0020\cos(2M+2\omega),$$

$$\pi = 0^\circ951 + 0^\circ052\cos M + 0^\circ003\cos 2M + \\ +0\cdot010\cos(2L-2L'-M) + 0\cdot007\cos(2L-2L'),$$

$$\lambda \operatorname{arc} 1^\circ = L\operatorname{arc} 1^\circ + 0\cdot1098\sin M + \\ +0\cdot0037\sin 2M - 0\cdot0032\sin M' + \\ +0\cdot0222\sin(2L-2L'-M) + \\ +0\cdot0113\sin(2L-2L')+\ldots$$

$$\Delta' = 0^\circ267 + 0^\circ004\cos M',$$

$$\pi' = 0\cdot002 + 0\cdot00005\cos M',$$

$$\Delta = 0\cdot259 + 0\cdot014\cos M + 0^\circ001\cos 2M + \\ +0\cdot003\cos(2L-2L'-M) + 0\cdot002\cos(2L-2L'),$$

$$n = \frac{\sin\pi'}{\sin\pi} = +0\cdot00258 - 0\cdot0014\cos M - 0\cdot0005\cos(2L-2L'),$$

$$\beta = +5^\circ123\sin(M+\omega) + 0^\circ281\sin(2M+\omega) + \\ +0^\circ174\sin(L-L'-M'-\omega') + 0\cdot007\sin^3 M',$$

$$\lambda-\lambda' = L-L' + 6^\circ291\sin M - (2^\circ107 + 0\cdot0049t')\sin M' + \\ +1^\circ272\sin(2L-2L'-M + \\ +0\cdot659\sin(2L-2L') + 0\cdot212\sin 2M,$$

$$\lambda' = L' + 1^\circ922\sin M' - 0\cdot0049t'\sin M' + 0\cdot020\sin 2M',$$

$$\varepsilon = 23^\circ452 - 0\cdot00013t.$$

Mit Hilfe dieser Relationen ist man nun in der Lage, $\gamma$ in einer praktischen Form zu erhalten. Die periodischen Glieder bei $L-L'$, der Kürze halber mit $p$ bezeichnend, ist

$$\lambda-\lambda' = L-L'+p.$$

Mit Rücksicht auf die früher gefundene Form von $\gamma$

$$\gamma = \lambda - \lambda' + x$$

und

$$\frac{x}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} \beta \operatorname{cotg} (\lambda - \lambda) + \frac{1}{6} \sin^6 \frac{1}{2} \beta \operatorname{cotg}^3 (\lambda - \lambda')$$

wird

$$\gamma = L - L' + p + x,$$

wo sich nach Substitution der Ausdrücke für $p$ und $x$ eine Reihe findet

$$p + x = 6^\circ 293 \sin M + \ldots$$

Nach dem früheren Ausdrucke ist aber auch

$$\gamma = C - \Delta' + n\Delta - n\Delta' \cos\gamma - 2\Delta \sin^2 \frac{1}{2}\gamma + \Delta - \frac{n \sin\gamma}{\operatorname{arc} 1^\circ} +$$
$$+ \frac{\rho_1 \sin\pi}{\operatorname{arc} 1^\circ} \cos(H + \gamma) + \ldots$$

Setzt man nun

$$C_1 = C - 0^\circ 267 + 0 \cdot 001 - 0 \cdot 001 \cos\gamma - 0 \cdot 001 \sin^2 \frac{1}{2}\gamma +$$
$$+ 0 \cdot 259 - \frac{0 \cdot 00258}{\operatorname{arc} 1^\circ} \sin\gamma + 0^\circ 951 \rho_1 \cos(H + \gamma) + \ldots$$

$$\zeta = + 0 \cdot 004 \cos M' + [0 \cdot 028 \cos M + 0 \cdot 001 \cos 2M +$$
$$+ 0 \cdot 003 \cos(2L - 2L' - M) +$$
$$+ 0 \cdot 002 \cos(2L - 2L')] \sin^2 \frac{1}{2}\gamma - \frac{0 \cdot 00014}{\operatorname{arc} 1^\circ} \cos M \sin\gamma -$$
$$- \frac{0 \cdot 00005}{\operatorname{arc} 1^\circ} \cos(2L - 2L') -$$
$$- [0^\circ 052 \cos M + 0^\circ 003 \cos 2M + \ldots] \cos(\gamma + H) + \ldots,$$

dann wird

$$\gamma = C_1 - \zeta$$

und wegen $\gamma = L - L' + p + x$

$$L - L' + p + x = C_1 - \zeta$$

oder

$$L - L' = C_1 - [\zeta + p + x].$$

$L-L'$ ist jedoch nach dem Früheren gegeben durch

$$L-L' = 2^\circ 940+12\cdot 1907t,$$

so dass

$$C_1-(\zeta+p+x) = 2^\circ 940+12\cdot 1907t.$$

Setzt man hierin $t = t_0-\Delta t$ und bestimmt $t_0$ so, dass

$$C_1 = 2^\circ 940+12\cdot 1907t_0,$$

dann wird

$$\Delta t = \frac{\zeta+p+x}{12\cdot 1907},$$

womit also $\Delta t$ die Correction vorstellt, welche von der Zeit der mittleren Phase abzuziehen ist, um die Zeit der wahren Phase zu erhalten. Weil nun die mittleren Anomalien die Form haben:

$$M' = 359^\circ 170+\ 0\cdot 9857t,$$
$$M = 309\cdot 184+13\cdot 0653t,$$

so kann man die in den Ausdrücken $\zeta$, $p$ und $x$ vorkommenden Werte derselben, welche für die Zeit der wahren Phase zu gelten haben, durch jene für die mittlere Phase ersetzen, wobei der Umstand von Vortheil ist, dass die mittleren Bewegungen von $L-L'$, nämlich 12·1907, und $M-M'$, nämlich 12·0796, sowie jene von $M$ 13·0653 sehr wenig voneinander verschieden sind. Hiedurch kann man statt

$$L-L' = C_1-12\cdot 1907\Delta t; \quad M' = M'_0-0\cdot 9857\,\Delta t$$

u. s. w., wo $M_0$, $M'_0$ die mittleren Anomalien zur Zeit der mittleren Phase sind, schreiben:

$$L-L' = C_1-(\zeta+p+x),$$
$$M = M_0-1\cdot 07170(\zeta+p+x),$$
$$M' = M'_0-0\cdot 08088(\zeta+p+x).$$

Hiedurch erhalten die Argumente der periodischen Glieder die Form $A+m(\zeta+p+x) = A+my$, worin $A$ sich auf die Zeit der mittleren Phase bezieht und $my$ eine kleine Größe vorstellt, so dass

$$\sin(A+my) = \sin A \left\{1 - \frac{m^2y^2}{2} + \frac{m^4y^4}{24} - \ldots\right\}$$

$$+\cos A \left\{my - \frac{m^3y^3}{6} + \frac{m^5y^5}{120} - \ldots\right\}$$

gesetzt werden kann. Bei der Substitution der Reihen für $my$ in den Potenzen, welche aus den Gliedern unter dem Functionszeichen entstehen, dürfen bereits die Argumente für die Zeit der mittleren Phase angewendet werden, so dass durch diese Entwickelungsart die sonst nöthige Division periodischer Reihen umgangen und in eine Multiplication verwandelt ist, wie sich leicht ergibt. Denn durch Substitution der Reihen für $p$, $\zeta$, $x$ in dem Ausdrucke für $\Delta t$ würde man zunächst erhalten:

$$\Delta t = +0{\cdot}511^d \sin M + \ldots$$

Statt nun zu setzen

$$\Delta t = +0{\cdot}511 \sin(M_0 - \mu\Delta t) + \ldots$$

und hierin $\mu\Delta t$ in eine Reihe zu entwickeln, woraus sich

$$\Delta t = +0{\cdot}511 \sin M_0 + \ldots + \mu\Delta t[0{\cdot}511 \cos M_0 + \ldots]$$

ergeben würde, wonach weiter zu setzen ist

$$\Delta t[1 - 0{\cdot}511\,\mu \cos M_0 - \ldots] = 0{\cdot}511 \sin M_0 + \ldots,$$

sodass

$$\Delta t = \frac{0{\cdot}511 \sin M_0 + \ldots}{1 - 0{\cdot}511\,\mu \cos M_0 - \ldots}$$

wird, ist nunmehr einfach

$$\Delta t = 0{\cdot}515 \sin(M_0 - 1{\cdot}07y) + \ldots$$

zu setzen und in den entstehenden Gliedern der Reihenentwickelung

$$\Delta t = 0{\cdot}515\left\{1 - \frac{1{\cdot}07}{2}y^2 + \ldots\right\} -$$

$$-0{\cdot}515 \cos M_0 \{1{\cdot}074 - \ldots\} - \ldots$$

für

$$y = \frac{0\cdot 004}{\text{arc } 1^\circ} \cos M_0' + \ldots$$

zu schreiben, wodurch, wie man sieht, die Division erspart ist.[1]

Führt man diese Operationen aus, dann findet sich:

$$\begin{aligned}\Delta t = & +0\cdot 0188^d \sin^2(M+\omega) \operatorname{cotg} C_1 + 0\cdot 514 \sin M_0 - \\ & -0\cdot 172 \sin M_0' + 0\cdot 106 \sin(2C_1 - M_0) + 0\cdot 042 \sin 2C_1 - \\ & -0\cdot 011 \sin 2M_0 - 0\cdot 009 \sin(2M_0 + 2\omega) - \\ & -0\cdot 007 \sin(2C_1 + M_0) + 0\cdot 005 \sin[2C_1 - (M_0 + M_0')] + \\ & +0\cdot 005 \sin(2C_1 - 2M_0) - 0\cdot 003 \sin(M_0 - M_0') - \\ & -0\cdot 002 \sin(M_0 + 2\omega) + 0\cdot 003 \sin C_1 - 0\cdot 002 \sin 2M_0' + \\ & +0\cdot 0436\theta \sin M' + 0\cdot 0009\theta \sin 2M_0' - \\ & -0\cdot 0009\theta \sin(M - M_0') + 0\cdot 0007\theta \sin(M_0 + M_0') - \\ & -0\cdot 0011\theta \sin(2C_1 - [M_0 + M_0']) + \\ & + \{+0\cdot 001 \sin(2C_1 + M_0 - M_0') - 0\cdot 001 \cos M_0 \sin C_1 - \\ & -0\cdot 001 \sin C_1 \cos 2C_1 - 0\cdot 001 \sin(2C_1 + M_0) - \\ & -0\cdot 001 \sin(2C_1 - (M_0 - M_0')) + 0\cdot 001 \sin(2M_0 - 2M_0') + \\ & +0\cdot 001 \sin(2C_1 + 2M_0 - M_2') - 0\cdot 002 \sin(3M_0 + 2\omega) - \\ & -0\cdot 001 \sin(2M_0' + 2\omega') - 001 \sin(4C_1 - M_0)\},\end{aligned}$$

worin $\theta$ die seit 1900 verflossene Zeit in Einheiten von 10.000 julianischen Jahrhunderten bedeutet; die in $\{\}$ stehenden Glieder, die sich nahezu aufheben, wird man immer vernachlässigen können.

Weil es sich aber doch nicht hier um die größte Genauigkeit handeln kann, so lassen sich die bezüglichen Rechnungen wesentlich vereinfachen durch den Gebrauch von v. Oppolzer's Syzygientafeln für den Mond.[2]

Für unseren Fall kommen nur jene Conjunctionen (Neumonde) in Betracht, wo die in diesen Tafeln $P$ genannte Größe einen Wert erlangt von nahe bei 74° oder genauer $(90 - C_1)$ bis 0°.[3]

---

[1] Es kommt dieser Vorgang auf das Verfahren hinaus, welches Hansen in seiner Analyse der ekliptischen Tafeln anwendet.

[2] XVI. Publication der Astron. Gesellschaft.

[3] $\varphi'$ größer als 23° vorausgesetzt.

Setzt man dann $\mu = \frac{\Gamma = (\lambda - \lambda')}{12.1907}$, so sind an die aus der Cyklen- und Periodentafel für den Neumond entlehnten Werte $T$, $L'$, $P$, $Q$, I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII die folgenden Correctionen anzubringen:

$$\Delta T = \mu - 0{\cdot}042 \sin 2\Gamma + 0{\cdot}003 \sin \Gamma -$$
$$- 0{\cdot}301 \sin \Gamma \cos (M_0 - E) - 0{\cdot}010 \sin \Gamma \cos (2M_0 - \Gamma) -$$
$$- 0{\cdot}010 \sin \Gamma \cos (M_0 + M_0' - \Gamma),$$

wobei

$$E = \Gamma + 3^\circ 784 \sin 2\Gamma + 0^\circ 116 \sin 4\Gamma + 0{\cdot}006 \sin 4\Gamma,$$

$$\Delta L' = +0{\cdot}9857\,\Delta T,$$
$$\Delta P = \Delta Q = +13{\cdot}2294\,\Delta T,$$
$$\Delta\,\mathrm{I} = +14{\cdot}517\,\Delta T,$$
$$\Delta\,\mathrm{II} = +\ 1{\cdot}095\,\Delta T,$$
$$\Delta\,\mathrm{III} = +\ 2{\cdot}31\,\Delta T,$$
$$\Delta\,\mathrm{IV} = +13{\cdot}42\,\Delta T,$$
$$\Delta\,\mathrm{V} = +15{\cdot}61\,\Delta T,$$
$$\Delta\,\mathrm{VI} = -\ 0{\cdot}06\,\Delta T,$$
$$\Delta\,\mathrm{VII} = +27{\cdot}9\,\Delta T,$$
$$\Delta\,\mathrm{VIII} = +30{\cdot}1\,\Delta T$$

und mit den so verbesserten Werten der Argumente die Correctionen aus den Argumententafeln zu entlehnen, um gleich $T$ die Zeit der wahren Phase $\Gamma = \lambda - \lambda'$ und die für dieselbe geltenden Werte von $L'$, $Z'$, $\varepsilon$, $P$, $Q$, $\log p$, $\log \Delta L$, $\log q$, $u'_a$, $\log f_a$ zu erhalten. Aus diesen Größen finden sich dann nach Anweisung dieser Tafeln (S. 30, Abschnitt 6) die hier erforderlichen Größen wie folgt:

$$\log \sin (\pi - \pi') = \log f_a - \log (u'_a - 0{\cdot}2730) - 0{\cdot}0011,$$
$$\log \sin \pi = \log f_a - \log (u'_a - 0{\cdot}2730),$$
$$\log \sin \pi' = \log f_a + 7{\cdot}9625,$$
$$\log \sin f = \log f_a + 9{\cdot}9978,$$
$$\lambda' = L',$$
$$\lambda = L' + \Gamma,$$
$$\sin \beta_1 = p \sin P \sin (\pi - \pi');$$

die stündliche Änderung von $3600''.d\lambda'$ aus Hilfstafel $A$, S. 50 der Syzygientafel mit Arg. II.; die stündliche Änderung von $d(\lambda-\lambda')$ und $d\beta$ nach

$$d(\lambda-\lambda') = \frac{\Delta L \sin(\pi-\pi')}{\text{arc } 1^\circ},$$

$$d\beta = \frac{q \cos Q \sin(\pi-\pi')}{\text{arc } 1^\circ},$$

eventuell ist noch $\beta$ zu verbessern und zu setzen:

$$\beta = \beta_1 + (\mu - \Delta T).24.d\beta,$$

und zwar diese stündlichen Änderungen, wie hier angesetzt, in Einheiten des Grades.

Die weitere Rechnung stellt sich wie folgt. Man setze

$$\cos D \cos A = \cos\lambda',$$
$$\cos D \sin A = \sin\lambda' \cos\varepsilon,$$
$$\sin D = \sin\lambda' \sin\varepsilon,$$
$$\cos D \sin\eta = \cos\lambda' \sin\varepsilon,$$
$$\cos D \cos\eta = \cos\varepsilon$$

oder

$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg}\varepsilon \cos\lambda',$$

$\cos\eta$ stets positiv;

$$\sin H = \sin\varphi' \sin D + \cos\varphi' \cos D \cos(\mu-A),$$
$$\cos H \sin N_1 = \cos\varphi' \sin(\mu-A),$$
$$\cos N \cos N_1 = \sin\varphi' \cos D - \sin D \cos\varphi' \cos(\mu-A),$$
$$N = N_1 + \eta,$$
$$\cos\gamma = \cos\beta \cos(\lambda-\lambda'),$$
$$\sin\gamma \sin\sigma = \cos\beta \sin(\lambda-\lambda'),$$
$$\sin\gamma \cos\sigma = \sin\beta.$$

Zur Controle

$$\gamma = (\lambda-\lambda') - \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\beta \operatorname{cotg}(\lambda-\lambda')}{\text{arc } 1^\circ},$$

$$W = N - \sigma.$$

Dann ist durch Versuche zu lösen

$$\sin\psi = \rho_1 \sin\pi \cos H \sin(\psi - W) \operatorname{cosec}\gamma$$

und wenn dies geschehen, zu berechnen

$$\sin\psi_1 = \cos H \sin W \operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi,$$

$$\sin h = \sin(H+\gamma) - 2\sin\gamma\cos H \sin^2\frac{1}{2}W,$$

$$\cos h \cos V_1 = \cos(H-\gamma) - 2\cos\gamma\cos H\sin^2\frac{1}{2}W,$$

$$\sin(g-\gamma) = \frac{\sin\pi'}{\sin\pi}\sin\gamma.$$

$\rho_1$ und $\varphi'$ erhält man mit der geographischen Breite unter Benützung von Tafel *B*, S. 50 der Syzygientafeln durch:

$$\log(1-c) = 9\cdot9985, \qquad \rho\cos\varphi' = \cos\varphi_1,$$
$$\rho\sin\varphi' = (1-c)\sin\varphi_1;$$

$\varphi_1$ mit $\varphi$ aus Tafel *B*.

$$r_1 \sin\pi\cos(g-G) = 1 - \rho_1\sin\pi\sin h - \rho_1\sin\pi\sin\psi_1\sin g,$$

$$r_1\sin\pi\sin(g-G) = \rho_1\sin\pi\cos h\cos V_1 + \rho_1\sin\pi\sin\psi_1\cos g,$$

$$\sin\Delta_1 = \frac{0\cdot27296}{r_1}, \quad \log 0\cdot27296 = 9\cdot4361,$$

$$\operatorname{tg}\varkappa_1 = \frac{\sin\Delta_1\cos(G+f)}{1-\sin\Delta_1\sin(G+f)},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varkappa_1}{\operatorname{tg}\Delta_1} = \cos C,$$

Dann ist die Phase in

$$\text{Theilen des Mondhalbmessers} = 2\sin^2\frac{1}{2}C,$$

$$\text{Theilen des Monddurchmessers} = \sin^2\frac{1}{2}C.$$

---

Als Beispiel will ich zunächst die augenfällige Erscheinung dieses Phänomens am 20. Februar 1901 wählen, die auch von verschiedenen Seiten hier in Wien, wie mir mitgetheilt ward, ohne specielle Aufmerksamkeit, was bei mir der Fall, wahrgenommen worden ist. Um $6^h$ abends hatte das Phänomen noch nichts besonders Auffälliges, während es gegen $6^h\,30^m$ etwa in der größten, für jedermann auffälligen Erscheinung auftrat.

Hiebei lassen sich auch die Grenzen der Werte von $H$ und $\Gamma_1$ bestimmen, die zugrunde zu legen sind.

Ich bestimmte mir zunächst, um die Phase $\Gamma_1$ ermitteln zu können, mit Hilfe der Syzygientafeln (wobei nur die Arg. I und II berücksichtigt wurden) die Zeit der vorhergehenden Conjunction. Es fand sich so 19. Februar, $2^h\,53^m$ morgens (Greenwicher Zeit). Die Beobachtungszeit in Wien war etwa 20. Februar, $6^h\,30^m$ abends, d. i. also $5^h\,25^m$ Greenwicher Zeit; wegen des starken Einflusses der Änderung von Arg. I (mittlere Anomalie des Mondes) in der Zwischenzeit von $1^d\,14^h\,31^m$ auf die Zeit der wahren Phase, nahm ich für den Wert $T$, welcher der Beobachtungszeit nahe entsprechen soll, $T = 22^{\circ}084$ an. Diesem Werte entspricht ein $\mu = 1 \cdot 8118$ und ein

$$\Delta T = 1 \cdot 8118 - 0 \cdot 0935,$$

womit die Correctionen der Argumente berechnet sind. Ich fand dann:

$T = 2415436 \cdot 2194 = 20.$ Februar 1901 $5^h\,15^m9$ nachmittags,

| | |
|---|---|
| $L' = 331^{\circ}404,$ | $\log p = 0 \cdot 6929,$ |
| $Z = +3 \cdot 44 =$ m.-w. Zeit, | $\log \Delta L = 9 \cdot 7621,$ |
| $\varepsilon = 23 \cdot 446,$ | $\log q = 8 \cdot 7574,$ |
| $P = 115 \cdot 243,$ | $u_0' = 0 \cdot 5396,$ |
| $Q = 116 \cdot 469,$ | $\log f_a = 7 \cdot 6747$ |

und hieraus

| | |
|---|---|
| $\lambda' = 331 \cdot 404,$ | $\delta\lambda' = +0 \cdot 042,$ |
| $\lambda = 353 \cdot 488,$ | $\delta\lambda = +0 \cdot 630,$ |
| $\beta = +4 \cdot 508 - 0 \cdot 061 = +4 \cdot 447,$ | $\delta\beta = -0 \cdot 026,$ |

$$\log\sin\pi' = 5\cdot6372, \qquad \log\sin f = 7\cdot6725,$$
$$\log\sin\pi = 8\cdot2466, \qquad f = 0\cdot270,$$

während die genauen, aus der »Connaissance du temps« interpolierten Werte für diesen Zeitpunkt sind:

$$\lambda' = 331\cdot398, \qquad \log\sin\pi = 8\cdot2452, \qquad \text{Sonnenbr. } +0\overset{\text{s}}{.}61,$$
$$\lambda = 353\cdot531, \qquad \log\sin\pi' = 5\cdot6350,$$
$$\beta = +4\cdot469, \qquad \text{Ztgl.} = +3\cdot75,$$

so dass also die Unterschiede $\Delta\lambda' = -0\overset{\circ}{.}006$, $\Delta\lambda = -0\overset{\circ}{.}043$, $\Delta\beta = +0\overset{\circ}{.}022$ betragen, was für die beanspruchte Genauigkeit belanglos ist.

Hier sehen wir bereits, dass zu dieser Zeit thatsächlich ein Maximum statthaben kann; denn die Sonne ist im IV. Quadranten gegen 360, der Mond ist nahe 90° vom aufsteigenden Knoten in der Richtung der Bewegung entfernt.

Nimmt man nun für Wien als östl. Länge von Greenwich $1^h5^m4$, als geocentrische Breite $\varphi' = 48\overset{\circ}{.}041$, als Entfernung vom Erdcentrum $\log\rho_1 = 9\cdot9992$ an, dann ergibt die Rechnung

$$A = 333\overset{\circ}{.}432,$$
$$\log\sin D = 9\cdot2798^n,$$
$$\log\cos D = 9\cdot9920,$$

$$\mu - A = 91\cdot89,$$
$$\mu = 65\cdot33,$$

$$\eta = 20\cdot843$$
$$N_1 = 42\cdot648,$$

$$\sigma = 78\cdot082,$$
$$W = -14\cdot591,$$

$$\gamma = 22\cdot520,$$
$$\gamma = \lambda - \lambda' + x = 22\cdot525,$$
$$\log\sin\Delta_1 = 7\cdot6853,$$
$$\Delta_1 = 0\cdot278,$$

$$g - \gamma = +\ 0\cdot054,$$
$$g = 22\cdot574,$$

$$\log \operatorname{tg} \varkappa_1 = \quad 7\cdot6536,$$

$$\log \frac{\operatorname{tg} \varkappa_1}{\operatorname{tg} \Delta} = \quad 9\cdot9683,$$

$$h = +12\cdot403,$$

$$H = -\ 9\cdot399,$$

$$C = \quad 21\cdot627,$$

$$g-G = +\ 0\cdot958,$$

$$\log r_1 = \quad 1\cdot7508,$$

Phase = 0·0704 in Theilen des Halbmessers;

Phase = 0·0352 in Theilen des Durchmessers.

Hieraus erhellt in Übereinstimmung mit den früheren Untersuchungen, dass ein Unterschied in Länge von 22° erforderlich, dass die Sonne mindestens 9° unter dem Horizonte stehen muss und dass eine Höhe des Mondes unter 12° die Sichtbarkeit der Erscheinung in Frage stellt für unsere Breiten. Mit Rücksicht auf diese Resultate soll nun die früher in Übersetzung (S. 628) mitgetheilte Stelle aus den Geschichtsschreibern des Südens, nämlich:

梁、大清、二年、春正月、癸巳朔、兩月相承如鈎、見於西方。

näher betrachtet werden.

In derselben ist zunächst die Ausdrucksweise 春正月 *tshun tshäng yûeh* auffällig, welche G. Schlegel mit »au premier mois du printemps« übersetzt.

Allerdings wird 正月 zur Bezeichnung des ersten Monates im Jahre gebraucht, dann folgt aber diese Ausdrucksweise unmittelbar auf den Schriftcharakter 年 *niên* für Jahr. Dass hier 春 zwischengeschoben, ist auffällig und nach den Verhältnissen nicht recht begreiflich, wenn *tsheng yûeh* den ersten Monat bezeichnen soll. Denn zur Zeit der Dynastie Leang war bereits die jetzige Zählweise im Schwung, nach welcher der erste Jahresmonat der erste Frühlingsmonat nach

chinesischer Zählweise sein musste, der zweite der zweite Frühlingsmonat, in welchem das Äquinoctium einzutreten hatte. Es wäre sonach unter diesen Verhältnissen das eingeschobene *tschün* überflüssig. Angenommen vorläufig, dass die Auffassung von *tshün tscheng yûeh* als »au premier mois du printemps« die richtige sei, ist der Frühlingsmonat zu suchen, bei dem im Jahre 548 p. Chr. der Neumond auf den Tag mit der cyklischen Bezeichnung *Koueï-sy* fällt. *Koueï* ist das zehnte der *Kan*-zeichen, *sy* das sechste der *tschi*, es ist sonach zufolge der Regel, welche ich bereits in meiner Abhandlung über die drei Perioden *Tschang*, *Pu* und *Ki* gegeben:[1] $\frac{10-6}{2} = 2$, daher *Koueï-sy* $= 20+10 = 30$. Da sich nun die Reste der julianischen Tageszahlen durch 60, von dem Stellenzeiger, welcher die Combination im Sechzigercyklus einnimmt, um 10 unterscheiden, muss sonach die julianische Tageszahl, für den fraglichen Neumond durch 60 dividiert, den Rest 40 geben. Der Neumond des ersten Monates kann Ende Januar oder in den Februar fallen. Sieht man daraufhin nach, so findet sich eine ekliptische Conjunction am 26. Jänner 548 (siehe Oppolzer's Canon der Finsternisse, S. 168, Nr. 4172), welcher dem julianischen Tag 1921240 entspricht, dessen Rest durch 60 thatsächlich 40 wäre, so dass dies dem Tage *Koueï-sy* entspräche.

Allein die Conjunction tritt nach Greenwicher Zeit ein um $10^h 20^m 1$, also nach der Zeit in China am 27. Jänner 548, $2^h$ morgens, d. i. bereits der Tag *Kia-u*, die erste Sichel also oder der Neumond am 29. oder 30. Jänner, welche den Tagen *ping-shen* oder *ting-yeu* entsprächen. Allerdings ist die Sonnenlänge zur Zeit dieses Neumondes 308°6, kann also im Laufe dieses Monates wohl 330° erreichen, wie es für den ersten Frühlingsmonat erforderlich. Weil aber der cyklische Tag nicht stimmt für die Conjunction, noch weniger für das erste Sichtbarwerden der Sichel, welches an dieser Stelle unbedingt, wie früher gezeigt, unter Neumond verstanden werden muss, so kann die Auffassung »au premier mois du printemps« absolut nicht den richtigen Sinn wiedergeben, sondern es muss,

[1] Diese Sitzungsber., phil.-histor. Classe, Bd. 125, S. 11 der Abhandlung.

soweit die Sprachgesetze dies zulassen, anders übersetzt werden.

Der nächste Neumond (d. h. die erste Sichtbarkeit der Sichel), welcher auf *Koueï-sy* fällt, kann aber erst nach 60 Tagen als kleinstes Intervall eintreten zu einer Zeit, wo dann die Sonnenlänge 360° ist. Dies wäre jedoch der mittlere Frühlingsmonat.

Lässt aber der chinesische Text eine solche Auffassung zu? Gewiss! Sie ist allein die richtige und steht vollkommen im Einklange mit der Ausdrucksweise 正月, die ja keineswegs direct »erster Monat« ausdrückt. Denn wir finden im Kanghi-Wörterbuche unter 正 auch die Bedeutung »定 *ting*« = festsetzen, normieren, angegeben, und unter dieser Bedeutung als Beleg dafür eine Stelle aus dem 周禮天官, worin der Ausdruck 正月 vorkommt, zu dem der Commentar (註) bemerkt »正猶定 = *tsheng* ist soviel wie *ting*, d. h. festsetzen, normieren«. Die Stelle lautet: 宰夫令羣吏正歲會正月要 »der Minister befahl allen Beamten die Nothwendigkeit, die Fixierung des Jahres mit dem Normalmonate in Einklang zu bringen«.

Weiter finden wir in einem späteren Absatze citiert: 四月亦曰正月 »der vierte Monat wird auch *tsheng yûeh* genannt«, wozu die Scholie bemerkt: 夏之四月建巳之月 der vierte Monat der *Hia* wurde in Beziehung gebracht zum Mond mit dem Cykelzeichen *sy*.

Hiezu wird als weiterer Beleg angeführt unter der Rubrik 三正 die drei Normalen aus dem 史記歷書 aus der Chronologie des *Sy-Ki* 夏正以正月、殷正以十二月、周正以十一月. Die *Hia* normierten das Jahr mit dem Normalmonat (der *Han*), die *Shang* mit dem zwölften Monat, die *Tscheu* mit dem elften Monat.

Es liegt sonach dem Ausdrucke 正 月 der Begriff »der fixierende oder festsetzende Monat« zugrunde, und insoferne, aber auch nur insoferne, als der erste Monat das Jahr festsetzt, darf 正 月 mit erster Monat übersetzt werden. Die eigentliche Bedeutung ist der (das Jahr) bestimmende Monat.

Wendet man diesen richtigen Sinn des Ausdruckes *tsheng-yûeh* auf unsere fragliche Stelle an, so ist für »au premier mois du printemps« zu setzen: »Der den Frühling bestimmende Monat, der Hauptmonat des Frühlings, der eigentliche Frühlingsmonat«, dies ist aber jener, bei dem das Frühlingsäquinoctium stattfindet.

Hiemit kommen wir auch auf den späteren Monat, in welchem die Sichtbarkeit der Sichel auf den Tag *Koeï-sy* fallen soll und möglicherweise auch fallen kann.

Dem Tage *Koeï-sy* entsprechen nun die Zeiten:

| | | |
|---|---|---|
| 547 Jänner 31, | 548 Jänner 26, | 549 Jänner 20, |
| 547 April 3, | 548 März 26, | 549 März 21, |
| 547 Mai 31, | 548 Mai 25, | 547 Mai 20. |

Hier fallen für unsere Zwecke die Maitage eo ipso aus, da sie zu weit vom Äquinoctium. Die nächstliegenden Conjunctionen des Mondes mit der Sonne sind hingegen in Zeit Chinas ($7^h$ $40^m$ East v. Greenwich).

547 Februar 6 . . . . . . $3^h$ $20^m$ nachmittags,
547 April 8 . . . . . . . . $9^h$ $50^m$ a. m.
548 Jänner 27 . . . . . . $2^h$ $52^m$ a. m.
548 März 26 . . . . . . . $1^h$ $54^m$ a. m.
549 Jänner 15 . . . . . . $6^h$ $57^m$ a. m.
549 März 15 . . . . . . . $2^h$ $9^m$ p. m.

Der Tag *Koeï-sy* steht sonach ab von den betreffenden Conjunctionen:

547 Februar . . . . . . —6 Tage,
547 April . . . . . . . . —5 Tage,
548 Jänner . . . . . . . —1 Tag,
548 März . . . . . . . ±0 Tag,
549 Jänner . . . . . . . +5 Tage,
549 März . . . . . . . . +6 Tage.

Es ist also einzig die Conjunction vom 26. März 548, die dem Wortlaut der angeführten Stelle wegen des Tages *Koeï-sy* entsprechen kann, und somit ist hiedurch auch der Beweis geliefert, dass die Übersetzung »au premier mois du printemps« nicht den richtigen Sinn von *tshûn-tsheng-yûeh* gibt, sondern, dass dieselbe vielmehr ist »der Haupt- oder eigentliche Frühlingsmonat«. Es bleibt nunmehr noch zu untersuchen, ob an diesem Tage der sonst unbeleuchtete Theil des Mondes durch das reflectierte Erdlicht auffällig erleuchtet kann gewesen sein.

Man muss hiebei berücksichtigen, dass der hier in Betracht kommende Theil von China bezüglich der Durchsichtigkeit der Atmosphäre sich der Eigenthümlichkeit der Tropengegend nähert, wo also die Extinction des Lichtes eine bedeutend geringere ist, als bei uns, so dass daher auch bei einem bedeutend niederen Stand der Gestirne die Helligkeit derselben eine vielmal größere ist, als bei uns, im gleichen die Dämmerung eine unvergleichlich kürzere als in unsere Breiten.

Ich nahm nun einen Stundenwinkel der Sonne von 93° und 95° an, als geographische Breite das einemal $+23^\circ 069$, das anderemal $+30°$ und eine Länge $7^h\,40^m0$ East v. Greenwich.

Damit fand sich für 548 März 26

$$\lambda' = 7^\circ 75 + 0\cdot 003\ (t - 93^\circ 00) \qquad \log \sin \pi = 8\cdot 2469,$$
$$\lambda - \lambda' = 9\cdot 453 + 0\cdot 038\ (t - 93^\circ 00), \qquad \log \sin \pi' = 5\ 6300,$$
$$\log \sin \beta = 8_n\, 9201 + 0\cdot 0004 (t - 93^\circ 00), \qquad f = 0^\circ 265,$$
$$\gamma = 10^\circ 58 + 0\cdot 035\ (t - 93^\circ 00) \qquad \log r_1 = 1\cdot 7524,$$
$$g - \gamma = +0\cdot 03 \qquad \log \sin \Delta_1 = 7\cdot 6837,$$
$$C = 9^\circ 67,$$

$$\text{Phase} = 0\cdot 014 \text{ Mondhalbmesser,}$$
$$= 0\cdot 007 \text{ Monddurchmesser.}$$

$\varphi = 23°069$:

$$H = -1^\circ 59 - 0^\circ 92\ (t - 93^\circ 0),$$
$$h = +7\cdot 87 - 0\cdot 88\ (t - 93\cdot 0),$$
$$g - G = +0\cdot 89.$$

$\varphi = 30°$:

$$H = -1°11 - 0°86\,(t - 93°0),$$
$$h = +7{\cdot}71 - 0{\cdot}88\,(i - 93{\cdot}0),$$
$$g - G = +0{\cdot}82$$

Hier sind allerdings die Unterschiede in Höhe wesentlich geringer als im früheren Falle. Bedenkt man aber die größere Durchsichtigkeit der Luft in China und die hiedurch gegebene Möglichkeit, dass Erscheinungen in auffälliger Weise eintreten können, die bei uns ohne Beachtung blieben, wovon ja bereits Humboldt in seinem Kosmos etc. spricht, bedenkt man ferner, dass für heliakische Aufgänge, wo also der Stern am Horizont selbst wahrgenommen werden muss ($h = 0$), eine Höhe der Sonne von 10° unter dem Horizonte ($H = -10$) bei Sternen erster Größe genügt, also eine Höhendifferenz von 10°, so wird man, die Ausdehnung der Mondscheibe und Mondsichel im Auge behaltend, vollkommen gerechtfertigt finden, dass 26 März 548 abends der von dem Erdlicht erhellte Theil der Mondscheibe (Höhendifferenz 9°) gesehen werden konnte, wenn die atmosphärischen Verhältnisse im günstigsten Zustand hiefür waren (absolute Reinheit des Himmels).

Hiemit folgt aber auch, dass 春正月 nicht als »erster Frühlingsmonat«, sondern als »eigentlicher Frühlingsmonat« übersetzt werden müsse, conform der sprachlichen Bedeutung von 正, weil nur dann der Neumond (die erste Sichtbarkeit der Sichel) auf den Tag *Koeï-sy* fallen kann.

Die scheinbare Schwierigkeit, dass an dem Neumondstage die Sonne der wahren Länge nach bereits über das Frühlingsäquinoctium hinaus sei, zerfällt in nichts unter Berücksichtigung, dass erstlich die Chinesen sich nur durch den Ort des Aufganges und die gleiche Länge von Tag und Nacht (siehe Schuking yao tien) die Zeit des Frühlingsäquinoctiums bestimmten und hiebei durchaus nicht der Feinheit unserer astronomischen Instrumente sich erfreuen konnten, sondern mit dem bloßen Auge beobachteten. Hiebei können aber bei der geringen Änderung der Tagesdauer um diese Zeit (etwa $4^m$ von Tag zu Tag) leicht Unsicherheiten von drei bis vier Tagen rücksichtlich des Sonnenortes entstehen.

Zweitens kommt aber noch in Betracht, dass die Chinesen für ihre Kalenderberechnung nicht die wahre Länge der Sonne zugrundelegten, sondern die mittlere Länge in der Bahn, wie der *Ho schang* (= Bonze) *I-hing* ausdrücklich in der Chronologie lehrt, was ich durch Belegstellen nachweisen werde, sobald ich dazu komme, die in Angriff genommene Arbeit über sämmtliche in der Kalenderrechnung bei den Chinesen angewandten Constanten durchzuführen, wozu mir leider unter den gegebenen Verhältnissen die nöthige Zeit mangelt, um befriedigender Weise in der Arbeit fortschreiten zu können.

Die Resultate dieser Untersuchung zusammenfassend, dürften dieselben so zu formulieren sein, dass hiemit erstlich der Beweis geliefert sei, die von den Chinesen *Tê-sing* benannte Himmelserscheinung ist nicht anders, als die sehr selten in auffälliger Form auftretende Erscheinung, wenn um die Zeit des Neumondes der sonst unbeleuchtete (und daher unsichtbare) Theil der Mondscheibe durch das von der Erde reflectierte Sonnenlicht sichtbar wird; zweitens der neuerliche Nachweis gegeben,[1] dass der Sinologe der Methodik und Kenntnisse der exacten Wissenschaften bei derartigen Untersuchungen nicht entrathen könne, weil es im Wesen des chinesischen Sprachbaues liegt, dass der richtige Sinn einer chinesischen Stelle nie so auf flacher Hand liegt, wie bei den römischen und griechischen Classikern, da lediglich nur Sachkenntnisse darüber entscheiden und nicht unzweifelhafte grammatische Beziehungen, wie sie im Formenreichthum genannter Sprachen gegeben, dessen das chinesische ermangelt.

Man könnte, ohne allzuviel von der Wahrheit abzuschweifen, den Sinn eines chinesischen Satzes den vieldeutigen Symbolen in der Mathematik gleich ansehen. Denn wie hier durch Differentiation erst zu ermitteln ist, welches der wahre Wert der Function sei, die durch eine bestimmte Substitution eine der Formen

$$\frac{0}{0},\quad \infty - \infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0.\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0 \text{ und } 1^\infty$$

[1] Siehe unter anderen meinen Artikel über »chinesische Musik« in der Wr. Zeitschr. f. d. Kunde des Morgenlandes«.

annimmt, so muss beim chinesischen Satze durch Sachkenntnisse entschieden werden, welche der in einem gegebenen Falle möglichen grammatischen (d. h. syntaktischen) Beziehungen einzig und allein die richtige sei. Gründliche und ausgiebige Schulung in der Mathematik und den exacten Wissenschaften, schon um der damit verbundenen Aneignung concisen, scharfen und umsichtigen logischen Denkens, kann daher bei philologischen Studien in Sinicis nur von Vortheil sein und in gewissen Fällen zu einer absoluten Nothwendigkeit werden.

# Über Potentialdifferenzen in Flammengasen und einigen festen Elektrolyten

von

**Rudolf v. Hasslinger,**

*stud. phil.*

Aus dem Privatlaboratorium des Verfassers in Prag-Smichov.

(Mit 1 Textfigur.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1901.)**

Die elektrische Leitfähigkeit der Gase war in neuerer Zeit Gegenstand mehrerer Untersuchungen, welche die Ansicht bestätigten, dass eine Ionisierung der Gase die Ursache ihrer Leitfähigkeit bilde. Es schien daher die Frage nach dem Vorhandensein von Potentialdifferenzen zwischen verschiedenen Metallen in solchen leitenden Gasen nicht unberechtigt, da nach unseren jetzigen Anschauungen die Existenz freier Ionen solche Potentialdifferenzen bedingt. Was nun derartige Potentialdifferenzen in durch Röntgenstrahlen, ultraviolettes Licht und Uranstrahlen leitend gemachter Luft anlangt, so erhielten J. C. Beattie und Smoluchowski de Smolan (Phil. Mag., (5), 46, 418, 439) und ebenso Arrhenius (Wied. Ann., 33, S. 638), ganz wie man es, freie Ionen in dieser leitenden Luft vorausgesetzt, erwarten konnte, Ergebnisse, die sehr nahe an die des Volta'schen Fundamentalversuches erinnern. Es wäre daher zu erwarten gewesen, dass auch in den, eine elektrische Leitfähigkeit zeigenden, heißen Salzdämpfen ähnliche Potentialdifferenzen zwischen verschiedenen Metallen sich ergeben würden. Die folgenden Versuche zeigen jedoch, dass zwar in diesen Fällen Potentialdifferenzen auftreten, die aber von den in wässerigen Lösungen und leitender Luft beobachteten,

wesentlich abweichen. Die Versuchsanordnung bei dieser Untersuchung war sehr ähnlich der von A. Smithells H. M. Dawson und H. A. Wilson (Zeitschr. phys. chem., 32, 303—320; Phil. Trans. Roy. Soc., 192, 89—128) zur Untersuchung der Leitfähigkeit heißer Salzdämpfe verwendeten. Mittels eines Zerstäubers wurde in die Flamme eines Teclu-Brenners die feinst verstäubte Lösung eines Salzes eingeführt, während in die Flamme wenig über der Spitze des inneren Kegels zwei parallele Blättchen aus verschiedenen Metallen eintauchten. Nun aber zeigen an verschiedenen Stellen der Flamme eingetauchte, aus demselben Metalle bestehende Blättchen nennenswerte Potentialdifferenzen gegeneinander, und nur (vergl. Henrici, Pogg. Ann., 79, S. 476; Buff, Annalen d. Chem. u. Pharm., 80, S. 1 [1851], 90, S. 1 [1854]) gleich große, an symmetrischen Flammenstellen angebrachte Elektroden zeigen, wie ich mich auch selbst überzeugte, gegeneinander keine Unterschiede des Potentials. Obzwar nun die Elektroden bei den im folgenden beschriebenen Versuchen immer gleich weit von der Flammenmitte abstanden, so brachte ich dennoch die zwei Metallblättchen derart in der Flamme an, dass, ohne irgend etwas an den Verbindungen zu ändern, ihr Platz in der Flamme leicht vertauscht werden konnte. Zu diesem Controlversuche wurde ich durch den freundlichen Rath des Herrn Prof. Dr. F. Exner veranlasst, welchem ich die Resultate meiner Arbeit mitgetheilt hatte. Auf diese Art war also jeder, durch eine eventuelle unsymmetrische Lage der Elektroden bedingte Fehler ausgeschlossen.

Diese in die Flamme eingetauchten Blättchen konnten nun mit Hilfe eines Paraffincommutators abwechselnd mit einem Thomson'schen Quadrantenelektrometer und der Erde so verbunden werden, dass, wenn das eine Blättchen zur Erde abgeleitet war, das andere mit dem Elektrometer in Verbindung stand und umgekehrt. Außerdem war dafür gesorgt, dass das Elektrometer jederzeit direct mit der Erde verbunden werden konnte. Durch diese Anordnung war bezweckt, das Elektrometer gegen andere in seiner Umgebung auftretende elektrostatische Wirkungen zu schützen und zugleich den Einfluss von, eventuell den Flammengasen als solchen anhaftenden, Ladungen zu eliminieren. Der Druck der den Zerstäuber

betreibenden Luft war bedeutend höher, als zum Betriebe des Zerstäubers gerade nothwendig war, und außerdem durch ein Quecksilbermanometer controliert. Ebenso wurde der Druck des dem Brenner zuströmenden Gases durch einen Regulator auf constanter Höhe erhalten, was ebenfalls durch ein Manometer controliert wurde. Die nun folgende Tabelle, in welcher die wichtigsten Resultate der mit dieser Versuchsanordnung ausgeführten Experimente enthalten sind, weist natürlich nur Mittelwerte auf. Die zwischen den einzelnen Messungen auftretenden Differenzen betragen jedoch meist nur einige Hundertel Volt; die angeführten Mittelwerte geben aber jedenfalls in vollkommen verlässlicher Weise das Vorzeichen, sowie das annähernde Verhältnis der in den verschiedenen gasförmigen Elektrolyten zwischen den betreffenden Metallen auftretenden Potentialdifferenzen an, was für den Zweck der vorliegenden Untersuchung vollständig ausreicht. Als Beispiel dafür, wie etwa die Einzelmessungen differieren, seien drei Beobachtungsserien angeführt.

Tabelle I.

| Dampf | Ausschlag in Scalentheilen | Dampf | Ausschlag in Scalentheilen | Dampf | Ausschlag in Scalentheilen |
|---|---|---|---|---|---|
| $SrCl_2$ (2 n.) | 92 | LiCl 2 n. | 24 | $CaCl_2$ 2 n. | 35 |
| $BaCl_2$ (1 n.) | 42 | Li salyc. 2 n. | 12 | $CaCl_2$ 4 n. | 53 |
| $SrCl_2$ (2 n.) | 94 | LiCl 2 n. | 22 | $CaCl_2$ 2 n. | 44 |
| $BaCl_2$ (1 n.) | 42 | Li salyc. 2 n. | 18 | | |

Es sei noch ausdrücklich bemerkt, dass unter einer normalen Lösung (1 n.) hier, auch bei den ein zweiwertiges Metall enthaltenden Lösungen, eine solche verstanden ist, welche **ein** Grammolecül im Liter enthält.

Tabelle II.

| Salz . . . | LiCl | LiCl | LiCl | LiCl | $NH_4Cl$ | $NH_4Cl$ | $NH_4Cl$ | $NH_4Cl$ | $NH_4Br$ | $NH_4Br$ | $NH_4J$ | $NH_4J$ | NaCl |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Concent. d. verstbt. Lösung | 2 norm. | 2 norm. | 2 norm. | 4 norm. | 2 norm. | 2 norm. | 2 norm. | 4 norm. | 2 norm. | 2 norm. | 2 norm. | 2 norm. | 4 norm. |
| Potential von . . . | Fe | Fe | Ni | Fe | Fe | Ni | Fe | Fe | Fe | Ni | Fe | Ni | Fe |
| in Volt . | +0·37 | +0·11 | +0·27 | +0·43 | +0·29 | +0·22 | +0 05 | +0·33 | +0·54 | +0·19 | +0·74 | +0·28 | —0·16 |
| gegen . . | Pt | Ni | Pt | Pt | Pt | Pt | Ni | Pt | Pt | Pt | Pt | Pt | Pt |
| Salz . . . | KCl | KBr | KBr | KJ | $CaCl_2$ | $CaCl_2$ | $CaCl_2$ | $CaCl_2$ | $SrCl_2$ | $BaCl_2$ | $(NH_4)_2SO_4$ | Li-salicylat | Anilin-chlorid |
| Concentration der verstbt. Lösung | 4 norm. | 4 norm. | 4 norm. | 4 norm. | 2 norm. | 2 norm. | 2 norm. | 4 norm. | 2 norm. | 1 norm. | 2 norm. | 2 norm. | 2 norm. |
| Potential von . . . | Fe | Fe | Ni | Fe | Fe | Ni | Fe | Fe | Fe | Fe | Fe | Fe | Fe |
| in Volt . | —0·32 | —0·37 | —0·03 | —0·26 | +0·41 | +0·24 | +0·16 | +0·51 | +0·59 | +0·30 | +0·43 | +0·10 | +0·28 |
| gegen . | Pt | Pt | Pt | Pt | Pt | Pt | Ni | Pt | Pt | Pt | Pt | Pt | Pt |

Aus den in Tabelle II enthaltenen Zahlen geht hervor, dass sowohl die basischen, wie die sauren Bestandtheile eines Salzes einen Einfluss auf die Potentialdifferenz üben. Insbesondere tritt dies deutlich hervor bei den beiden letzten der angeführten Salze, dem Lithiumsalicylat und dem Anilinchlorid, deren eines eine brennbare Säure, das andere eine brennbare Base enthält, so dass also bei der Wirkung in der Flamme nur der eine der beiden Bestandtheile zur Geltung kommt. Die Summe der beiden erwähnten Potentiale stimmt ziemlich gut mit den direct gefundenen des gleich concentrierten Lithiumchlorids überein. Weiter scheint daraus hervorzugehen, dass der größere Antheil an den gemessenen Potentialdifferenzen im allgemeinen den sauren Bestandtheilen zukommt, woraus sich auch die größeren, für die ein zweiwertiges Metall enthaltenden Salze gefundenen Potentialdifferenzen ohne weiteres erklären lassen. Das Nickel steht, wie aus der Tabelle ersichtlich, zwischen Eisen und Platin. Auch sei noch erwähnt, dass das Kupfer, soweit es trotz seines niedrigen Schmelzpunktes untersucht werden konnte, ebenfalls ein ähnliches Verhalten wie Nickel und Eisen zeigt.

Am überraschendsten ist aber jedenfalls der Umstand, dass bei verhältnismäßig so vielen Salzen das Eisen, beziehungsweise das Nickel, gegen das Platin ein positives Potential annimmt. Es schien nicht ausgeschlossen, dass dieses Verhalten die Folge einer Abhängigkeit der Potentialdifferenz von der Temperatur sei.

Daher lag es nahe, die Potentialdifferenz des Fe gegen Pt bei variabler Temperatur zu untersuchen. Zu diesem Zwecke wurden die früher in Dampfform untersuchten Elektrolyten im geschmolzenen Zustande verwendet. Es wurde also zunächst die Spannung von Eisen gegen Platin in geschmolzenem Lithiumchlorid, dann in geschmolzenem Kaliumchlorid als Elektrolyten gemessen, und zwar sowohl bei steigender, wie auch bei fallender Temperatur. Die Temperatur selbst wurde durch ein Platin-Palladium-Thermo-Element bestimmt. Die so erhaltenen Resultate sind in den folgenden zwei kleinen Tabellen zusammengestellt.

Tabelle III.

Fe gegen Pt in geschmolzenem $LiCl$.

| Volt | Temp. ca. |
|---|---|
| 0 | 0 |
| —0·68 | 350° C. |
| —1·07 | 800 |
| —0·88 | 1000 |
| —0·77 | 1100 |

Tabelle IV.

Fe gegen Pt in geschmolzenem $KCl$.

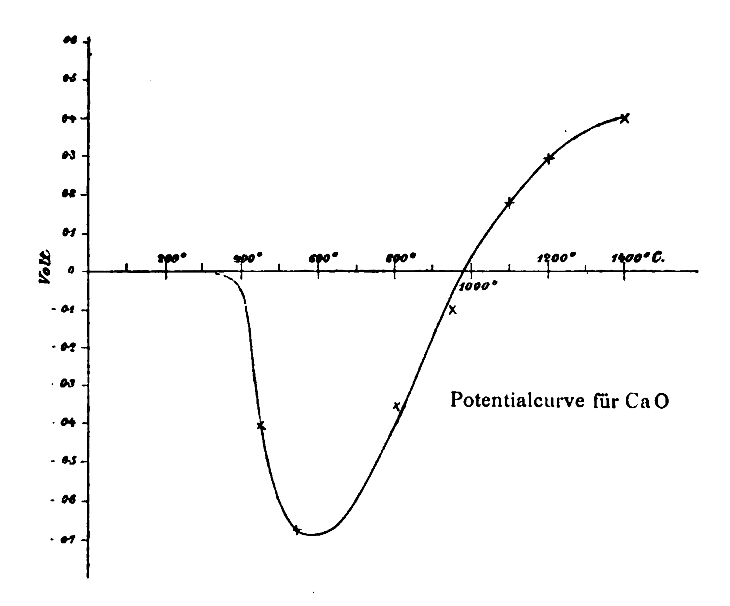
| Volt | Temp. ca. |
|---|---|
| 0 | 0 |
| —0·54 | 850° C. |
| —0·75 | 950 |
| —0·81 | 1200 |
| —0·85 | 1500 |

Was zunächst das Lithiumchlorid betrifft, so dürfte sich das anfängliche Ansteigen der Spannung durch das Eintreten und Fortschreiten der Ionisation erklären lassen; doch erreicht, wie aus der Tabelle ersichtlich, die Spannung bald ein Maximum und beginnt alsdann zurückzugehen.

Es ist nun wohl denkbar, dass die Potentialdifferenz bei weiterem Ansteigen der Temperatur, wo dann natürlich das Lithiumchlorid nicht mehr als Flüssigkeit, sondern als Dampf vorhanden wäre, noch weiter abnimmt, dieselbe den Nullpunkt erreichen und auch eventuell das Zeichen wechseln, also positiv werden könnte. Beim Kaliumchlorid dagegen steigt die Potentialdifferenz innerhalb des gemessenen Temperaturintervalls mit der Temperatur an. Wenn hier also überhaupt ein solcher Durchgang durch den Nullpunkt stattfindet, müsste derselbe viel höher liegen, und man kann sich recht wohl vorstellen, dass bei einer Temperatur, wo die in Lithiumchloriddampf zwischen Eisen und Platin bestehende Potentialdifferenz bereits das Zeichen gewechselt hat, die Spannung in Kaliumchloriddampf noch das ursprüngliche, negative Zeichen beibehält. Da sich nun in den vorliegenden Fällen, durch das Verdampfen der Salze bei höheren Temperaturen, der Ermittelung der Potentialcurve für diese Temperaturen gewisse Schwierigkeiten entgegenstellen, so wurde, um die Möglichkeit eines Durchganges der Potentialcurve durch den Nullpunkt zu beweisen, ein Elektrolyt gesucht, welcher, ohne Änderung des

Aggregatzustandes, große Temperaturveränderungen zu ertragen imstande ist. Für diesen Zweck erwiesen sich nun die Oxyde der Erdalkalimetalle als sehr brauchbar. Ähnliches Verhalten ist bei thermo-elektrischen Potentialdifferenzen, die sich allerdings in der Größenordnung von den hier in Betracht kommenden wesentlich unterscheiden, längst bekannt. Auch bei Concentrationselementen hat E. Cohen (Zeitschr. phys. Chem., Cohen, 14, 53; J. van t'Hoff, E. Cohen und G. Bredig, 16, 453) eine Umkehr der Potentialdifferenz bei verschiedenen Temperaturen nachgewiesen. Die von Cohen verwendeten Combinationen waren Concentrationselemente, deren Lösungen Salze enthielten, die einen sogenannten Umwandlungspunkt besitzen und deren Löslichkeitscurve daher in einer geknickten Linie besteht; Cohen verwandte eben diese Umkehr zur Bestimmung der Umwandlungstemperatur dieser Salze. Es ist eine bekannte Thatsache, dass die oben genannten Oxyde der Erdalkalimetalle bei höheren Temperaturen zu Leitern zweiter Classe werden, eine Eigenschaft, die ja in der Nernst'schen Glühlampe eine praktische Verwendung gefunden hat. Es war deshalb zu erwarten, es werde sich zwischen verschiedenen Metallen, die durch ein Erdalkalimetalloxyd als Elektrolyt verbunden sind, bei höheren Temperaturen eine Potentialdifferenz zeigen. Es wurde daher in ein Platinrohr ein Eisendraht nebst einem Thermo-Element eingeführt und das Rohr mit dichtem Calciumoxyd gefüllt. Dieses erhält man leicht, wenn man reines Calciumhydroxyd mit ein paar Tropfen Calciumnitratlösung zu einem sehr steifen Brei anrührt, das Platinrohr damit füllt und, nachdem man es sorgfältig getrocknet hat, heftig ausglüht. Hiebei verwandelt sich auch das Calciumnitrat in Calciumoxyd und bindet so den übrigen Kalk zu einer halbwegs festen Masse. Später erwies sich auch die Methode, zwischen zwei, aus den betreffenden Metallen bestehenden Elektroden, eine aus dem Erdalkalimetalloxyd gepresste, cylinderförmige Pille einzuklemmen, als sehr praktisch für die hier verfolgten Zwecke. Aus der auf diese Weise für Calciumoxyd erhaltenen Potentialcurve ist ersichtlich, dass in diesem Falle thatsächlich nicht nur Potentialdifferenzen auftreten, sondern auch ein Durchgang der Potentialdifferenz durch den Nullpunkt stattfindet.

Für Magnesiumoxyd, dessen Potentialcurve der des Calciumoxyds ziemlich ähnlich ist, liegt der Durchgang durch den




Nullpunkt bei einer etwas niedrigeren Temperatur als beim Calciumoxyd.

Nachdem so die Möglichkeit eines Durchganges der Potentialdifferenz durch den Nullpunkt bei steigender Temperatur für einige Erdalkalimetalloxyde nachgewiesen war, gieng ich daran, den Zusammenhang zwischen Potential und Temperatur auch für den Lithiumchloriddampf direct experimentell zu ermitteln. Zu diesem Zwecke wurde zunächst zwischen die beiden in der Flamme befindlichen Elektroden ein Thermo-Element eingesenkt und so Spannung und Temperatur in verschiedenen Flammenhöhen gemessen.

Da sich aber keine geeigneten Stellen der Flamme, die noch tiefere als die unten angeführten Temperaturen aufweisen, finden ließen, so wurde in ein einseitig geschlossenes Platinrohr etwas Lithiumchlorid gegeben und das Rohr von unten mittels eines Bunsenbrenners angeheizt, während in dasselbe von oben ein Eisendraht und ein Thermo-Element derart ein-

gesenkt waren, dass diese weder das Rohr, noch das unten befindliche Lithiumchlorid berührten, sondern nur von dem das Rohr erfüllenden Lithiumchloriddampf umgeben waren. Ein Asbestschirm schützte das Eisen vor der Einwirkung der vom Bunsenbrenner herrührenden Flammengase. Das Platinrohr war zur Erde abgeleitet, das Eisen an das Elektrometer angeschlossen.

In der folgenden Tabelle sind die so gewonnenen Mittelwerte aus mehreren Versuchen zusammengestellt, aus denen hervorgeht, dass auch in Lithiumchloriddampf bei steigender Temperatur ein Zeichenwechsel der Potentialdifferenz stattfindet.

Tabelle V.

Fe gegen Pt in LiCl-Dampf.

| Volt | Temp. ca. | |
|---|---|---|
| +0·37 | 1500° C. | In der Flamme |
| +0·30 | 1400 | |
| +0·14 | 1000 | |
| +0·16 | 800° C. | In dem Pt-Rohr |
| —0·24 | 500 | |

Es ist also durch die beschriebenen Versuche die Existenz von in heißen Salzdämpfen und einigen festen Elektrolyten zwischen verschiedenen Metallen auftretenden Potentialdifferenzen bewiesen, was nach unseren jetzigen Anschauungen für das Vorhandensein von freien Ionen in den genannten Körpern spricht. Ferner ergab sich eine Abhängigkeit dieser Potentialdifferenz von der Temperatur derart, dass wenigstens die in einigen dieser Elektrolyten beobachtete abnormale Polarität auf einen beim Ansteigen der Temperatur

erfolgenden Durchgang der Potentialdifferenz durch den Nullpunkt zurückgeführt werden konnte.

Über die Ursachen dieses mit steigender Temperatur erfolgenden Zeichenwechsels der Potentialdifferenz lässt sich freilich ohne Kenntnis der hiebei auftretenden chemischen Vorgänge nichts aussagen, doch sind Untersuchungen in dieser Richtung bereits aufgenommen.

## XV. SITZUNG VOM 13. JUNI 1901.

Herr Dr. Hugo Buchholz, Privatdocent der Astronomie an der Universität in Halle, übersendet eine Abhandlung mit dem Titel: »Untersuchung der Bewegung vom Typus $\frac{2}{3}$ im Probleme der drei Körper und der Lücke im Systeme der kleinen Planeten auf Grund der Gylden-schen Störungstheorie«.

Der Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Herr Eduard Mazelle, Leiter des k. k. astronomisch-meteorologischen Observatoriums in Triest, übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Erdbebenstörungen zu Triest, beobachtet am Rebeur-Ehlert'schen Horizontalpendel im Jahre 1900«.

Das w. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet im eigenen und im Namen des c. M. Herrn Prof. Hans Molisch eine Abhandlung, betitelt: »Über das Scutellarin, einen neuen Körper bei *Scutellaria* und anderen Labiaten«, welche die Ergebnisse gemeinschaftlicher, von ihnen ausgeführter Untersuchungen enthält:

I. »Phytochemische Untersuchungen über das Scutellarin«, von Herrn Hans Molisch.

II. »Chemische Untersuchung des wässerigen Extractes von *Scutellaria altissima*«, von Herrn Guido Goldschmiedt.

Herr Prof. F. Emich übersendet zwei Arbeiten aus dem Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Graz:

I. »Mikrochemischer Nachweis von Alkalien und Säuren; Notiz über die Auffindung kleiner Mengen von Ozon und Wasser«, von F. Emich.

II. »Über die Einwirkung von Brom auf metallisches Silber im Licht und im Dunkeln«, von Herrn Dr. V. v. Cordier.

Das w. M. Herr Hofrath A. Lieben überreicht zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien:

I. »Über die Grenzen zwischen Polymorphie und Isomerie«, von Herrn Prof. Rud. Wegscheider.

II. »Über Allotropie des Phosphors«, von den Herren Prof. Rud. Wegscheider und Felix Kaufler.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Über die Umlagerung von Dimethylketazin in 3-Methyl-5-Dimethylpyrazolin«, von den Herren K. W. Frey und R. Hofmann.

Das w. M. Herr Hofrath A. Weichselbaum legt eine im pathologisch-anatomischen Universitäts-Institute in Wien von den Herren Dr. Fritz Hitschmann und Dr. Otto Th. Lindenthal ausgeführte Arbeit vor, welche den Titel führt: »Über die Schaumorgane und die bakteriellen Schleimhautemphyseme«.

Das w. M. Herr Hofrath G. Ritter v. Escherich legt das 6. Heft des I. Bandes der im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebenen »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen« vor.

---

# XVI. SITZUNG VOM 20. JUNI 1901.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 110, Abth. II. a, Heft I bis III (Jänner bis März 1901).

Das w. M. Herr Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet als Leiter der nach Brasilien entsendeten botanischen Expedition einen Bericht ddo. Saõ Paulo, 26. Mai 1901.

Das c. M. Herr Prof. Ludwig v. Graff in Graz dankt für die ihm bewilligte Reisesubvention behufs Studien zur Herausgabe des Bandes »Turbellaria« des systematischen Werkes »Das Thierreich«.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt das 1. Heft des Bandes IV/2 der im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebenen »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen« vor.

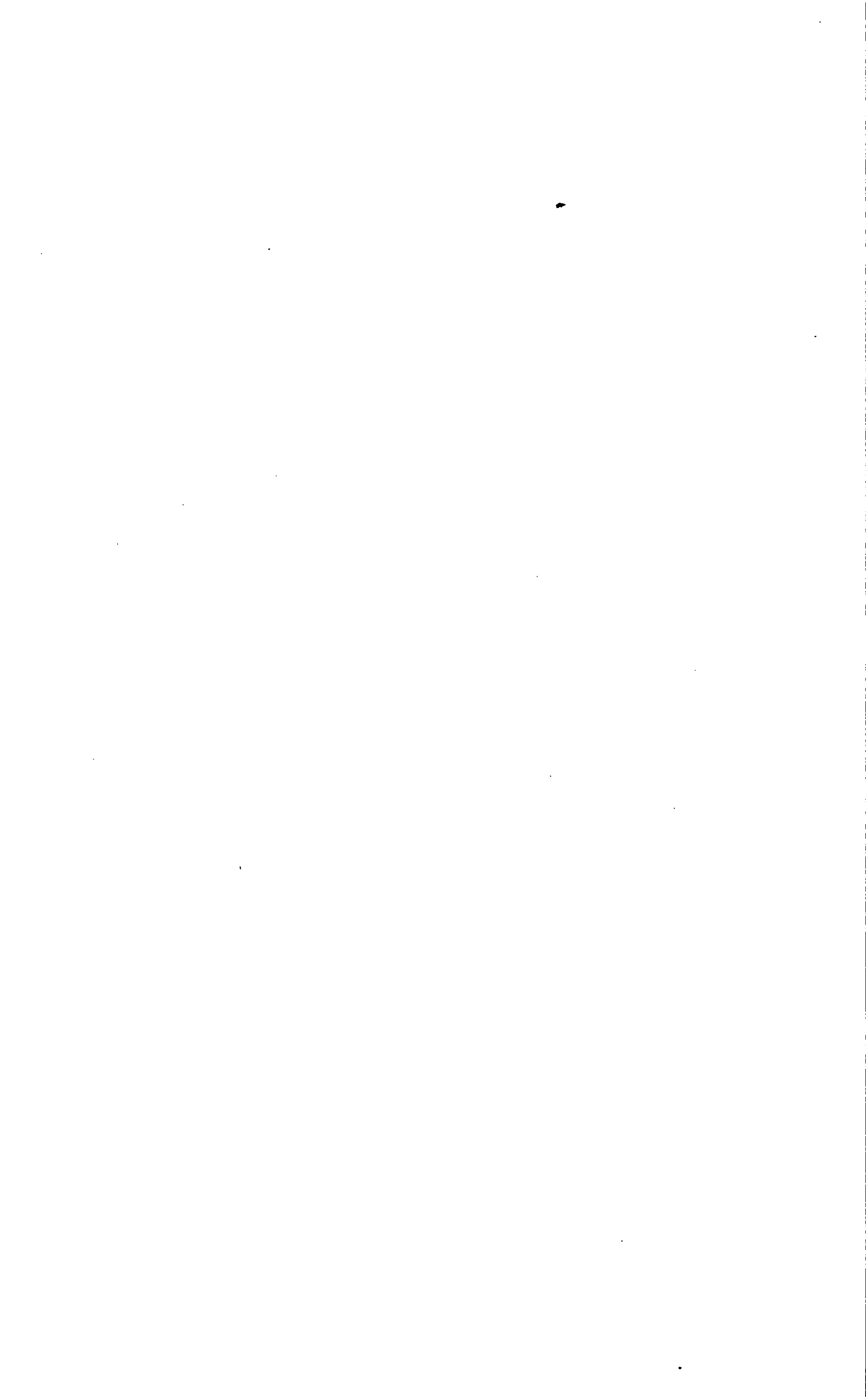
Das w. M. Herr Prof. K. Grobben legt eine Arbeit von Herrn Dr. Franz Werner in Wien vor, betitelt: »Die Dermapteren- und Orthopterenfauna Kleinasiens«.

Das w. M. Herr Hofrath E. Mach legt eine Arbeit von Herrn Dr. Franz Hillebrand, Professor der Philosophie an der Universität Innsbruck, vor, mit dem Titel: »Theorie der scheinbaren Größe bei binocularem Sehen«.

Das w. M. Herr Hofrath Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung aus dem ersten chemischen Universitätslaboratorium:

»Zur Methoxylbestimmung in schwefelhaltigen Körpern«, von Herrn Felix Kaufler.

Das w. M. Herr Hofrath F. Mertens legt eine Abhandlung von Herrn Dr. Robert Daublebsky v. Sterneck vor, welche den Titel führt: »Empirische Untersuchung über den Verlauf der zahlentheoretischen Function $\sigma(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \mu(x)$ im Intervalle von 150000 bis 500000«.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.



# SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. VII. HEFT.

JAHRGANG 1901. — JULI.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 2 TAFELN UND 19 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1901.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

# INHALT

des 7. Heftes Juli 1901 des CX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.



Preis des ganzen Heftes: 4 K 80 h = 4 Mk. 80 Pfg.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

# XVII. SITZUNG VOM 4. JULI 1901.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 22, Heft V (Mai 1901).

Die Faculté des Sciences in Genf übersendet eine Einladung zu der am 7. August l. J. in Genf zusammentretenden Versammlung der internationalen Association der Botaniker.

Das Comité des V. Internationalen Physiologen-Congresses übermittelt die näheren Bestimmungen über die am 17. bis 21. September in Turin stattfindende Zusammentretung des Congresses.

Das w. M. Herr Prof. R. v. Wettstein übersendet als Leiter der botanischen Expedition nach Brasilien einen Bericht über die Arbeiten derselben.

Herr k. u. k. Oberst Valerian Ritter v. Mikulicz-Radecki in Eperies übersendet eine Mittheilung über die Gewitter-Theorie.

Herr Prof. Franz v. Hemmelmayr dankt für die ihm bewilligte Subvention für die Fortführung seiner Arbeit über das Ononin.

Das w. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet eine Arbeit von Herrn Prof. Karl v. Garzarolli-Thurnlackh in Prag, betitelt: »Zur Kenntnis der Umsetzung zwischen Ozon und Jodkaliumlösungen«.

Derselbe übersendet ferner eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit des Herrn stud. phil. Josef Zink, betitelt: »Condensationen von Naphthalaldehydsäure mit Aceton und Acetophenon«.

Das w. M. Herr Hofrath L. Pfaundler übersendet einen vorläufigen Bericht von Herrn Prof. Franz Streintz in Göttingen: »Über die elektrische Leitfähigkeit einiger Metall-Oxyde und -Sulfide«.

Der Generalsecretär Herr Hofrath V. v. Lang legt eine Arbeit von Herrn Dr. A. Lampa vor: »Über Stromunterbrechung, mit besonderer Berücksichtigung des Wehnelt'schen Unterbrechers«.

Das w. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup in Graz legt zwei im chemischen Institute der Universität in Graz ausgeführte Arbeiten vor:

1. »Über Oxycinchotin«, von Herrn W. Widmar.
2. »Über die Cinchotinsulfonsäure«, von Herrn Theodor Schmid«.

Herr S. Kantor in Wien übermittelt eine vorläufige Mittheilung über eine Erweiterung des Salmon-Schubert'schen Correspondenzprincipes.

Herr Prof. Dr. Gustav Gaertner in Wien legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Über ein neues Instrument zur Bestimmung des Hämoglobingehaltes im Blute«.

Das c. M. Herr Prof. J. M. Pernter überreicht die folgenden drei an der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus durchgeführten Arbeiten:

1. »Der tägliche Gang der Lufttemperatur in Österreich«, von Herrn Josef Valentin.
2. »Der tägliche Temperaturgang von Wien, Hohe Warte, für die Gesammtheit aller Tage, sowie an heiteren und trüben Tagen«, von Herrn Stanislaus Kostlivy.
3. »Über die Haarhygrometer«, von Herrn Josef Pircher.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung des Herrn K. Stanzel vor: »Über die Diffusion in sich selbst«.

Derselbe legt ferner eine Abhandlung des Herrn A. Bromer vor: »Bestimmung einiger Refractionsäquivalente«.

Derselbe legt weiter vor: Die XX. Mittheilung der von ihm gemeinsam mit Herrn Dr. Haschek ausgeführten Untersuchung »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Dr. Wiesner überreicht eine im pflanzenphysiologischen Institute von Herrn Bog. Remec ausgeführte Untersuchung über die specifische Doppelbrechung der Pflanzenfasern.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Moriz Kohn: »Über das Oxim des Diacetonamins und das 1-Methyl-3-Dimethyl-1-3-Diaminopropan«.

Herr Emil Waelsch, Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, übersendet einen vorläufigen Bericht über die Endlichkeit des Systems von Formen höherer Räume.

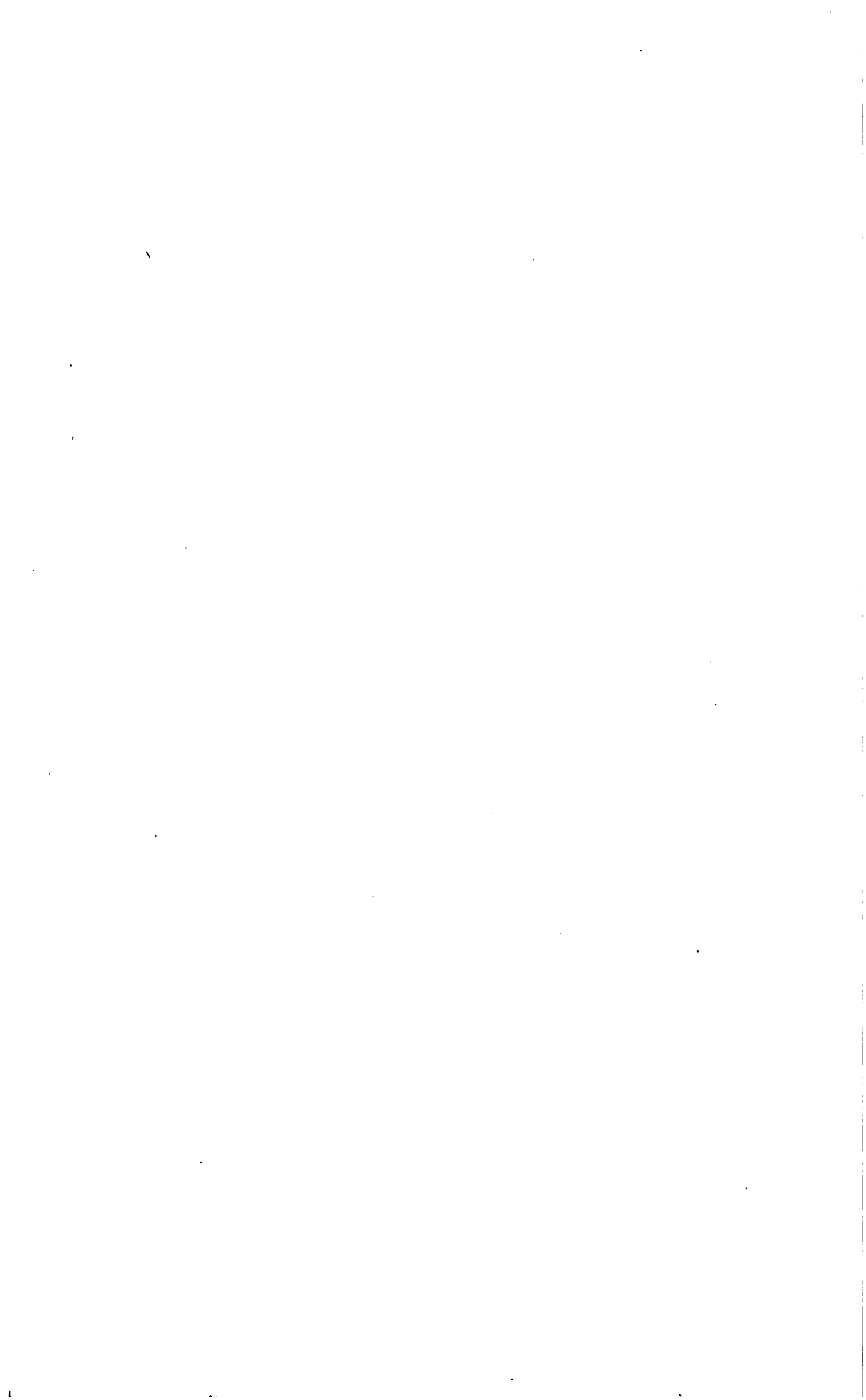
---

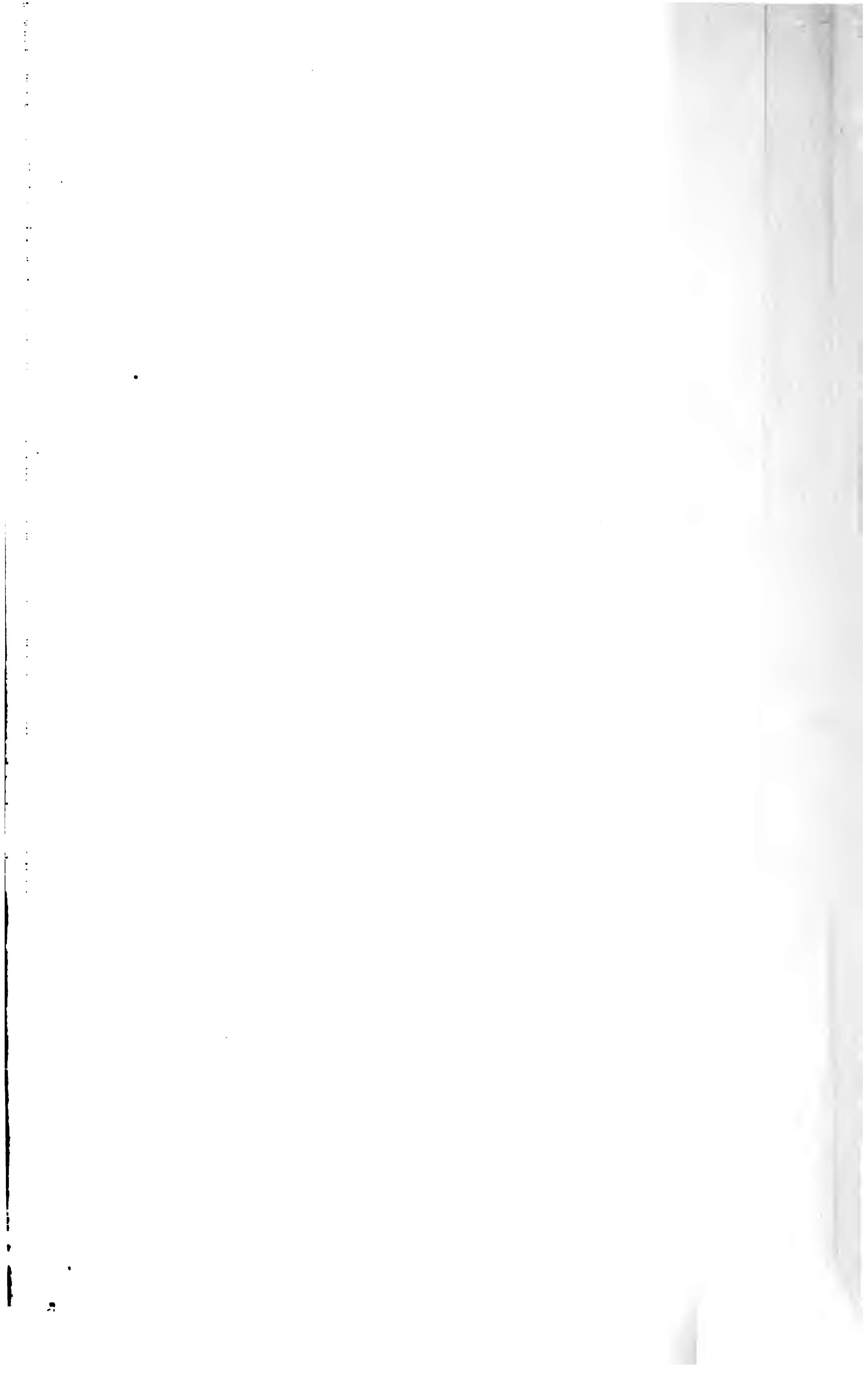
**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

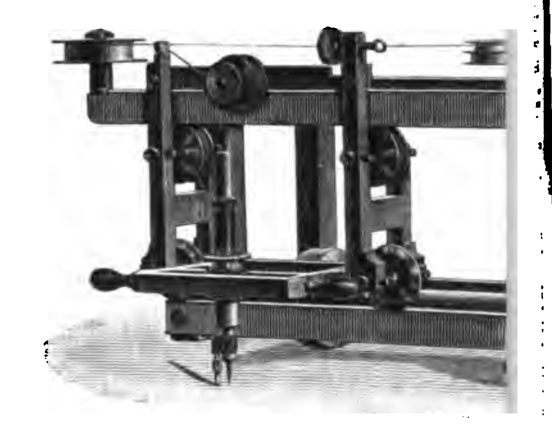
Gränzer J., Dr., Das sudetische Erdbeben vom 10. Jänner 1901. (Mit 1 Karte.) Reichenberg, 1901. 8°.

Hippauf H., Dr., Die Rectification und Quadratur des Kreises. (Mit 2 lithographischen Tafeln.) 1901.

---










Anmerkung. Diese beiden Abbildungen sind der Broschi
möge beachten, dass das in der oberen Abbildung dargestellte I
S. 15 und 16) von dem von mir benutzten abweicht. Die Bezeichn

# Theorie des harmonischen Analysators

von

Dr. **Lucian Grabowski.**

(Mit 2 Tafeln und 15 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. October 1900.)

## Vorwort.

Der harmonische Analysator, ein vor wenigen Jahren von Prof. O. Henrici (London) angegebenes und vom Mechaniker G. Coradi (Zürich) construiertes Instrument, dient zur mechanischen Entwickelung einer graphisch gegebenen Function einer reellen Variablen in eine trigonometrische Reihe. Ich versuche in der vorliegenden Abhandlung, eine vollständigere und strengere Theorie dieses Instrumentes aufzustellen, als sie in der bisher vorhandenen Literatur dieses Gegenstandes enthalten ist. Es handelte sich dabei namentlich um die Berücksichtigung der verschiedenen hier in Betracht kommenden Fehlerquellen, da die allermeisten derselben bis jetzt nicht behandelt und nicht erwähnt worden waren.

Das Instrument, welches mir zur Verfügung stand, ist Eigenthum der königl. Sternwarte in München.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, mit dem Ausdrucke einer tiefgefühlten Dankbarkeit der zahlreichen Rathschläge und Anregungen, sowie des jederzeit bereitwilligen und liebenswürdigen Entgegenkommens zu gedenken, welche ich im Laufe meiner Arbeit von Herrn Prof. Dr. H. Seeliger zu erfahren die Ehre hatte.

Herrn G. Coradi bin ich für die bereitwillige Beantwortung einiger auf gewisse constructive Details des Instrumentes bezüglichen Anfragen, sowie für die Zusendung einer ausführlichen Werkzeichnung des Analysators verpflichtet.

## Einleitung.

1. Der »harmonische Analysator« ist ein Instrument, welches dazu dient, eine für ein bestimmtes Intervall graphisch gegebene Function einer reellen Variablen in die Fourier'sche[1] Reihe mechanisch zu entwickeln, d. h. die Coefficienten mehrerer Anfangsglieder dieser Entwickelung mechanisch zu finden, anstatt dieselben zu berechnen. Er ist vor wenigen Jahren von Prof. O. Henrici in London im Princip erfunden und vom Mechaniker G. Coradi in Zürich construiert worden.

Der harmonische Analysator von Henrici-Coradi hat seine Vorgänger gehabt. Es ist nicht meine Absicht, hier auf die Geschichte jener früher erdachten oder construierten Instrumente, welche die gleiche oder eine ähnliche Aufgabe zu lösen bezweckten, näher einzugehen. Ich erinnere nur an die William Thomson'sche sogenannte Flutberechnungsmaschine als das bekannteste jener Instrumente. Der harmonische Analysator von Henrici-Coradi stellt indessen in Bezug auf Genauigkeit, Handlichkeit, verhältnismäßig einfache Handhabung und — nicht zum mindesten — seine sehr sinnreiche Construction wohl das Vollkommenste dar, was zur Zeit in diesem Gebiete existiert.

Die Entwickelung der gegebenen Function in die Fourier-sche Reihe, oder — wie ich kurz sagen will — die harmonische Analyse derselben, geschieht mit diesem Instrumente in der Weise, dass die gezeichnete Curve, welche diese Function in einem Diagramm $xy$ darstellt, mit dem Fahrstift des Instrumentes befahren wird und sodann an entsprechenden Theilungen des Instrumentes Ablesungen gemacht werden, welche die Werte der gesuchten Coefficienten liefern.

2. Bevor ich auf die Theorie dieses Instrumentes eingehe, erscheint es mir zweckmäßig, zunächst die bekannten Haupt-

[1] Euler war der erste, welcher die Ausdrücke der Coefficienten einer solchen Reihe angegeben hat; dies geschah in einer Abhandlung vom Jahre 1777, welche in den Acta nova Acad. Scient. Petrop., XI. Bd., 1798, veröffentlicht wurde. Trotzdem behalte ich die Bezeichnung »Fourier'sche Reihe« bei, in Anbetracht der Thatsache, dass Fourier der erste war, welcher die außerordentliche Bedeutung und Anwendbarkeit dieser Reihen erkannt hat, und mit Rücksicht darauf, dass diese Bezeichnung üblich ist.

sätze der Theorie der Fourier'schen Reihen in exacter Fassung anzuführen.

1) Ist eine beliebige Function $f(x)$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq c$ definiert, so kann sie bekanntlich, wenn sie innerhalb dieses Intervalles gewissen sogleich zu präcisierenden Bedingungen genügt, für dieses Intervall dargestellt werden durch eine in diesem Intervall convergente, und zwar (natürlich mit Ausnahme etwaiger Unstetigkeitspunkte der Function) gleichmäßig convergente Reihe von folgender Form:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi x}{c} + a_2 \cos\frac{4\pi x}{c} + a_3 \cos\frac{6\pi x}{c} + \ldots + a_n \cos\frac{2n\pi x}{c} + \ldots +$$

$$+ b_1 \sin\frac{2\pi x}{c} + b_2 \sin\frac{4\pi x}{c} + b_3 \sin\frac{6\pi x}{c} + \ldots + b_n \sin\frac{2n\pi x}{c} + \ldots =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{c} + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin\frac{2n\pi x}{c}. \qquad (1)$$

Diese Entwickelung ist es, die man als die Fourier'sche Entwickelung dieser Function bezeichnet.

2) Folgende Eigenschaften der Function $f(x)$ sind hinreichende Bedingungen ihrer Entwickelbarkeit in der angegebenen Form: Sie bleibt in dem Intervall $0 \leqq x \leqq c$ endlich, ist in demselben im allgemeinen stetig, kann aber eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten haben, der Art, dass dort eine plötzliche Änderung ihres Wertes eintritt, sie

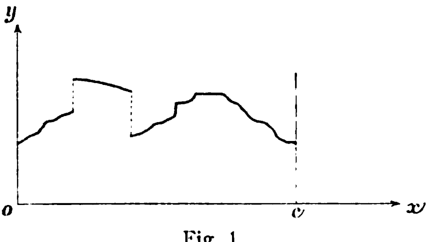



Fig. 1.

hat — schließlich — nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima in dem betrachteten Intervalle. Die Function darf aber auch in einem Punkte $x = x_0$ des Intervalles, oder in mehreren solchen Punkten, unendlich werden, vorausgesetzt, dass dies in der Weise geschieht, dass sie, bei genügend kleinem $\varepsilon$, von $x_0 - \varepsilon$ bis $x_0$ und von $x_0$ bis $x_0 + \varepsilon$ ein constantes Vorzeichen behält und dass das Integral $\int_A^x f(x)\,dx$ einem Grenzwerte

zustrebt, wenn seine obere Grenze $x$ sich dem Werte $x_0$ nähert, unabhängig davon, von welcher Seite sie sich nähert. — Die so formulierten Bedingungen werden öfters kurz die Dirichletschen Bedingungen genannt. Es sind hinreichende, keine nothwendigen Bedingungen; im Gegentheile haben die neueren Untersuchungen den Kreis dieser Bedingungen immer weiter gezogen, so dass er ein immer größeres Gebiet von Functionen umfasste. Doch wäre es nicht am Platze, hier darauf näher einzugehen, da schon diese sogenannten Dirichlet'schen Bedingungen ein sehr weites Gebiet von Functionen und jedenfalls wohl alle in der Natur vorkommenden Functionen umfassen.

3) Wie gesagt, lehrt also die Theorie der Fourier'schen Reihen, dass eine Function $f(x)$, welche für jeden Punkt eines Intervalles $0 \leqq x \leqq c$ definiert ist und innerhalb dieses Intervalles den Dirichlet'schen Bedingungen genügt, für dieses Intervall dargestellt werden kann durch eine Reihe von der Form (1). Dieses Dargestelltwerden ist dabei so verstanden: Für jedes innerhalb des Intervalles liegende $x$ ist die Summe der Reihe gleich dem Werte der Function $f(x)$, mit Ausnahme derjenigen $x$, für welche die vorgelegte Function einen Sprung hat, und derjenigen, bei welchen sie ein der $y$-Axe parallel verlaufendes Stück hat, schließlich mit Ausnahme des Anfangs- und des Endpunktes des Intervalles. Bei diesen Ausnahmswerten von $x$ ist die Summe der Reihe im allgemeinen verschieden von der Function $f(x)$.

4) Ferner lehrt jene Theorie, dass die Aufgabe, eine für das Intervall $0 \leqq x \leqq c$ gegebene Function, welche innerhalb dieses Intervalles den Dirichlet'schen Bedingungen genügt, in eine Reihe von der Form (1) zu entwickeln, welche innerhalb dieses Intervalles gleichmäßig convergent sein und die Function $f(x)$ in dem soeben ausgesprochenen Sinne darstellen soll, eine vollständig bestimmte ist, d. h. dass es nur eine solche Reihe gibt. Diese einzige Lösung der Aufgabe ist gegeben durch die folgenden Ausdrücke der Coefficienten $a, b$:

$$a_0 = \frac{1}{c}\int_0^c f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\cos\frac{2n\pi x}{c}\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\sin\frac{2n\pi x}{c}\,dx. \tag{2}$$

## Theorie des correcten Analysators.

**3.** Auf diese Ergebnisse der Theorie der Fourier'schen Reihen, also auf das System der Formeln (1) und (2), stützt sich nun die Theorie des Coradi'schen Analysators.

Diese setzt damit ein, jene Ausdrücke etwas umzuformen.

Ich bezeichne die ganze vorgelegte Curve mit $S$, und ich schneide aus derselben solche Abschnitte heraus, dass die Grenzpunkte eines jeden Abschnittes zwei aufeinanderfolgenden Ausnahmswerten von $x$ entsprechen. Innerhalb eines jeden dieser Abschnitte bleibt also die Function ausnahmslos stetig und besitzt kein parallel der $y$-Axe verlaufendes endliches Stück. Die Gesammtheit dieser Abschnitte der Curve bezeichne ich mit $(S)$. Dann kann man offenbar die Ausdrücke (2) für $a_n$, $b_n$ so schreiben, indem man für jeden der Abschnitte $(S)$ die in $a_n$ und $b_n$ enthaltenen bestimmten Integrale durch partielle Integration bildet:

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left(y \sin \frac{2n\pi x}{c}\right)_{(S)} - \frac{1}{n\pi}\int_{(S)} \sin \frac{2n\pi x}{c}\, dy$$

$$b_n = \frac{-1}{n\pi}\left(y \cos \frac{2n\pi x}{c}\right)_{(S)} + \frac{1}{n\pi}\int_{(S)} \cos \frac{2n\pi x}{c}\, dy;$$

darin ist die »Substitution über $(S)$«, welche mit dem Symbol $(\;)_{(S)}$ bezeichnet wurde, so verstanden, dass man für jeden der Abschnitte $(S)$ den Betrag bildet, um welchen der vom Symbol eingeschlossene Ausdruck vom Anfangs- bis zum Endpunkte des Abschnittes zunimmt, und die für die einzelnen Abschnitte geltenden Zunahmen summiert; analog ist der Sinn der »Integration über $(S)$«, welche mit dem Symbol $\int_{(S)}$ bezeichnet wurde.

Die Construction des Analysators ist eine derartige, dass eine Verschiebung der Fahrstiftspitze nach oben oder unten (d. h. senkrecht zur Ebene der Zeichnung) keine übrigen Theile des Instrumentes in Bewegung versetzt; nicht die Bewegung der Fahrstiftspitze also, sondern die Bewegung ihrer Projection auf die Ebene der Zeichnung ist maßgebend für die Angaben

des Analysators. Aus dieser einfachen Bemerkung ergibt sich eine wichtige Folgerung. Denn da dieser Projectionspunkt natürlich nicht in einem Punkte der Ebene der Zeichnung verschwinden und darauf in einem anderen wiedererscheinen kann, so folgt, dass nur ununterbrochene Curven mit dem Analysator »befahren« werden. Infolge dessen haben wir hier nicht, wie bisher, von Curven mit Unstetigkeitspunkten und parallel der $y$-Axe verlaufenden Stücken, sondern nur (höchstens) von Curven mit parallel der $y$-Axe verlaufenden Stücken zu sprechen. [Nebenbei sei bemerkt, dass die Fourier'sche Reihe für die oben abgebildete Curve, wie leicht einzusehen, genau dieselbe ist, wie für die Curve, welche aus jener dadurch entsteht, dass die Lücken durch parallel der $y$-Axe verlaufende Stücke ausgefüllt werden.]

Für eine solche Curve nun ist identisch

$$\frac{1}{n\pi}\left(y \sin\frac{2n\pi x}{c}\right)_{(S)} - \frac{1}{n\pi}\int_{(S)} \sin\frac{2n\pi x}{c}\,dy =$$
$$= \frac{1}{n\pi}\left(y \sin\frac{2n\pi x}{c}\right)_{S} - \frac{1}{n\pi}\int_{S} \sin\frac{2n\pi x}{c}\,dy$$

$$\frac{-1}{n\pi}\left(y \cos\frac{2n\pi x}{c}\right)_{(S)} + \frac{1}{n\pi}\int_{(S)} \cos\frac{2n\pi x}{c}\,dy =$$
$$= \frac{-1}{n\pi}\left(y \cos\frac{2n\pi x}{c}\right)_{S} + \frac{1}{n\pi}\int_{S} \cos\frac{2n\pi x}{c}\,dy,$$

wo rechts die Integration und die Substitution auf die ganze vorgelegte Curve $S$ (welche in einem Punkte der $y$-Axe anfängt und in einem Punkte der Ordinatenlinie $x = c$ endet) erstreckt sind; — denn für einen parallel der $y$-Axe verlaufenden Abschnitt $[S]$ der letzteren Curve ist identisch

$$\frac{1}{n\pi}\left(y \sin\frac{2n\pi x}{c}\right)_{[S]} - \frac{1}{n\pi}\int_{[S]} \sin\frac{2n\pi x}{c}\,dy = 0$$

$$\frac{-1}{n\pi}\left(y \cos\frac{2n\pi x}{c}\right)_{[S]} + \frac{1}{n\pi}\int_{[S]} \cos\frac{2n\pi x}{c}\,dy = 0.$$

Wir erhalten daher, wenn wir mit $y_a$ die Ordinate des Anfangspunktes der ganzen Curve $S$, mit $y_e$ die Ordinate ihres Endpunktes bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{n\pi}\int_S \sin\frac{2n\pi x}{c}\,dy \\ b_n &= -\frac{1}{n\pi}(y_e - y_a) + \frac{1}{n\pi}\int_S \cos\frac{2n\pi x}{c}\,dy. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hier führt nun die Theorie des Analysators die Voraussetzung ein, dass $y_e = y_a$ ist. Ist dies nicht der Fall, so muss man bei der Befahrung, nachdem man den Endpunkt der vorgelegten Curve erreicht hat, ein Stück ergänzen, indem man längs der Ordinate so weit hinunter- oder hinaufsteigt, bis die Ordinate gleich $y_a$ wird. Wie wir bereits bemerkt haben, gilt dann die Reihe, welche man für die so ergänzte Curve erhält, auch für die ursprünglich vorgelegte Curve.

Wir erhalten also schließlich die Formeln

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{c} + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin\frac{2n\pi x}{c} \\ a_0 &= \frac{1}{c}\int_0^c f(x)\,dx \qquad a_n = -\frac{1}{n\pi}\int_S \sin\frac{2n\pi x}{c}\,dy \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad b_n = +\frac{1}{n\pi}\int_S \cos\frac{2n\pi x}{c}\,dy. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Aufgabe des Analysators ist, die Integrale $a_n$ und $b_n$, für alle $n$ von $n = 1$ bis zu einem Maximalwerte (bei unserem Instrumente dem Werte $n = 6$), mechanisch zu liefern. Der erste Coefficient, $a_0$, wird durch den Analysator nicht geliefert. Er kann entweder mit einem gewöhnlichen Planimeter oder auch dadurch bestimmt werden, dass man die Reihe der weiteren Glieder, welche man mit Hilfe des Analysators erhalten hat, für irgendeinen Wert von $x$ mit der Ordinate der Zeichnung vergleicht.

**4.** Die Curve, welche man zu analysieren hat, wird eine Relation zwischen zwei veränderlichen Größen (z. B. der Zeit

und der Temperatur) ausdrücken, von denen die eine als Abscisse, die andere als Ordinate aufgetragen wird. Bei dem Auftragen der Curve kann die Beziehung zwischen der Einheit der letzteren Größe und der Längeneinheit willkürlich gewählt werden. Die Beziehung aber zwischen der Einheit der ersteren, als Argument auftretenden Größe und der Längeneinheit ist für den Gebrauch des Analysators eine vorgeschriebene: sie muss so gewählt werden, dass das Intervall der Argument-Größe, für welches die periodische Entwickelung gesucht wird, durch ein Intervall der $x$-Axe dargestellt wird, dessen Länge $c$ gleich ist 360 Millimetern[1] der an einer Schiene des Instrumentes angebrachten Millimetertheilung. Handelt es sich z. B. um den Verlauf der Temperatur im Laufe eines Jahres, so muss, für das Auftragen der Abscissen, 1 Tag $= \frac{360}{365}$ Millimetern gesetzt werden.

Ich halte in dem gegenwärtigen Abschnitte die Annahme fest, dass sowohl das Instrument, als auch das Coordinatennetz des zum Auftragen der Curve verwendeten Millimeterpapieres, vollkommen correct seien. Von dem Papiere wird hier also vorausgesetzt, dass die Linien der $y$-Richtung genau rechtwinklig zu denjenigen der $x$-Richtung stehen, ferner dass die Millimetermaße sowohl der einen wie der anderen Richtung genau richtig sind (und infolge dessen auch mit der Millimetertheilung der erwähnten Schiene übereinstimmen).

Die Einrichtung und die Wirkungsweise des correcten Analysators sind die folgenden. (Siehe Tafel.)

Das Gerüst des Instrumentes besteht aus einem rechtwinkligen länglichen unteren Rahmen, und einem gleichen oberen Rahmen, der mit jenem durch vier Säulen verbunden ist. Längs der vorderen Schiene des unteren Rahmens läuft ein Wagen, der den Fahrstift trägt; er ist mit einem Index versehen, welcher längs der vorderen Schiene des oberen Rahmens gleitet, und zwar von dem Striche »0« bis zum Striche »360« der an dieser Schiene angebrachten Millimetertheilung. Das Gerüst selbst ruht auf dem Papier vermittelst zweier an den

[1] Bei einigen anderen Exemplaren des Analysators beträgt diese Zahl 400.

Seiten angebrachter, an einer gemeinsamen drehbaren Axe festsitzender Laufräder und einer vorn angebrachten kleinen Laufwalze; die Axen der Laufräder und der Walze sind der Schiene, an welcher der Wagen rollt, parallel. Das Instrument muss nun so aufgestellt werden, dass diese Schiene der $x$-Axe der Zeichnung parallel ist, und dass ferner in der äußersten Stellung des Wagens nach links, also wenn der Index an der Schienentheilung 0 zeigt, die Fahrstiftspitze sich auf der $y$-Axe der Zeichnung befindet. Dann kann jeder beliebige Punkt der Zeichnungsebene, für welchen $0 \leqq x \leqq c$ ist, mit dem Fahrstift erreicht werden, indem die $x$-Componente der Verschiebung des Fahrstiftes durch Rollen des Wagens an der Schiene bewerkstelligt wird, die $y$-Componente dagegen durch Rollen der Laufräder — also Bewegung des ganzen Instrumentes — auf der Zeichnungsebene.

Außer diesem Gerüst besteht das Instrument aus einer Anzahl $N$ von Integrierapparaten; der $n^{\text{te}}$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ Integrierapparat liefert sowohl den Coefficient $a_n$, als auch, gleichzeitig, den Coefficient $b_n$. Die Anordnung dieses Integrierapparates ist folgende. Eine mattgeschliffene Glaskugel ist von einem quadratförmigen Rahmen umgeben, in welchem, auf drehbaren Axen, drei Rollen befestigt sind, die die Kugel in Punkten ihres horizontalen größten Kreises (ihres Äquators) berühren; die Axen dieser Rollen liegen selbst in der Ebene dieses größten Kreises, und zwar senkrecht zu den Radienvectoren der betreffenden Berührungspunkte. Zwei dieser Rollen sind »Messrollen« und ihre Berührungspunkte auf dem Äquator der Kugel liegen in einem Abstande von 90° voneinander; die dritte, diesen beiden gegenüber angebrachte Rolle dient nur als Stützrolle, indem sie, vermöge der federnden Wirkung einer hebelartigen Vorrichtung, an welcher ihre Axe gelagert ist, die Kugel beständig an die beiden Messrollen leise andrückt. Der Mittelpunkt der Kugel befindet sich vertical über der Rotationsaxe der beiden Laufräder, und die Kugel stützt sich unten auf die Mantelfläche eines kurzen und breiten Cylinders, der an dieser Axe befestigt ist und dessen geometrische Axe mit derselben zusammenfällt.

Wird der Fahrstift in der Richtung der $x$-Axe verschoben, so wird dadurch der quadratförmige Rahmen des Integrierapparates in Umdrehung versetzt um die durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Verticale, wobei er die Kugel mitnimmt. Von dem Wagen geht nämlich, am Anfange parallel der Schiene verlaufend, ein feiner Silberdraht aus, der, über Wellen (Leitrollen) gespannt, an den Integrierapparat herankommt und eine oben an dem Apparat befindliche Horizontalscheibe umwickelt, deren Spindel durch die hintere Leiste des oberen Gerüstrahmens hindurchgeht und mit dem Rahmen des Integrierapparates fest verbunden ist; der Draht ist in seinem weiteren Verlaufe so über andere Leitrollen geführt, dass er mit seinem Endstücke, hier wieder parallel der Schiene verlaufend, wieder zur Befestigung an dem Wagen gelangt. — Keinerlei relative Bewegung der Kugel gegen die Rollen des Apparates kommt bei dieser Verschiebung zustande, und die Rollen drehen sich um ihre Axen nicht.

Wird dagegen der Fahrstift in der Richtung der $y$-Axe verschoben, was nur durch Fortrollen des ganzen Instrumentes geschehen kann, so dreht sich der an der Axe der Laufräder sitzende Cylinder unter der Kugel um die zur $x$-Axe parallele Gerade, und theilt seine Bewegung der Kugel mit, die sich somit um eine der $x$-Axe parallele Gerade dreht. Diese Rotation überträgt sich auf jede einzelne der drei Rollen: voll, gar nicht, oder zum Theil, — je nach dem Winkelabstande, in welchem auf dem Kugeläquator der Berührungspunkt der Rolle sich von dem zur $x$-Axe parallelen Durchmesser der Kugel befindet.

Niemals kommt also eine Rotation der Kugel um eine andere horizontale Axe zustande, als um die zur $x$-Axe parallele. Es ist für die klare Vorstellung der Wirkungsweise des Analysators von principieller Wichtigkeit, sich zu vergegenwärtigen, dass die Rotation der Kugel immer so erfolgt, dass die verticale Componente dieser Rotation gleich ist der Rotation des Rahmens des Integrierapparates und dass ihre horizontale Componente in den zur $x$-Axe parallelen Radiusvector fällt. Die relative Bewegung der Kugel gegen den Rahmen wird daher immer genau dargestellt durch denjenigen Theil ihrer absoluten Drehung, welcher eine Rotation um den zur $x$-Axe

parallelen Radiusvector ist. Sie ist daher auch immer nur der Componente $dy$ der Verschiebung des Stiftes proportional und hängt von $dx$ durchaus nicht ab.

5. Ich lege nun durch den Mittelpunkt $O$ der Kugel drei Strahlen $OX$, $OY$, $OZ$; den ersteren parallel zur Axe $ox$ der Zeichnung, den zweiten um $+90°$ davon abgelenkt, somit parallel zur Axe $oy$ der Zeichnung, den dritten senkrecht auf die beiden und nach oben gerichtet. Der Winkel, um welchen der nach dem Mittelpunkte einer Rolle gehende Radiusvector abgelenkt ist von der $X$-Axe, diese Ablenkung natürlich von $X$ nach $Y$ gezählt, möge — in Consequenz des Ausdruckes »Äquator« — kurz die »geographische Länge« dieser Rolle genannt werden (einen besseren Ausdruck habe ich nicht finden können). Ich bezeichne die beiden Messrollen mit $M_{n1}$ und $M_{n2}$, die Stützrolle mit $M_{n3}$, und zwar so, dass bei Herumgehen um die Kugel im Sinne der wachsenden zweiten Indices die geographischen Längen wachsen. Es möge gleich erwähnt werden, dass die Rolle $M_{n1}$ mit der Inschrift »Cosinus«, $M_{n2}$ mit der Inschrift »Sinus« versehen sind, und demnach die erstere auch als die Cosinusrolle, die letztere als die Sinusrolle bezeichnet wird. Dieselben Buchstaben $M_{n1}$, $M_{n2}$, $M_{n3}$ sollen außerdem auch die Mittelpunkte der drei Rollen, sowie ihre Halbmesser bezeichnen. Ich bezeichne die geographische Länge der Rolle $M_{ni}$ $(i = 1, 2, 3)$ mit $\lambda_{ni}$. Von den beiden entgegengesetzt gerichteten Strahlen, welche in ihrer Axe liegen, fasse ich als Rotationsaxe diesen auf, welcher nach wachsenden $\lambda$ geht; damit ist der Sinn der »positiven« Rotation der Rolle $M_{ni}$ um ihre Axe definiert. Schließlich bezeichne ich eine unendlich kleine Drehung um die so definierte Rotationsaxe mit $d\mu_{ni}$, so dass $\mu_{ni}$ die »Drehungsphase« der Rolle $M_{ni}$, von einer beliebigen Anfangsphase aus gezählt, darstellt.

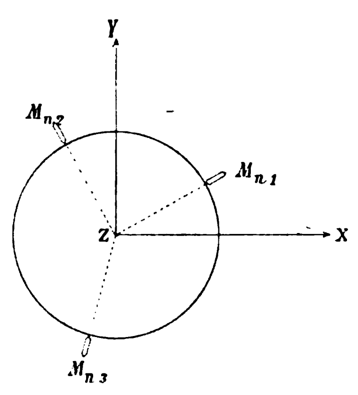


Fig. 2.

Wie dreht sich nun die Rolle $M_{ni}$ um ihre Axe, wenn der Fahrstift längs der vorgelegten Curve $S$ um $ds$ (mit den Componenten $dx$, $dy$) verschoben wird? — Der Cylinder wird um den zur $x$-Axe parallelen Strahl offenbar um den Winkel $\frac{-dy}{L}$ gedreht, wo $L$ der Halbmesser der Laufräder ist; indem sich diese Bewegung auf die Kugel überträgt, wird dadurch eine Drehung der Kugel um die $X$-Axe um den Winkel $+\frac{dy}{L}\cdot\frac{C_n}{K_n}$ erzeugt, wo $C_n$ der Halbmesser des Cylinders und $K_n$ derjenige der Kugel ist. Diese Rotation ist nur der eine Theil der gesammten Drehung der Kugel; dieser stellt aber, nach 4., zugleich die ganze relative Bewegung der Kugel gegen das System der drei Punkte $M_{n1}$, $M_{n2}$, $M_{n3}$ dar. Diese Rotation ist nun äquivalent zwei gleichzeitigen Rotationen um zwei ebenfalls in der Äquatorebene liegende Axen, von denen ich die eine vom Mittelpunkte der Kugel nach dem Punkte $M_{ni}$ gehend annehme, die andere senkrecht darauf, also nach dem Punkte $\lambda = \lambda_{ni} + 90°$ gerichtet. Die erstere Componente, die $+\frac{dy}{L}\cdot\frac{C_n}{K_n}\cos\lambda_{ni}$ beträgt, überträgt sich auf die Rolle $M_{ni}$ gar nicht; die andere dagegen, die

$$+\frac{dy}{L}\cdot\frac{C_n}{K_n}\cos(\lambda_{ni}+90°) = -\frac{dy}{L}\cdot\frac{C_n}{K_n}\sin\lambda_{ni}$$

beträgt, überträgt sich auf die Rolle $M_{ni}$ mit ihrem vollen linearen Betrage, da ihre Axe parallel ist der der Rolle $M_{ni}$. Wir erhalten daher

$$d\mu_{ni} = +\frac{dy}{L}\,\frac{C_n}{K_n}\sin\lambda_{ni}\,.\,\frac{K_n}{M_{ni}} = +\frac{C_n}{LM_{ni}}\sin\lambda_{ni}\,dy.$$

Das $\lambda_{ni}$ ist nun eine Function der Abscisse $x$ des Punktes, zu welchem das betrachtete Element der Curve gehört. Bezeichnet man nämlich den Wert, welchen die geographische Länge der Rolle $M_{ni}$ dann hat, wenn der Fahrstift sich auf der $y$-Axe befindet, mit $\Lambda_{ni}$, so ist das dem Werte $x$ der Abscisse entsprechende $\lambda_{ni}$

$$\lambda_{ni} = \Lambda_{ni} - \frac{x}{H_n},$$

wo $H_n$ den Halbmesser der Horizontalscheibe des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates bezeichnet; denn es muss ein Drahtstück von der Länge $x$ sich von der Scheibe abgewickelt haben, damit der Fahrstift von $x = 0$ zu $x = x$ übergegangen sei, und der Sinn der Umwickelung des Drahtes an der Scheibe ist so getroffen, dass sich die Scheibe um die $Z$-Axe negativ dreht, wenn $x$ wächst. Es ergibt sich also

$$d\mu_{ni} = + \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin\left(\frac{-x}{H_n} + \Lambda_{ni}\right) dy.$$

Die Abmessungen sind nun, bei einem correcten Analysator, so getroffen, dass $\frac{C_n}{LM_{ni}}$ (eine Größe von der Dimension: Länge$^{-1}$)

$$\frac{C_n}{LM_{ni}} = \frac{1}{5\text{ mm}} \qquad (i = 1, 2)$$

und

$$H_n = \frac{c}{2n\pi}$$

ist; man hat dann also

$$d\mu_{ni} = + \frac{1}{5\text{ mm}} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}\right) dy.$$

Ferner ist, bei correctem Zustande des Instrumentes, der Anfangswert der geographischen Länge der Cosinusrolle 180°, der Sinusrolle 270°. Es ist somit schließlich

$$d\mu_{n1} = + \frac{1}{5\text{ mm}} \sin \frac{2n\pi x}{c} dy$$

$$d\mu_{n2} = - \frac{1}{5\text{ mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c} dy.$$

Nachdem man die ganze Curve $S$ befahren hat, beträgt die gesammte Drehung der Messrollen

$$\int_S d\mu_{n1} = \frac{1}{5\,\mathrm{mm}} \int_S \sin \frac{2n\pi x}{c}\, dy$$

$$\int_S d\mu_{n2} = -\frac{1}{5\,\mathrm{mm}} \int_S \cos \frac{2n\pi x}{c}\, dy.$$

An den Axen der Messrollen sitzen nun mit Theilungen versehene Trommeln, welche sich an festen Indices vorbeidrehen. Jede Trommel ist in 100 Theile getheilt, und die Ziffern wachsen, wenn man längs der Peripherie in dem Sinne fortschreitet, in welchem der Winkel $\mu_{ni}$ gezählt wird; die Ablesung nimmt also bei einer positiven Drehung der Rolle ab. An dieser Trommel kann man die Zehntel und Hundertstel einer Revolution ablesen und die Tausendstel noch schätzen. Neben der Messrolle befindet sich außerdem ein Zählrad, welches in 50 Theile getheilt ist und sich um einen Theilstrich dreht während die Messrolle eine ganze Revolution vollzieht; endlich gibt ein zweites, kleines Zählrad, welches an den vier Theilpunkten seiner Peripherie die Ziffern 0, 50, 100, 150 trägt, an, wievielmal 50 Revolutionen ausgeführt worden sind. Diese beiden Zählräder geben also zusammen die Anzahl ganzer Revolutionen. Ich notiere stets die Ablesung so — hierin dem Vorgange des Herrn Bervy[1] folgend —, dass das Komma nach der Anzahl ganzer Revolutionen gesetzt wird.

Man liest nun die Theilungen der Messrolle $M_{ni}$ vor und nach der Befahrung ab und bildet die Differenz: Endablesung —Anfangsablesung. Ich nenne immer diese Differenz kurz die »Ablesung über die befahrene Curve«. Beträgt dieselbe $\alpha_{ni}$, so ist offenbar

$$\alpha_{ni} = -\frac{1}{2\pi} \int_S d\mu_{ni},$$

also

$$\alpha_{n1} = -\frac{1}{1\,\mathrm{cm}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \sin \frac{2n\pi x}{c}\, dy$$

$$\alpha_{n2} = +\frac{1}{1\,\mathrm{cm}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_S \cos \frac{2n\pi x}{c}\, dy.$$

---

[1] Sur un analyseur harmonique. Annales de l'Observatoire Astronomique de Moscou, 1896.

Vergleicht man diese Werte mit den Formeln (4), so sieht man, dass

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_{n1}}{n}\,\mathrm{cm} \\ b_n &= \frac{\alpha_{n2}}{n}\,\mathrm{cm} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ist. Somit ist die Aufgabe des Analysators gelöst.

**6.** Als Anhang an die obige Theorie des correcten Analysators mögen hier in Bezug auf die Einrichtung des Instrumentes einige nähere Angaben Platz finden, welche für das Spätere von Nutzen sein werden, welche aber oben, wo von der Einrichtung nur das Principielle in Frage kam, übergangen worden sind.

Die einzelnen Integrierapparate des Analysators unterscheiden sich von einander nur durch die Durchmesser ihrer Scheiben; dieser Durchmesser ist dem $n$ umgekehrt proportional. Herr Coradi ordnet nun oberhalb jeder Scheibe coaxial eine zweite Scheibe an, mit entsprechend kleinerem Durchmesser, so dass, wenn der Draht von den unteren Scheiben weggenommen und auf die oberen verlegt wird, gleichsam neue Integrierapparate in Thätigkeit gesetzt werden: der erste Integrierapparat fungiert nunmehr als der $(k+1)^{\text{te}}$, der zweite als der $(k+2)^{\text{te}}, \ldots$, der $k$-te als der $(2k)^{\text{te}}$, wenn $k$ die Anzahl der vorhandenen Kugeln bedeutet. Auf diese Weise besteht also z. B. bei unserem Instrumente, das 3 Kugeln besitzt, der erste Integrierapparat aus der zugehörigen Glaskugel, dem Cylinder, den Messrollen und der unteren Horizontalscheibe; der vierte aber aus derselben Kugel, Cylinder, Messrollen und der oberen Horizontalscheibe. Es besitzt daher jeder nach diesem Typus gebaute Analysator eigentlich $N = 2k$ Integrierapparate, wovon allerdings nur die Hälfte gleichzeitig functioniert, so dass die Bestimmung höherer Glieder eine nochmalige Umfahrung der Curve erfordert. —

Über der hinteren Längsleiste des oberen Gerüstrahmens liegen die drei Doppelscheiben; an jedem der beiden seitlichen Querstäbe desselben sind in ähnlicher Weise je zwei Leitrollen angebracht, die hintereinander liegen und sich um verticale

Axen drehen. Der obere Theil des Wagens trägt, etwa in der Höhe der Leitrollen und Scheiben, ebenfalls zwei Rollen auf verticalen Axen, die sich aber bei der regelmäßigen Benutzung des Instrumentes nicht drehen. Die eine davon ist die »Vorrathsrolle«; auf dieselbe wird das nach dem Anlegen des Drahtes übrigbleibende Stück aufgewickelt, sein Ende durch eine in dem Rande der oberen Rollenbacke befindliche Öffnung hindurchgelassen und an dieser Backe festgeschraubt. Vermöge der Verzahnung des Randes der unteren Backe und eines ebenfalls an dem Wagen angebrachten federnden Daumens, der zwischen die Zähne einspringt, bleibt die Vorrathsrolle dauernd gehemmt; sie kann aber nach Zurückziehung des Daumens um einen oder mehrere Zähne gedreht werden und dient auf diese Weise also auch zum Spannen des Drahtes. Die zweite der Wagenrollen liegt hinter der Vorrathsrolle und ist eine Leitrolle.

Verfolgt man nun den Verlauf des Drahtes von der Vorrathsrolle ausgehend, während das Instrument auf die Bestimmung der drei unteren Glieder eingerichtet ist, so ist er der folgende. Der Draht bildet die linksliegende äußere gemeinsame Tangente der beiden Wagenrollen; umwickelt die Wagen-Leitrolle (in dem negativen Sinne), längs etwa $^3/_4$ ihrer Peripherie; bildet die vornliegende äußere gemeinsame Tangente der Wagen-Leitrolle und der vorderen linken (Gerüst-) Leitrolle, wobei er genau parallel zur Führungsrichtung des Wagens liegt. Dann verläuft er über die beiden linken Leitrollen, über die drei von links nach rechts aufeinanderfolgenden Scheiben des 3ten, 2ten und 1ten Integrierapparates, und über die vordere rechte Leitrolle; er bildet dabei zwischen den beiden linken Leitrollen ihre linksliegende äußere gemeinsame Tangente, zwischen der hinteren linken Leitrolle und der nächsten Scheibe, sowie zwischen der äußersten Scheibe rechts und der vorderen rechten Leitrolle die innere, zwischen je zwei Scheiben aber die vornliegende äußere gemeinsame Tangente, und berührt die linken Rollen längs je etwa $^1/_4$, die rechte längs etwa $^1/_2$, die Scheiben dagegen (an denen er im positiven Sinne verläuft) längs je etwa einer vollen Peripherie. Von der rechten Leitrolle aus bis zu seinem anderen Befestigungspunkte an dem Wagen liegt er wieder parallel zur Führungsschiene. Die

Befestigung ist hier in der Weise ausgeführt, dass an diesem Ende des Drahtes eine Öse gedreht und diese Öse auf den Hals eines in den oberen Theil des Wagens eingeschraubten kleinen Bolzens aufgesteckt ist.

Ist das Instrument dagegen auf die Bestimmung der höheren Glieder eingerichtet, so treten in dem obigen Verlaufe an Stelle der unteren die oberen Scheiben auf; außerdem aber wird dann zwischen die äußerste Scheibe rechts und die vordere rechte Leitrolle, um eine möglichst geradlinige Führung des Drahtes zu erzielen, noch die hintere rechte Leitrolle eingeschaltet. Der Draht bildet dabei zwischen der erwähnten Scheibe und der hinteren rechten Leitrolle ihre innere, zwischen dieser und der vorderen rechten Leitrolle ihre rechtsliegende äußere gemeinsame Tangente und berührt diese beiden Leitrollen längs etwa je $^1/_4$ ihrer Peripherien. Da ferner in diesem Falle der Draht auch an sämmtlichen Leitrollen etwas höher zu liegen kommt als in dem früheren, so besitzt die Wagen-Leitrolle um ihre Mantelfläche eine untere und eine obere Nuth für den Draht; ebenso muss in dem letzteren Falle der Schraubenbolzen, welcher das andere Drahtende festhält, in die obere Mutter eingeschraubt sein. —

An seinem unteren Theil trägt der Wagen vorne eine dicke, längliche, horizontale Metallplatte; durch eine Längsspalte in dieser Platte ist die verticale Röhre hindurchgelassen, in welcher der Fahrstift eingebettet ist. Die Röhre kann in der Spalte nach links und rechts (und nur in dieser Richtung) verrückt und dann in der gewählten Stellung an der Platte festgeklemmt werden. Ist also das Zusammentreffen der Stellung des Wagenindex auf dem Theilstriche 0 der oberen Schiene mit der Stellung der Fahrstiftspitze auf der $y$-Axe der Zeichnung nicht durch die Aufstellung des Instrumentes bereits genau erreicht, so kann es vermöge dieser Einrichtung herbeigeführt werden, ohne dass es nöthig wäre, die Aufstellung des Instrumentes zu ändern. Der Fahrstift selbst ragt aus der Röhre oben und unten heraus, ist oben knopfförmig erweitert, unten zugespitzt, und kann in der Röhre frei gedreht sowie gehoben und gesenkt werden. Die Spitze soll nicht direct das Papier berühren, sondern etwas darüber schweben. Um nun das

Herabfallen des Fahrstiftes auf das Papier zu verhindern und ihn höher oder niedriger über dem Papier stellen zu können, ist folgende Einrichtung getroffen. An den Fahrstift wird, etwas oberhalb der Spitze, eine kurze, bloß durch Reibung daran festsitzende Hülse aufgesteckt, welche mit einem seitlichen, unten abgerundeten Fuß versehen ist. Mit diesem Fuße stützt sie, vermöge des Gewichtes des Fahrstiftes, sich auf das Papier. —

Der in der Theorie erwähnte quadratförmige Rahmen des Integrierapparates besteht aus einem unteren und einem oberen Rahmen, welche durch Säulen mit einander verbunden sind. An passender Stelle des unteren Rahmens befindet sich der Drehungspunkt eines rechtwinkligen Winkelhebels, des »Stützrollen-Hebels«. Der eine, nach oben gehende Arm dieses Hebels hat etwa die Form einer kurzen (geschlossenen) Gabel, in welcher quer die Axe der Stützrolle eingesetzt ist. Der andere Arm ist in einen Celluloidring ausgebildet, der den unteren Theil der Kugel umgibt ohne sie zu berühren, und hat als seine Verlängerung über den Drehungspunkt hinaus einen Flügel; über dem letzteren befindet sich ein in einem Vorsprung des Rahmens eingebettetes Schräubchen, durch welches man den Flügel niederdrücken oder freilassen, also den ganzen Stützrollen-Hebel drehen kann. Der obere Rahmen des Integrierapparates hat als innere Begrenzung wieder einen Celluloidring.

Ist nun das Instrument in gebrauchsfertigem Zustande, so ist das Schräubchen hinaufgeschraubt, der ringförmige untere Hebelarm ist gesenkt und lässt die Kugel frei, die dann den Cylinder berührt, und drückt durch sein Gewicht die im anderen Hebelarme eingesetzte Stützrolle an die Kugel an. Nach Gebrauch des Instrumentes hebt man vermittels des Schräubchens den unteren Ring empor, wobei gleichzeitig die Stützrolle sich von der Kugel entfernt; der Ring nimmt die Kugel auf, welche, indem sie sich auf ihn legt, von den Messrollen wegrückt; dann hebt er die Kugel solange empor, vom Cylinder weg, bis sie den Celluloidring des oberen Rahmens erreicht und so zwischen den beiden Ringen festgehalten bleibt.

## Die Fehler des Instrumentes.

**7.** Der Gegenstand meiner bisherigen Ausführungen (1. bis 5.) war die Theorie des correcten Analysators, und diese Ausführungen enthalten im wesentlichen nichts neues gegenüber der bereits vorhandenen Literatur des Analysators. Diese Literatur ist übrigens bis heute sehr spärlich, was sich wohl einfach dadurch erklärt, dass das Instrument immer noch eine ziemlich recente Erfindung ist und bis jetzt nur in wenigen Händen sich befindet. Sie besteht in der Hauptsache aus zwei Publicationen. Erstens wurde vom Constructeur Coradi eine kleine Begleitschrift zu dem Instrumente herausgegeben unter dem Titel: »Der Harmonische Analysator« (Zürich 1894); sie enthält in ihrer ersten Hälfte die Theorie des Analysators, verfasst von Prof. O. Henrici, in der zweiten einige auf die praktische Verwendung des Instrumentes bezügliche Bemerkungen von Herrn Coradi. Zweitens ist ein Aufsatz von Herrn Bervy zu erwähnen, unter dem Titel: »Sur un analyseur harmonique«, im Jahre 1896 in den »Annales de l'Observatoire Astronomique de Moscou« erschienen.

Die Frage nach den Instrumentalfehlern des Analysators und den Methoden ihrer Berücksichtigung ist bis jetzt noch sehr fragmentarisch bearbeitet. Eine eingehendere Behandlung haben nur zwei Fehlerquellen erfahren. Schon in der oben erwähnten Coradi'schen Schrift wurde auf die »Excentricität der Kugel« hingewiesen, d. h. den Umstand, dass die Umdrehungsaxe des Rahmens des Integrierapparates (welche hierbei durch den Mittelpunkt des Cylinders gehend vorausgesetzt wird) nicht genau durch das Centrum der Kugel geht. Zugleich wurde auch schon in dieser Schrift angegeben, dass und wie der Einfluss dieses Fehlers auf das Resultat der Analyse durch eine einfache Maßnahme aufgehoben werden kann. Ich komme an der geeigneten Stelle eingehend darauf zurück.

Ferner hat Herr Bervy in seiner Abhandlung eine andere Fehlerquelle behandelt: die Ausziehung des Drahtes durch die Kraft der führenden Hand. Das Stück des Drahtes, welches hinter dem Fahrstift liegt und einerseits durch denselben, andererseits durch die Scheibe $H_n$ begrenzt ist, ist infolge

dieses Umstandes ausgezogen; wäre der Draht unausziehbar, so würde sich für dieselbe Stellung $x$ des Fahrstiftes schon ein längeres Stück von der Peripherie der Scheibe abgewickelt haben müssen. Da diese Verlängerung eine lineare Function des $x$ ist, so macht Herr Bervy dafür den Ansatz — in unserer Bezeichnungsweise —

$$\lambda_{ni} = (i+1)\frac{\pi}{2} + A_n + B_n x \qquad (i = 1, 2),$$

wo $A_n, B_n$ Instrumentalconstanten sind. Auf die weitere Behandlung des Einflusses dieser Fehlerquelle kommen wir wieder später zurück. —

Ich habe mich nun mit diesen Fragen eingehend beschäftigt und versucht, eine möglichst vollständige Theorie des fehlerhaften Analysators zu construieren.

Ich habe dabei zunächst eine Liste der in Betracht kommenden Fehlerquellen aufgestellt, welche, wie ich glaube, als vollständig angesehen werden kann. Diese einzelnen Fehlerquellen sollen hier jetzt der Reihe nach untersucht werden. Alle Fehler werden dabei als klein von der ersten Ordnung angenommen, und Größen zweiter Ordnung werden vernachlässigt. Demgemäß werden auch immer, bei Betrachtung einer Fehlerquelle, die übrigen außeracht gelassen.

In den folgenden Betrachtungen werden behandelt zuerst die verschiedenen »Orientierungs- und Positionsfehler«, d. h. solche, die die gegenseitige Lage der einzelnen Organe des Instrumentes betreffen; darauf die »metrischen« Fehler, die sich auf Dimensionen beziehen; zuletzt die »Fehler des Anfangszustandes«. Ferner kommen außer den genannten Fehlerarten, die man als »geometrische« bezeichnen könnte, noch gewisse physikalische Fehlerquellen in Betracht (wie Einflüsse der Temperatur, Ausziehung des Drahtes), die in einem Schlussparagraph besprochen werden sollen.

Das Coordinatensystem $oxyz$ wird, in dem ganzen Abschnitte »Die Fehler des Instrumentes«, in folgender Weise definiert.

Nachdem das Instrument aufgestellt worden ist, gilt die Unterlage des Instrumentes als die Ebene $xy$. Die $x$-Richtung

ist die, in welcher der Fahrstift sich verschiebt, wenn er bei nichtrollendem Instrumente längs der Schiene im Sinne wachsender Schienenablesungen bewegt wird; die $y$-Richtung ist die, in welcher das Instrument sich beim Rollen bewegt. Die $z$-Axe ist die nach oben gehende Normale der Ebene $xy$. Es wird in diesem Abschnitt noch angenommen, dass die Schiene parallel der Umdrehungsaxe der Laufräder ist; das System $xy$ ist daher ein rechtwinkeliges, und es soll die $y$-Richtung von der $x$-Richtung um $+90°$ abgelenkt sein. Der Anfangspunkt $o$ wird in einem beliebigen Punkte derjenigen Geraden angenommen, welche der Fahrstift beschreibt, wenn der Index auf dem Theilstrich 0 der Schienentheilung steht und das Instrument rollt. —

## Wirkungen der einzelnen Fehlerquellen.

8. Wir nehmen wieder, für jeden einzelnen (den $n^{\text{ten}}$) Integrierapparat, ein zum Gerüste des Instrumentes festes Coordinatensystem $OXYZ$ an; dieses System verschiebt sich also nur beim Rollen des Instrumentes. Als Anfangspunkt $O$ nehmen wir den Schnittpunkt der Umdrehungsaxe des $n^{\text{ten}}$ Rahmens mit derjenigen horizontalen, d. h. zur Unterlage parallelen, Ebene, welche (in der Anfangsstellung des Instrumentes) den Mittelpunkt der Kugel enthält. Die Axen $OX$, $OY$, $OZ$ führen wir parallel den Axen $ox$, $oy$, $oz$.

Wir bezeichnen als die »geographische Länge«, $\lambda_{ni}$, des Berührungspunktes der Rolle $M_{ni}$ mit der Kugel, die Ablenkung in der $XY$-Ebene des von $O$ nach dem Berührungspunkte gerichteten Strahles von der Axe $OX$. Mit $\mu_{ni}$ bezeichnen wir die Drehungsphase der Rolle $M_{ni}$ um ihre Umdrehungsaxe, die wir als im Sinne der wachsenden geographischen Längen gehend betrachten, womit der Sinn, in welchem die Drehungsphase gezählt wird, schon definiert ist; die Anfangs-Phase, von welcher aus sie gezählt wird, brauchen wir nicht festzusetzen.

9. Nehmen wir zuerst an, die Rolle $M_{ni}$ sitze zwar senkrecht auf ihrer Axe, diese Axe aber besitze einen kleinen Azimutalfehler, $\alpha$; d. h., sie sei von dem Radiusvector des Berührungspunktes um den Winkel $+90°+\alpha$ anstatt um $+90°$ abgelenkt. Bei einer Verschiebung des Fahrstiftes parallel zur

$x$-Axe wird dieser Umstand offenbar keinen Einfluss haben: der Rahmen wird sich um die $Z$-Axe genau so drehen, wie bei correctem Analysator, und es wird auch keine Drehung der Rolle um ihre Axe hervorgerufen werden. Bei einer Verschiebung des Fahrstiftes parallel der $y$-Axe dreht der Antrieb, welchen der momentan in Berührung mit der Rolle befindliche Punkt der Kugel durch seine (verticale) Verschiebung ausübt auf die Messrolle, diese letztere genau so, wie er eine Rolle (in der Figur punktiert gezeichnet) drehen würde, welche, die Kugel in demselben Punkte berührend und ihre Umdrehungsaxe gleichfalls senkrecht zu ihrer Ebene habend, frei vom Azimutalfehler der Axe wäre; die Messrolle dreht sich also um einen Winkel $d\mu_{ni}$, der gegeben ist durch die Relation

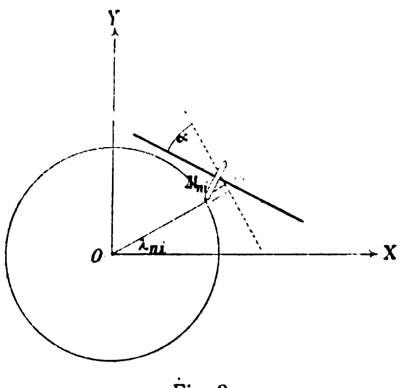



Fig. 3.

$$M_{ni} \,.\, d\mu_{ni} = K_n \sin\lambda_{ni} \,.\left(\frac{C_n}{K_n}\,\frac{dy}{L}\right),$$

übereinstimmend mit dem Falle des correcten Analysators.

**10.** Betrachten wir ferner den Fall, dass die Umdrehungsaxe, auf welcher die Messrolle rechtwinklig aufgesetzt ist, eine kleine Elevation, $\beta$, besitzt; d. h., sie ist in der zum Radiusvector des Berührungspunktes senkrechten Ebene um den Winkel $\beta$ von der Tangente des Äquators abgelenkt. (Siehe Fig. 4.) Der Fahrstift werde parallel zur Axe $ox$ um $dx$ verschoben. Die Mittelpunkte der Rollen $M_{n1}$, $M_{n2}$, $M_{n3}$ erhalten dadurch eine gemeinschaftliche Drehung um die $Z$-Axe um den Winkel $d\lambda_n = -n\dfrac{2\pi dx}{c}$, und erfährt der Mittelpunkt der Rolle $M_{ni}$ die lineare Verschiebung, in der mit einem Pfeilchen angedeuteten Richtung, $(K_n + M_{ni})\dfrac{2n\pi dx}{c}$. Es ist nun nicht ausgeschlossen,

dass dabei die Rolle $M_{ni}$ gleichzeitig um ihre Axe rotiert, indem sie, anstatt die Kugel in die Umdrehung um die $Z$-Axe vollständig mitzunehmen, auf der Kugeloberfläche theilweise rollt. Indessen wird der Betrag dieser rollenden Bewegung offenbar lediglich von der Verschiebung $dx$ abhängen, dagegen unabhängig sein von dem dabei festgehaltenen Werte des $y$; eine gleiche und entgegengesetzte Verschiebung $dx$ wird eine gleiche und entgegengesetzte Drehung der Rolle um ihre Axe hervorrufen, auch dann, wenn inzwischen dieser Wert von $y$ sich verändert haben sollte. Daraus folgt, dass der in Rede stehende Einfluss der Elevation auf die Rollenablesung sich im Resultate aufheben wird, wenn bei der Umfahrung der Fahrstift zuletzt in einem Punkte anlangt, welcher das gleiche $x$ wie der Ausgangspunkt besitzt. Wie wir später genau sehen werden, macht die Constatierung dieser Eigenschaft die quantitative Untersuchung der betreffenden Fehlerwirkung überflüssig.

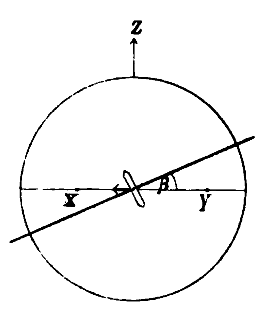


Fig. 4.

Wird aber der Fahrstift parallel der Axe $oy$ um $dy$ verschoben, so wirkt der (verticale) Antrieb, welchen der momentan in Berührung befindliche Kugelpunkt dadurch erhält und welcher $K_n \sin\lambda_{ni} \cdot \left(\frac{C_n}{K_n} \frac{dy}{L}\right)$ beträgt, nicht wie bei correctem Analysator in der zur Axe und zum Radius der Rolle senkrechten Richtung allein, sondern hat noch eine Componente parallel zur Rollenaxe.

Die tangentiale Componente bringt ungehindert die relative Bewegung des berührenden Rollenpunktes um die Rollenaxe hervor, und da sie $\frac{C_n \sin\lambda_{ni}}{L} dy . \cos\beta$ beträgt, ertheilt sie der Rolle die Drehung

$$d\mu_{ni} = \frac{C_n \sin\lambda_{ni} \cos\beta}{LM_{ni}} dy,$$

wo der Coefficient von $dy$ bis auf Größen zweiter Ordnung der Elevation gleich ist demjenigen bei correctem Analysator.

Die in der Richtung der Umdrehungsaxe wirkende Componente dagegen kann keine Drehung der Rolle um die Axe verursachen, sondern wirkt auf die Axe selbst. Man kann sie sich wieder zerlegt denken in eine horizontale und eine verticale Componente. Die erstere würde dahin wirken, den Rahmen um die $Z$-Axe zu drehen; sie kann aber nicht zustande kommen, denn diese Bewegung würde, da die Stellung des Fahrstiftes durch die führende beziehungsweise haltende Hand fest bestimmt ist, die Überwindung des Ausziehungswiderstandes des Drahtes erfordern, welcher Widerstand viel größer ist, als die im Falle der Unterdrückung dieser Bewegung entstehende Rotationsreibung[1] der Kugel an dem Cylinder. Die verticale Componente, die übrigens von Haus aus klein von der zweiten Ordnung ist, sucht die Axe beziehungsweise den Rahmen in die Höhe zu heben und wird durch die Bauart des Integrierapparates vernichtet.

**11.** Nehmen wir jetzt an, die Umdrehungsaxe der Rolle liege richtig, die Rolle selbst aber sei schräg auf ihr befestigt; nämlich, die Normale der Rolle bilde einen kleinen Winkel $\gamma$ mit der Axe. In diesem Falle wirkt der Antrieb, welchen bei der Verschiebung $dy$ des Fahrstiftes der momentan in Berührung befindliche Kugelpunkt auf den berührten Punkt der Rollenperipherie ausübt, stets in der zur Umdrehungsaxe (und zum Berührungsradius) der Rolle senkrechten Richtung, wie die momentane Drehungsphase der Rolle auch sein mag. Diese Bewegung bringt also nur eine Drehung der Rolle um ihre Axe hervor, und zwar die, welcher die lineare Verschiebung des Berührungspunktes um

$$\frac{C_n \sin \lambda_{ni} dy}{L}$$

entspricht, wie bei correctem Analysator. Hierin ist $\lambda_{ni}$ die geographische Länge des Berührungspunktes. Diese ist nun

[1] Man kann neben die beiden üblichen Begriffe der »Gleit-« und »Rollreibung« noch einen dritten, der »Rotationsreibung« stellen. Ich verstehe darunter die Reibung, welche zustande kommt, wenn von zwei sich in einem Punkte berührenden Körpern der eine eine relative Rotation gegen den anderen ausführt, deren Axe auf der Tangentialebene im Berührungspunkte senkrecht steht.

offenbar in unserem Falle, entgegen dem des correcten Analysators, von der Drehungsphase der Rolle abhängig. In einem gegebenen Augenblicke bilde die Ebene, welche die Umdrehungsaxe und deren Projection auf die Ebene der Rolle enthält, den Winkel $\psi$ mit der Ebene, welche die Umdrehungsaxe enthält und der $Z$-Axe parallel ist. Dann ist $\lambda_{ni}$ eine Function von $\psi$ und kann daher nur für bestimmte Werte von $\psi$ den richtigen Wert $\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c}$ haben. Bezeichnen wir die geographische Länge des Mittelpunktes der Rolle mit

$$\left(\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c}\right) + \sigma,$$

wo $\sigma$ eine Constante ist, so ist die geographische Länge des Berührungspunktes

$$\lambda_{ni} = \left(\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c}\right) + \sigma + \Delta\lambda_{ni},$$

wo $\Delta\lambda_{ni}$ eine Function von $\psi$ ist. Das constante Fehlerglied, $\sigma$, wird sich, wie man sieht, vereinigen mit einem »Fehler des Anfangszustandes«, nämlich der Verschiedenheit des Anfangswertes $\Lambda_{ni}$ der geographischen Länge der Rolle von $(i+1)\frac{\pi}{2}$, einer Fehlerquelle, die später ja für sich berücksichtigt werden soll; der Einfachheit halber lasse ich also dieses Glied schon hier fort.

Will man nun den der obigen linearen Verschiebung entsprechenden Drehungswinkel finden, so muss man berücksichtigen, dass der Arm dieser Verschiebung, d. h der Abstand ihres Angriffspunktes von der Umdrehungsaxe, in unserem Falle nicht gleich $M_{ni}$ ist: mit $\psi$ ändert er sich. Man sieht indessen durch Betrachtung seiner extremen Werte sofort, dass diese Variationen nur von zweiter Ordnung, also zu vernachlässigen sind. Man erhält also für die Drehung der Rolle, wenn man noch den Ausdruck für $\lambda_{ni}$ einsetzt,

$$d\mu_{ni} = \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin\left\{\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c} + \Delta\lambda_{ni}\right\} dy =$$

$$= \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin\left(\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c}\right) dy + \frac{C_n}{LM_{ni}} \cos\left(\Lambda_{ni} - \frac{2n\pi x}{c}\right) dy . \Delta\lambda_{ni}.$$

Das zweite Glied rechts ist das Fehlerglied. Der erste Factor (bis zum Punkte) in demselben ist, ebenso wie das vorhergehende Glied, von der 0ten Ordnung. Der zweite Factor, $\Delta\lambda_{ni}$, erreicht seinen größten Wert, wenn $\psi = 90°$ ist; er beträgt aber dann nur $\frac{M_{ni}\beta}{K_n}$. Die kleine Größe erster Ordnung $\beta$ erscheint hier noch mit dem kleinen Factor $\frac{M_{ni}}{K_n}$ multipliciert. Man kann sich infolge dessen erlauben, die Größe $\Delta\lambda_{ni}$, obwohl sie nicht im strengen Sinne des Wortes als eine Größe zweiter Ordnung bezeichnet werden kann, zu vernachlässigen. Dann hat man

$$d\mu_{ni} = \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}\right) dy,$$

genau so, wie bei correctem Analysator. Ich bemerke übrigens, dass durch eine Maßnahme beim Analysieren, welche zur Elimination einer anderen Fehlerquelle dient und von welcher später (24.) die Rede sein wird, auch das soeben betrachtete Fehlerglied mit eliminiert wird.

Wird dagegen der Fahrstift verschoben parallel zur $x$-Axe um $dx$, so wird der Rahmen um die $Z$-Axe gedreht. Jede Rolle erhält dadurch einen Antrieb parallel zu ihrer Umdrehungsaxe, und es ist klar, dass dabei ihre schräge Befestigung auf dieser Axe weder ihre Lage in der $XY$-Ebene irgendwie alterieren. noch eine Drehung um diese Axe verursachen kann.

**12.** Betrachten wir jetzt den Fall (siehe Fig. 5), dass der Cylinder $C_n$ [1] schräg auf seiner Axe (auf seiner Walze) befestigt ist, so dass seine geometrische, d. h. zu den Erzeugenden parallele Axe mit seiner Umdrehungsaxe einen kleinen Winkel $\varepsilon$ bildet. Da bei correctem Analysator der Mittelpunkt des Durchschnittes des Cylinders durch die $YZ$-Ebene — diesen Punkt nenne ich den Mittelpunkt des Cylinders — auf der Umdrehungsaxe des Cylinders liegt und infolge dessen durch die $Z$-Axe getroffen wird, so hat man auch hier anzunehmen, dies

[1] In der Figur ist der Cylinder der Deutlichkeit halber übertrieben lang gezeichnet.

sei der Fall. Man lege nun durch den Mittelpunkt des Cylinders ein rechtwinkliges Coordinatensystem $C_n\xi\eta\zeta$, parallel dem Coordinatensystem $OXYZ$; dann ist $X = \xi$, $Y = \eta$, $Z = \zeta - h$, wo $h$ die Höhe des Kugelmittelpunktes über dem Cylindermittelpunkte bezeichnet. Bei der Fahrt parallel der Axe $oy$ wird die geometrische Axe des Cylinders um die $\xi$-Axe einen Kegel beschreiben. Nennen wir diejenige Lage der Cylinderaxe, in welcher sie in der $\xi\zeta$-Ebene liegt und von links oben nach rechts unten geht, ihre Anfangslage; den Winkel, um welchen der Cylinder von dieser Anfangslage aus gedreht werden müsste

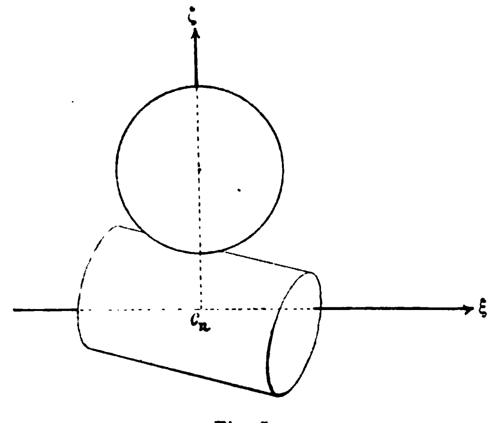



Fig. 5.

im Sinne von der $\zeta$- gegen die $\eta$-Axe, um die im gegebenen Augenblicke (siehe Fig. 5) stattfindende Lage einzunehmen, bezeichnen wir mit $\varphi$. Die Richtung der Cylinderaxe ist also vollständig definiert durch die Winkel $\varepsilon$ (constant) und $\varphi$ (veränderlich).

Für einen bestimmten Wert von $\varphi$, sind die Coordinaten $\xi_0\eta_0\zeta_0$ des Berührungspunktes des Cylinders mit der Kugel, die Höhe $h$ des Kugelmitttelpunktes, sowie die Verrückung $dl$, welche der momentan in Berührung befindliche materielle Punkt des Cylinders erfährt bei weiterer Drehung des Cylinders um $d\varphi$, bestimmt; die Drehung der Kugel, welche erfolgen wird, ist die, welche ihr ertheilt wird durch die in die Tangentialebene der Kugel fallende Componente der Verrückung $\overline{dl}$ des Cylinder-

punktes; die zur Kugel senkrechte Componente dieser Verrückung hat auf die Drehung der Kugel keinen Einfluss.[1] Nehmen wir vorläufig an, die $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, h$ seien für das gegebene $\varphi$ bereits berechnet; man kann schon im Voraus bemerken, dass es jedenfalls sein wird $\xi_0 = [\varepsilon^{\geqq 1}]$, $\eta_0 = [\varepsilon^{\geqq 1}]$, $\zeta_0 = C_n + [\varepsilon^{\geqq 1}]$, $h - \zeta_0 = K_n + [\varepsilon^{\geqq 1}]$, wo jedesmal unter $[\varepsilon^{\nu}]$ Glieder von $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung des $\varepsilon$ verstanden werden. Die Verrückung $\overline{dl}$ ist ein Vector, dessen Componenten längs der Axen $\xi\eta\zeta$, wie leicht einzusehen, folgende sein werden:

$$(dl)_1 = 0, \quad (dl)_2 = \zeta_0 d\varphi = \frac{\zeta_0}{L} dy, \quad (dl)_3 = -\eta_0 d\varphi = -\frac{\eta_0}{L} dy;$$

wir haben zu bilden die Projection dieses Vectors auf die gemeinsame Tangentialebene im Punkte $\xi_0\eta_0\zeta_0$ zum Cylinder $F(\xi\eta\zeta\varphi) = 0$ und zur Kugel $f(\xi\eta\zeta h) = 0$, also auf die Ebene, deren Normale, wenn man statt der Symbole der partiellen Differentiationen die Coordinaten als Indices schreibt, die Richtungscosinusse

$$\frac{f_\xi}{\sqrt{f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2}}, \quad \frac{f_\eta}{\sqrt{f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2}}, \quad \frac{f_\zeta}{\sqrt{f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2}}$$

hat, wobei man sich in den obigen Ausdrücken nach der Differentiation die Werte $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$ eingesetzt zu denken hat. Wie aus den elementarsten Sätzen der Vectorenrechnung leicht zu folgern, besteht, wenn ein Vector $\bar{p} = p_1 i + p_2 j + p_3 k$ die Projection eines Vectors $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ auf eine zu dem Einheitsvector $\bar{\nu} = \nu_1 i + \nu_2 j + \nu_3 k$ senkrechte Ebene ist, zwischen den Einheitsvectoren $\bar{\pi}$ und $\bar{\alpha}$ der beiden Vectoren $\bar{p}$ und $\bar{a}$ die Relation[2]

$$\bar{\pi} = \mathbf{V}\bar{\sigma}\bar{\nu},$$

wo $\bar{\sigma}$ den Einheitsvector des Vectors $\bar{s} = \mathbf{V}\bar{\nu}\bar{\alpha}$ bezeichnet; also die Componenten des Vectors $\bar{\pi}$ sind

[1] Sie findet ihre volle Berücksichtigung darin, dass wir später die Thatsache des abwechselnden Steigens und Fallens der Kugel, oder der Oscillationen des $h$, in Betracht ziehen werden.

[2] **V** und **S** sind Operationssymbole für Vectorialproduct und Scalarproduct.

$$\pi_1 = \sigma_2\nu_3 - \sigma_3\nu_2 = \frac{(\nu_3\alpha_1 - \nu_1\alpha_3)\nu_3 - (\nu_1\alpha_2 - \nu_2\alpha_1)\nu_2}{\sqrt{(\nu_3\alpha_1 - \nu_1\alpha_3)^2 + (\nu_1\alpha_2 - \nu_2\alpha_1)^2 + (\nu_2\alpha_3 - \nu_3\alpha_2)^2}} =$$

$$= \frac{(\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)\nu_3 - (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1)\nu_2}{\sqrt{(\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)^2 + (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1)^2 + (\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2)^2}} =$$

$$= \frac{(\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)\nu_3 - (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1)\nu_2}{\mathbf{S}\bar{a}\bar{\pi}},$$

$$\pi_2 = \frac{(\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1)\nu_1 - (\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2)\nu_3}{\mathbf{S}\bar{a}\bar{\pi}},$$

$$\pi_3 = \frac{(\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2)\nu_2 - (\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)\nu_1}{\mathbf{S}\bar{a}\bar{\pi}};$$

die Projection $\bar{p}$ selbst aber ist dann gegeben durch $\bar{p} = \bar{\pi}.\mathbf{S}\bar{a}\bar{\pi}$ oder durch die Componenten

$$p_1 = (\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)\nu_3 - (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1)\nu_2,$$
$$p_2 = (\nu_1 a_2 - \nu_2 a_1)\nu_1 - (\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2)\nu_3,$$
$$p_3 = (\nu_2 a_3 - \nu_3 a_2)\nu_2 - (\nu_3 a_1 - \nu_1 a_3)\nu_1.$$

Die Tangentialverrückung des betrachteten Cylinderpunktes ist demnach ein Vector mit den Componenten auf den Axen $xyz$:

$$p_1 = \frac{dy}{\mathfrak{f}L}[f_\xi f_\zeta \eta_0 - f_\xi f_\eta \zeta_0],$$

$$p_2 = \frac{dy}{\mathfrak{f}L}[(f_\xi^2 + f_\zeta^2)\zeta_0 + f_\eta f_\zeta \eta_0],$$

$$p_3 = -\frac{dy}{\mathfrak{f}L}[(f_\xi^2 + f_\eta^2)\eta_0 + f_\eta f_\zeta \zeta_0],$$

wo der Kürze halber $\mathfrak{f}$ anstatt $f_\xi^2 + f_\eta^2 + f_\zeta^2$ geschrieben wurde. Sich dem anstoßenden Kugelpunkte, dessen Coordinaten $X_0 = \xi_0$, $Y_0 = \eta_0$, $Z_0 = \zeta_0 - h$ sind, mittheilend, würde diese Verrückung eine Drehung $\bar{\chi}$ der Kugel um ihren Mittelpunkt hervorbringen,

$$\bar{\chi} = \frac{1}{K_u^2}\mathbf{V}\bar{r}_0.\bar{p}, \qquad \bar{r}_0 = \xi_0 i + \eta_0 j + (\zeta_0 - h)k;$$

ein Zustandekommen der componenten Rotation um die $Z$-Axe, $\chi_Z$, kommt hier nicht in Betracht, da der Wert von $x$

festgehalten wird; dagegen übertragen sich auf die Rollen die beiden übrigen componenten Drehungen, um die $X$- und um die $Y$-Axe, welche sind

$$\chi_X = \frac{1}{K_n^2}\{\eta_0 p_3 - (\zeta_0 - h) p_2\} =$$

$$= \frac{dy}{LK_n^2 \mathfrak{f}}\left\{-\eta_0\left[(f_\xi^2+f_\eta^2)\eta_0 + f_\eta f_\zeta \zeta_0\right] + (h-\zeta_0)\left[(f_\xi^2+f_\zeta^2)\zeta_0 + f_\eta f_\zeta \eta_0\right]\right\},$$

$$\chi_Y = \frac{1}{K_n^2}\{(\zeta_0 - h) p_1 - \xi_0 p_3\} =$$

$$= \frac{dy}{LK_n^2 \mathfrak{f}}\left\{(h-\zeta_0)\left[f_\xi f_\eta \zeta_0 - f_\xi f_\zeta \eta_0\right] + \xi_0\left[(f_\xi^2+f_\eta^2)\eta_0 + f_\eta f_\zeta \zeta_0\right]\right\}.$$

Infolge dieser Drehungen dreht sich die Rolle $M_{ni}$ um ihre Axe um den Winkel

$$d\mu_{ni} = -\frac{K_n}{M_{ni}}[\chi_X \cos(\lambda_{ni}+90^\circ) + \chi_Y \cos\lambda_{ni}].$$

Die Werte $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, h$ hat man selbstverständlich zu finden als die gemeinsame Lösung der vier Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} F(\xi\eta\zeta\varphi) = 0 \\ f(\xi\eta\zeta h) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \xi} : \dfrac{\partial F}{\partial \eta} : \dfrac{\partial F}{\partial \zeta} = \dfrac{\partial f}{\partial \xi} : \dfrac{\partial f}{\partial \eta} : \dfrac{\partial f}{\partial \zeta} \end{array}\right\},$$

mit anderen Worten, der vier Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} F(\xi\eta\zeta\varphi) = 0 \\ f(\xi\eta\zeta h) = 0 \\ F_\xi^2(f_\xi^2+f_\eta^2+f_\zeta^2) = f_\xi^2(F_\xi^2+F_\eta^2+F_\zeta^2) \\ F_\eta^2(f_\xi^2+f_\eta^2+f_\zeta^2) = f_\eta^2(F_\xi^2+F_\eta^2+F_\zeta^2) \end{array}\right\}. \quad (6)$$

Nun ist aber

$$F(\xi\eta\zeta\varphi) = \xi^2\sin^2\varepsilon + \eta^2[1-\sin^2\varphi\sin^2\varepsilon] + \zeta^2[1-\cos^2\varphi\sin^2\varepsilon] -$$
$$-2\eta\zeta\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\varepsilon + 2\zeta\xi\cos\varphi\sin\varepsilon\cos\varepsilon +$$
$$+2\xi\eta\sin\varphi\sin\varepsilon\cos\varepsilon - C_n^2,$$

$$f(\xi\eta\zeta h) = \xi^2+\eta^2+\zeta^2-2h\zeta+h^2-K_n^2,$$

$$F_\xi = 2\xi \sin^2\varepsilon + 2\zeta \cos\varphi \sin\varepsilon \cos\varepsilon + 2\eta \sin\varphi \sin\varepsilon \cos\varepsilon,$$
$$f_\xi = 2\xi,$$
$$F_\eta = 2\eta(1-\sin^2\varphi \sin^2\varepsilon) - 2\zeta \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\varepsilon + 2\xi \sin\varphi \sin\varepsilon \cos\varepsilon,$$
$$f_\eta = 2\eta,$$
$$F_\zeta = 2\zeta(1-\cos^2\varphi \sin^2\varepsilon) - 2\eta \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\varepsilon + 2\xi \cos\varphi \sin\varepsilon \cos\varepsilon,$$
$$f_\zeta = -2(h-\zeta),$$

und daher

$$F_\xi^2 = 4\zeta^2 \cos^2\varphi \sin^2\varepsilon + 8\eta\zeta \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\varepsilon + [\varepsilon^{\geqq 4}],$$
$$F_\eta^2 = 4\eta^2 - 8\eta\zeta \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\varepsilon + 8\xi\eta \sin\varphi \sin\varepsilon + [\varepsilon^{\geqq 4}],$$
$$F_\zeta^2 = 4\zeta^2(1-2\cos^2\varphi \sin^2\varepsilon) - 8\eta\zeta \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\varepsilon + \\ + 8\zeta\xi \cos\varphi \sin\varepsilon + [\varepsilon^{\geqq 4}];$$

die dritte und die vierte der Gleichungen (6) werden daher (unter Berücksichtigung der zweiten): die dritte zu

$$16(\zeta^2 \cos^2\varphi \sin^2\varepsilon + 2\eta\zeta \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\varepsilon) K_n^2 = 16\xi^2\zeta^2 + [\varepsilon^{\geqq 4}]$$

oder

$$\zeta^2 . K_n^2 \cos^2\varphi \sin^2\varepsilon = \zeta^2 . \xi^2 + [\varepsilon^{\geqq 4}],$$

woraus man sieht, dass $\xi$ von der ersten Ordnung ist [so dass in den Ausdrücken für $F_\xi^2$, $F_\eta^2$, $F_\zeta^2$ jetzt das Zeichen $\geqq$ im Exponent fortgelassen werden kann], und die vierte zu

$$16(\eta^2 - 2\eta\zeta \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\varepsilon + 2\xi\eta \sin\varphi \sin\varepsilon) K_n^2 = 16\eta^2\zeta^2 + [\varepsilon^{\geqq 4}]$$

oder (da wir jetzt aus der ersten Gleichung (6) sehen, dass $\zeta^2 = C_n^2 + [\varepsilon^2]$ ist)

$$\eta^2 . (K_n^2 - C_n^2) - 2\eta [C_n K_n^2 \sin\varphi \cos\varphi . \sin^2\varepsilon - K_n^2 \sin\varphi . \xi \sin\varepsilon] = [\varepsilon^4],$$

woraus man sieht, dass $\eta$ von der zweiten Ordnung ist. Wir sehen jetzt, wenn wir noch die aus der zweiten Gleichung (6) sich jetzt ergebende Folgerung $h-\zeta = K_n + [\varepsilon^2]$ berücksichtigen, dass die Ausdrücke in den geschwungenen Klammern der Formeln für $\chi_X$ und $\chi_Y$ gleich sind beziehungsweise

$$+4\, C_n K_n^3 + [\varepsilon^2] \quad \text{und} \quad [\varepsilon^3];$$

das $\mathfrak{f}$ im Nenner ist $= 4K_n^2$; wir erhalten somit schließlich

$$d\mu_{ni} = \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy,$$

wobei in dem Coefficient von $dy$ nur Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt sind.

Außerdem findet bei dem zur Axe $oy$ parallelen Verschieben des Instrumentes noch eine andere Erscheinung statt: die, dass die Kugel als Ganzes abwechselnd steigt und sinkt. Dies bewirkt in jedem Augenblicke eine Drehung der Rollen um ihre Axen; da wir aber hier nicht mit einer Drehung der Kugel, sondern mit ihrem Fortschreiten als Ganzes, zu thun haben, ist klar, dass der Einfluss auf die Rollen unabhängig ist von deren geographischen Längen, also davon, bei welchem Werte von $x$ dieses zur Axe $oy$ parallele Verschieben ausgeführt wird. Aus dieser Bemerkung folgt, dass dieser Fehler sich im Resultate aufheben wird, wenn bei der Umfahrung man zuletzt in einem Punkte anlangt, welcher das gleiche $y$ wie der Ausgangspunkt hat.

Es bleibt noch übrig, den Einfluss der schrägen Anbringung des Cylinders während eines Verschiebens des Fahrstiftes parallel der Axe $ox$ zu untersuchen. Infolge der schiefen Stellung des Cylinders befindet sich der Stützpunkt der Kugel auf dem Cylinder etwas abseits von der durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Verticalen; wird also der Rahmen um einen Winkel $\omega = -n \frac{2\pi dx}{c}$ gedreht, so wird der Kugel durch die Rollen der Antrieb zur Rotation in einer Ebene mitgetheilt, welche nicht senkrecht sondern geneigt steht zur Verbindungslinie ihres Mittelpunktes mit ihrem Stützpunkte auf dem Cylinder. Ich zerlege diese Rotation $\omega$ um die $Z$-Axe auf zwei Rotationsaxen, deren eine, $b$, vom Mittelpunkte nach dem dem Stützpunkte gegenüberstehenden Punkte der Kugel gerichtet ist, die andere, $a$, aber nach demjenigen Punkte der Kugel, welcher vom Pole der Axe $b$, im Sinne von demselben nach dem Pole der $Z$-Axe, um 90° entfernt ist. Da die Axe $b$ durch den Stützpunkt geht, kann sich die Kugel um diese Axe frei drehen; die Componente $\omega_b$ der $Z$-Rotation kommt also ungehindert

zustande; für die componente Rotation $\omega_a$ dagegen ist es, da eine solche Rotation in einer durch den Stützpunkt gehenden Ebene erfolgen und daher einem Gleiten der Kugel auf dem Cylinder entsprechen würde, möglich, dass diese Bewegung, ganz oder zu einem Theile $\nu\omega_a$, durch die Reibung vernichtet wird. Man kann dann die effective Bewegung der Kugel dadurch darstellen, dass die Kugel erstens vollständig durch die Umdrehung des Rahmens um die $Z$-Axe mitgenommen wird, zweitens aber noch eine Zusatzbewegung besitzt, die in einer Rotation $-\nu\omega_a = -\nu\left(\frac{-2n\pi dx}{c}\sin\sigma\right)$ um die Axe $a$ besteht; dabei bedeutet $\sigma$ den (absolut genommenen) kleinen Winkel zwischen dem Radiusvector des Berührungspunktes Kugel-Cylinder und der abwärts gerichteten Verticalen, und ist $0 \leqq \nu \leqq 1$. — Diese Zusatzbewegung kann die Rollen in Drehung um ihre Axen versetzen, und eben darin besteht der in dem hier betrachteten Falle entstehende Fehler. Nun fällt aber die $Z$-Componente dieser Zusatzrotation offenbar außer Betracht, schon aus dem Grunde, weil sie zweiter Ordnung ist; ihre andere Componente dagegen ist von der ersten Ordnung und wird, als eine Rotation um eine in der $XY$-Ebene liegende Axe, die Rollen in Drehung um ihre eigenen Axen versetzen. Diese Componente hat den Wert

$$+\nu\frac{2n\pi dx}{c}\sin\sigma\cos\sigma,$$

und sie ist den beiden simultanen Rotationen der Kugel:

$$+\nu\frac{2n\pi dx}{c}\sin\sigma\cos\sigma\cdot\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}$$

um die $X$-Axe und

$$+\nu\frac{2n\pi dx}{c}\sin\sigma\cos\sigma\cdot\frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}$$

um die $Y$-Axe (das Wurzelzeichen bedeutet beide Male den absoluten Wert der Quadratwurzel) äquivalent. Die Drehung der Rolle $M_{ni}$ um ihre Axe, welche infolge davon entsteht, beträgt demnach

$$d\mu_{ni} = -\frac{K_n}{M_{ni}} \cdot \nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin\sigma\cos\sigma \cdot \frac{X_0\cos(\lambda_{ni}+90^\circ)+Y_0\cos\lambda_{ni}}{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}},$$

und wenn man noch berücksichtigt, dass $\sin\sigma = \frac{\sqrt{X_0^2+Y_0^2}}{K_n}$, dass $\cos\sigma - 1$ und $Y_0$ Größen zweiter Ordnung sind, schließlich, dass $X_0 = -K_n\cos\varphi\sin\varepsilon + [\varepsilon^3]$ ist (wie aus $X_0^2 = \xi_0^2 = K_n^2\cos^2\varphi\sin^2\varepsilon + [\varepsilon^4]$ hervorgeht), so erhält man für diese Zusatzdrehung der Rolle

$$d\mu_{ni} = +\nu\frac{K_n}{M_{ni}}\frac{2n\pi}{c}\cos\varphi\sin\varepsilon\sin\lambda_{ni}dx =$$
$$= +\frac{K_n}{M_{ni}}\frac{2n\pi}{c}\nu\sin\varepsilon . \cos\left(\frac{y}{L}+\Gamma_n\right)\sin\lambda_{ni}dx,$$

wo $\Gamma_n$ der Wert von $\varphi$ für $y = 0$ ist. Was den »Reibungscoefficient« (in gewissem Sinne des Wortes) $\nu$ anbelangt, so kann zwar nicht behauptet werden, dass derselbe während der Umfahrung constant bleibt; es ist jedoch zum mindesten eine sehr wahrscheinliche Annahme, dass die Schwankungen des $\nu$ innerhalb enger Grenzen bleiben, so dass sie bei dem kleinen Factor $\sin\varepsilon$ außeracht gelassen werden dürfen.[1] Unter dieser Voraussetzung können wir schreiben:

$$d\mu_{ni} = +\frac{n\gamma_n}{M_{ni}}\cos\left(\frac{y}{L}+\Gamma_n\right)\sin\lambda_{ni}dx, \tag{7}$$

wo $\gamma_n$ und $\Gamma_n$ unbekannte Instrumentalconstanten des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates bedeuten und $\gamma_n$ von der ersten Ordnung klein ist.

---

[1] Die Erfahrung bestätigt das, wie sich später zeigen wird.

Die ganz strenge Behandlung dieses Gegenstandes stößt auf große Schwierigkeiten, die theils in den Unvollkommenheiten der Reibungstheorie (z. B. in der mangelnden Kenntnis der Abhängigkeit des kinetischen Reibungscoefficienten von den Geschwindigkeiten, sowie auch in den verschiedenen Unbestimmtheiten, wie sie in analytischer Behandlung von Reibungsfragen nicht selten auftreten) ihre Quelle haben, anderentheils damit zusammenhängen, dass es dem mit dem Analysator Arbeitenden kaum möglich sein wird, die physikalischen Eigenschaften der sich berührenden Substanzen und Flächen zu kennen.

**13.** Ich gehe jetzt über zur Betrachtung der Excentricität der Rollen. Die nachstehende Figur ist der Durchschnitt des Apparates mit der durch die Rotationsaxen der Rollen gelegten Ebene. Die Umdrehungsaxe des Rahmens (die $Z$-Axe), die zugleich auch das Centrum des Cylinders enthält, trifft diese Ebene in einem Punkte, der in der Figur mit $O$ bezeichnet ist; diesen Punkt nenne ich das Umdrehungscentrum des Rahmens. Ich nenne für jede Rolle denjenigen ihrer materiellen Punkte, welcher (dauernd) den Schnittpunkt der durch ihre Peripherie gelegten Ebene mit ihrer Rotationsaxe bildet, das Umdrehungscentrum dieser Rolle (in der Figur $U_1$, $U_2$, $U_3$), im Gegensatze

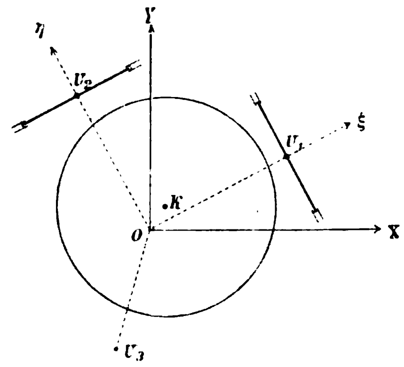



Fig. 6.

zu ihrem Mittelpunkte (dem Mittelpunkte ihrer Figur), der sich in unserem Falle, obwohl ebenfalls in der letzteren Ebene, jedoch außerhalb der Rotationsaxe befindet. Die Umdrehungscentra der beiden Messrollen und das Umdrehungscentrum des Rahmens sind drei fest miteinander und mit dem Rahmen verbundene Punkte. Dagegen wird der Mittelpunkt der Kugel, $K$, nicht — wenigstens nicht dauernd — auf der Umdrehungsaxe des Rahmens bleiben können, sondern eine mit den Drehungsphasen der beiden Messrollen veränderliche Lage außerhalb der $Z$-Axe einnehmen, weil die Kugel, vermöge der Wirkung der Stützrolle, mit den excentrisch sich drehenden Messrollen stets in Berührung bleibt.

In den folgenden Betrachtungen der Vorgänge bei einer Verschiebung des Fahrstiftes gebrauche ich außer dem Coordinatensystem $OXYZ$ noch ein anderes ebenfalls zum Gerüst

des Analysators festes Coordinatensystem; außerdem stellenweise ein bewegliches System. Die Ebenen sämmtlicher Rollen sind nämlich fest mit dem Rahmen verbundene Ebenen, die immer durch die Axe $OZ$ gehen und die von der $ZX$-Ebene um die veränderlichen Winkel $\lambda_{n1}$, $\lambda_{n2}$, $\lambda_{n3}$ abgelenkt sind. Nun nehme ich bei Betrachtung einer Verschiebung des Fahrstiftes die Ebenen der Messrollen $M_{n1}$, $M_{n2}$ als $\mathrm{Z}\Xi$-, beziehungsweise $\mathrm{ZH}$-Ebene eines sich drehenden Coordinatensystems, gleichzeitig aber die in Bezug auf das Gerüst festgehaltenen Lagen, welche diese Ebenen zu Beginn der betrachteten Verschiebung einnahmen, als $\zeta\xi$-, beziehungsweise $\zeta\eta$-Ebene eines festen Coordinatensystems. Der Anfangspunkt ist für alle drei Systeme derselbe, $O$; die Axen $OZ$, $O\mathrm{Z}$, $O\zeta$ fallen zusammen.

Die linearen Excentricitäten der beiden Messrollen seien $\Delta_{n1}$, $\Delta_{n2}$. Es werde der Begriff der Drehungsphase $\mu_{ni}$ dahin präciser gefasst, dass sie den Winkel bedeutet, um welchen sich die Rolle um ihre Umdrehungsaxe (in positivem Sinne) seit dem Zeitpunkte der Anfangsstellung des Instrumentes gedreht hat. Es bezeichne ferner $\mathrm{M}_{ni}$ den Winkel, um welchen in der Anfangsstellung des Instrumentes der umdrehungscentrische Radiusvector des Mittelpunktes der Rolle abgelenkt war (in positivem Sinne) von dem zur $Z$-Axe parallelen umdrehungscentrischen Radiusvector. Schließlich seien $D_{n1}$, $D_{n2}$ die constanten Abstände, in welchen die Umdrehungscentra der Messrollen $M_{n1}$, $M_{n2}$ von der Umdrehungsaxe des Rahmens angebracht sind, und $h_n$ die constante Höhe der Ebene dieser Umdrehungscentra der Rollen über der Axe des Cylinders.

Dann sind für den Zeitpunkt bestimmter Drehungsphasen $\mu_{n1}$, $\mu_{n2}$ der beiden Messrollen die Gleichungen der Rollenperipherien im Coordinatensystem $\Xi\mathrm{HZ}$:

für die Rolle $M_{n1}$:

$$\begin{cases} (\Xi - D_{n1} - \Delta_{n1} \sin u_{n1})^2 + (\mathrm{Z} - \Delta_{n1} \cos u_{n1})^2 = M_{n1}^2 \\ \mathrm{H} = 0 \end{cases}$$

und für die Rolle $M_{n2}$:

$$\begin{cases} (\mathrm{H} - D_{n2} - \Delta_{n2} \sin u_{n2})^2 + (\mathrm{Z} - \Delta_{n2} \cos u_{n2})^2 = M_{n2}^2 \\ \Xi = 0, \end{cases}$$

wenn man, zur Abkürzung, $u_{ni}$ anstatt $\mu_{ni}+M_{ni}$ schreibt; $u_{ni}$ ist demnach, sozusagen, die umdrehungscentrische Zenithdistanz des Mittelpunktes. Dadurch, dass die Kugel stets diese beiden Kreise und die Cylinderfläche berühren muss, sind für gegebene Drehungsphasen der beiden Messrollen die Lage $\Xi_0 H_0 Z_0$ des Mittelpunktes der Kugel, der Punkt $\Xi_1 H_1 Z_1$ in welchem die Berührung zwischen der Kugel und der Rolle $M_{n1}$ stattfindet, der Punkt $\Xi_2 H_2 Z_2$ der Berührung zwischen Kugel und Rolle $M_{n2}$, und der Punkt $\Xi_W H_W Z_W$ der Berührung zwischen der Kugel und dem Cylinder vollständig bestimmt. Es können also die zwölf Coordinaten in Function der Argumente $u_{n1}\, u_{n2}$ berechnet werden; ebenso können, für die Änderungen $du_{n1}\, du_{n2}$ dieser Argumente, die Änderungen $d\Xi_0\; dH_0\; dZ_0$ der Coordinaten des Mittelpunktes, welche dieselben im beweglichen Coordinatensystem erfahren, berechnet werden. Führt man diese Rechnungen aus, und bezeichnet zuletzt die kleine Constante $D_{n1}-(K_n+M_{n1})$ (die bei correctem Analysator 0 ist) mit $d_{n1}$, die kleine Constante $D_{n2}-(K_n+M_{n2})$ mit $d_{n2}$, und die kleine Constante $h_n-(K_n+C_n)$ mit $k_n$, so findet man die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \Xi_0 &= d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1}+II \\ H_0 &= d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2}+II \\ Z_0 &= -k_n+II \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \Xi_1-\Xi_0 &= K_n+II \\ H_1-H_0 &= -d_{n2}-\Delta_{n2}\sin u_{n2}+II \\ Z_1-Z_0 &= \frac{K_n}{K_n+M_{n1}}k_n+\frac{K_n}{K_n+M_{n1}}\Delta_{n1}\cos u_{n1}+II \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \Xi_2-\Xi_0 &= -d_{n1}-\Delta_{n1}\sin u_{n1}+II \\ H_2-H_0 &= K_n+II \\ Z_2-Z_0 &= \frac{K_n}{K_n+M_{n2}}k_n+\frac{K_n}{K_n+M_{n2}}\Delta_{n2}\cos u_{n2}+II, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

worin $II$ Glieder andeutet, welche constante Coefficienten enthalten, die von zweiter oder höheren Ordnungen klein sind; ferner ist, wie auch unmittelbar aus der Anschauung klar,

$$X_W - X_0 = 0,\ Y_W - Y_0 = -\frac{K_n}{K_n + C_n} Y_0,$$

$$Z_W - Z_0 = -\frac{K_n}{K_n + C_n}(h_n + Z_0),$$

und daher

$$\left.\begin{aligned}
\Xi_W - \Xi_0 &= -\frac{K_n}{K_n + C_n}\big[(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} + \\
&\qquad + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1}\big] \sin \lambda_{n1} + II \\
\mathrm{H}_W - \mathrm{H}_0 &= -\frac{K_n}{K_n + C_n}\big[(d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \sin \lambda_{n1} + \\
&\qquad + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \cos \lambda_{n1}\big] \cos \lambda_{n1} + II \\
\mathrm{Z}_W - \mathrm{Z}_0 &= -K_n + II;
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

für die Änderungen aber der Coordinaten des Mittelpunktes findet man

$$\left.\begin{aligned}
d\Xi_0 &= \Delta_{n1} \cos u_{n1}\, du_{n1} + II \\
d\mathrm{H}_0 &= \Delta_{n2} \cos u_{n2}\, du_{n2} + II \\
d\mathrm{Z}_0 &= II. -
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

*a)* Betrachten wir zunächst den Fall einer Fahrt des Stiftes parallel zur $y$-Axe allein. Als das (zum Analysator) feste Coordinatensystem wollen wir hier das System $\xi\eta\zeta$ verwenden. Da in dem hier betrachteten speciellen Falle das System $\Xi\mathrm{H}\mathrm{Z}$ mit dem System $\xi\eta\zeta$ nicht bloß zusammenfällt, sondern gegen das letztere auch keine Bewegung besitzt, gelten nicht bloß die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\xi_0 &= d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1} + II \\
\eta_0 &= d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2} + II \\
\zeta_0 &= -k_n + II
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 - \xi_0 &= K_n + II \\
\eta_1 - \eta_0 &= -d_{n2} - \Delta_{n2} \sin u_{n2} + II \\
\zeta_1 - \zeta_0 &= \frac{K_n}{K_n + M_{n1}} k_n + \frac{K_n}{K_n + M_{n1}} \Delta_{n1} \cos u_{n1} + II
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_2-\xi_0 &= -d_{n1}-\Delta_{n1}\sin u_{n1}+II\\
\eta_2-\eta_0 &= K_n+II\\
\zeta_2-\zeta_0 &= \frac{K_n}{K_n+M_{n2}}k_n+\frac{K_n}{K_n+M_{n2}}\Delta_{n2}\cos u_{n2}+II
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi_{IV}-\xi_0 &= -\frac{K_n}{K_n+C_n}\big[(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}+\\
&\qquad +(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}\big]\sin\lambda_{n1}+II\\
\eta_{IV}-\eta_0 &= -\frac{K_n}{K_n+C_n}\big[(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}+\\
&\qquad +(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}\big]\cos\lambda_{n1}+II\\
\zeta_{IV}-\zeta_0 &= -K_n+II,
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

sondern auch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
d\xi_0 &= \Delta_{n1}\cos u_{n1}\,du_{n1}+II\\
d\eta_0 &= \Delta_{n2}\cos u_{n2}\,du_{n2}+II\\
d\zeta_0 &= II.
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Die infinitesimale Bewegung der Kugel in dem System $\xi\eta\zeta$, welche erfolgen wird, kann dargestellt werden durch eine infinitesimale Translation $\bar{m}$ des Mittelpunktes der Kugel, verbunden mit einer infinitesimalen Drehung der Kugel um denselben, $\bar{\omega}$. Hatte zu Beginn dieser infinitesimalen Bewegung der Mittelpunkt die Coordinaten $\xi_0\eta_0\zeta_0$ und irgendein anderer Punkt der Kugel die Coordinaten $\xi_1\eta_1\zeta_1$, so erleidet der letztere materielle Punkt der Kugel dadurch eine Verrückung $\bar{s}$, deren Componenten (Projectionen) $s_\xi\, s_\eta\, s_\zeta$ auf den festen Axen $\xi\eta\zeta$ zusammenhängen mit den Componenten $m_\xi = d\xi_0$, $m_\eta = d\eta_0$, $m_\zeta = d\zeta_0$ des Vectors $\bar{m}$ und mit den Componenten $\omega_\xi\,\omega_\eta\,\omega_\zeta$ des Vectors $\bar{\omega}$ durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned}
s_\xi &= d\xi_0+\omega_\eta(\zeta_1-\zeta_0)-\omega_\zeta(\eta_1-\eta_0)\\
s_\eta &= d\eta_0+\omega_\zeta(\xi_1-\xi_0)-\omega_\xi(\zeta_1-\zeta_0)\\
s_\zeta &= d\zeta_0+\omega_\xi(\eta_1-\eta_0)-\omega_\eta(\xi_1-\xi_0);
\end{aligned}\right.$$

auf den rechten Seiten dieser Gleichungen können die Werte (17), (14) eingesetzt werden. Derjenige Punkt der Kugel, welcher

zu Beginn ihrer infinitesimalen Bewegung die Coordinaten $\xi_2\eta_2\zeta_2$ hatte, erleidet eine Verrückung $\bar{t}$ mit den Componenten

$$\left\{\begin{aligned} t_\xi &= d\xi_0+\omega_\eta(\zeta_2-\zeta_0)-\omega_\zeta(\eta_2-\eta_0)\\ t_\eta &= d\eta_0+\omega_\zeta(\xi_2-\xi_0)-\omega_\xi(\zeta_2-\zeta_0)\\ t_\zeta &= d\zeta_0+\omega_\xi(\eta_2-\eta_0)-\omega_\eta(\xi_2-\xi_0).\end{aligned}\right.$$

Derjenige Punkt der Kugel, welcher die Coordinaten $\xi_W\eta_W\zeta_W$ hatte, erleidet eine Verrückung $\bar{w}$ mit den Componenten

$$\left\{\begin{aligned} w_\xi &= d\xi_0+\omega_\eta(\zeta_W-\zeta_0)-\omega_\zeta(\eta_W-\eta_0)\\ w_\eta &= d\eta_0+\omega_\zeta(\xi_W-\xi_0)-\omega_\xi(\zeta_W-\zeta_0)\\ w_\zeta &= d\zeta_0+\omega_\xi(\eta_W-\eta_0)-\omega_\eta(\xi_W-\xi_0).\end{aligned}\right.$$

Es möge nebenbei bemerkt werden, dass man über die Drehung $\omega_\xi\omega_\eta\omega_\zeta$ der Kugel von vornherein weiß, dass

$$\omega_\xi=\frac{C_n dy}{LK_n}\cos\lambda_{n1}+I,\quad \omega_\eta=-\frac{C_n dy}{LK_n}\sin\lambda_{n1}+I,\quad \omega_\zeta=I \qquad (a)$$

sein wird, wo $I$ Glieder andeutet, welche mindestens von der ersten Ordnung klein sind; denn bei correctem Analysator ist in dem hier betrachteten Falle

$$\omega_\xi=\frac{C_n dy}{LK_n}\cos\lambda_{n1},\qquad \omega_\eta=-\frac{C_n dy}{LK_n}\sin\lambda_{n1},\qquad \omega_\zeta=0.$$

Gleichzeitig damit dreht sich der Rollenkreis $M_{n1}$ in seiner Ebene ($\eta=0$) um sein Umdrehungscentrum um den Winkel $du_{n1}$, der Kreis $M_{n2}$ in seiner Ebene ($\xi=0$) um den Winkel $du_{n2}$, und der Cylinder um seine Axe um den Winkel $\frac{-dy}{L}$. Vermöge der Drehung $du_{n1}$ der Rolle $M_{n1}$ verrückt sich derjenige ihrer Punkte, welcher zu Beginn dieser Bewegung die Coordinaten $\xi_1\eta_1\zeta_1$ hatte, um eine Verrückung $\bar{s'}$ mit den Componenten

$$\left\{\begin{aligned} s'_\xi &= \zeta_1 du_{n1}\\ s'_\eta &= 0\\ s'_\zeta &= (D_{n1}-\xi_1)du_{n1}.\end{aligned}\right.$$

Derjenige Punkt der Rolle $M_{n2}$, welcher die Coordinaten $\xi_2\eta_2\zeta_2$ hatte, verrückt sich um $\bar{t}'$ mit den Componenten

$$\left\{\begin{aligned} t'_\xi &= 0 \\ t'_\eta &= \zeta_2 du_{n2} \\ t'_\zeta &= (D_{n2}-\eta_2)du_{n2}. \end{aligned}\right.$$

Derjenige Punkt des Cylinders, welcher die Coordinaten $\xi_W\eta_W\zeta_W$ hatte, verrückt sich, vermöge der Drehung des Cylinders, um $\bar{w}'$ mit den Componenten

$$\left\{\begin{aligned} w'_\xi &= (h_n+\zeta_W)\frac{dy}{L}\sin\lambda_{n1} \\ w'_\eta &= (h_n+\zeta_W)\frac{dy}{L}\cos\lambda_{n1} \\ w'_\zeta &= -\eta_W\frac{dy}{L}\cos\lambda_{n1}-\xi_W\frac{dy}{L}\sin\lambda_{n1}. \end{aligned}\right.$$

Es möge hiebei bemerkt werden, dass man im voraus weiß, dass

$$du_{n1} = \frac{C_n}{LM_{n1}}\sin\lambda_{n1}dy+I, \qquad du_{n2} = \frac{C_n}{LM_{n2}}\cos\lambda_{n1}dy+I \qquad (b)$$

sein wird, weil der Unterschied zwischen $du_{ni}$ und dem ausgeschriebenen Gliede der rechten Seite mit den Fehlern des Instrumentes verschwindet.

Da die Drehung der Rolle $M_{n1}$ in ihrer Ebene nur dadurch erzeugt wird, dass der anstoßende Kugelpunkt sie in eine solche Drehung versetzt, so müssen die erfolgenden Verrückungen des Rollenpunktes, in den beiden zu ihrer Umdrehungsaxe senkrechten Richtungen, gleich sein den entsprechenden componenten Verrückungen des anstoßenden Kugelpunktes; es muss also sein $s'_\xi = s_\xi$, $s'_\zeta = s_\zeta$. Es sind dies, sozusagen, die Gleichungen des Rollens der Messrolle $M_{n1}$ an der Kugel. Ebenso hat man die Relationen $t'_\eta = t_\eta$, $t'_\zeta = t_\zeta$, als die Gleichungen des Rollens der Messrolle $M_{n2}$ an der Kugel. Schließlich, da die Kugel an dem Cylinder nicht gleitet,

die Relationen $w_\xi = w'_\xi$, $w_\eta = w'_\eta$, $w_\zeta = w'_\zeta$, — die Gleichungen des Rollens der Kugel an dem Cylinder.

Dies sind zwischen fünf Unbekannten $\omega_\xi\, \omega_\eta\, \omega_\zeta\, du_{n1}\, du_{n2}$ sieben Bedingungen, die jedoch, wenigstens in erster Ordnung genau, miteinander compatibel sind, weil einige unter ihnen die Form von Identitäten annehmen und daher für die Bestimmung der Unbekannten ohne Bedeutung sind. Die Gleichungen $\begin{cases} s'_\xi = s_\xi \\ s'_\zeta = s_\zeta \end{cases}$ liefern die Relationen

$$\begin{cases} \zeta_1 du_{n1} = d\xi_0 + \omega_\eta(\zeta_1 - \zeta_0) - \omega_\zeta(\eta_1 - \eta_0) \\ (D_{n1} - \xi_1) du_{n1} = d\zeta_0 + \omega_\xi(\eta_1 - \eta_0) - \omega_\eta(\xi_1 - \xi_0), \end{cases}$$

oder, wenn man die Ausdrücke (17) und (14) einsetzt, und für die Größen $\omega_\xi\, \omega_\eta\, \omega_\zeta\, du_{n1}\, du_{n2}$, soweit sie mit kleinen Coefficienten multipliciert auftreten, die Ausdrücke *(a)* und *(b)* einsetzt, die Relationen

$$\begin{cases} \dfrac{C_n}{LM_{n1}}\left(-\dfrac{M_{n1}}{K_n+M_{n1}}k_n + \dfrac{K_n}{K_n+M_{n1}}\Delta_{n1}\cos u_{n1}\right)\sin\lambda_{n1}dy + II = \\ = \dfrac{C_n}{LM_{n1}}\Delta_{n1}\cos u_{n1}\sin\lambda_{n1}dy - \dfrac{C_n}{L(K_n+M_{n1})}(k_n + \Delta_{n1}\cos u_{n1})\sin\lambda_{n1}dy + II \\ (M_{n1} - \Delta_{n1}\sin u_{n1})du_{n1} + II = \\ \qquad = -\dfrac{C_n}{LK_n}(d_{n2} + \Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}dy - K_n\omega_\eta + II, \end{cases}$$

von denen die zweite allein Bedeutung hat. Die Gleichungen $\begin{cases} t'_\eta = t_\eta \\ t'_\zeta = t_\zeta \end{cases}$ liefern die Relationen

$$\begin{cases} \dfrac{C_n}{LM_{n2}}\left(-\dfrac{M_{n2}}{K_n+M_{n2}}k_n + \dfrac{K_n}{K_n+M_{n2}}\Delta_{n2}\cos u_{n2}\right)\cos\lambda_{n1}dy + II = \\ = \dfrac{C_n}{LM_{n2}}\Delta_{n2}\cos u_{n2}\cos\lambda_{n1}dy - \dfrac{C_n}{L(K_n+M_{n2})}(k_n + \Delta_{n2}\cos u_{n2})\cos\lambda_{n1}dy + II \\ (M_{n2} - \Delta_{n2}\sin u_{n2})du_{n2} + II = \\ \qquad = K_n\omega_\xi - \dfrac{C_n}{LK_n}(d_{n1} + \Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}dy + II, \end{cases}$$

von denen wieder die erstere wegfällt. Die Gleichungen $\left\{\begin{array}{l} w'_\xi = w_\xi \\ w'_\eta = w_\eta \\ w'_\zeta = w_\zeta \end{array}\right.$ liefern die Relationen

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{C_n}{L}\sin\lambda_{n1}dy+II=\frac{C_n}{LM_{n1}}\Delta_{n1}\cos u_{n1}\sin\lambda_{n1}dy-K_n\omega_\eta+II \\
\frac{C_n}{L}\cos\lambda_{n1}dy+II=\frac{C_n}{LM_{n2}}\Delta_{n2}\cos u_{n2}\cos\lambda_{n1}dy+K_n\omega_\xi+II \\
\frac{1}{L}\,\frac{K_n}{K_n+C_n}[(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}+(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}]dy- \\
\qquad -\frac{1}{L}[(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}+(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}]dy+II= \\
\qquad =-\frac{C_n}{L(K_n+C_n)}[(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}+(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}]dy+II,
\end{array}\right.$$

von denen die letzte wegfällt. Aus den vier Relationen, welche nicht ausfallen, hat man

$$(M_{n1}-\Delta_{n1}\sin u_{n1})du_{n1}=$$
$$=\frac{C_n}{L}\sin\lambda_{n1}dy-\frac{C_n}{LM_{n1}}\left[\Delta_{n1}\cos u_{n1}\sin\lambda_{n1}+\frac{M_{n1}}{K_n}\Delta_{n2}\sin u_{n2}\cos\lambda_{n1}\right]dy-\frac{C_n}{LK_n}d_{n2}\cos\lambda_{n1}dy+II$$

$$(M_{n2}-\Delta_{n2}\sin u_{n2})du_{n2}=$$
$$=\frac{C_n}{L}\cos\lambda_{n1}dy-\frac{C_n}{LM_{n2}}\left[\Delta_{n2}\cos u_{n2}\cos\lambda_{n1}+\frac{M_{n2}}{K_n}\Delta_{n1}\sin u_{n1}\sin\lambda_{n1}\right]dy-\frac{C_n}{LK_n}d_{n1}\sin\lambda_{n1}dy+II,$$

was man kurz, für die $i^{te}$ Rolle ($i = 1, 2$), so schreiben kann:

$$(M_{ni} - \Delta_{ni} \sin u_{ni}) du_{ni} =$$
$$= \frac{C_n}{L} \sin \lambda_{ni} dy - \frac{C_n}{LK_n} (-1)^j d_{nj} \cos \lambda_{ni} dy - \frac{C_n}{LM_{ni}} \left[ \Delta_{ni} \cos u_{ni} \sin \lambda_{ni} + \frac{M_{ni}}{K_n} \Delta_{nj} \sin u_{nj} \sin \lambda_{nj} \right] dy + II,$$

wenn mit dem Index $j$ die andere (die »nicht $i^{te}$«) Messrolle bezeichnet wird. Dividiert man schließlich mit dem Coefficient des $du_{ni}$, setzt für $u_{n1}, u_{n2}$ die damit bezeichneten Ausdrücke wieder ein, bezeichnet zuletzt die procentuellen Excentricitäten $\frac{\Delta_{n1}}{M_{n1}}, \frac{\Delta_{n2}}{M_{n2}}$ mit $\delta_{n1}, \delta_{n2}$, die Constanten $\frac{d_{n1}}{K_n}, \frac{-d_{n2}}{K_n}$ aber mit $\theta_{n1}, \theta_{n2}$, so ergibt sich als Drehung der Rolle bei einer zur $y$-Axe parallelen Verschiebung des Fahrstiftes, unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung im Coefficient von $dy$,

$$\begin{aligned} d\mu_{ni} = & \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy + \\ & + \frac{C_n}{LM_{ni}} \theta_{nj} \cos \lambda_{ni} dy + \\ & + \frac{C_n}{LM_{ni}} \left[ \delta_{ni} \{ \sin (\mu_{ni} + \mathrm{M}_{ni}) - \cos (\mu_{ni} + \mathrm{M}_{ni}) \} \sin \lambda_{ni} - \frac{M_{nj}}{K_n} \delta_{nj} \sin (\mu_{nj} + \mathrm{M}_{nj}) \sin \lambda_{nj} \right] dy, \end{aligned} \tag{18}$$

wo in der letzten Zeile die Drehungsphasen $\mu_{ni} \mu_{nj}$ ersetzt werden dürfen durch diejenigen, $\bar{\mu}_{ni} \bar{\mu}_{nj}$,[1] welche ein correcter Analysator in demselben Punkte derselben Befahrung aufweisen würde, und Analoges von $\lambda_{ni} \lambda_{nj}$ gilt. —

[1] Die Striche sind hier selbstverständlich keine Vectorzeichen.

*b)* Betrachten wir jetzt den Fall einer Verschiebung des Stiftes parallel zur $x$-Axe allein.

Die Gleichungen (8) bis (12) gelten auch in diesem Falle. Die Coordinaten, im festen System, des Mittelpunktes der Kugel und der drei Punkte, in welchen ihre Berührung mit den Messrollen und dem Cylinder stattfindet, sind ausgedrückt durch die Gleichungen (13) bis (16); die Änderungen dagegen, welche die Coordinaten des Mittelpunktes im festen System erleiden, durch die Gleichungen, welche man findet, wenn man die Transformationsformeln $\xi_0 = \Xi_0 \cos(\Xi, \xi) - H_0 \sin(\Xi, \xi), \ldots$ vollständig differentiirt und darauf für $(\Xi, \xi)$ seinen Wert 0, für $d(\Xi, \xi)$ seinen Wert $\frac{-2n\pi dx}{c}$, und für $\Xi_0, H_0, d\Xi_0, dH_0$ ihre Ausdrücke (8), (12) einsetzt; man findet auf diese Weise

$$\left.\begin{aligned} d\xi_0 &= \Delta_{n1} \cos u_{n1}\, du_{n1} + (d_{n2} + \Delta_{n2} \sin u_{n2}) \frac{2n\pi}{c} dx + II \\ d\eta_0 &= \Delta_{n2} \cos u_{n2}\, du_{n2} - (d_{n1} + \Delta_{n1} \sin u_{n1}) \frac{2n\pi}{c} dx + II \\ d\zeta_0 &= II. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$du_{ni}$ bedeutet, gemäß der Definition des $u_{ni}$, die Drehung der Rolle um ihre in Bewegung begriffene Axe; also die Drehung, welche die im beweglichen System $\Xi H Z$ betrachteten Verrückungen ihrer einzelnen Theilchen gegen ihr Umdrehungscentrum — ausmachen. Infolge dessen sind, wenn wir dasjenige Theilchen der Rolle $M_{n1}$, welches zu Beginn der Verschiebung sich im Berührungspunkte der Kugel mit der Rolle befand, das Theilchen $1'$ nennen, die Änderungen, welche die Coordinaten dieses Theilchens im beweglichen System, $\Xi(1')$, $H(1')$, $Z(1')$, erleiden, mit $du_{n1}$ verbunden durch die Relationen: $d\Xi(1') = Z(1') du_{n1}$, $dH(1') = 0$, $dZ(1') = [D_{n1} - \Xi(1')] du_{n1}$; oder, was dasselbe ist, $d\Xi(1') = \zeta_1 du_{n1}$, $dH(1') = 0$, $dZ(1') = (D_{n1} - \xi_1) du_{n1}$.

Nennt man dagegen dasjenige Theilchen der Kugel, welches zu Beginn der Verschiebung sich in jenem Berührungspunkte befand, das Theilchen 1, so erleiden seine festen Coordinaten $\xi(1)$, $\eta(1)$, $\zeta(1)$ durch die Bewegung der Kugel die Änderungen $d\xi(1) = d\xi_0 + \omega_\eta(\zeta_1 - \zeta_0) - \omega_\zeta(\eta_1 - \eta_0), \ldots$, wo

$\omega_\xi \omega_\eta \omega_\zeta$, wie früher, die Rotationen der Kugel um die festen Axen bezeichnen. Die Änderung, welche die Coordinate $\Xi(1)$ dieses Theilchens erleidet, findet man daraus mittels der Formel $d\Xi(1) = d\xi(1) - \eta(1) \frac{2n\pi}{c} dx$, welche durch vollständige Differentiation der Transformationsformel $\Xi(1) = \xi(1) \cos(\Xi, \xi) + \eta(1) \sin(\Xi, \xi)$ erhalten wird. Es ist somit $d\Xi(1) = d\xi_0 + \omega_\eta(\zeta_1 - \zeta_0) - \omega_\zeta(\eta_1 - \eta_0) - \eta_1 \frac{2n\pi}{c} dx$.

Man hat also

$$\left\{ \begin{aligned} d\Xi(1) &= d\xi_0 + \omega_\eta(\zeta_1 - \zeta_0) - \omega_\zeta(\eta_1 - \eta_0) - \eta_1 \frac{2n\pi}{c} dx \\ dH(1) &= d\eta_0 + \omega_\zeta(\xi_1 - \xi_0) - \omega_\xi(\zeta_1 - \zeta_0) + \xi_1 \frac{2n\pi}{c} dx \\ dZ(1) &= d\zeta_0 + \omega_\xi(\eta_1 - \eta_0) - \omega_\eta(\xi_1 - \xi_0), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} d\Xi(1') &= \zeta_1 du_{n1} \\ dH(1') &= 0 \\ dZ(1') &= (D_{n1} - \xi_1) du_{n1}. \end{aligned} \right.$$

Ebenso findet man für die Änderungen der Coordinaten $\Xi(2)$, $H(2)$, $Z(2)$ des Kugeltheilchens 2, welches zu Beginn der Verschiebung sich im Berührungspunkte der Kugel mit der Rolle $M_{n2}$ befand, und anderseits für die Änderungen der Coordinaten $\Xi(2')$, $H(2')$, $Z(2')$ des Rollentheilchens 2′, welches zu gleicher Zeit sich in jenem Berührungspunkte befand, die Ausdrücke

$$\left\{ \begin{aligned} d\Xi(2) &= d\xi_0 + \omega_\eta(\zeta_2 - \zeta_0) - \omega_\zeta(\eta_2 - \eta_0) - \eta_2 \frac{2n\pi}{c} dx \\ dH(2) &= d\eta_0 + \omega_\zeta(\xi_2 - \xi_0) - \omega_\xi(\zeta_2 - \zeta_0) + \xi_2 \frac{2n\pi}{c} dx \\ dZ(2) &= d\zeta_0 + \omega_\xi(\eta_2 - \eta_0) - \omega_\eta(\xi_2 - \xi_0), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} d\Xi(2') &= 0 \\ dH(2') &= \zeta_2 du_{n2} \\ dZ(2') &= (D_{n2} - \eta_2) du_{n2}. \end{aligned} \right.$$

Nennt man endlich das Kugeltheilchen, welches zu Beginn der Verschiebung sich im Berührungspunkte der Kugel mit dem Cylinder befand, das Theilchen $W$ und betrachtet die Änderungen seiner festen Coordinaten $\xi(W)$, $\eta(W)$, $\zeta(W)$; nennt anderseits das Cylindertheilchen, welches zu gleicher Zeit sich in jenem Punkte befand, das Theilchen $W'$ und betrachtet die Änderungen seiner Coordinaten $\xi(W')$, $\eta(W')$, $\zeta(W')$: — so hat man für diese Änderungen die Ausdrücke

$$\left\{\begin{aligned} d\xi(W) &= d\xi_0+\omega_\eta(\zeta_W-\zeta_0)-\omega_\zeta(\eta_W-\eta_0)\\ d\eta(W) &= d\eta_0+\omega_\zeta(\xi_W-\xi_0)-\omega_\xi(\zeta_W-\zeta_0)\\ d\zeta(W) &= d\zeta_0+\omega_\xi(\eta_W-\eta_0)-\omega_\eta(\xi_W-\xi_0), \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} d\xi(W') &= 0\\ d\eta(W') &= 0\\ d\zeta(W') &= 0. \end{aligned}\right.$$

Man hat ferner, analog wie in dem vorher betrachteten Falle, sieben Gleichungen des Rollens. Im voraus kann man hier sagen, dass

$$\omega_\xi = I, \qquad \omega_\eta = I, \qquad \omega_\zeta = -\frac{2n\pi dx}{c}+I \qquad (c)$$

und dass

$$du_{n1} = I, \qquad du_{n2} = I \qquad (d)$$

sein wird. Die Gleichungen $\left\{\begin{aligned} d\Xi(1') &= d\Xi(1)\\ dZ(1') &= dZ(1)\end{aligned}\right.$ liefern, wenn man die Ausdrücke (19), (13) bis (16) einsetzt und für $\omega_\xi\omega_\eta\omega_\zeta du_{n1}$, soweit sie mit kleinen Coefficienten multipliciert auftreten, die Werte *(c)*, *(d)* einsetzt, die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} &II = (d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\frac{2n\pi}{c}dx-\frac{2n\pi dx}{c}(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})+II\\ &M_{n1}du_{n1}+II = -K_n\omega_\eta+II, \end{aligned}\right.$$

von denen nur die letztere Bedeutung hat. Die Gleichungen $\left\{\begin{aligned} d\mathrm{H}(2') &= d\mathrm{H}(2)\\ dZ(2') &= dZ(2)\end{aligned}\right.$ liefern in ähnlicher Weise die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} &II = -(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\frac{2n\pi}{c}dx+\frac{2n\pi dx}{c}(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})+II\\ &M_{n2}du_{n2}+II = K_n\omega_\xi+II, \end{aligned}\right.$$

von denen die erstere wieder wegfällt. Die Gleichungen $\left\{\begin{array}{l} d\xi(W) = d\xi(W') \\ d\eta(W) = d\eta(W') \\ d\zeta(W) = d\zeta(W') \end{array}\right.$ liefern die Relationen

$$\left\{\begin{array}{l}
(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\frac{2n\pi}{c}dx - \\
\qquad -K_n\omega_\eta - \frac{2n\pi dx}{c}\frac{K_n}{K_n+C_n}\left[(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}+(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}\right]\cos\lambda_{n1}+II=0 \\
-(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\frac{2n\pi}{c}dx + \\
\qquad +\frac{2n\pi dx}{c}\frac{K_n}{K_n+C_n}\left[(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}+(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}\right]\sin\lambda_{n1}+K_n\omega_\zeta+II=0 \\
II \quad + \quad II \quad + \quad II \quad = 0,
\end{array}\right.$$

von denen wieder die letzte wegfällt. Aus den vier Relationen, welche nicht ausfallen, hat man

$$M_{n1}du_{n1} = -(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\frac{2n\pi}{c}dx +$$
$$+\frac{K_n}{K_n+C_n}[(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}+(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}]\cos\lambda_{n1}\frac{2n\pi}{c}dx+II$$

$$M_{n2}du_{n2} = \quad (d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\frac{2n\pi}{c}dx -$$
$$-\frac{K_n}{K_n+C_n}[(d_{n1}+\Delta_{n1}\sin u_{n1})\sin\lambda_{n1}+(d_{n2}+\Delta_{n2}\sin u_{n2})\cos\lambda_{n1}]\sin\lambda_{n1}\frac{2n\pi}{c}dx+II,$$

was man kurz, für die $i^{te}$ Rolle ($i = 1, 2$), so schreiben kann:

$$M_{ni}\,du_{ni} = \left[d_{ni}\frac{K_n}{K_n+C_n}\sin\lambda_{ni}\cos\lambda_{ni} + (-1)^j d_{nj}\left(\frac{K_n}{K_n+C_n}\sin^2\lambda_{nj}-1\right)\right]\frac{2n\pi}{c}\,dx +$$

$$+\left[\Delta_{ni}\frac{K_n}{K_n+C_n}\sin u_{ni}\sin\lambda_{ni}\cos\lambda_{ni} + (-1)^j\Delta_{nj}\sin u_{nj}\left(\frac{K_n}{K_n+C_n}\sin^2\lambda_{nj}-1\right)\right]\frac{2n\pi}{c}\,dx + II.$$

Dividiert man endlich mit $M_{ni}$ und bezeichnet die Constanten $\frac{d_{n1}}{M_{n1}}, \frac{d_{n2}}{M_{n2}}$ mit $\vartheta_{n1}, \vartheta_{n2}$, so ergibt sich als Drehung der Rolle bei einer zur $x$-Axe parallelen Verschiebung des Fahrstiftes, unter Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung der Instrumentalfehler,

$$d\mu_{ni} = \left[\vartheta_{ni}\frac{K_n}{K_n+C_n}\sin\lambda_{ni}\cos\lambda_{ni} + (-1)^j\vartheta_{nj}\left(\frac{K_n}{K_n+C_n}\sin^2\lambda_{nj}-1\right)\right]\frac{2n\pi}{c}\,dx +$$

$$+\left[\delta_{ni}\frac{K_n}{K_n+C_n}\sin(\mu_{ni}+\mathrm{M}_{ni})\sin\lambda_{ni}\cos\lambda_{ni} + (-1)^j\delta_{nj}\sin(\mu_{nj}+\mathrm{M}_{nj})\left(\frac{K_n}{K_n+C_n}\sin^2\lambda_{nj}-1\right)\right]\frac{2n\pi}{c}\,dx, \quad (20)$$

wo bei $\vartheta_{nj}$ und $\delta_{nj}$ der Factor $\frac{M_{nj}}{M_{ni}}$, als gleich der Einheit, weggelassen wurde und $\mu_{ni}, \mu_{nj}, \lambda_{ni}, \lambda_{nj}$ auf der rechten Seite durch $\bar{\mu}_{ni}, \bar{\mu}_{nj}, \bar{\lambda}_{ni}, \bar{\lambda}_{nj}$ ersetzt werden dürfen.

*c)* Bei einer beliebigen Befahrung, während der Fahrstift ein Element $ds$ der Befahrungsbahn, dessen Componenten $dx$, $dy$ sind, beschreibt, ist die Drehung der Rolle

$$d\mu_{ni} = \frac{\partial \mu_{ni}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu_{ni}}{\partial y} dy;$$

die Ausdrücke für $\frac{\partial \mu_{ni}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu_{ni}}{\partial y}$ sind gegeben durch die Formeln (20), (18). Wenn eine bestimmte Befahrungsbahn vorliegt, kann man den laufenden Punkt derselben dadurch unzweideutig definieren, dass man die Bogenlänge $s$ angibt, welche der Fahrstift seit dem Ausgangspunkte ($x = 0$, $y = 0$) bis zu dem betrachteten Punkte zurückgelegt hat. Die Veränderlichen $\bar{\mu}_{n1}$, $\bar{\mu}_{n2}$ sind nun ganz bestimmte Functionen des laufenden Punktes der Befahrungsbahn, die mit Eigenschaften des Instrumentes in keinerlei Beziehung stehen. $\theta_{n1}$, $\theta_{n2}$, $\vartheta_{n1}$, $\vartheta_{n2}$, $\delta_{n1}$, $\delta_{n2}$ sind Instrumentalconstanten; $M_{n1}$, $M_{n2}$ Constanten, die außerdem von der Anfangsaufstellung des Instrumentes abhängen. Man kann also den Ausdruck der Drehung der Rolle für den allgemeinen Fall so schreiben:

$$\begin{aligned} d\mu_{ni} = & \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy + \\ & + \frac{C_n}{LM_{ni}} \theta_{nj} \cos \lambda_{ni} dy + \\ & + \left[ \vartheta_{ni} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin \lambda_{ni} \cos \lambda_{ni} + (-1)^j \vartheta_{nj} \left( \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \lambda_{nj} - 1 \right) \right] \frac{2n\pi}{c} dx + \\ & + \delta_{ni} . f_{ni}(M_{ni}, s) ds + \delta_{nj} . g_{nj}(M_{nj}, s) ds; \end{aligned} \tag{21}$$

die Functionen $f_{ni}(M_{ni}, s)$, $g_{nj}(M_{nj}, s)$ des laufenden Punktes und der Parameter $M_{ni}$, $M_{nj}$ sind folgende:

$$\left. \begin{aligned} f_{ni}(M_{ni}, s) = & \frac{2n\pi}{c} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin (\bar{\mu}_{ni} + M_{ni}) \sin \bar{\lambda}_{ni} \cos \bar{\lambda}_{ni} \cos (s, x) + \\ & + \frac{C_n}{LM_{ni}} \{ \sin (\bar{\mu}_{ni} + M_{ni}) - \cos (\bar{\mu}_{ni} + M_{ni}) \} \sin \lambda_{ni} \sin (s, x) \\ g_{nj}(M_{nj}, s) = & (-1)^j \frac{2n\pi}{c} \sin (\bar{\mu}_{nj} + M_{nj}) \left( \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \bar{\lambda}_{nj} - 1 \right) \cos (s, x) - \\ & - \frac{C_n}{LM_{ni}} \cdot \frac{M_{nj}}{K_n} \sin (\bar{\mu}_{nj} + M_{nj}) \sin \bar{\lambda}_{nj} \sin (s, x). \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

Das erste Glied der rechten Seite in (21) ist dasjenige, welches dem Falle des correcten Analysators entspricht. Die Glieder der zweiten und dritten Zeile entspringen dem angenommenen Umstande, dass die Umdrehungscentra der Messrollen in Abständen von der Umdrehungsaxe des Rahmens angebracht sind, welche nicht genau gleich sind der Summe des Kugelhalbmessers ($K_n$) und des Rollenhalbmessers ($M_{n1}$, beziehungsweise $M_{n2}$); dieser Umstand bewirkt, dass der Mittelpunkt der Kugel sich dauernd abseits von der Umdrehungsaxe befindet. Die genannten Glieder drücken daher die Wirkung einer constanten Excentricität der Kugel aus. Indem ich diese letztere Fehlerquelle in einem weiteren Artikel (14.) gesondert besprechen will, lasse ich diese Glieder hier weg. Als Wirkung der Rollenexcentricitäten allein, bleibt

$$d\mu_{ni} = \delta_{ni} \cdot f_{ni}(\mathrm{M}_{ni}, s)\,ds + \delta_{nj} \cdot g_{nj}(\mathrm{M}_{nj}, s)\,ds. \tag{23}$$

Es möge noch die Eigenschaft der Functionen $f_{ni}(\mathrm{M}_{ni}, s)$, $g_{nj}(\mathrm{M}_{nj}, s)$ hervorgehoben werden, dass sie bei um 180° veränderten Werten der Parameter $\mathrm{M}_{n1}$, $\mathrm{M}_{n2}$, für alle $s$ die entgegengesetzten Werte annehmen. Wir werden später diese Eigenschaft verwerten. —

**14.** Die Excentricität der Kugel besteht darin, dass die Umdrehungsaxe des Rahmens des Integrierapparates nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht, so dass, abgesehen von anderen Fehlern des Apparates, der Mittelpunkt der Kugel sich in einem constanten Abstande von jener Umdrehungsaxe befindet und seine geographische Länge mit den geographischen Längen der Rollen gleich wächst. Diese Fehlerquelle wurde bereits in der bis jetzt vorhandenen Literatur des Analysators kurz berührt. Vollständig ausgedrückt ist ihr Einfluss durch die beiden Glieder der zweiten und dritten Zeile der Formel (21).

Die eine Wirkung dieser Configuration besteht darin, dass, während der Fahrstift parallel der $y$-Axe verschoben wird und dadurch die Kugel sich um eine durch ihren Mittelpunkt parallel der $x$-Axe gehende Axe dreht, die Rolle $M_{ni}$ die Kugel in einem Punkte berührt, dessen Winkelabstand von der Drehungsaxe nicht $= \lambda_{ni}$ ist. Der Unterschied ist von $\lambda_{ni}$ unabhängig. Das

erstere der genannten Glieder entspricht diesem Umstande. Die Wirkung dieses Umstandes ist offenbar dieselbe, wie diejenige eines constanten Fehlers der geographischen Länge der Rolle $M_{ni}$; eines Fehlers, der später noch (als ein »Fehler des Anfangszustandes«) Aufnahme finden soll. Mit Rücksicht darauf können wir hier dieses Glied weglassen.

Die andere Wirkung der excentrischen Lagerung der Kugel ist die, dass bei einer zur $x$-Axe parallelen Verschiebung des Fahrstiftes die Kugel auf dem Cylinder herumrollt und infolge dessen nicht allein um die verticale Axe, sondern auch in jedem Augenblick um eine horizontale Axe sich dreht, welche letztere Drehung von den Rollen registriert wird. Diesem Umstande trägt das zweite der genannten Glieder Rechnung. In diesem Gliede ist der Factor bei $dx$ eine Function der $x$-Coordinate allein. Daraus folgt, dass der Einfluss dieses Umstandes in der Ablesung der Rolle sich aufhebt, wenn die Befahrung in einem Punkte endet, dessen Abscisse gleich der des Ausgangspunktes ist.[1]

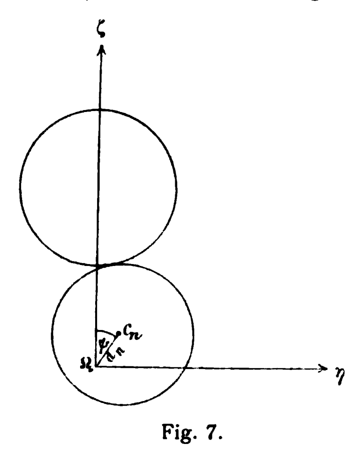


Fig. 7.

15. Betrachten wir jetzt die Excentricität des Cylinders $C_n$; seine Umdrehungsaxe, die der $x$-Axe parallel ist (und hier noch immer als in der Ebene $ZX$ gelegen angenommen werden soll), wird von der Umdrehungsaxe $Z$ des Rahmens in einem Punkte $\Omega$ getroffen, den ich für den Anfangspunkt eines neuen Coordinatensystems, $\Omega\xi\eta\zeta$, nehme, dessen Axen den Axen $XYZ$ parallel gelegt werden. Es wird dann unter

[1] Es möge nebenbei bemerkt werden, dass die Curve, welche der Berührungspunkt der Kugel auf dem Cylinder bei einer zur $x$-Axe parallelen Verschiebung des Stiftes beschreibt, nahezu eine ebene, und zwar eine Ellipse, ist. Die Behauptung, welche sich sowohl bei Prof. Henrici, als bei Herrn Bervy findet, diese Curve sei nahezu ein Kreis, beruht offenbar auf einem Versehen. Denn die Schwankungen des Radiusvectors in dieser Curve sind von derselben Größenordnung wie der Radiusvector. Es ist nicht zulässig, der Betrachtung des Vorganges die Vereinfachung zugrunde zu legen, dass man an Stelle der Cylinderfläche ihre Tangentialebene setzt.

dem Mittelpunkte des Cylinders die Projection des Punktes $\Omega$ auf die geometrische Axe des Cylinders verstanden. Bei der Fahrt parallel der Axe $oy$ wird die geometrische Axe des Cylinders um die $\xi$-Axe eine cylindrische Fläche beschreiben. Man bezeichne mit $d_n$ den kleinen constanten Abstand zwischen dem Mittelpunkte $C_n$ des Cylinders und seiner Umdrehungsaxe, und mit $\psi$ die Ablenkung der Richtung $\Omega C_n$ von der $\zeta$-Axe, im Sinne von der $\zeta$- gegen die $\eta$-Axe gezählt.

Für einen bestimmten Wert von $\psi$, sind die Coordinaten $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ des Berührungspunktes des Cylinders mit der Kugel, die Höhe $h$ des Kugelmittelpunktes über dem festen Punkte $\Omega$, sowie die Verrückung $\overline{dl}$, welche das momentan in Berührung befindliche Theilchen des Cylinders erleidet bei weiterer Drehung des Cylinders um $d\psi$, bestimmt; die Drehung der Kugel, welche erfolgen wird, ist bestimmt durch die Projection dieser Verrückung auf die gemeinsame Tangentialebene im Punkte $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ zu der Cylinderfläche

$$F(\xi\eta\zeta\psi) \equiv \eta^2+\zeta^2-2\eta d_n \sin\psi-2\zeta d_n \cos\psi+d_n^2-C_n^2 = 0$$

und der Kugelfläche

$$f(\xi\eta\zeta h) \equiv \xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\zeta h+h^2-K_n^2 = 0.$$

Es wird, ähnlich wie auf der Seite 30, die entstehende Drehung der Kugel um die $X$-Axe

$$\chi_X = \frac{dy}{LK_n^2 \mathfrak{f}}\left\{-\eta_0 \left[(f_\xi^2+f_\eta^2)\eta_0+f_\eta f_\zeta \zeta_0\right]+(h-\zeta_0)\left[(f_\xi^2+f_\zeta^2)\zeta_0+f_\eta f_\zeta \eta_0\right]\right\} \qquad (24)$$

sein, wobei $\mathfrak{f}$ der Kürze halber für $f_\xi^2+f_\eta^2+f_\zeta^2$ steht, und in den $f_\xi, f_\eta, f_\zeta$ man $\xi\eta\zeta$ nach der Differentiation durch $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ ersetzt sich denken soll; die Drehungen der Kugel um die $Y$-Axe und um die $Z$-Axe dagegen werden in diesem Falle, wie unmittelbar einleuchtend, beide Null sein. Infolge dieser Drehung der Kugel wird sich die Rolle $M_{ni}$ um ihre Axe um den Winkel

$$d\mu_{ni} = -\frac{K_n}{M_{ni}} \chi_X \cos(\lambda_{ni}+90^\circ)$$

drehen. Die Werte $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$, $h$ hat man als Lösung des Systems der vier Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F(\xi\eta\zeta\psi) &= 0 \\ f(\xi\eta\zeta h) &= 0 \\ f_\xi : f_\eta : f_\zeta &= F_\xi : F_\eta : F_\zeta \end{aligned}\right\},$$

mit anderen Worten, des Systems der vier Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F(\xi\eta\zeta\psi) &= 0 \\ f(\xi\eta\zeta h) &= 0 \\ f_\eta\left|\sqrt{F_\xi^2+F_\eta^2+F_\zeta^2}\right| &= -F_\eta\left|\sqrt{f_\xi^2+f_\eta^2+f_\zeta^2}\right| \\ f_\zeta\left|\sqrt{F_\xi^2+F_\eta^2+F_\zeta^2}\right| &= -F_\zeta\left|\sqrt{f_\xi^2+f_\eta^2+f_\zeta^2}\right| \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

(wir nehmen die Vorzeichen verschieden, weil es sich für uns um den Fall äußerer Berührung allein handelt) zu bestimmen; $\xi_0$ ist übrigens, wie unmittelbar einleuchtend, gleich Null. Da

$$F_\xi = 0, \qquad F_\eta = 2\eta_0 - 2d_n \sin\psi, \qquad F_\zeta = 2\zeta_0 - 2d_n \cos\psi,$$
$$f_\xi = 2\xi_0, \qquad f_\eta = 2\eta_0, \qquad f_\zeta = 2(\zeta_0 - h),$$

so hat man aus der dritten Gleichung des Systems (25)

$$\eta_0 = \frac{K_n}{K_n + C_n} d_n \sin\psi,$$

$\eta_0$ ist also klein von der ersten Ordnung des $d_n$; aus der ersten Gleichung (25) erhält man jetzt

$$\zeta_0^2 - 2\zeta_0 d_n \cos\psi = C_n^2 + [d_n^2]$$

und daraus

$$\zeta_0 = d_n \cos\psi \pm (C_n + [d_n^2]),$$

wo von den beiden Vorzeichen für uns natürlich nur das obere Geltung hat. Setzt man in die Formel (24) für $f_\xi, f_\eta, f_\zeta, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ die erhaltenen Werte und für $h - \zeta_0$ den Ausdruck

$$h - \zeta_0 = K_n + [d_n^2],$$

der aus der zweiten Gleichung (25) jetzt folgt, ein, so ergibt sich

$$\chi_X = \frac{dy}{LK_n}\{C_n + d_n \cos\psi + [d_n^2]\};$$

und damit schließlich

$$d\mu_{ni} = \frac{C_n}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy + \frac{d_n \cos \psi}{LM_{ni}} \sin \lambda_{ni} dy,$$

wenn man im Coefficient von $dy$ die Glieder zweiter Ordnung weglässt. Es ergibt sich also hier, außer dem bei correctem Analysator stattfindenden Werte, noch ein Zusatzglied der Drehung der Rolle $M_{ni}$, von der Form

$$d\mu_{ni} = \frac{\varkappa_n}{M_{ni}} \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \sin \lambda_{ni}\, dy, \tag{26}$$

wo $\varkappa_n, K_n$ unbekannte Instrumentalconstanten des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates bedeuten und $\varkappa_n$ von der ersten Ordnung klein ist.

Die Fehler, welche durch die auf- und absteigende Bewegung der Kugel hervorgerufen werden, eliminieren sich aus dem Resultate, wenn bei der Umfahrung man zuletzt in einem Punkte anlangt, welcher das gleiche $y$ wie der Ausgangspunkt hat.

Es bleibt übrig, den Einfluss der Excentricität des Cylinders während eines Verschiebens des Fahrstiftes parallel der Axe $ox$ zu untersuchen. Durch analoge Überlegungen wie auf den Seiten 748 und 749 ersieht man, dass in diesem Falle die effective Bewegung der Kugel, durch Reibung zwischen ihr und dem Cylinder afficiert, dadurch dargestellt werden kann, dass die Kugel, außer der ihr mit dem Rahmen gemeinsamen Rotation, noch eine Zusatzrotation besitzt: wird der kleine absolute Winkel, welchen am Mittelpunkte der Kugel der Radiusvector des Berührungspunktes bildet mit der $(-Z)$-Axe, mit $\sigma$ bezeichnet, so beträgt diese Zusatzrotation $+\nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin \sigma$ $(0 \leqq \nu \leqq 1)$, und ihre Axe, $a$, geht vom Mittelpunkte der Kugel nach demjenigen Punkte der Kugel, welcher um 90° entfernt ist von dem dem Berührungspunkte entgegengesetzten Punkte der Kugel, im Sinne von diesem letzteren nach dem Pol der $Z$-Axe gezählt. Die $Z$-Componente dieser Zusatzrotation ist zweiter Ordnung; die in die $XY$-Ebene fallende Componente fällt in dem hier betrachteten Falle offenbar stets in die Gerade

$X = 0$ und ihr Betrag um die $Y$-Axe ist $\nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin\sigma\cos\sigma$. Durch dieselbe wird also der Rolle $M_{ni}$ eine Drehung um ihre Axe mitgetheilt im Betrage von

$$d\mu_{ni} = -\frac{K_n}{M_{ni}} \cdot \nu \frac{2n\pi dx}{c} \sin\sigma\cos\sigma . \cos\lambda_{ni}.$$

Da $\sin\sigma = \frac{Y_0}{K_n} = \frac{d_n \sin\psi}{K_n + C_n}$, $\cos\sigma = 1 + [d_n^2]$ ist, so ergibt sich für diese fälschliche Drehung der Rolle, bei Weglassung der Glieder zweiter Ordnung im Coefficient von $dx$,

$$d\mu_{ni} = -\frac{K_n}{M_{ni}(K_n + C_n)} \nu \frac{2n\pi}{c} d_n \sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right) \cos\lambda_{ni}\, dx,$$

oder

$$d\mu_{ni} = \frac{n\gamma_n}{M_{ni}} \sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right) \cos\lambda_{ni}\, dx, \tag{27}$$

wo $\gamma_n$ eine unbekannte Instrumentalconstante des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates und von der ersten Ordnung klein ist.

**16.** Es hätte offenbar keinen Sinn, die Eventualität in Erwägung zu ziehen, dass der Cylinder auf seiner Axe ein wenig nach rechts oder links verlegt wäre; denn solange der unterste Punkt der Kugel die Mantelfläche des Cylinders überhaupt berührt, ist es gleichgiltig, wie weit sich diese Mantelfläche nach rechts oder links erstreckt. Anders verhält es sich mit einer kleinen Verlegung des Cylinders sammt seiner Umdrehungsaxe nach vorn oder hinten; denn im Falle einer solchen Anordnung geht die Umdrehungsaxe des Rahmens nicht mehr durch den Berührungspunkt der Kugel mit dem Cylinder, es müsste dann also bei einer Verschiebung des Fahrstiftes parallel der Axe $ox$ eine gleitende Reibung zwischen der Kugel und dem Cylinder entstehen, sollte die Kugel sich dabei genau um die Umdrehungsaxe des Rahmens ($Z$-Axe) drehen.

Während bei einem Vorrücken des Stiftes in der Richtung der $y$-Axe ein solches Instrument genau so functionieren wird, wie wenn die Axe des Cylinders sich genau in der $YZ$-Ebene befände, wird bei dem Vorrücken des Stiftes in der Richtung der $x$-Axe, im Gegensatze zur Functionierung des correcten

Analysators, eine kleine Rotation der Rollen um ihre Axen zustande kommen. Es ist aber klar, dass diese letztere Erscheinung unabhängig davon ist, was für ein Wert $y$ der Ordinate es ist, der bei dieser Operation eingehalten wird. Daraus folgt, dass der aus dieser fehlerhaften Anordnung herrührende Fehler in dem Drehungswinkel der Rolle $M_{ni}$ um ihre Axe sich im Resultate eliminiert, wenn bei der Befahrung zuletzt an einem Punkte angelangt wird, welcher das gleiche $x$ wie der Ausgangspunkt hat.

**17.** Nachdem in den vorigen Paragraphen die Fehler der unteren Organe des Apparates behandelt worden sind, gehe ich jetzt über zu seinem oberen Theile: der Horizontalscheibe $H_n$. Verfolgt man den Draht von der Wagen-Leitrolle ausgehend, so trifft man nacheinander auf eine Anzahl Leitrollen und Integratorenscheiben, die ich zusammen allgemein Horizontalräder nennen und in der soeben angedeuteten Reihenfolge mit den Nummern 0, 1, 2, ..., $N$ belegen will, wobei die Wagen-Leitrolle das 0te Rad und die Scheibe des letzten Integrierapparates rechts das $N$te Rad ist. Es wird demnach, bei einer positiven Verschiebung des Stiftes parallel der Axe $ox$, jedes Rad von dem mit unmittelbar kleinerer Nummer angetrieben und treibt das mit unmittelbar größerer Nummer an. Jedes Rad nenne ich ein von dem Drahte positiv oder negativ umwickeltes, je nachdem man, bei dem oben angedeuteten Fortschreiten längs des Drahtes, die Peripherie dieses Rades in dem positiven oder dem negativen Sinne umkreisen würde.

Es soll nun angenommen werden, dass diese Räder auf ihren Umdrehungsaxen excentrisch angebracht seien.

Ich stelle mir zunächst das folgende, etwas allgemeinere, kinematische Problem vor, dessen Anwendung dann im nächsten Paragraph sofort die gesuchten Ausdrücke der Wirkung der Räderexcentricitäten liefert. —

Es liege in einer Ebene $xy$ ein System geschlossener Figuren $S_0\, S_1\, S_2 \ldots S_N$ vor. Dieses System ändere sich continuierlich in der Weise, dass alle Curven, durch welche die einzelne Figur $S_m$ ($m = 1, 2, \ldots, N$) successive ersetzt wird, die Eigenschaft haben, ineinander übergeführt werden zu können

durch Drehung um einen festen Punkt $R_m(x = A_m, y = B_m)$ der $xy$-Ebene, und dass alle Curven, durch welche die Figur $S_0$ successive ersetzt wird, die Eigenschaft haben, ineinander übergeführt werden zu können durch bloße Verschiebung parallel der $x$-Axe. Von der durch die einzelne Curve $S_m$ erzeugten Curvenfamilie wird (bei $m = 1, 2, \ldots, N$) nur angenommen, dass ihre sämmtlichen Glieder übereinstimmen bis auf kleine Abweichungen erster Ordnung (sowohl hinsichtlich der Punkte, als hinsichtlich der Tangenten und Krümmung) mit einem und demselben um $R_m$ gezeichneten unveränderlichen Kreise, dessen Radius ebenfalls $R_m$ heißen mag; von der durch die Curve $S_0$ erzeugten Curvenfamilie wird angenommen, dass ihre sämmtlichen Glieder bis auf kleine Abweichungen erster Ordnung mit Kreisen übereinstimmen, welche aus einem zur erzeugenden Figur festen Kreise von dem unveränderlichen Radius $R_0$ entstehen; der Mittelpunkt dieses Kreises habe die (veränderliche) Abscisse $A_0$ und, vermöge passender Wahl des Coordinatensystems, die Ordinate $B_0 = 0$. Der momentane Zustand des Curvensystems $S_0 S_1 \ldots S_N$ ist dann vollständig definiert durch die Abscisse $A_0$ des Mittelpunktes des Kreises der Curve $S_0$ und durch die Drehungsphasen $\alpha_m$ jeder Curve $S_m$ $(m = 1, 2, \ldots, N)$; ich verstehe dabei unter der Drehungsphase den Winkel, um welchen sich derjenige mit der erzeugenden Curve fest verbundene aus dem Umdrehungscentrum $R_m$ gezogene Strahl, welcher in dem Anfangszustande des Systems der $x$-Axe parallel war, von dieser abgelenkt hat seit jenem Anfangszustande bis zu dem momentanen Zustande. Vorausgesetzt wird, dass die $N+1$ Contouren stets außerhalb einander bleiben.

Nun seien die Änderungen der einzelnen Theile des Systems durch das folgende Gesetz miteinander verbunden.

Es sei für den Anfangszustand des Systems ein Linienzug, den ich kurz den »Faden« nennen will, als die Bahn eines laufenden Punktes definiert, der sich von einem Punkte auf der Curve $S_0$ bis zu einem Punkte auf der Curve $S_N$ ohne Sprünge und plötzliche Richtungsänderungen so bewegt, dass jedes Element der Bewegung entweder mit dem Element einer bestimmten von $S_m$ nach $S_{m+1}$ gerichteten g e m e i n s a m e n T a n g e n t e eines Curvenpaares $S_m S_{m+1}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, N)$

zusammenfällt, oder auf dem Elemente einer Curve des Systems liegt. Für jeden anderen Zustand des Systems ist der Faden derjenige Linienzug, welcher von einem Punkte der neuen Curve $S_0$ bis zu einem Punkte der neuen Curve $S_N$ wieder in einer dieser Definition genügenden Weise verläuft und aus dem Faden des Anfangszustandes auf continuierliche Weise entsteht. Das erwähnte Gesetz ist dann das: Die Länge des Fadens zwischen irgend einem mit der erzeugenden Curve fest verbundenen Punkte der Curve $S_0$ und irgend einem mit der erzeugenden Curve fest verbundenen Punkte der Curve $S_m$ soll unveränderlich bleiben; und zwar gilt dies für jede einzelne der $N$ Curven $S_1, S_2, \ldots, S_N$.

Die Aufgabe ist, für ein beliebiges $m$ die Drehungsphase $\alpha_m$ als Function von $A_0$ zu bestimmen. Wir werden bei Lösung derselben noch die specielle Voraussetzung über die Gestaltung des Contourensystems einführen, dass der Faden auf der Strecke von $S_0$ bis $S_1$ nahezu parallel der $(-x)$-Axe verläuft. —

Der Weg zur Lösung dieses Problems ist direct durch die Fragestellung vorgezeichnet. Wendet man das obige Gesetz der Constanz der Fadenlänge an auf Figuren $S_1, \ldots, S_{m-1}, S_m$, so erhält man $m$ Differentialgleichungen zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und $A_0$, aus denen es möglich sein wird den gesuchten Ausdruck

$$d\alpha_m = f(A_0)\, dA_0$$

zu finden.

Man lege für jede der $m+1$ Curven $S_0\, S_1 \ldots S_m$, allgemein für die Curve $S_\nu$, ein eigenes Polarcoordinatensystem, $r_\nu \varphi_\nu$, mit dem Punkte $A_\nu B_\nu$ als Pol und dem zur $x$-Axe parallelen Strahl als Polaraxe (die Anomalie $\varphi_\nu$ ist gezählt in positivem Drehungssinne von der Polaraxe bis zum Radiusvector). Die Gleichungen dieser $m+1$ Curven sind dann

$$\begin{aligned} r_0 &= F_0(\varphi_0), \\ r_1 &= F_1(\alpha_1, \varphi_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_m &= F_m(\alpha_m, \varphi_m), \end{aligned}$$

wo $\alpha_\nu$ als ein Parameter in der Gleichung zwischen den Variablen $r_\nu$ und $\varphi_\nu$ auftritt. Man bezeichne für die allgemeine Curve $S_\nu$ mit $P_{\nu,\nu-1}(x_{\nu,\nu-1}, y_{\nu,\nu-1})$ ihren Berührungspunkt mit

der vom Faden gebildeten Tangente des Curvenpaares $S_{\nu-1} S_\nu$, und mit $P_{\nu,\nu+1}(x_{\nu,\nu+1}, y_{\nu,\nu+1})$ ihren Berührungspunkt mit der vom Faden gebildeten Tangente des Curvenpaares $S_\nu S_{\nu+1}$. Der Wert der Anomalie $\varphi_\nu$ für den Punkt $P_{\nu,\nu-1}$ sei $\varphi_{\nu,\nu-1}$, für den Punkt $P_{\nu,\nu+1}$ sei $\varphi_{\nu,\nu+1}$. Man führe schließlich den Factor $\omega_\nu = +1, -1$ ein, der den Sinn bedeutet, in welchem die Contour $S_\nu$ vom Faden umwickelt ist.

Ein Punkt der Curve $S_\nu$, welcher durch den Wert $\alpha_\nu + C$ der Anomalie $\varphi_\nu$ definiert ist, entspricht nun, wenn $C$ eine Constante bedeutet, vor und nach der Drehung einem und demselben Punkte der erzeugenden Curve. Ein Punkt der Curve $S_0$, welcher durch den Wert $K$ der Anomalie $\varphi_0$ definiert ist, entspricht, wenn $K$ eine Constante bedeutet, vor und nach der Verschiebung einem und demselben Punkte der erzeugenden Curve. Die absolute Länge des Fadens zwischen dem Punkte $\varphi_0 = K$ der Curve $S_0$ und ihrem Punkte $P_{01}(\varphi_0 = \varphi_{01})$ ist

$$\omega_0 \int_K^{\varphi_{01}} \left| \sqrt{r_0^2 + \left(\frac{dr_0}{d\varphi_0}\right)^2} \right| d\varphi_0.$$

Die absolute Länge des Fadens zwischen seinem Ankunftspunkte an der Curve $S_\nu$, d. h. ihrem Punkte $\varphi_\nu = \varphi_{\nu,\nu-1}$, und ihrem Punkte $\varphi_\nu = \alpha_\nu + C$ ist

$$\omega_\nu \int_{\varphi_{\nu,\nu-1}}^{\alpha_\nu + C} \left| \sqrt{r_\nu^2 + \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)^2} \right| d\varphi_\nu.$$

Mit jeder der zwischenliegenden $\nu - 1$ Contouren, allgemein der Contour $S_i$, hat der Faden ein Stück gemeinsam, dessen absolute Länge (bis auf eine gegebene Anzahl ganzer Umfänge)

$$\omega_i \int_{\varphi_{i,i-1}}^{\varphi_{i,i+1}} \left| \sqrt{r_i^2 + \left(\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i}\right)^2} \right| d\varphi_i$$

ist. Die absolute Länge des zwischen je zwei Contouren $S_i S_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$ enthaltenen Fadenstückes ist

$$-\omega_i r_{i,i+1} \cos \tau_{i,i+1} + \omega_{i+1} r_{i+1,i} \cos \tau_{i+1,i} +$$
$$+ \omega_i (A_{i+1} - A_i) \cos \vartheta_{i,i+1} + \omega_i (B_{i+1} - B_i) \sin \vartheta_{i,i+1},$$

wo $r_{i,i+1}$ den Radiusvector $r_i$ für den Punkt $\varphi_i = \varphi_{i,i+1}$ der Curve $S_i$, $\tau_{i,i+1}$ die in diesem Punkte geltende Ablenkung des

positiven (nach wachsenden Anomalien gehenden) Curvenelementes von dem Radiusvector, $\vartheta_{i,i+1}$ die in demselben geltende Ablenkung des positiven Curvenelementes von der $x$-Axe bedeutet, und $r_{i+1,i}$, $\tau_{i+1,i}$, $\vartheta_{i+1,i}$ die analoge Bedeutung für den Punkt $\varphi_{i+1} = \varphi_{i+1,i}$ der Curve $S_{i+1}$ haben. Die absolute Länge des zwischen den Contouren $S_0$ und $S_1$ enthaltenen Fadenstückes ist

$$-\omega_1 r_{01} \cos\tau_{01} + \omega_1 r_{10} \cos\tau_{10} + \omega_0 (A_1 - A_0) \cos\vartheta_{01} + \omega_0 B_1 \sin\vartheta_{01}.$$

Die Bedingungsgleichung in Anwendung auf die Contour $S_\nu$ ist daher

$$\omega_0 \frac{d}{dA_0} \int_K^{\varphi_{01}} \left| \sqrt{r_0^2 + \left(\frac{dr_0}{d\varphi_0}\right)^2} \right| d\varphi_0 +$$

$$+ \frac{d}{dA_0} [-\omega_0 r_{01} \cos\tau_{01} + \omega_1 r_{10} \cos\tau_{10} + \omega_0 (A_1 - A_0) \cos\vartheta_{01} + \omega_0 B_1 \sin\vartheta_{01}] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\nu-1} \omega_i \frac{d}{dA_0} \int_{\varphi_{i,i-1}}^{\varphi_{i,i+1}} \left| \sqrt{r_i^2 + \left(\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i}\right)^2} \right| d\varphi_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\nu-1} \frac{d}{dA_0} [-\omega_i r_{i,i+1} \cos\tau_{i,i+1} + \omega_{i+1} r_{i+1,i} \cos\tau_{i+1,i} + \omega_i (A_{i+1} - A_i) \cos\vartheta_{i,i+1} + \omega_i (B_{i+1} - B_i) \sin\vartheta_{i,i+1}] +$$

$$+ \omega_\nu \frac{d}{dA_0} \int_{\varphi_{\nu,\nu-1}}^{\alpha_\nu + C} \left| \sqrt{r_\nu^2 + \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)^2} \right| d\varphi_\nu = 0;$$

führt man die angezeigten Differentiationen nach $A_0$ aus, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Function $r_i$ der beiden Argumente $\alpha_i$, $\varphi_i$ offenbar nur die Differenz derselben enthält und daher $\frac{\partial r_i}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i}$ ist, vernachlässigt die Glieder zweiter Ordnung und setzt die Ausdrücke für $\tau_{01}$, $\vartheta_{01}$, $\tau_{10}$, $\vartheta_{10}$, $\tau_{i,i+1}$, $\vartheta_{i,i+1}$, $\tau_{i+1,i}$, $\vartheta_{i+1,i}$ ein, so geht diese Gleichung über in

*[siehe Gleichung (28) auf der nebenstehenden Tafel],*

wo das Resultat der Einsetzung von $\varphi_{i,i+1}$ für $\varphi_i$ in die Functionen $r_i$ und $\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i}$ der beiden Argumente $\alpha_i$, $\varphi_i$, der Kürze halber, mit

$$r_{i,i+1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i}\right)_{i,i+1} \quad \left[\text{anstatt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial \varphi_i}\right)_{\varphi_{i,i+1}}\right]$$

bezeichnet wurde, und Analoges von den Symbolen

$$\left(\frac{dr_0}{d\varphi_0}\right)_{01}, \quad r_{i,i-1}, \quad \left(\frac{\partial r_{i+1}}{\partial \varphi_{i+1}}\right)_{i+1,i}$$

gilt.[1] Die einzelnen Zeilen der Gleichung (28) entstehen aus den entsprechenden Zeilen der vorhergehenden.

Bildet man nun die Gleichung (28) einzeln für $\nu = 1$, $\nu = 2, \ldots, \nu = m$, so erhält man ein System von $m$ Gleichungen, welches, indem man die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gleichungen des Systems nimmt und außerdem die erste Gleichung des Systems beibehält, durch das folgende ersetzt werden kann:

*[siehe auf der Tafel Gleichungen (29)].*

---

[1] Die Voraussetzung, dass der Faden von $S_0$ nach $S_1$ nahezu parallel der $(-x)$-Axe verläuft, ist eingeführt worden in dem Gliede $+1$ dieser Formel. Bei entgegengesetzter Annahme müsste dieses Glied $-1$, im allgemeinen Falle aber

$$-\omega_0 \cos \vartheta_{01} = -\omega_0 \frac{\left(\frac{dr_0}{d\varphi_0}\right)_{01} \cos \varphi_{01} - r_{01} \sin \varphi_{01}}{\sqrt{r_{01}^2 + \left(\frac{dr_0}{d\varphi_0}\right)_{01}^2}}$$

heißen.

$$)_{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} - \sum_{i=1}^{i=\nu-1} \omega_i (r_{i,i+1} - r_{i,i-1}) \frac{d\alpha_i}{dA_0} \\ \frac{-1}{-1})_{i+1,i} \\ + \omega_\nu r_{\nu,\nu-1} \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} \end{array}\right\} = 0 \tag{28}$$

$$\left.\begin{array}{llll} )_{10} & + \omega_1 r_{10} \frac{d\alpha_1}{dA_0} & & = 0 \\ )_{21} & + \omega_2 r_{21} \frac{d\alpha_2}{dA_0} & - \omega_1 r_{12} \frac{d\alpha_1}{dA_0} & = 0 \\ )_{32} & + \omega_3 r_{32} \frac{d\alpha_3}{dA_0} & - \omega_2 r_{23} \frac{d\alpha_2}{dA_0} & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ )_{m,m-1} & + \omega_m r_{m,m-1} \frac{d\alpha_m}{dA_0} & - \omega_{m-1} r_{m-1,m} \frac{d\alpha_{m-1}}{dA_0} & = 0. \end{array}\right\} \tag{29}$$

Es ist aber ($\nu = 1, 2, \ldots$)

$$\frac{d}{dA_0}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu-1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu-1} \cdot \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} + \frac{\partial}{\partial \varphi_{\nu,\nu-1}}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu-1} \cdot \frac{d\varphi_{\nu,\nu-1}}{dA_0} =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \alpha_\nu \partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu-1} \cdot \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} + \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_\nu^2}\right)_{\nu,\nu-1} \cdot \frac{d\varphi_{\nu,\nu-1}}{dA_0} = -\left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_\nu^2}\right)_{\nu,\nu-1} \cdot \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} + \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_\nu^2}\right)_{\nu,\nu-1} \cdot \frac{d\varphi_{\nu,\nu-1}}{dA_0},$$

$$\frac{d}{dA_0}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu+1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu+1} \cdot \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} + \frac{\partial}{\partial \varphi_{\nu,\nu+1}}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu+1} \cdot \frac{d\varphi_{\nu,\nu+1}}{dA_0} =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \alpha_\nu \partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu+1} \cdot \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} + \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_\nu^2}\right)_{\nu,\nu+1} \cdot \frac{d\varphi_{\nu,\nu+1}}{dA_0} = -\left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_\nu^2}\right)_{\nu,\nu+1} \cdot \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} + \left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial \varphi_\nu^2}\right)_{\nu,\nu+1} \cdot \frac{d\varphi_{\nu,\nu+1}}{dA_0}.$$

Die Gleichungen (29) können daher so geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}
&1+\omega_1\left[R_1-\frac{R_1}{R_0}\left(\frac{d^2 r_0}{d\varphi_0^2}\right)_{01}\right]\frac{d\varphi_{01}}{dA_0}-\omega_1\left[R_1-\left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial\varphi_1^2}\right)_{10}\right]\frac{d\varphi_{10}}{dA_0} \qquad -\omega_1\left[\left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial\varphi_1^2}\right)_{10}-r_{10}\right]\frac{d\alpha_1}{dA_0}=0\\
&\omega_2\left[R_2-\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial\varphi_1^2}\right)_{12}\right]\frac{d\varphi_{12}}{dA_0}-\omega_2\left[R_2-\left(\frac{\partial^2 r_2}{\partial\varphi_2^2}\right)_{21}\right]\frac{d\varphi_{21}}{dA_0}+\left[\omega_2\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial\varphi_1^2}\right)_{12}-\omega_1 r_{12}\right]\frac{d\alpha_1}{dA_0}-\omega_2\left[\left(\frac{\partial^2 r_2}{\partial\varphi_2^2}\right)_{21}-r_{21}\right]\frac{d\alpha_2}{dA_0}=0\\
&\omega_3\left[R_3-\frac{R_3}{R_2}\left(\frac{\partial^2 r_2}{\partial\varphi_2^2}\right)_{23}\right]\frac{d\varphi_{23}}{dA_0}-\omega_3\left[R_3-\left(\frac{\partial^2 r_3}{\partial\varphi_3^2}\right)_{32}\right]\frac{d\varphi_{32}}{dA_0}+\left[\omega_3\frac{R_3}{R_2}\left(\frac{\partial^2 r_2}{\partial\varphi_2^2}\right)_{23}-\omega_2 r_{23}\right]\frac{d\alpha_2}{dA_0}-\omega_3\left[\left(\frac{\partial^2 r_3}{\partial\varphi_3^2}\right)_{32}-r_{32}\right]\frac{d\alpha_3}{dA_0}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega_m\left[R_m-\frac{R_m}{R_{m-1}}\left(\frac{\partial^2 r_{m-1}}{\partial\varphi_{m-1}^2}\right)_{m-1,m}\right]\frac{d\varphi_{m-1,m}}{dA_0}-\omega_m\left[R_m-\left(\frac{\partial^2 r_m}{\partial\varphi_m^2}\right)_{m,m-1}\right]\frac{d\varphi_{m,m-1}}{dA_0}+\\
&\qquad+\left[\omega_m\frac{R_m}{R_{m-1}}\left(\frac{\partial^2 r_{m-1}}{\partial\varphi_{m-1}^2}\right)_{m-1,m}-\omega_{m-1}r_{m-1,m}\right]\frac{d\alpha_{m-1}}{dA_0}-\omega_m\left[\left(\frac{\partial^2 r_m}{\partial\varphi_m^2}\right)_{m,m-1}-r_{m,m-1}\right]\frac{d\alpha_m}{dA_0}=0.
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Die Anomalien der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangente sind, für jedes Contourenpaar $S_\nu S_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m-1$), in Function der beiden Drehungsphasen zu bestimmen aus dem Gleichungenpaar

$$\left\{\begin{aligned}
U(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \varphi_{\nu,\nu+1}, \varphi_{\nu+1,\nu}) &= \frac{\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu+1} \sin\varphi_{\nu,\nu+1} + r_{\nu,\nu+1}\cos\varphi_{\nu,\nu+1}}{\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial \varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu+1} \cos\varphi_{\nu,\nu+1} - r_{\nu,\nu+1}\sin\varphi_{\nu,\nu+1}} - \frac{r_{\nu+1,\nu}\sin\varphi_{\nu+1,\nu} + B_{\nu+1} - r_{\nu,\nu+1}\sin\varphi_{\nu,\nu+1} - B_\nu}{r_{\nu+1,\nu}\cos\varphi_{\nu+1,\nu} + A_{\nu+1} - r_{\nu,\nu+1}\cos\varphi_{\nu,\nu+1} - A_\nu} = 0\\
V(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \varphi_{\nu,\nu+1}, \varphi_{\nu+1,\nu}) &= \frac{\left(\frac{\partial r_{\nu+1}}{\partial \varphi_{\nu+1}}\right)_{\nu+1,\nu} \sin\varphi_{\nu+1,\nu} + r_{\nu+1,\nu}\cos\varphi_{\nu+1,\nu}}{\left(\frac{\partial r_{\nu+1}}{\partial \varphi_{\nu+1}}\right)_{\nu+1,\nu} \cos\varphi_{\nu+1,\nu} - r_{\nu+1,\nu}\sin\varphi_{\nu+1,\nu}} - \frac{r_{\nu+1,\nu}\sin\varphi_{\nu+1,\nu} + B_{\nu+1} - r_{\nu,\nu+1}\sin\varphi_{\nu,\nu+1} - B_\nu}{r_{\nu+1,\nu}\cos\varphi_{\nu+1,\nu} + A_{\nu+1} - r_{\nu,\nu+1}\cos\varphi_{\nu,\nu+1} - A_\nu} = 0;
\end{aligned}\right.$$

ihre Differentialquotienten nach $A_0$ sind infolge dessen

$$\frac{d\varphi_{\nu,\nu+1}}{dA_0} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \alpha_\nu}\frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1,\nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1,\nu}}\frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu}}{\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu,\nu+1}}\frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1,\nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1,\nu}}\frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu,\nu+1}}} \cdot \frac{d\alpha_\nu}{dA_0} + \frac{\frac{\partial U}{\partial \alpha_{\nu+1}}\frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1,\nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1,\nu}}\frac{\partial V}{\partial \alpha_{\nu+1}}}{\frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu,\nu+1}}\frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu+1,\nu}} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\nu+1,\nu}}\frac{\partial V}{\partial \varphi_{\nu,\nu+1}}} \cdot \frac{d\alpha_{\nu+1}}{dA_0},$$

$$\frac{d\varphi_{\nu+1,\nu}}{dA_0} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial\varphi_{\nu,\nu+1}}\frac{\partial V}{\partial\alpha_\nu}-\frac{\partial U}{\partial\alpha_\nu}\frac{\partial V}{\partial\varphi_{\nu,\nu+1}}}{\frac{\partial U}{\partial\varphi_{\nu,\nu+1}}\frac{\partial V}{\partial\varphi_{\nu+1,\nu}}-\frac{\partial U}{\partial\varphi_{\nu+1,\nu}}\frac{\partial V}{\partial\varphi_{\nu,\nu+1}}}\frac{d\alpha_\nu}{dA_0}-\frac{\frac{\partial U}{\partial\varphi_{\nu,\nu+1}}\frac{\partial V}{\partial\alpha_{\nu+1}}-\frac{\partial U}{\partial\alpha_{\nu+1}}\frac{\partial V}{\partial\varphi_{\nu,\nu+1}}}{\frac{\partial U}{\partial\varphi_{\nu,\nu+1}}\frac{\partial V}{\partial\varphi_{\nu+1,\nu}}-\frac{\partial U}{\partial\varphi_{\nu+1,\nu}}\frac{\partial V}{\partial\varphi_{\nu,\nu+1}}}\frac{d\alpha_{\nu+1}}{dA_0},$$

und wenn man die angedeuteten partiellen Differentiationen und Multiplicationen ausführt, unter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung, findet man

$$\frac{d\varphi_{\nu,\nu+1}}{dA_0} = \left[-\frac{1}{R_\nu}\left(\frac{\partial^2 r_\nu}{\partial\varphi_\nu^2}\right)_{\nu,\nu+1}-\frac{\omega_\nu}{T_{\nu,\nu+1}}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial\varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu+1}\right]\cdot\frac{d\alpha_\nu}{dA_0}+\frac{\omega_{\nu+1}}{T_{\nu,\nu+1}}\left(\frac{\partial r_{\nu+1}}{\partial\varphi_{\nu+1}}\right)_{\nu+1,\nu}\cdot\frac{d\alpha_{\nu+1}}{dA_0}$$

$$\frac{d\varphi_{\nu+1,\nu}}{dA_0} = -\frac{\omega_\nu}{T_{\nu,\nu+1}}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial\varphi_\nu}\right)_{\nu,\nu+1}\cdot\frac{d\alpha_\nu}{dA_0}+\left[-\frac{1}{R_{\nu+1}}\left(\frac{\partial^2 r_{\nu+1}}{\partial\varphi_{\nu+1}^2}\right)_{\nu+1,\nu}+\frac{\omega_{\nu+1}}{T_{\nu,\nu+1}}\left(\frac{\partial r_{\nu+1}}{\partial\varphi_{\nu+1}}\right)_{\nu+1,\nu}\right]\cdot\frac{d\alpha_{\nu+1}}{dA_0},$$

wo $T_{\nu,\nu+1}$ die absolute Länge derselben gemeinsamen Tangente, wie sie vom Faden gebildet wird, für den idealen Fall (den Fall der Kreise $R_\nu$, $R_{\nu+1}$) ist. In ähnlicher Weise haben die Anomalien der Berührungspunkte der gemeinsamen Tangente im Contourenpaare $S_0S_1$, als gemeinsame Lösungen der Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} U(\alpha_1,\varphi_{01},\varphi_{10},A_0) &= \frac{\left(\frac{dr_0}{d\varphi_0}\right)_{01}\sin\varphi_{01}+r_{01}\cos\varphi_{01}}{\left(\frac{dr_0}{d\varphi_0}\right)_{01}\cos\varphi_{01}-r_{01}\sin\varphi_{01}}-\frac{r_{10}\sin\varphi_{10}+B_1-r_{01}\sin\varphi_{01}}{r_{10}\cos\varphi_{10}+A_1-r_{01}\cos\varphi_{01}-A_0} = 0\\ V(\alpha_1,\varphi_{01},\varphi_{10},A_0) &= \frac{\left(\frac{\partial r_1}{\partial\varphi_1}\right)_{10}\sin\varphi_{10}+r_{10}\cos\varphi_{10}}{\left(\frac{\partial r_1}{\partial\varphi_1}\right)_{10}\cos\varphi_{10}-r_{10}\sin\varphi_{10}}-\frac{r_{10}\sin\varphi_{10}+B_1-r_{01}\sin\varphi_{01}}{r_{10}\cos\varphi_{10}+A_1-r_{01}\cos\varphi_{01}-A_0} = 0,\end{aligned}\right.$$

ihre Differentialquotienten bis auf Glieder zweiter Ordnung gleich den Ausdrücken

$$\frac{d\varphi_{01}}{dA_0} = \frac{1}{(A_0-A_1)^2}[r_{10} \sin \varphi_{10}+B_1-r_{01} \sin \varphi_{01}]+ + \frac{\omega_1}{A_0-A_1}\left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi_1}\right)_{10} \cdot \frac{d\alpha_1}{dA_0},$$

$$\frac{d\varphi_{10}}{dA_0} = \frac{1}{(A_0-A_1)^2}[r_{10} \sin \varphi_{10}+B_1-r_{01} \sin \varphi_{01}]+ + \left[-\frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial \varphi_1^2}\right)_{10} + \frac{\omega_1}{A_0-A_1}\left(\frac{\partial r_1}{\partial \varphi_1}\right)_{10}\right] \cdot \frac{d\alpha_1}{dA_0}.$$

Damit werden die Gleichungen (30) einfach

$$\left.\begin{array}{lll}
1 & +\omega_1 r_{10} \frac{d\alpha_1}{dA_0} & =0, \\
-\omega_1 r_{12} \frac{d\alpha_1}{dA_0} & +\omega_2 r_{21} \frac{d\alpha_2}{dA_0} & =0, \\
-\omega_2 r_{23} \frac{d\alpha_2}{dA_0} & +\omega_3 r_{32} \frac{d\alpha_3}{dA_0} & =0, \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
-\omega_{m-1} r_{m-1,\,m} \frac{d\alpha_{m-1}}{dA_0} & +\omega_m r_{m,\,m-1} \frac{d\alpha_m}{dA_0} & =0.
\end{array}\right\} \quad (31)$$

Hierin sind: $r_{01}$; $r_{12}$, $r_{21}$; $r_{23}$, $r_{32}$; ...; $r_{m-1,\,m}$, $r_{m,\,m-1}$ bekannte Functionen von: $\alpha_1$ und $\varphi_{10}$; von $\alpha_1$ und $\varphi_{12}$, von $\alpha_2$ und $\varphi_{21}$; ...; von $\alpha_{m-1}$ und $\varphi_{m-1,\,m}$, von $\alpha_m$ und $\varphi_{m,\,m-1}$. Die Gleichungen (31), zusammengenommen mit den Gleichungen, aus welchen die Anomalien der Berührungspunkte in jedem Contourenpaare in Function der beiden Drehungsphasen — beziehungsweise in Function der Drehungsphase $\alpha_1$ und der Abscisse $A_0$ — ausgedrückt werden, enthalten die Lösung der Aufgabe.

**18.** Die Anwendung auf die excentrischen Horizontalräder des Analysators ist eine unmittelbare.

Schneidet man mit einer horizontalen Ebene jedes Rad in der Höhe durch, wo es vom Draht umwickelt ist, so bilden die Figuren der Räder in dieser Ebene ein System geschlossener

Curven. Nimmt man in dieser Ebene ein rechtwinkliges, zum Gerüst des Instrumentes festes Coordinatensystem $xy$ an, dessen Axen den gleichnamigen Axen des früheren Systems $oxyz$ parallel und die $x$-Axe durch den Mittelpunkt der Wagen-Leitrolle (= des 0ten Rades) gelegt werden, so ist jenes Curvensystem im Falle der excentrischen Räder durch Gleichungen dargestellt, welche mit der Stellung des Fahrstiftes sich continuierlich ändern, und sind die Veränderungen des Curvensystems gerade von der Art, wie sie im vorigen Paragraph beschrieben wurde. Indem nämlich bei der Verschiebung $dx$ des Fahrstiftes der Draht die Räder $1, 2, \ldots, N$ in Umdrehung versetzt, ist die jedem Rad ertheilte Drehung eine solche, dass ein materieller Punkt des umwickelnden Drahtstückes (welcher nicht durch die Verschiebung die Peripherie des Rades verlässt) vor und nach der Verschiebung mit demselben materiellen Punkte des Rades zusammenfällt. Sie ist, mit anderen Worten, durch diese geometrische Bedingung definiert, dass die Entfernung zwischen einem materiellen Punkte der Peripherie der Wagen-Leitrolle und einem solchen der Peripherie des Rades, gemessen längs des Drahtes, durch die Verschiebung nicht geändert wird.

Die veränderlichen Contouren $S_0, S_1, S_2, \ldots$, welche durch die excentrischen Horizontalräder des Analysators in der $xy$-Ebene gebildet werden, sind Kreise. Die Gleichungen der Contouren $S_1, S_2, \ldots$ in den durch die Umdrehungscentra der Räder gelegten Polarcoordinaten-Systemen sind, wenn man mit $\delta_\nu$ die lineare Excentricität des $\nu$ten Rades, mit $R_\nu$ seinen Halbmesser und mit $E_\nu$ die in der Anfangsstellung des Instrumentes stattfindende Ablenkung der Richtung Umdrehungscentrum—Radmittelpunkt von der $x$-Axe bezeichnet,

$$r_1 = R_1 + \delta_1 \cos(\varphi_1 - \alpha_1 - E_1) + [\delta_1^2]$$
$$r_2 = R_2 + \delta_2 \cos(\varphi_2 - \alpha_2 - E_2) + [\delta_2^2]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wo also $\delta_\nu$, $E_\nu$ Instrumentalconstanten des $\nu$ten Rades sind. Die Verschiebung $dA_0$ der Contour $S_0$ ist gleich der Verschiebung $dx$ des Fahrstiftes.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Horizontalscheibe des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates bei einer positiven Verschiebung $dx$ des Fahrstiftes drehen wird; wie man später sehen wird, braucht der Fall der negativen Verschiebung hier nicht genauer untersucht zu werden. Die Horizontalscheibe des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates sei das $m^{\text{te}}$ Rad.

Dann haben wir die Gleichungen (31) anzuwenden. Es ist aber, bis auf Glieder zweiter Ordnung der Excentricitäten,

$$r_{10} = R_1 + \delta_1 \cos(\Phi_{10} - \alpha_1 - E_1)$$

und

$$r_{\nu,\nu+1} = R_\nu + \delta_\nu \cos(\Phi_{\nu,\nu+1} - \alpha_\nu - E_\nu),$$

$$r_{\nu+1,\nu} = R_{\nu+1} + \delta_{\nu+1} \cos(\Phi_{\nu+1,\nu} - \alpha_{\nu+1} - E_{\nu+1}),$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, m-1),$$

wo $\Phi_{10}$, $\Phi_{\nu,\nu+1}$, $\Phi_{\nu+1,\nu}$ die Anomalien der betreffenden Berührungspunkte für den idealen Fall, somit bekannte Constanten des Instrumentes sind. Es fällt daher die Nothwendigkeit weg, bei der Anwendung der Gleichungen (31) erst die Anomalien der factischen Berührungspunkte in Function der Drehungsphasen auszudrücken. Setzt man die obigen Werte ein und summiert die Gleichungen (31), so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\omega_m \frac{d\alpha_m}{dx} &= -\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_m}\frac{\delta_m}{R_m}\cos(\Phi_{m,m-1} - \alpha_m - E_m) \\
&+ \frac{1}{R_m}\frac{\delta_1}{R_1}[\cos(\Phi_{10} - \alpha_1 - E_1) - \cos(\Phi_{12} - \alpha_1 - E_1)] + \\
&+ \frac{1}{R_m}\frac{\delta_2}{R_2}[\cos(\Phi_{21} - \alpha_2 - E_2) - \cos(\Phi_{23} - \alpha_2 - E_2)] + \ldots + \\
&+ \frac{1}{R_m}\frac{\delta_{m-1}}{R_{m-1}}[\cos(\Phi_{m-1,m-2} - \alpha_{m-1} - E_{m-1}) - \cos(\Phi_{m-1,m} - \alpha_{m-1} - E_{m-1})],
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

wo rechts nur Glieder zweiter Ordnung der Excentricitäten weggelassen sind.

Die weitere Anwendung der erhaltenen Formel muss auf ein bestimmtes Modell des Analysators Bezug nehmen. Hier soll sie für den Fall durchgeführt werden, welcher bei dem von mir benutzten Instrumente vorliegt. Für andere Anordnungen

wird sie sich nach demselben Muster unter leichter Modification durchführen lassen. Bei meinem Instrumente nun sind (sofern nicht zu besonderen Zwecken der Verlauf des Drahtes geändert wird) die Räder 1 und 2 Leitrollen, nämlich die vordere linke und die hintere linke Leitrolle, und darauf folgen als die Räder 3, 4 und 5 die Integratorenscheiben $H_3$, $H_2$, $H_1$, oder $H_6$, $H_5$, $H_4$; ferner sind die Leitrollen negativ, die Integratoren-Scheiben positiv vom Drahte umwickelt. Bezeichnet man also, allgemein für die Horizontalscheibe $H_j$, mit $e_j$ ihre lineare Excentricität, mit $\Pi'_j$ den correcten Wert der Anomalie des Ankunftspunktes des Drahtes an dieser Scheibe vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes der Scheibe, mit $\Pi''_j$ den correcten Wert der Anomalie des Abgangspunktes des Drahtes von der Scheibe vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes; — ferner mit $H$ den Halbmesser der vorderen linken Leitrolle, mit $e$ ihre lineare Excentricität, mit $\Pi'$ und $\Pi''$ die Anomalien des Ankunfts- und des Abgangspunktes des Drahtes an dieser Rolle vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes der Rolle; — schließlich mit $J$, $f$, $\Psi'$ und $\Psi''$ die analogen Größen für die hintere linke Leitrolle: — so erhält man als die gesuchte Beziehung zwischen der Änderung der geographischen Längen der Messrollen des $n^{\text{ten}}$ Integrators und der Verschiebung $dx$ des Fahrstiftes:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_{ni}}{dx} = &-\frac{1}{H_n} + \frac{e_n}{H_n^2}\cos\left(\Pi'_n + \frac{2n\pi x}{c}\right) + \\ &+ \frac{1}{H_n}\frac{e}{H}\left[\cos\left(\Pi' - \frac{x}{H}\right) - \cos\left(\Pi'' - \frac{x}{H}\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{H_n}\frac{f}{J}\left[\cos\left(\Psi' - \frac{x}{J}\right) - \cos\left(\Psi'' - \frac{x}{J}\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{H_n}\sum_{j=n+1}^{j=k}\frac{e_j}{H_j}\left[\cos\left(\Pi'_j + \frac{2j\pi x}{c}\right) - \cos\left(\Pi''_j + \frac{2j\pi x}{c}\right)\right],\end{aligned}$$

wo $k$ die höchste Integratornummer in der Gruppe, zu welcher der $n^{\text{te}}$ Integrator gehört, bezeichnet. Daraus ergibt sich, wenn $\Lambda_{ni}$ den Wert der geographischen Länge der Rolle $M_{ni}$ für die Stellung $x = 0$ des Fahrstiftes bezeichnet,

$$\lambda_{ni}-\Lambda_{ni} = -\frac{x}{H_n}+2n\pi\frac{e_n}{c}\cdot\left[\sin\left(\Pi'_n+\frac{2n\pi x}{c}\right)-\sin\Pi'_n\right]-$$

$$-4n\pi\frac{e}{c}\sin\frac{\Pi'-\Pi''}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{x}{H}-\frac{\Pi'+\Pi''}{2}\right)-\cos\frac{\Pi'+\Pi''}{2}\right]-$$

$$-4n\pi\frac{f}{c}\sin\frac{\Psi'-\Psi''}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{x}{J}-\frac{\Psi'+\Psi''}{2}\right)-\cos\frac{\Psi'+\Psi''}{2}\right]+$$

$$+\sum_{j=n+1}^{j=k}4n\pi\frac{e_j}{c}\sin\frac{\Pi'_j-\Pi''_j}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{2j\pi x}{c}+\frac{\Pi'_j+\Pi''_j}{2}\right)-\cos\frac{\Pi'_j+\Pi''_j}{2}\right],$$

wo also, z. B. für den $j^{\text{ten}}$ Integrierapparat, $e_j\ \Pi'_j\ \Pi''_j$ unbekannte Constanten dieses Apparates sind, die Differenz $\Pi'_j-\Pi''_j$ jedoch eine bekannte Constante des Analysators ist.

Die Winkel $\frac{\Pi'_j-\Pi''_j}{2}$ sind bei meinem Analysator[1] sehr gering. Den Coefficient vor der Klammer in dem Summationsglied der letzten Zeile kann man so schreiben:

$$\frac{2n}{j}\left(\frac{e_j}{H_j}\right)\sin\frac{\Pi'_j-\Pi''_j}{2},$$

wo $\frac{e_j}{H_j}$ die procentuelle Excentricität der Scheibe $H_j$ darstellt. Der Factor $\frac{2n}{j}\sin\frac{\Pi'_j-\Pi''_j}{2}$ beträgt in meinem Analysator bei $n=1$: $+0\cdot1$ für $j=2$ und $+0\cdot01$ für $j=3$; bei $n=2$: $+0\cdot01$. Ist aber der $n^{\text{te}}$ Integrierapparat einer der höheren Gruppe, so übersteigt der absolute Betrag keines der zugehörigen Factoren den Wert $0\cdot01$. Da man ohnehin nicht hoffen kann, die procentuelle Excentrität mit einer Sicherheit zu bestimmen, dass man noch $\frac{1}{10}$ ihres Betrages verbürgen könnte, so hat es keinen Zweck, diese Glieder noch mitzunehmen. Ferner kann in den Gliedern der zweiten und dritten Zeile, besonders in Rücksicht auf die kleinen Coefficienten dieser Glieder, $J=H$ gesetzt werden; ich habe nämlich gefunden $H=15\cdot70$ mm, $J=15\cdot72$ mm. Dann ziehen sich diese

[1] Meines Wissens richtet Herr Coradi dies auch bei anderer Anzahl der Integrierapparate regelmäßig so ein.

beiden Glieder in eines zusammen. Bezeichnet man noch $2\pi \frac{e_n}{c}$ mit $\varepsilon_n$, $\Pi'_n$ mit $E_n$, so kann man die Formel für geographische Längen endgiltig so schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{ni} = \left(\Lambda_{ni} - \frac{x}{H_n}\right) + n\varepsilon_n\left[\sin\left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n\right) - \sin E_n\right] + \\ + n\varepsilon\left[\sin\left(\frac{x}{H} + E\right) - \sin E\right],\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

wo $\varepsilon_n$ $E_n$ unbekannte Instrumentalconstanten des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates, $\varepsilon$ E aber von $n$ unabhängige Constanten des Analysators sind.[1] —

Wie aus der Ableitung ersichtlich, gilt dieser Wert nur, solange der Fahrstift in positiver Verschiebung begriffen ist, oder nach einer positiven Verschiebung auf constantem Abscissenwert gehalten wird. Für den Rückweg von der Endabscisse der analysierten Curve zu ihrer Anfangsabscisse müssen wir deshalb schreiben:

$$\lambda_{ni} = \left(\Lambda_{ni} - \frac{x}{H_n}\right) + \psi_n(x),$$

wo $\psi_n(x)$ eine andere Function von $x$ ist, welche Factoren von erster Ordnung der Excentricitäten enthält.

**19.** Im Anschluss an die obige Untersuchung über die Wirkung der Excentricitäten der Horizontalräder soll hier noch eine Relation abgeleitet werden, die für später wertvoll sein wird. Die Gleichungen (31) liefern die Relation zwischen den Drehungen zweier unmittelbar nacheinander eingeschalteter Räder, des als $\nu^{\text{tes}}$ und des als $(\nu-1)^{\text{tes}}$ eingeschalteten:

$$\frac{d\alpha_\nu}{d\alpha_{\nu-1}} = \frac{\omega_{\nu-1} r_{\nu-1,\nu}}{\omega_\nu r_{\nu,\nu-1}}.$$

---

[1] Es ist dann:

$$\varepsilon \sin E = -4\pi \frac{e}{c} \sin\frac{\Pi'-\Pi''}{2}\cos\frac{\Pi'+\Pi''}{2} - 4\pi\frac{f}{c}\sin\frac{\Psi'-\Psi''}{2}\cos\frac{\Psi'+\Psi''}{2},$$

$$\varepsilon \cos E = -4\pi \frac{e}{c} \sin\frac{\Pi'-\Pi''}{2}\sin\frac{\Pi'+\Pi''}{2} - 4\pi\frac{f}{c}\sin\frac{\Psi'-\Psi''}{2}\sin\frac{\Psi'+\Psi''}{2}.$$

Ist also unmittelbar vor oder nach einer Integratorscheibe, $H_q$, eine andere Integratorscheibe, $H_p$, in den Draht eingeschaltet, dann besteht zwischen der Änderung der geographischen Längen der Messrollen in dem $p^{\text{ten}}$ Integrierapparate und der gleichzeitigen Änderung der Rollenlängen in dem $q^{\text{ten}}$ Integrierapparate (wobei wir die Rollenindices weglassen können) die Relation

$$\frac{d\lambda_q}{d\lambda_p} = \frac{H_p + e_p \cos(\Pi_p^q - \alpha_p)}{H_q + e_q \cos(\Pi_q^p - \alpha_q)},$$

oder

$$\frac{d\lambda_q}{d\lambda_p} = \frac{H_p}{H_q} - \frac{H_p}{H_q}\left(\frac{e_q}{H_q}\right)\cos\left(\Pi_q^p - \frac{H_p}{H_q}[\lambda_p - \Lambda_p]\right) + \\ + \frac{H_p}{H_q}\left(\frac{e_p}{H_p}\right)\cos\left(\Pi_p^q - [\lambda_p - \Lambda_p]\right),$$

wo die Constante $\Pi_p^q$ die Anomalie des Berührungspunktes der gemeinsamen Tangente mit der Scheibe $H_p$ vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes der Scheibe $H_p$, die Constante $\Pi_q^p$ dagegen die Anomalie ihres Berührungspunktes mit der Scheibe $H_q$ vermindert um die Anfangsanomalie des Mittelpunktes der Scheibe $H_q$ ist. Durch Integration erhält man eine Formel, welcher man die beiden folgenden Gestalten geben kann:

$$\begin{aligned} q\varepsilon_q[\sin(\lambda_q - \Lambda_q - \Pi_q^p) + \sin\Pi_q^p] &= -(\lambda_q - \Lambda_q) + \\ &+ \frac{H_p}{H_q}(\lambda_p - \Lambda_p) + q\varepsilon_p[\sin(\lambda_p - \Lambda_p - \Pi_p^q) + \sin\Pi_p^q], \\ p\varepsilon_p[\sin(\lambda_p - \Lambda_p - \Pi_p^q) + \sin\Pi_p^q] &= -(\lambda_p - \Lambda_p) + \\ &+ \frac{H_q}{H_p}(\lambda_q - \Lambda_q) + p\varepsilon_q[\sin(\lambda_q - \Lambda_q - \Pi_q^p) + \sin\Pi_q^p]. \end{aligned} \tag{34}$$

Die gleichen Formeln gelten bei leichter Modification der Bedeutung der Constanten $\Pi_p^q$, $\Pi_q^p$ auch für den Fall, dass der Draht zwischen den Scheiben $H_p H_q$ noch Räder antrifft, jedes derselben aber mit einer geringen Differenz der Grenzanomalien umwickelt.

Dank der Eigenschaft (34) ist es für gewisse Integratorenscheiben möglich, ihre Excentricitäten unabhängig von anderen Instrumentalfehlern und ohne die Nothwendigkeit präciser Einstellungen des Wagenindex an der Schienentheilung zu bestimmen (Art. 37.).

**20.** Ich betrachte jetzt den Fall einer schrägen Befestigung der Horizontalscheibe des $n^{ten}$ Integrierapparates an ihrer Umdrehungsaxe. Die Normale der Scheibe, d. h. die geometrische Axe ihrer Mantelfläche, bilde mit der Umdrehungsaxe einen kleinen Winkel $\tau$. Da die Scheibe sich nur um diese Umdrehungsaxe drehen kann, eine Verschiebung der Scheibe mit dieser Axe oder eine Drehung um eine dazu senkrechte Axe dagegen durch die Construction des Apparates verhindert ist, so kommt allein der Umstand in Betracht, dass die lineare Verschiebung eines die Scheibe berührenden Drahttheilchens unter Umständen, nämlich je nach seiner Lage gegen die Ebene der Normale und der Umdrehungsaxe, nicht mit ihrem vollen Betrage wirken kann im Sinne einer Rotation um die Umdrehungsaxe der Scheibe, sondern nur mit dem ihrer Projection auf die zur Umdrehungsaxe senkrechte Ebene; und ferner, dass der Arm der Verschiebung eines Drahttheilchens in Bezug auf die Umdrehungsaxe unter Umständen verschieden sein kann von dem Scheibenhalbmesser $H_n$, nämlich gleich der directen Distanz des Berührungspunktes von der Umdrehungsaxe.

Jedoch ist klar, dass jene Projection der Verschiebung stets bis auf Größen zweiter Ordnung der Neigung $\tau$ gleich bleibt der Verschiebung selbst; ebenso, dass die Distanz von der Umdrehungsaxe stets bis auf Größen zweiter Ordnung der Neigung gleich bleibt dem Scheibenhalbmesser $H_n$. Der daraus resultierende Fehler in der Drehungsphase des Rahmens des Integrierapparates ist daher zu vernachlässigen.

**21.** Die bisher behandelten Fehler des Analysators waren die »Orientierungs-« und »Positionsfehler«. Ich gehe über zur Betrachtung der »metrischen« Fehler, d. h. solcher, die in ungenauen Dimensionen der einzelnen Organe des Instrumentes bestehen.

In der ganzen Theorie des Analysators und der Constantenbestimmung gebrauche ich immer als die Längeneinheit, auf welche alles reduciert wird, den »Analysator-Millimeter«, d. h. den 360ten Theil der zwischen dem Strich 0 und dem Strich 360 der Schienentheilung des Analysators enthaltenen Länge, $c$. Das Zeichen mm soll immer diesen Analysator-Millimeter bedeuten. Mit Rücksicht auf eventuelle Veränderlichkeit der Schienenlänge wird man genauer sagen, 1 mm bedeute den momentanen Analysator-Millimeter. Es ist also immer streng $c = 360$ mm.

Bei dem correcten Analysator ist der Halbmesser der Scheibe $H_n$

$$H_n = \frac{c}{2n\pi}.$$

Bei dem fehlerhaften Analysator sei er

$$H_n = \frac{c}{2n\pi}(1+s_n),$$

wo $s_n$ von der ersten Ordnung klein sei. Die Wirkung dieser Fehlerquelle ist einleuchtend: es ist dann

$$\lambda_{ni} = \left(-\frac{2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}\right) + s_n \cdot \frac{2n\pi x}{c},$$

oder

$$\lambda_{ni} = \left(-\frac{2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}\right) + h_n \cdot \frac{x}{c}, \tag{35}$$

wo also $h_n$ eine unbekannte Instrumentalconstante des $n$ten Integrierapparates (abstracte Zahl) ist.

Bei dem correcten Analysator sind die Halbmesser: der Laufräder $L$, der Messrolle $M_{ni}$, und des Cylinders $C_n$ so getroffen, dass

$$\frac{C_n}{LM_{ni}} = \frac{1}{5\text{ mm}}$$

ist. Bei dem fehlerhaften sei dieses Verhältnis

$$\frac{C_n}{LM_{ni}} = \frac{1}{5\text{ mm}}(1+m_{ni}),$$

wo $m_{ni}$ von der ersten Ordnung klein sei. Dann ist die unendlich kleine Drehung der Messrolle um ihre Axe

$$d\mu_{ni} = +\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\sin\lambda_{ni}\,dy + \frac{m_{ni}}{5\,\mathrm{mm}}\sin\lambda_{ni}\,dy, \tag{36}$$

wo die abstracten Zahlen $m_{n1}$, $m_{n2}$ zwei unbekannte Instrumentalconstanten des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates und von der ersten Ordnung klein sind.

**22.** Die »Fehler des Anfangszustandes« bestehen darin, dass die Anfangswerte der geographischen Längen der beiden Messrollen des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates andere sind, als bei dem correcten Analysator. Bezeichnet man die speciellen Winkel, welche bei dem letzteren zutreffen (180° für die Rolle $M_{n1}$, 270° für die Rolle $M_{n2}$) mit $\Lambda^0_{ni}$, so kann man setzen

$$\Lambda_{ni} = \Lambda^0_{ni} + \sigma_{ni},$$

wo $\sigma_{ni}$ von der ersten Ordnung klein sei. Dann ist

$$\lambda_{ni} = \left(-\frac{2n\pi x}{c} + \Lambda^0_{ni}\right) + \sigma_{ni}; \tag{37}$$

$\sigma_{n1}$, $\sigma_{n2}$ sind zwei unbekannte Instrumentalconstanten des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates.

**23.** Es bleibt übrig, zum Schluss einige Bemerkungen zu machen über die verschiedenen physikalischen Umstände, welche die Functionierung des Instrumentes beeinflussen.

Ein solcher Umstand ist die Ausziehung des Drahtes durch die Kraft der den Wagen führenden Hand. Das Stück des Drahtes, welches, in einer bestimmten Stellung $x$ des Fahrstiftes, hinter dem Wagen liegt und bis zu der betrachteten Scheibe $H_n$ sich erstreckt, ist infolge dieses Umstandes verlängert und diese Verlängerung eine lineare Function seiner Länge, also auch des $x$. Wie bereits in der Einleitung dieses Abschnittes erwähnt, hat schon Herr Bervy deswegen gesetzt

$$\lambda_{ni} = \left(-\frac{2n\pi x}{c} + \Lambda^0_{ni}\right) + A_n + B_n x.$$

Für den Rückweg, d. h. denjenigen Theil der Umfahrung, wo die Abscissen abnehmen, wirkt die Zugkraft in entgegen-

gesetzter Richtung und ist für die Drehung der Scheibe das an der anderen Seite des Wagens liegende Drahtstück maßgebend; es wäre also mit Rücksicht darauf für den Rückweg zu setzen

$$\lambda_{ni} = \left(-\frac{2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) + A'_n + B'_n x.$$

Die Fehlerglieder $A_n + B_n x$, $A'_n + B'_n x$ werden als stets klein bleibend vorausgesetzt, so dass ihre Quadrate vernachlässigt werden dürfen.

Ein Glied von dieser Form haben wir indessen in unserer Theorie schon gehabt. Ein solches entsteht nämlich durch die Verbindung unseres »Anfangsfehlers« der Rolle $M_{ni}$ mit dem »metrischen Fehler« der Scheibe $H_n$. Die Berücksichtigung der Ausziehbarkeit des Drahtes wird für uns also lediglich darin bestehen, unseren Instrumentalconstanten $\sigma_{ni}$ und $h_n$ eine etwas veränderte physikalische Bedeutung beizulegen; außerdem aber, diese Constanten für den Rückweg durch andere, $\sigma'_{ni}$ und $h'_n$, zu ersetzen. —

Ferner gehört zu solchen Umständen auch das Gleiten des Drahtes an der Scheibe, wodurch die Drehung der letzteren verzögert wird. Die Möglichkeit einer solcher Erscheinung kann nicht ausgeschlossen werden, obwohl, wie mir scheint, ein Gleiten, praktisch genommen, gar nicht stattfindet, falls der Draht richtig gespannt und die Axe der Scheibe in ihrem Lager richtig eingeölt ist. Indessen ist, unter der Annahme, dass das Gleiten als gleichmäßig und somit der Betrag der Verzögerung als proportional der vollzogenen Drehung angesehen werden kann, die Wirkung dieses Fehlers offenbar wieder dieselbe, wie die eines metrischen Fehlers der Scheibe, $h_n$.

Eine gehörige Spannung des Drahtes ist aber ohnehin aus anderen Gründen erforderlich. Ein nicht richtig gespannter Draht krümmt sich stellenweise mehr oder weniger, und ein gekrümmter Draht ist selbstverständlich zum Gebrauche absolut untauglich, weil die krummen Stellen sich leichter als die anderen verlängern. Ich habe die Spannung immer akustisch gemessen, eine Methode, die ebenso einfach wie empfindlich ist. Der Wagenindex wurde mit einer nach links gerichteten Bewegung des Wagens auf den Strich 0 der Schienentheilung

gestellt, sodann das zwischen dem Wagen und der vorderen rechten Leitrolle liegende Drahtstück mit einem weichen Holzstäbchen leise angeschlagen und der hörbar werdende Ton mit dem einer Stimmgabel verglichen. Beim Anlegen eines Drahtes muss man darauf achten, dass derselbe keinen kurzen Bug (Knick) erhält, weil er dann an dieser Stelle leicht brechen würde. Ist ein Draht ohne einen solchen angelegt, so nenne ich die größte Spannung, welche er noch verträgt, d. h. bei welcher er noch nicht bricht, die höchste zulässige Spannung. Für die Functionierung des Instrumentes am günstigsten ist nun nach meinen Erfahrungen eine Spannung, welche nur wenig kleiner als die höchste zulässige Spannung ist. Für mein Instrument und für den Fall, dass der Draht an den unteren Scheiben liegt, ist es etwa die Spannung *d'* oder *e'*.

Nach einer Neuanlegung des Drahtes darf derselbe jedoch nicht gleich auf diesen Ton, sondern zunächst um mehrere Töne (etwa eine Quinte) tiefer gespannt werden. Sodann fährt man den Wagen gleichmäßig und sehr langsam mindestens zweimal bis an das rechte Ende der Schiene und zurück, damit die Spannungen sich ausgleichen, und spannt darauf nur um einen Zahn der Vorrathsrolle weiter. Dann fährt man wieder langsam mindestens zweimal hin und zurück, und wiederholt das Verfahren solange, bis jene günstigste Spannung nahezu (etwa bis auf einen Ton) erreicht ist. Lässt man gleich nach der Weiterspannung um einen Zahn der Vorrathsrolle den Draht wiedererschallen, so findet man den Ton in der Regel um etwa eine volle oder eine kleine Terz,[1] nach der wiederholten Hin- und Rückfahrt nur noch um etwa eine volle oder eine kleine Secunde höher, als er vor der Spannung war. Das kleine Intervall, welches die schließlich erreichte Spannung noch von jener günstigsten Spannung trennt, pflege ich vorderhand (etwa bis zum nächsten Tage) bestehen zu lassen.

---

[1] Zuweilen, allerdings selten, kommt es vor, dass die Erhöhung viel größer (z. B. = eine kleine Quinte) gefunden wird, die Spannung also einen plötzlichen Sprung ausgeführt hat. In solchem Falle muss man sofort wieder um einen Zahn zurückschrauben, sonst bricht der Draht im nächsten Augenblicke, jedenfalls aber sicher bei der nächsten Bewegung des Wagens, — und erst mehrere Hin- und Zurückfahrten ausführen.

In den ersten Tagen nach einer Neulegung des Drahtes, besonders wenn unterdessen Umfahrungen ausgeführt werden, lässt die Spannung allmählich nach, so dass man noch zwei- oder dreimal veranlasst ist, den Draht wieder um einen halben Ton fester zu spannen, um den früheren Ton wiederherzustellen. Später sind die Zeitpunkte, wo eine solche Correctur nöthig wird, durch sehr viele Umfahrungen von einander getrennt. Eigenthümlich ist jedoch die Erfahrung, dass, wenn ein Draht schon mehrere Male eine Wiederherstellung des ursprünglichen Spannungszustandes erfahren hat, er dann dieselbe Spannung nicht mehr verträgt; man muss sich dann mit einer etwas geringeren (etwa *c'*♯) begnügen.

Liegt der Draht an den oberen Scheiben, dann ist die für den früheren Fall günstigste Spannung nicht mehr zulässig; er verträgt sie dann kaum, wohl wegen der stärkeren Krümmung. In diesem Falle ist am günstigsten etwa die Spannung *h* oder *c'*. —

Ein weiterer Umstand von Einfluss ist das Gleiten der Messrollen an der Kugel (oder genauer gesagt, der Kugel an den Rollen) längs der Tangenten ihrer Peripherien. Ist die Freiheit der Rollenaxe, sich in ihren Lagern zu drehen, infolge irgend einer der sofort anzuführenden Ursachen vermindert, dann kann dieses Gleiten sogar ein derartiges sein, dass die Rolle bei einer Fahrt des Instrumentes längs der $y$-Axe sich überhaupt, wenigstens bei gewissen geographischen Längen, nicht dreht. Dasselbe tritt natürlich ein, wenn die Kugel nicht dauernd durch die Stützrolle angedrückt wird gegen die Messrollen. Sind jedoch die nöthigen Vorsichtsmaßnahmen getroffen worden, dann ist dieses Gleiten nur gering und kann als gleichmäßig angesehen werden. Diese Fehlerquelle vereinigt sich offenbar mit dem »metrischen Fehler« der Messrolle, $m_{ni}$. Eine sehr eigenthümliche Beobachtung des Herrn Bervy,[1] wonach der Betrag der entstandenen Verzögerung der Rolle fast unabhängig sein soll von der durchlaufenen Ordinatenlänge (was als ein Grund dafür angeführt wird, bei den zu analysierenden Zeichnungen die Ordinaten-Scala möglichst groß zu wählen),

[1] l. c., S. 833, Zeile 7 von unten bis 5 von unten.

habe ich nicht bestätigt gefunden. Denn in diesem Falle müssten meine ohne Berücksichtigung eines solchen Verhaltens ausgeführten Bestimmungen der Constante $m_{ni}$ verschiedene Werte ergeben haben, je nach der Länge der zu diesem Zwecke befahrenen Ordinaten; thatsächlich aber stimmen diese Werte befriedigend überein. —

Ein Vorgang von großem Einflusse auf das Verhalten des Analysators ist die fortschreitende Verunreinigung des Instrumentes durch Staub und eventuell auch Rost. Sie findet ihren Ausdruck darin, dass verschiedene in der obigen Theorie aufgestellte Constanten — mit dieser Bezeichnung war zunächst nichts weiter gemeint, als Größen, die während einer Umfahrung als constant angesehen werden dürfen — ihre Werte allmählich ändern; ja, mit zunehmender Verunreinigung der einzelnen Organe wird die Wirkungsweise der letzteren überhaupt eine ungesetzmäßige, oder — mit anderen Worten — die bezüglichen Factoren verlieren ihre Constanz; man merkt dies auch daran, dass dann kurz nacheinander ausgeführte Bestimmungen einer Constante keine befriedigend übereinstimmenden Werte mehr geben.

Der auf das ganze Instrument fortwährend niederfallende Staub wird nämlich an denjenigen Stellen der Cylinder, welche bei den Umfahrungen in Berührung mit der Kugel kommen, zusammengequetscht und bleibt dort haften. Nach einiger Zeit wird auf der Mantelfläche jedes Cylinders längs des mittleren Parallelkreises dieser Fläche eine dunkle Linie sichtbar, die allmählich immer dunkler wird. Es ist eine Schmutzschichte. Gleichzeitig constatiert man die gleiche Erscheinung auch auf den Kanten der Rollen. Wird der Apparat dann noch nicht gereinigt, so erscheinen bald auch auf der Oberfläche der Kugel zerstreute Schmutzflecke. Ferner können sich Staubtheilchen zwischen der Theilungstrommel der Messrollenaxe und dem daneben befindlichen Indexbogen, oder in den Lagern der Rollenaxe, oder schließlich in den Lagern der die Cylinder tragenden Walze allmählich anhäufen. Alles dies beeinflusst selbstverständlich die auf die Drehung $d\mu_{ni}$ bezüglichen Constanten. Solange jedoch die Verunreinigung nur wenig fortgeschritten ist — es gelingt aber durch entsprechende Maß-

nahmen und allgemeine vorsichtige Behandlung, diesen Zustand selbst bei täglich mehrstündigem Gebrauche des Instrumentes viele Monate hindurch zu erhalten —, kann die obige Theorie angewandt, und die bezüglichen Factoren als Constanten in dem Sinne dieser Theorie angesehen werden, die nur allmählich fortschreitende kleine Änderungen erfahren.

Um dies zu erreichen, muss man das Instrument selbstverständlich sowohl außerhalb des Gebrauches vor dem Staube schützen, als auch — soweit dies möglich — während des Gebrauches eine Bestäubung desselben vermeiden. Außerdem aber bürste ich jedesmal vor und nach dem Gebrauche die Laufräder und die Cylinder, manchmal auch die Kugeln und die Celluloidringe, mit einem weichen Pinsel, der dem Instrumente beigegeben wird, ab. Den auf den oberen Balken des Gerüstes und den oberen Flächen der Horizontalscheiben liegenden Staub muss man entweder ruhig liegen lassen, oder ihn nur dann abstreifen, nachdem man Vorsichtsmaßregeln getroffen hat, welche sein Herunterfallen auf die Organe der Integrierapparate verhindern.

Ist endlich die Verunreinigung des Apparates zu wet fortgeschritten, dann muss man eine gründliche Reinigung seiner Organe vornehmen, — eine Operation, die freilich die Nothwendigkeit der Neubestimmung seiner meisten Constanten zur Folge hat. Ich umwickle zu diesem Zwecke den kleinen Finger mit einem ziemlich weichen Lappen, dessen Oberfläche glatt (ohne Härchen) ist, benetze den letzteren mit Petroleum und wasche damit, während die Kugel vom Cylinder abgehoben bleibt, die Oberfläche des Cylinders rein. Dann wird die Kugel auf den Cylinder heruntergelassen und, unter zweckmäßigen Bewegungen des Instrumentes, die Oberfläche der Kugel und die Kanten sämmtlicher drei Rollen ebenso gewaschen; nur ist bei der Waschung der Rollenkanten der Lappen auf einem schmalen Holzstäbchen aufgewickelt. Ferner reinige ich auch, mit Petroleum und einem zugespitzten Hölzchen, die Spitzen aller Axen. Um etwaigen zwischen der Theilungstrommel und dem Indexbogen befindlichen Staub zu entfernen, schneide ich ein Stückchen Papier mit scharfen Kanten aus, halte dasselbe in den Zwischenraum hinein und drehe die Rollenaxe mit der

Trommel mehreremale um.[1] Zuletzt werden sämmtliche Axen (auch die Spindel der Horizontalscheibe) in ihren Lagern eingeölt. Die freie Drehbarkeit der Messrolle wird geprüft, indem ihr an der Trommel-Mantelfläche ein leichter Antrieb ertheilt wird, der jedoch wegen Schonung der Axenspitzen möglichst ausschließlich in der Richtung erfolgen soll, welche sowohl zum Radius als auch zur Axe senkrecht ist. Die Rolle soll sich dann lebhaft spielend drehen und langsam auslaufen. An der Lagerung der Rollenaxe findet man eine Vorrichtung, welche es ermöglicht, die gegenseitige Entfernung der beiden Lagerbolzen ein wenig zu ändern oder auch das ganze Bolzenpaar ein wenig in der Richtung der Axe zu verschieben. Die letztere Verschiebung kann dazu benutzt werden, einen hinreichend breiten Zwischenraum zwischen der Trommel und dem indextragenden Segment herzustellen; dieser Zwischenraum soll eher zu breit als zu eng gehalten werden. —

Die Instrumentalconstanten weisen zweierlei Art ihres Verhaltens auf.

Die einen unter ihnen erfahren, wenn das Instrument rein gehalten und umsichtig behandelt wird, nur allmählich fortschreitende kleine Änderungen und bleiben in langen Zeiträumen mit hinreichender Genauigkeit constant. Dies sind die Constanten aller Orientierungs- und Positionsfehler, — abgesehen natürlich, soweit diese Constanten Winkel sind, von der in ihnen enthaltenen Anfangs-Drehungsphase des bezüglichen Organs des Instrumentes. Bei dem Cylinder wird die Anfangs-Drehungsphase (d. h. die der Stellung $y = 0$ des Stiftes entsprechende) im allgemeinen bei jeder neuen Aufstellung des Instrumentes eine andere sein, und die einmal bestimmten Werte der Constanten $\Gamma_n$, $K_n$ müssen daher, bevor sie für ein anderes Mal angewendet werden, um den Unterschied der alten und der neuen Anfangs-Drehungsphase vergrößert beziehungsweise verkleinert werden; zu diesem Zwecke muss also dieser Unterschied ablesbar sein. Ich habe deswegen an der ebenen Fläche des einen Laufrades eine ganz rohe Winkeltheilung und neben dem Laufrad, mit der hinteren Gestellschiene fest verbunden,

[1] Diese Maßregel habe ich einer Broschüre des Herrn Coradi über seine Planimeter entnommen. (Die Planimeter Coradi. Zürich, 1895.)

einen Index angebracht, der das Laufrad nicht berührt. Die Theilung geht von 10° zu 10°, lässt also noch einzelne Grade schätzen; eine auf 5° genaue Ablesung genügt indessen sicher für den vorliegenden Zweck. Die Constanten $E_n$, E enthalten wieder die Anfangs-Drehungsphasen (d. h. die der Stellung $x = 0$ entsprechenden) der Horizontalräder des Instrumentes; diese können sich in einem hier zu berücksichtigenden Betrage nur bei Gelegenheit einer Neulegung des Drahtes ändern. Dies wird am einfachsten dadurch berücksichtigt, dass man bei einer solchen Operation darauf achtet, dass die in Betracht kommenden Räder nach der Operation ungefähr dieselbe Lage haben wie vorher; hiezu genügt die Anbringung einer Marke an der oberen Fläche jedes Rades und Beobachtung ihrer Coincidenz mit einer entsprechend gewählten oder absichtlich hergestellten Marke an dem zugehörigen Theile des Gerüstes.

Im Gegensatz dazu zeigen die Constanten $h_n$ und $\sigma_{n1}$ ein zufälliges Verhalten und müssen für jede Analyse besonders bestimmt werden. $\sigma_{n2}$ führe ich nicht an, weil die Differenz $\sigma_{n2}-\sigma_{n1}$ wieder von der ersteren Art ist. Die Veränderlichkeit der Constanten $h_n$, $\sigma_{n1}$ erklärt sich wohl durch kleine (und die größeren, künstlichen) Variationen der Spannung und sonstige Vorgänge im Draht; zum Theil vielleicht auch durch die ungleiche Temperaturausdehnung der Längeneinheit (Stahl), des Drahtes (Silber) und der Scheibe (Messing). Die Fehler $\sigma_{n1}$ und $\sigma_{n2}$ kann man vor jeder Analyse, beide gleichzeitig um denselben Betrag, verringern: eine eigene Justiervorrichtung nämlich erlaubt es, nach Lockerung einer Schraube den ganzen Integratorrahmen bei stillstehender Scheibenspindel um diese beliebig zu drehen und dann wieder an ihr festzuschrauben; ein kleiner Fehler wird aber natürlich immer bleiben. —

Als den letzten physikalischen Umstand von Einfluss auf die Functionierung des Analysators erwähne ich die Temperatur. Um diese stets unter Controle halten zu können, habe ich an geeigneter Stelle des Gerüstes ein Thermometer angebunden, das also immer mit dem Analysator mitfährt. Nach dem Herausnehmen des Instrumentes aus dem Kasten stieg gewöhnlich die Temperatur, einige Zeit lang, im ganzen um 1° oder $1^1/_2$° C., bis sie stationär wurde.

Durch Temperaturwechsel ändert sich der Gang der Messrolle infolge ungleicher Ausdehnung des Materials des Rahmens, in welchem sie gelagert ist (Messing?), und der Rollenaxe (Stahl). War das Instrument an kühlem Orte aufbewahrt, so wird die Rollenaxe im Anfange zu wenig Spielraum und dadurch die Rolle einen trägen, schweren Gang haben, was die Constante $m_{ni}$ beeinflussen würde. Um dem vorzubeugen, erwärme ich den Rahmen der Rollenaxe mit der Hand etwas, ehe das Instrument in Gebrauch genommen wird[1]; ich halte ihn zu diesem Zwecke etwa $1^1/_2$ Minuten zwischen den Fingern.

Ob die übrigen durch Temperaturwechsel hervorgerufenen Änderungen in den Dimensionen des Instrumentes einen merklichen Einfluss auf diese oder auf andere Constanten haben können, vermag ich auf Grund meiner Erfahrungen nicht zu entscheiden. Meine Beobachtungen zeigen einen deutlich ausgesprochenen Einfluss dieser Art nicht. Sie bewegen sich aber auch innerhalb ziemlich enger Temperaturgrenzen; denn es war das gerade angestrebt, in nicht zu verschiedenen Temperaturen zu arbeiten. Die niedrigste in meinem Beobachtungsjournal notierte Temperatur ist $+18°$ C., die höchste $+27°$ C.; innerhalb dieser Grenzen also ist eine solche Abhängigkeit nicht zu constatieren.

Immerhin dürfte es keine übertriebene Vorsicht gewesen sein, wenn darauf geachtet wurde, dass während einer Befahrung die Temperatur ungefähr constant bleibe. Sicher aber ist es von großer Wichtigkeit, dafür zu sorgen, dass das Instrument dabei möglichst gleichmäßig erwärmt sei. Bei den feinen Constantenbestimmungen, wo mitten innerhalb einer Operation mehrere Male genaue Ablesungen, sei es an dem Wagenindex, sei es an den Trommeln der Integrierapparate, gemacht werden müssen, könnte es leicht vorkommen, dass die nahe daran befindlichen Organe des Instrumentes durch die Ausstrahlung des Kopfes des Beobachters in schädlichem Grade plötzlich erwärmt werden; in solchen Fällen scheint es nach meinen Erfahrungen von gutem Erfolge zu sein, nach der Ablesung, durch Anfächeln der betroffenen Theile von ver-

[1] Diese Maßregel ist ebenfalls der erwähnten Broschüre entnommen.

schiedenen Seiten mit der Hand, in der Umgebung derselben eine Luftcirculation zu erzeugen und dann einige Zeit (z. B. 2 Minuten) zu warten, ehe die Befahrung fortgesetzt wird. Aus derselben Rücksicht auf Constanz und namentlich Gleichmäßigkeit der Temperatur soll man auch nie bei künstlicher Beleuchtung oder in directer Sonnenstrahlung, sondern nur bei diffusem Tageslichte mit dem Analysator arbeiten.

Dass die Fenster, namentlich bei kühler Witterung, geschlossen zu halten sind, braucht kaum besonders hervorgehoben zu werden, da dies auch sonst, um Staub fernzuhalten, erforderlich ist. —

Endlich muss während der Befahrungen jeder, auch der leiseste Anstoß, sei es an das Instrument selbst oder an den Arbeitstisch, sowohl wie jede stärkere Erschütterung, streng vermieden werden, weil unter Umständen dadurch die Ablesungen, oder auch gewisse Constanten, sich ändern können. Zur Vermeidung von Erschütterungen ist besondere Aufmerksamkeit nothwendig beim Einlegen des Instrumentes in den Kasten. Beim Schließen des Kastens endlich ist darauf zu sehen, ob die an dem Deckel angebrachten Holzeinlagen, die das Instrument festzuhalten bestimmt sind, keinen Druck auf ihre Anlehnungspunkte am Instrument ausüben. Ein solcher Druck auf den oberen Zapfen der Horizontalscheibe z. B., mag er auch für die schließende Hand nur einen geringen Widerstand bieten, genügt schon, die Ebene der Rollenaxen hinunterzudrücken, so dass nachher die Rollen bei Gebrauch des Instrumentes die Kugel nicht mehr in Punkten eines größten Kreises berühren, und infolge dessen unter Umständen sogar die Drehung der Rollen unterbleiben kann.

Zu einer Bemerkung gibt noch Anlass die Einrichtung der Bremse. Bei meinen Bestimmungen namentlich der auf die Cylinder bezüglichen Constanten konnte ich so lange zu keinen irgend befriedigend übereinstimmenden Resultaten kommen, bis es mir einfiel, auf das Bremsen ganz zu verzichten. Dieses geschieht bei meinem Instrument durch eine Schraube, deren Mutter in dem rechten Querbalken des unteren Gerüstrahmens sich befindet und deren Spitze beim Bremsen gegen die äußere ebene Fläche des rechten Laufrades drückt. Diese Bremse hebt

also das Rollen des Instrumentes auf die Weise auf, dass die linke Spitze der Axe der Cylinder in ihr Lager eingepresst wird. [Genauer gesagt, bleibt vielmehr die Walze der Cylinder durch die Laufräder auf dem Tische ruhen, dagegen wird das ganze Gerüst zusammen mit allen Integrierapparaten nach rechts verschoben, so lange, bis das linksseitige Lager an die Spitze der Walze fest angepresst ist.] Es ist klar, dass dieser Vorgang an sich schon Fehler in den Anzeigen der Rollen bewirken kann. Ferner aber kann man nicht erwarten, dass nach Losbremsung der ursprüngliche Zustand des Instrumentes vollständig wiederhergestellt ist, vielmehr wird nach wiederholter Bremsung das Gerüst dauernd gegen die Laufräder und das Papier mehr oder weniger verschoben bleiben, und anderseits kann (was wohl noch wichtiger ist), infolge des ganz unsymmetrischen Eingriffes der Bremsschraube in Bezug auf die Axe der Laufräder, eine Ausbiegung der Endstücke der Axe entstehen, beziehungsweise verändert werden.

## Zusammenfassende Formeln.

**24.** In den vorangegangenen Discussionen sind die Glieder gefunden worden, welche durch die einzelnen Fehlerquellen zu dem Ausdrucke für $d\mu_{ni}$ oder zu dem für $\lambda_{ni}$ geliefert werden. Fasst man diese einzelnen Ergebnisse zusammen, so erhält man folgende Formeln, in denen $xy$ die Coordinaten des Fahrstiftes, $s$ die von ihm durchlaufene Bogenlänge ist:

$$
\begin{aligned}
d\mu_{ni} = & \frac{1}{5\,\mathrm{mm}} \sin \lambda_{ni} dy + \\
& + \frac{\gamma_n}{M_{ni}} n \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin \lambda_{ni} dx + \\
& + \delta_{ni} f_{ni}(\mathrm{M}_{ni}, s) ds + \delta_{nj} g_{nj}(\mathrm{M}_{nj}, s) ds + \\
& + \frac{\varkappa_n}{M_{ni}} \cos\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right) \sin \lambda_{ni} dy + \frac{\gamma_n}{M_{ni}} n \sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right) \cos \lambda_{ni} dx + \\
& + \frac{m_{ni}}{5\,\mathrm{mm}} \sin \lambda_{ni} dy + \\
& + [\text{cyclische Glieder}] \qquad (38)
\end{aligned}
$$

und

$$\lambda_{ni} = \frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda^0_{ni} +$$
$$+ \left\{ n\varepsilon_n \left[\sin\left(\frac{2n\pi x}{c} + E_n\right) - \sin E_n\right] + n\varepsilon \left[\sin\left(\frac{x}{H} + E\right) - \sin E\right] \right\} \atop \psi_n(x)$$
$$+ \left\{ \begin{matrix} h_n \frac{x}{c} \\ h'_n \frac{x}{c} \end{matrix} \right\} +$$
$$+ \left\{ \begin{matrix} \sigma_{ni} \\ \sigma'_{ni} \end{matrix} \right\}; \tag{39}$$

wo zwei Ausdrücke in einer geschweiften Klammer übereinander stehen, gelten die oberen für die Hinfahrt, die unteren für die Rückfahrt; die Klammer: [cyclische Glieder] vertritt Glieder, deren Integral $= 0$ ist, wenn die Integration längs einer geschlossenen Contour ausgeführt wird.

In den Coefficienten $\frac{\gamma_n}{M_{ni}}, \frac{\varkappa_n}{M_{ni}}, \frac{\dot{\gamma}_n}{M_{ni}}$ ist es offenbar erlaubt, $M_{n1} = M_{n2}$ zu setzen, wodurch diese Coefficienten von dem Index $i$ unabhängige Constanten werden; wir führen dann die abstracten Zahlen $\frac{\gamma_n \cdot 5\text{ mm}}{M_{ni}}, \frac{\varkappa_n \cdot 5\text{ mm}}{M_{ni}}, \frac{\dot{\gamma}_n \cdot 5\text{ mm}}{M_{ni}}$ als neue Constanten ein, die wir, um die Bezeichnungen nicht zu vermehren, wieder mit den Buchstaben $\gamma_n$, $\varkappa_n$, $\dot{\gamma}_n$ bezeichnen wollen. Diese Buchstaben in ihrer früheren Bedeutung werden von nun an nicht mehr vorkommen. Ferner führen wir, da die Functionen $f_{ni}(M_{ni}, s)$, $g_{nj}(M_{nj}, s)$ von der Dimension $(\text{Länge})^{-1}$ sind, statt derselben die Bezeichnungen $\frac{F_{ni}(M_{ni}, s)}{5\text{ mm}}, \frac{G_{nj}(M_{nj}, s)}{5\text{ mm}}$ ein, so dass die Ausdrücke $F_{ni}(M_{ni}, s)$, $G_{nj}(M_{nj}, s)$ abstracte sind:

$$F_{ni}(M_{ni}, s) =$$
$$= \frac{n\pi}{36} \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin(\bar{\mu}_{ni} + M_{ni}) \sin \bar{\lambda}_{ni} \cos \bar{\lambda}_{ni} \cos(s, x) +$$
$$+ [\sin(\bar{\mu}_{ni} + M_{ni}) - \cos(\bar{\mu}_{ni} + M_{ni})] \sin \bar{\lambda}_{ni} \sin(s, x) \tag{22'}$$

$$G_{nj}(\mathrm{M}_{nj}, s) =$$
$$= (-1)^j \frac{n\pi}{36} \sin(\bar{\mu}_{nj} + \mathrm{M}_{nj}) \left( \frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \bar{\lambda}_{nj} - 1 \right) \cos(s, x) -$$
$$- \frac{M_{nj}}{K_n} \sin(\bar{\mu}_{nj} + \mathrm{M}_{nj}) \sin \bar{\lambda}_{nj} \sin(s, x). \qquad (22')$$

Mittels der genannten Bezeichnungen hat man die beiden Formeln

$$d\mu_{ni} = \frac{1}{5\,\mathrm{mm}} \sin \lambda_{ni} dy +$$
$$+ \frac{\gamma_n}{5\,\mathrm{mm}} n \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin \lambda_{ni} dx +$$
$$+ \frac{\delta_{ni}}{5\,\mathrm{mm}} F_{ni}(\mathrm{M}_{ni}, s) ds + \frac{\delta_{nj}}{5\,\mathrm{mm}} G_{nj}(\mathrm{M}_{nj}, s) ds +$$
$$+ \frac{\varkappa_n}{5\,\mathrm{mm}} \cos\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right) \sin \lambda_{ni} dy + \frac{\dot{\gamma}_n}{5\,\mathrm{mm}} n \sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right) \cos \lambda_{ni} dx +$$
$$+ \frac{m_{ni}}{5\,\mathrm{mm}} \sin \lambda_{ni} dy +$$
$$+ [\text{cyclische Glieder}] \qquad (38')$$

und

(39).

Die Größen: $\gamma_n$, $\Gamma_n$; $\delta_{n1}$, $\delta_{n2}$, $\mathrm{M}_{n1}$, $\mathrm{M}_{n2}$; $\varkappa_n$, $\dot{\gamma}_n$, $\mathrm{K}_n$; $\varepsilon_n$, $\mathrm{E}_n$; $h_n$ und $h'_n$; $\sigma_{n1}$, $\sigma_{n2}$ und $\sigma'_{n1}$, $\sigma'_{n2}$ sind unbekannte Instrumentalconstanten des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates, $\varepsilon$, E von $n$ unabhängige unbekannte Instrumentalconstanten des Analysators. Sie alle sind abstracte Zahlen und, mit Ausnahme der mit griechischen Majuskeln bezeichneten Winkel, von der ersten Ordnung klein; die Function $\psi_n(x)$ besteht ebenfalls aus Gliedern mit constanten Factoren erster Ordnung. $L$, $H$, $c$ sind bekannte Constanten: $L = 23\cdot625\,\mathrm{mm}$, $H = 15\cdot71\,\mathrm{mm}$, $c = 360\,\mathrm{mm}$.

**25.** Beschreibt nun der Fahrstift eine Curve $S$ von einem Punkte $A$ ($x = 0$, $y = y_a$) bis zu einem Punkte $B$ ($x = c$, $y = y_e = y_a$, vgl. S. 7) und kehrt dann vom Punkte $B$ geradlinig zurück zum Ausgangspunkte, so erhält man die Gesammtdrehung

der Rolle $M_{ni}$ ($i = 1, 2$), wenn man den Ausdruck $d\mu_{ni}$ über die ganze vom Fahrstift beschriebene Contour, $\Sigma$, integriert. Man setze nun (39) in (38') ein, wobei man sich wieder auf Glieder erster Ordnung beschränkt. Man bedenke ferner, dass für den geradlinigen Theil $BA$ des Integrationsweges das Integral aller Glieder, welche mit $dy$ multipliciert sind, Null ist; auch in dem

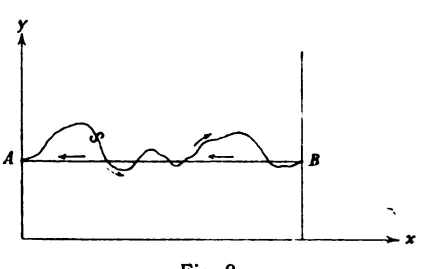



Fig. 8.

Integral des Gliedes $\frac{\gamma_n}{5\,\mathrm{mm}}\, n \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx$ kann das Integrationssymbol $\int_\Sigma$ durch $\int_S$ ersetzt werden, da $y$ auf dem Rückwege constant und $\int_{x=c}^{x=0} \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx = 0$ ist. Außerdem tritt in den von der Excentricität des Cylinders herrührenden Gliedern eine Vereinfachung ein. Setzt man nämlich für den Augenblick

$$U(xy) = -\frac{2n\pi L}{c} \sin\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right),$$

$$V(xy) = \cos\left(\frac{y}{L} + K_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right),$$

so kann man das Integral der beiden erwähnten Glieder längs der Contour $\Sigma$ so schreiben:

$$\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\left(\varkappa_n + \frac{c}{2\pi L}\dot{\gamma}_n\right)\int_\Sigma V(xy)\,dy -$$

$$-\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\,\frac{c}{2\pi L}\,\dot{\gamma}_n \int_\Sigma [U(xy)\,dx + V(xy)\,dy].$$

Das zweite dieser Integrale fällt aber weg, nach dem bekannten Satze der Theorie der Curvenintegrale, dass für jede geschlossene Contour $\Sigma$ das Integral

$$\int_{\Sigma} U(xy)\,dx + V(xy)\,dy = 0$$

ist, wenn innerhalb der Contour die Functionen $U$ und $V$ sowie ihre ersten Ableitungen stetig sind und dortselbst die Relation

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$$

erfüllt wird.

Man erhält also für die Gesammtdrehung der Messrolle bei der Umfahrung den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} d\mu_{ni} = \frac{1}{5\text{ mm}} \int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dy + \\
+ \gamma_n \cdot \frac{1}{5\text{ mm}} \int_S n \cos\left(\frac{y}{L} + \Gamma_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dx + \\
+ \left(\varkappa_n + \frac{c}{2\pi L}\gamma_n\right) \cdot \frac{1}{5\text{ mm}} \int_S \cos\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right) \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dy + \\
+ \varepsilon_n \cdot \frac{1}{5\text{ mm}} \int_S n\left[\sin\left(\frac{2n\pi x}{c} + \mathrm{E}_n\right) - \sin \mathrm{E}_n\right] \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dy + \\
+ \varepsilon \cdot \frac{1}{5\text{ mm}} \int_S n\left[\sin\left(\frac{x}{H} + \mathrm{E}\right) - \sin \mathrm{E}\right] \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dy + \\
+ h_n \cdot \frac{1}{5\text{ mm}} \int_S \frac{x}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dy + \\
+ m_{ni} \cdot \frac{1}{5\text{ mm}} \int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dy + \\
+ \sigma_{ni} \cdot \frac{1}{5\text{ mm}} \int_S \cos\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda_{ni}^0\right) dy + \\
+ \delta_{ni} \cdot \frac{1}{5\text{ mm}} \int_{\Sigma} F_{ni}(\mathrm{M}_{ni}, s)\,ds + \delta_{nj} \cdot \frac{1}{5\text{ mm}} \int_{\Sigma} G_{nj}(\mathrm{M}_{nj}, s)\,ds.
\end{aligned} \tag{40}$$

Wurde die Umfahrung wiederholt mit um 180° veränderten Anfangs-Drehungsphasen $M_{n1}, M_{n2}$ der Messrollen, und bezeichnet $\int_\Sigma d\mu_{ni}$ das arithmetische Mittel der beiden Gesammtdrehungen der Messrolle $M_{ni}$, so fällt in der Formel (40) die letzte Zeile weg.

**26.** Zwei Fragen sind jetzt auf Grund der erhaltenen Formeln zu beantworten. Erstens: wie man die Instrumentalconstanten experimentell bestimmen kann. Zweitens: wie man bei der harmonischen Analyse der vom Fahrstift beschriebenen Curve aus den Ablesungen eines Analysators, dessen Instrumentalconstanten bestimmt sind, die Coefficienten der gesuchten Entwickelung zu berechnen hat.

Ich will zuerst die letztere Frage erörtern.

### Corrigierung der Coefficienten der Fourier'schen Reihe wegen der Instrumentalfehler.

**27.** Beschreibt der Fahrstift einen beliebigen Weg, so ist die Ablesung über den befahrenen Weg

$$\alpha_{ni} = -\frac{1}{2\pi}\int d\mu_{ni},$$

wo das Integral über den befahrenen Weg zu erstrecken ist.

Ich nehme nun an, der Fahrstift habe eine Curve $S$, $y = f(x)$, vom Punkte $x = 0$, $y = y_a$ bis zu dem Punkte $x = c$, $y = y_e = y_a$ beschrieben, sei darauf von dem letzteren geradlinig zum Ausgangspunkte zurückgekehrt, man habe dann, ohne die Aufstellung des Instrumentes zu ändern, die Messrollen um 180° gedreht und die Umfahrung wiederholt; man habe beide Male die Ablesung über die gesammte Umfahrungsbahn $\Sigma$ gebildet, und aus diesen beiden Ablesungen das Mittel genommen, $\alpha_{ni}$.

Dividiert man $\alpha_{n1}$, $\alpha_{n2}$ durch $n$ und multipliciert den Quotient mit 1 cm, so erhält man einen genäherten Wert $a'_n$, $b'_n$ der Coefficienten der Fourier'schen Entwickelung der Function $y = f(x)$. Die genauen Werte dieser Coefficienten aber sind $\frac{-1}{n\pi}\int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda^0_{n1}\right) dy$, $\frac{-1}{n\pi}\int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} + \Lambda^0_{n2}\right) dy$. Es sind

also, nach der Gleichung (40), die Correctionen $\Delta a'_n$, $\Delta b'_n$, welche man zu den Coefficienten $a'_n$, $b'_n$ hinzufügen muss, um die correcten zu erhalten, folgende:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta a'_n = & +\gamma_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_S \cos\left(\frac{y}{L}+\Gamma_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dx+\\
& +\left(\varkappa_n+\frac{c}{2\pi L}\gamma_n\right)\cdot\frac{1}{n\pi}\int_S \cos\left(\frac{y}{L}+\mathrm{K}_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy+\\
& +\varepsilon_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\left[\sin\left(\frac{2n\pi x}{c}+\mathrm{E}_n\right)-\sin\mathrm{E}_n\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy+\\
& \qquad +\varepsilon\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\left[\sin\left(\frac{x}{H}+\mathrm{E}\right)-\sin\mathrm{E}\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy+\\
& +h_n\cdot\int_S\frac{x}{n\pi c}\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy-\\
& -m_{n1}\cdot a_n-\\
& -\sigma_{n1}\cdot b_n\\
\Delta b'_n = & +\gamma_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_S \cos\left(\frac{y}{L}+\Gamma_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dx+\\
& +\left(\varkappa_n+\frac{c}{2\pi L}\gamma_n\right)\cdot\frac{1}{n\pi}\int_S \cos\left(\frac{y}{L}+\mathrm{K}_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy+\\
& +\varepsilon_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\left[\sin\left(\frac{2n\pi x}{c}+\mathrm{E}_n\right)-\sin\mathrm{E}_n\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy+\\
& \qquad +\varepsilon\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\left[\sin\left(\frac{x}{H}+\mathrm{E}\right)-\sin\mathrm{E}\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy+\\
& +h_n\cdot\int_S\frac{x}{n\pi c}\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy-\\
& -m_{n2}\cdot b_n+\\
& +\sigma_{n2}\cdot a_n.
\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

Es bleibt nur übrig, die in den je fünf ersten Zeilen enthaltenen Integrale auszuwerten.

Zu diesem Zwecke theile ich die Bahn $y=f(x)$ in solche Abschnitte, dass jeder Abschnitt entweder kein der $y$-Axe paralleles Stück enthält, oder ganz ein solches Stück ist. Ich bezeichne die erstere Kategorie mit $(S)$, die letztere mit $[S]$.

Das Operationssymbol $\int_{(S)}$ bedeutet die Summe sämmtlicher bestimmten Integrale einer Function, welche gebildet sind über die einzelnen Abschnitte $(S)$; das Operationssymbol $[\ ]_{(S)}$ die Summe sämmtlicher Substitutionen, welche gebildet sind über die einzelnen Abschnitte $(S)$; das Operationssymbol $[\ ]_{[S]}$ die Summe sämmtlicher Substitutionen, welche gebildet sind über die einzelnen Abschnitte $[S]$.

Es ist nun offenbar

$$\int_S \cos\left(\frac{y}{L}+\Gamma_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{ni}^0\right)dx =$$

$$= \cos\Gamma_n \cdot \int_{(S)} \cos\frac{y}{L}\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{ni}^0\right)dx -$$

$$-\sin\Gamma_n \cdot \int_{(S)} \sin\frac{y}{L}\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{ni}^0\right)dx. \qquad (42)$$

Die Functionen $\cos\frac{y}{L}$, $\sin\frac{y}{L}$ von $x$ genügen offenbar in dem Intervall $0 \leqq x \leqq c$ allen Dirichlet'schen Bedingungen, bleiben ferner in demselben endlich, haben keine Unstetigkeitspunkte, haben der $y$-Axe parallele endliche Stücke nur dort, wo die Function $y$ solche hat, und haben ihre Endwerte gleich den Anfangswerten. Die Fourier'schen Entwicklungen derselben,

$$\cos\frac{y}{L} = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{c} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu \sin\frac{2\nu\pi x}{c},$$

$$\sin\frac{y}{L} = A'_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A'_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{c} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B'_\nu \sin\frac{2\nu\pi x}{c},$$

sind infolge dessen Reihen, welche innerhalb jeden Abschnittes der Kategorie $(S)$ gleichmäßig convergieren und in jedem Punkte eines solchen genau diese Functionen darstellen. Man kann also diese Reihen in (42) einsetzen und die angedeuteten Integrationen gliedweise ausführen; man erhält

$$\int_S \cos\left(\frac{y}{L}+\Gamma_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dx =$$

$$= \cos\Gamma_n\cdot\left\{A_0\int_{(S)}\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dx + \right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}A_\nu\int_{(S)}\cos\frac{2\nu\pi x}{c}\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dx+$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}B_\nu\int_{(S)}\sin\frac{2\nu\pi x}{c}\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dx\right\} -$$

$$-\sin\Gamma_n\cdot\left\{A'_0\int_{(S)}\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dx + \right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}A'_\nu\int_{(S)}\cos\frac{2\nu\pi x}{c}\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dx+$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}B'_\nu\int_{(S)}\sin\frac{2\nu\pi x}{c}\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dx\right\}.$$

Es ist klar, dass nichts geändert wird, wenn man rechts die Symbole $\int_{(S)}$ durch $\int_{x=0}^{x=c}$ ersetzt. Man findet auf diese Weise

$$\left\{\begin{aligned}&\int_S \cos\left(\frac{y}{L}+\Gamma_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dx =\\ &\qquad\qquad = \cos\Gamma_n\cdot\frac{c}{2}B_n - \sin\Gamma_n\cdot\frac{c}{2}B'_n.\\ &\int_S \cos\left(\frac{y}{L}+\Gamma_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dx =\\ &\qquad\qquad = -\cos\Gamma_n\cdot\frac{c}{2}A_n + \sin\Gamma_n\cdot\frac{c}{2}A'_n.\end{aligned}\right.$$

Das Integral $\int_\Sigma \cos\left(\frac{y}{L}+K_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dy$, welches in den zweiten Zeilen der Formeln (41) steht, ist gleich

$$\frac{2n\pi L}{c}\int_\Sigma \sin\left(\frac{y}{L}+K_n\right)\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{ni}^0\right)dx;$$

indem man dieses letztere so behandelt, wie das Integral der ersten Zeilen, findet man

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_\Sigma \cos\left(\frac{y}{L}+K_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n1}^0\right)dy = \\
&\qquad\qquad = -\cos K_n . Ln\pi A'_n - \sin K_n . Ln\pi A_n \\
&\int_\Sigma \cos\left(\frac{y}{L}+K_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n2}^0\right)dy = \\
&\qquad\qquad = -\cos K_n . Ln\pi B'_n - \sin K_n . Ln\pi B_n .
\end{aligned}\right.$$

Ferner hat man

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_S (-\sin E_n)\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n1}^0\right)dy = \sin E_n . n\pi b_n \\
&\int_S (-\sin E_n)\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n2}^0\right)dy = -\sin E_n . n\pi a_n .
\end{aligned}\right.$$

Ebenso

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_S (-\sin E)\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n1}^0\right)dy = \sin E . n\pi b_n \\
&\int_S (-\sin E)\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n2}^0\right)dy = -\sin E . n\pi a_n .
\end{aligned}\right.$$

Ferner

$$-\int_S \sin\left(\frac{2n\pi x}{c}+E_n\right)\cos\frac{2n\pi x}{c}\,dy =$$

$$= -\cos E_n \int_S \frac{1}{2}\sin\frac{4n\pi x}{c}\,dy - \sin E_n \int_S \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{4n\pi x}{c}\right)dy$$

$$-\int_S \sin\left(\frac{2n\pi x}{c}+E_n\right)\sin\frac{2n\pi x}{c}\,dy =$$

$$= -\cos E_n \int_S \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{4n\pi x}{c}\right)dy - \sin E_n \int_S \frac{1}{2}\sin\frac{4n\pi x}{c}\,dy$$

oder

$$\int_S \sin\left(\frac{2n\pi x}{c}+\mathrm{E}_n\right)\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy =$$

$$= \cos \mathrm{E}_n . n\pi a_{2n} - \sin \mathrm{E}_n . n\pi b_{2n}$$

$$\int_S \sin\left(\frac{2n\pi x}{c}+\mathrm{E}_n\right)\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy =$$

$$= \cos \mathrm{E}_n . n\pi b_{2n} + \sin \mathrm{E}_n . n\pi a_{2n} .$$

Die noch übrig bleibenden je zwei Integrale in den Formeln (41) berechne ich durch Anwendung der Transformation

$$\int_S \varphi(x) . dy = \left[\varphi(x) . y\right]_S - \int_{(S)} y \frac{d\varphi(x)}{dx} dx. \tag{43}$$

Man hat hienach

$$-\int_S \sin\left(\frac{x}{H}+\mathrm{E}\right)\cos\frac{2n\pi x}{c}\,dy =$$

$$= -\sin\left(\frac{c}{H}+\mathrm{E}\right)\cdot y_a +$$

$$+\cos \mathrm{E}\int_{(S)} y\left(\frac{1}{H}\cos\frac{x}{H}\cos\frac{2n\pi x}{c} - \frac{2n\pi}{c}\sin\frac{x}{H}\sin\frac{2n\pi x}{c}\right)dx +$$

$$+\sin \mathrm{E}\int_{(S)} y\left(-\frac{1}{H}\sin\frac{x}{H}\cos\frac{2n\pi x}{c} - \frac{2n\pi}{c}\cos\frac{x}{H}\sin\frac{2n\pi x}{c}\right)dx,$$

oder

$$-\int_S \sin\left(\frac{x}{H}+E\right)\cos\frac{2n\pi x}{c}\,dy = -\sin\left(\frac{c}{H}+E\right)\cdot y_a +$$

$$+\cos E.\left\{a_0\left[\frac{1}{H}\int_0^c \cos\frac{x}{H}\cos\frac{2n\pi x}{c}dx - \frac{2n\pi}{c}\int_0^c \sin\frac{x}{H}\sin\frac{2n\pi x}{c}dx\right]\right.$$

$$+\sin E.\left\{a_0\left[\frac{-1}{H}\int_0^c \sin\frac{x}{H}\cos\frac{2n\pi x}{c}dx - \frac{2n\pi}{c}\int_0^c \cos\frac{x}{H}\sin\frac{2n\pi x}{c}dx\right]\right.$$

wo das Symbol $\sum_\nu$ eine auf die Werte $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ erstreckte Summation bedeutet; oder, indem man die Constante $k = \frac{c}{2\pi H}$ einführt,

$$-\int_S \sin\left(\frac{x}{H}+E\right)\cos\frac{2n\pi x}{c}\,dy = \cos E.\left\{ \qquad \sin\frac{c}{H}\cdot(a_0-y_a)\right.$$

$$+\sin E.\left\{\left(\cos\frac{c}{H}-1\right)\cdot(a_0-y_a)\right.$$

ebenso kann man das Integral $-\int_S \sin\left(\frac{x}{H}+E\right)\sin\frac{2n\pi x}{c}dy$ behandeln. Führt man die Bezeichnungen ein:

$$p_{\nu,n} = \sin\frac{c}{2H}\cdot\left[\frac{(n+\nu)n-k^2}{(n+\nu)^2-k^2}+\frac{(n-\nu)n-k^2}{(n-\nu)^2-k^2}\right]$$

ferner

$$r_{\nu,n} = \sin\frac{c}{2H}\cdot\left[\frac{\nu k}{(n+\nu)^2-k^2}-\frac{\nu k}{(n-\nu)^2-k^2}\right],$$

$$+\sum_\nu a_\nu\left[\frac{1}{H}\int_0^c\cos\frac{2\nu\pi x}{c}\cos\frac{x}{H}\cos\frac{2n\pi x}{c}dx-\frac{2n\pi}{c}\int_0^c\cos\frac{2\nu\pi x}{c}\sin\frac{x}{H}\sin\frac{2n\pi x}{c}dx\right]+$$

$$+\sum_\nu b_\nu\left[\frac{1}{H}\int_0^c\sin\frac{2\nu\pi x}{c}\cos\frac{x}{H}\cos\frac{2n\pi x}{c}dx-\frac{2n\pi}{c}\int_0^c\sin\frac{2\nu\pi x}{c}\sin\frac{x}{H}\sin\frac{2n\pi x}{c}dx\right]\Bigg\}+$$

$$+\sum_\nu a_\nu\left[\frac{-1}{H}\int_0^c\cos\frac{2\nu\pi x}{c}\sin\frac{x}{H}\cos\frac{2n\pi x}{c}dx-\frac{2n\pi}{c}\int_0^c\cos\frac{2\nu\pi x}{c}\cos\frac{x}{H}\sin\frac{2n\pi x}{c}dx\right]+$$

$$+\sum_\nu b_\nu\left[\frac{-1}{H}\int_0^c\sin\frac{2\nu\pi x}{c}\sin\frac{x}{H}\cos\frac{2n\pi x}{c}dx-\frac{2n\pi}{c}\int_0^c\sin\frac{2\nu\pi x}{c}\cos\frac{x}{H}\sin\frac{2n\pi x}{c}dx\right]\Bigg\},$$

$$+\sin\frac{c}{H}\cdot\sum_\nu\frac{1}{2}a_\nu\left[\frac{(n+\nu)n-k^2}{(n+\nu)^2-k^2}+\frac{(n-\nu)n-k^2}{(n-\nu)^2-k^2}\right]-$$

$$-\left(\cos\frac{c}{H}-1\right)\cdot\sum_\nu\frac{1}{2}b_\nu\left[\frac{\nu k}{(n+\nu)^2-k^2}+\frac{\nu k}{(n-\nu)^2-k^2}\right]\Bigg\}+$$

$$+\left(\cos\frac{c}{H}-1\right)\cdot\sum_\nu\frac{1}{2}a_\nu\left[\frac{(n+\nu)n-k^2}{(n+\nu)^2-k^2}+\frac{(n-\nu)n-k^2}{(n-\nu)^2-k^2}\right]-$$

$$+\sin\frac{c}{H}\cdot\sum_\nu\frac{1}{2}b_\nu\left[\frac{\nu k}{(n+\nu)^2-k^2}+\frac{\nu k}{(n-\nu)^2-k^2}\right]\Bigg\};$$

$$q_{\nu,n}=\sin\frac{c}{2H}\cdot\left[\frac{\nu k}{(n+\nu)^2-k^2}+\frac{\nu k}{(n-\nu)^2-k^2}\right],$$

$$s_{\nu,n}=\sin\frac{c}{2H}\cdot\left[\frac{(n+\nu)n-k^2}{(n+\nu)^2-k^2}-\frac{(n-\nu)n-k^2}{(n-\nu)^2-k^2}\right],$$

— Zahlen, welche man, für das gegebene Instrument, mit den Argumenten $n$ und $\nu$ ein- für allemal tabulieren kann —, so hat man einfach

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_S \sin\left(\frac{x}{H}+\mathrm{E}\right)\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n1}^0\right)dy = \\
&\qquad = \cos\left(\mathrm{E}+\frac{c}{2H}\right)\cdot\left(2\sin\frac{c}{2H}\cdot(a_0-y_a)+\sum_\nu a_\nu p_{\nu,n}\right)+ \\
&\qquad\qquad +\sin\left(\mathrm{E}+\frac{c}{2H}\right)\cdot\sum_\nu b_\nu q_{\nu,n} \\
&\int_S \sin\left(\frac{x}{H}+\mathrm{E}\right)\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n2}^0\right)dy = \\
&\qquad = \sin\left(\mathrm{E}+\frac{c}{2H}\right)\cdot\sum_\nu a_\nu r_{\nu,n} \\
&\qquad\qquad -\cos\left(\mathrm{E}+\frac{c}{2H}\right)\cdot\sum_\nu b_\nu s_{\nu,n}.
\end{aligned}\right.$$ [1]

Wendet man die Transformation (43) endlich an auf die Integrale, welche in den fünften Zeilen von (41) stehen, so findet man

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_S \frac{x}{n\pi c}\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n1}^0\right)dy = \\
&\qquad = -\tfrac{1}{2}b_n+\frac{1}{n\pi}\left(a_0-y_a+\tfrac{3}{4}a_n\right)-\frac{n}{\pi}\sum_{\nu\neq n}\frac{1}{\nu^2-n^2}a_\nu \\
&\int_S \frac{x}{n\pi c}\cos\left(\frac{-2n\pi x}{c}+\Lambda_{n2}^0\right)dy = \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}a_n+\frac{1}{4n\pi}b_n-\frac{1}{\pi}\sum_{\nu\neq n}\frac{\nu}{\nu^2-n^2}b_\nu,
\end{aligned}\right.$$

---

[1] In der ersteren Gleichung könnte man den Coefficient bei $\cos\left(\mathrm{E}+\frac{c}{2H}\right)$ noch etwas einfacher schreiben, wenn man berücksichtigt, dass $y_a=\sum_\nu a_\nu$ ist; er wird dann: $\sum_\nu a_\nu p'_{\nu,n}$, wobei

$$p'_{\nu,n}=p_{\nu,n}-2\sin\frac{c}{2H}=\sin\frac{c}{2H}\cdot\left[\frac{-(n+\nu)\nu}{(n+\nu)^2-k^2}+\frac{(n-\nu)\nu}{(n-\nu)^2-k^2}\right]$$

ist.

wo $\sum\limits_{\nu \neq n}$ auf die Werte $\nu = 1, 2, \ldots, n-1, n+1, n+2, \ldots$ zu erstrecken ist.

Setzt man die obigen Ausdrücke der Integrale in (41) ein und gebraucht anstatt der bisherigen neue Instrumentalconstanten:

$$\gamma_n \cos \Gamma_n = \gamma'_n, \qquad \gamma_n \sin \Gamma_n = \gamma''_n,$$

$$\left(\varkappa_n + \frac{c}{2\pi L}\gamma_n\right) \cos K_n = \varkappa'_n, \qquad \left(\varkappa_n + \frac{c}{2\pi L}\gamma_n\right) \sin K_n = \varkappa''_n,$$

$$\varepsilon_n \cos E_n = \varepsilon'_n, \qquad \varepsilon_n \sin E_n = \varepsilon''_n,$$

$$\varepsilon \cos\left(E + \frac{c}{2H}\right) = \varepsilon', \qquad \varepsilon \sin\left(E + \frac{c}{2H}\right) = \varepsilon'',$$

$$\sigma_{n1} - n\varepsilon \sin E = \sigma'_{n1},$$

$$\sigma_{n2} - n\varepsilon \sin E = \sigma'_{n2},$$

so erhält man die Formeln zur Corrigierung der Coefficienten $a'_n, b'_n$:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta a'_n = {} & \gamma'_n \cdot \frac{c}{2\pi} B_n \quad - \gamma''_n \cdot \frac{c}{2\pi} B'_n \\
& - \varkappa'_n . L A'_n \quad - \varkappa''_n . L A_n \\
& + \varepsilon'_n . n a_{2n} \quad + \varepsilon''_n . n (b_n - b_{2n}) \\
& + \varepsilon' . \left( \frac{2(a_0 - y_a) \sin \frac{c}{2H}}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_\nu a_\nu p_{\nu, n} \right) + \varepsilon'' . \frac{1}{\pi} \sum_\nu b_\nu q_{\nu, n} \\
& + h_n \cdot \left\{ -\tfrac{1}{2} b_n + \frac{1}{n\pi} \left( a_0 - y_a + \tfrac{3}{4} a_n \right) - \frac{n}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2} a_\nu \right\} \\
& - m_{n1} . a_n \\
& - \sigma'_{n1} . b_n \\
\Delta b'_n = {} & - \gamma'_n \cdot \frac{c}{2\pi} A_n \quad + \gamma''_n \cdot \frac{c}{2\pi} A'_n \\
& - \varkappa'_n . L B'_n \quad - \varkappa''_n . L B_n \\
& + \varepsilon'_n . n b_{2n} \quad - \varepsilon''_n . n (a_n - a_{2n}) \\
& - \varepsilon' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_\nu b_\nu s_{\nu, n} + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_\nu a_\nu r_{\nu, n} \\
& + h_n \cdot \left\{ \tfrac{1}{2} a_n + \frac{1}{4 n\pi} b_n - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2} b_\nu \right\} \\
& - m_{n2} . b_n \\
& + \sigma'_{n2} . a_n .
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Im folgenden gebe ich eine für mein Instrument ($H = 15\cdot 71$ mm) berechnete Tafel der Factoren $\frac{1}{\pi} p_{\nu,n}$, $\frac{1}{\pi} q_{\nu,n}$ und eine ebensolche der Factoren $\frac{1}{\pi} s_{\nu,n}$, $\frac{1}{\pi} r_{\nu,n}$.

Tafel der Factoren $\frac{1}{\pi} p_{\nu,n}$, $\frac{1}{\pi} q_{\nu,n}$.

| | $n = 1$ | | $n = 2$ | | $n = 3$ | | $n = 4$ | | $n = 5$ | | $n = 6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu = 1$ | −0·63 | +0·19 | −0·75 | +0·33 | −0·09 | −0·27 | −0·25 | +0·15 | −0·92 | −0·43 | −0·64 | −0·12 |
| 2 | −1·01 | +0·65 | +0·28 | −0·61 | −0·28 | −0·09 | −0·30 | +0·13 | −0·06 | +0·43 | −1·32 | −0·81 |
| 3 | +0·51 | −0·82 | −0·27 | −0·01 | −0·34 | +0·10 | −0·33 | +0·17 | −0·25 | +0·27 | +0·14 | +0·68 |
| 4 | −0·88 | +0·61 | −0·51 | +0·26 | −0·44 | +0·22 | −0·39 | +0·23 | −0·33 | +0·28 | −0·19 | +0·40 |
| 5 | +1·92 | −2·15 | −1·28 | +1·06 | −0·65 | +0·46 | −0·50 | +0·34 | −0·41 | +0·33 | −0·31 | +0·37 |
| 6 | +0·50 | −0·71 | +2·23 | −2·43 | −1·53 | +1·36 | −0·74 | +0·60 | −0·53 | +0·45 | −0·41 | +0·42 |

Tafel der Factoren $\frac{1}{\pi} s_{\nu,n}$, $\frac{1}{\pi} r_{\nu,n}$.

| | $n = 1$ | | $n = 2$ | | $n = 3$ | | $n = 4$ | | $n = 5$ | | $n = 6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu = 1$ | −0·06 | +0·03 | −0·22 | +0·16 | +0·36 | −0·50 | −0·08 | −0·33 | +0·50 | +0·34 | +0·18 | +0·06 |
| 2 | −0·35 | +0·31 | +0·84 | −0·93 | +0·20 | −0·35 | +0·03 | −0·32 | −0·29 | −0·54 | +0·93 | +0·73 |
| 3 | +1·45 | −1·49 | +0·43 | −0·52 | +0·23 | −0·37 | +0·10 | −0·34 | −0·05 | −0·40 | −0·48 | −0·77 |
| 4 | +1·28 | −1·32 | +0·55 | −0·63 | +0·32 | −0·45 | +0·18 | −0·39 | +0·06 | −0·40 | −0·11 | −0·49 |
| 5 | −1·73 | +1·70 | +1·27 | −1·35 | +0·53 | −0·66 | +0·31 | −0·50 | +0·16 | −0·45 | +0·30 | −0·47 |
| 6 | −0·40 | +0·36 | −2·26 | +2·19 | +1·42 | −1·54 | +0·56 | −0·74 | +0·31 | −0·56 | +0·16 | −0·52 |

Dass die in (44) vorkommenden Reihen convergieren, lässt sich sehr leicht in allgemeiner Weise zeigen. Bekanntlich existiert immer, wenn $a_\nu$, $b_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) Coefficienten in der Entwicklung einer Function sind, welche den Dirichlet'schen Bedingungen genügt und endlich bleibt, eine endliche Zahl $\mathfrak{Z}$ von der Art, dass für alle $\nu$ die Ungleichheiten bestehen

$$|a_\nu| < \frac{\mathfrak{Z}}{\nu}, \qquad |b_\nu| < \frac{\mathfrak{Z}}{\nu}.$$

Es ist nun [das $n$ in den Formeln (44) ist natürlich eine endliche Zahl]

$$\left|\sum_{\nu=n+4}^{\nu=\infty} \frac{\nu a_\nu}{(\nu-n)^2-k^2}\right| < \sum_{\nu=n+4}^{\nu=\infty} \frac{\nu|a_\nu|}{(\nu-n)^2-k^2} < \mathfrak{Z}\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{1}{(\mu+4)^2-k^2},$$

also, da $k < 4$ ist,

$$\left|\sum_{\nu=n+4}^{\nu=\infty} \frac{\nu a_\nu}{(\nu-n)^2-k^2}\right| < \mathfrak{Z}\frac{1}{4^2-k^2} + \mathfrak{Z}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{\mu^2+8\mu} < \mathfrak{Z}\frac{1}{4^2-k^2} + \mathfrak{Z}\frac{\pi^2}{6}.$$

Die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{\nu}{(\nu-n)^2-k^2} \quad \text{und (umsomehr)} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{\nu}{(\nu+n)^2-k^2} \tag{45}$$

sind daher absolut convergent. Umsomehr convergieren die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{n}{(\nu-n)^2-k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{n}{(\nu+n)^2-k^2}; \tag{46}$$

aus der Convergenz der Reihen (46) und der Reihen (45) folgt aber diejenige der Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{(n-\nu)n}{(\nu-n)^2-k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} a_\nu \frac{(n+\nu)n}{(\nu+n)^2-k^2}. \tag{47}$$

Infolge der Convergenz von (45) convergieren die Reihen $\sum_{\nu} a_\nu r_{\nu,n}$, $\sum_{\nu} b_\nu q_{\nu,n}$; infolge der Convergenz von (47) die Reihen $\sum_{\nu} a_\nu p_{\nu,n}$, $\sum_{\nu} b_\nu s_{\nu,n}$.

Ähnlich ersieht man die Convergenz der Reihen, welche in den Coefficienten bei $h_n$ stehen. Es ist

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu^2-n^2} b_\nu\right| < \sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu^2-n^2}|b_\nu| < 3\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{2n\mu+\mu^2} < 3\frac{\pi^2}{6},$$

womit die Convergenz der Reihe $\sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2-n^2} b_\nu$ bewiesen ist. Umsomehr convergiert die Reihe $\sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2-n^2} a_\nu$.

**28.** In der praktischen Anwendung der Formeln (44) können diese Summen nicht genau berechnet werden, weil die Coefficienten $a_\nu$, $b_\nu$ für $\nu > N$ im allgemeinen unbekannt sein werden. Die Anwendung des Analysators mit $N$ Integrierapparaten setzt schon voraus, dass bei der zu analysierenden Curve die Summen

$$\sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} a_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{c}$$

und

$$\sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} b_\nu \sin\frac{2\nu\pi x}{c}$$

vernachlässigt werden dürfen. In dieser Voraussetzung ist, streng genommen, die Eigenschaft nicht enthalten, dass

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} a_\nu p_{\nu,n}, \quad \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} b_\nu q_{\nu,n}, \quad \sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^2-n^2} a_\nu$$

und

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} b_\nu s_{\nu,n}, \quad \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} a_\nu r_{\nu,n}, \quad \sum_{\nu=N+1}^{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu^2-n^2} b_\nu$$

Größen seien, welche, mit kleinen Factoren erster Ordnung multipliciert, vernachlässigt werden dürfen. Diese letztere Eigenschaft muss also hier als eine weitere Voraussetzung eingeführt werden. Dann können die Summationen in (44) auf die Indices $\nu = 1, 2, \ldots, N$ beschränkt werden. Die Nothwendigkeit dieser Voraussetzung liegt an der Natur des Instrumentes, welches nur eine beschränkte Anzahl Coefficienten liefert und über die übrigen nichts aussagt.

Die Symbole $\sum_\nu$, $\sum_{\nu \neq n}$ in den Formeln (44) sollen fortan im Sinne dieser Beschränkung verstanden werden.

**29.** Die Coefficienten $A_n\ B_n$ der Fourier'schen Entwickelung der Function $\cos\frac{y}{L}$, und $A'_n\ B'_n$ der Entwickelung der Function $\sin\frac{y}{L}$, von $x$ könnte man in folgender Weise berechnen. Der sin oder cos des Ausdruckes

$$\frac{y}{L} = \frac{a_0}{L} + \sum_n \frac{a_n}{L}\cos\frac{2n\pi x}{c} + \sum_n \frac{b_n}{L}\sin\frac{2n\pi x}{c}$$

in welchem man die Summen auf wenige Glieder beschränkt, stellt sich dar als ein Aggregat von Producten, deren einzelne Factoren sämmtlich die Formen haben:

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{a_\nu}{L}\cos\frac{2\nu\pi x}{c}\right), \qquad \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{b_\nu}{L}\sin\frac{2\nu\pi x}{c}\right),$$

wobei $\nu$ in den verschiedenen Factoren verschieden ist. Entwickelt man nun jeden solchen Factor mit Hilfe der Bessel'schen Functionen in eine Reihe nach Vielfachen von $\frac{2\nu\pi x}{c}$ und multipliciert diese Reihen, so kann man auf diesem Wege zu der gesuchten Entwicklung von der Gestalt

$$\cos\frac{y}{L} = A_0 + \sum_\nu A_\nu \cos\frac{2\nu\pi x}{c} + \sum_\nu B_\nu \sin\frac{2\nu\pi x}{c},$$

beziehungsweise

$$\sin\frac{y}{L} = A_0' + \sum_\nu A_\nu' \cos\frac{2\nu\pi x}{c} + \sum_\nu B_\nu' \sin\frac{2\nu\pi x}{c}$$

gelangen.

Ich habe die entsprechenden Formeln abgeleitet; dieselben sind jedoch außerordentlich compliciert. Ich theile sie daher nicht mit. Gewöhnlich wird sich zur Bestimmung der Coefficienten $A_\nu$, $B_\nu$, $A_\nu'$, $B_\nu'$ das folgende Verfahren mehr empfehlen. Man zeichnet, außer der zur Analyse vorgelegten Curve $S$, noch (roh) zwei Hilfscurven, deren Ordinaten proportional sind dem $\cos\frac{y}{L}$, beziehungsweise $\sin\frac{y}{L}$, wo $y$ die Ordinate der Curve $S$ ist; man analysiert diese beiden Curven mit dem Instrument, wobei natürlich von Instrumentalfehlern abgesehen werden darf.

In den meisten Fällen aber wird man es vorziehen, diese Entwicklungen überhaupt nicht zu bestimmen, sondern die entsprechenden Fehlerglieder durch eine Maßnahme bei der Analyse der Curve $S$ aus der Ablesung zu eliminieren. Dies wird in der That erreicht, wenn man vor der Wiederholung der Umfahrung, welche behufs Verminderung der zufälligen Fehler oder Elimination der Rollenexcentricitäten vorgenommen wird, das Instrument von der Unterlage abhebt und es in der Weise neu aufstellt, dass die neue Anfangsablesung an der Laufradtheilung von der früheren um 180° verschieden ist. Dieses Verfahren hat freilich einen Nachtheil. Die gegenseitige Lage und Orientierung der beiden Coordinatensysteme: desjenigen des Instrumentes $(xy)$ und desjenigen, in welchem die Zeichnung entworfen worden ist, wird dadurch geändert und muss deshalb von neuem festgestellt werden.

Hat man das Eliminationsverfahren angewandt und bezeichnet $a_n'$, $b_n'$ wieder das arithmetische Mittel der Werte aus beiden Umfahrungen, dann sind die Formeln für die Correction der Werte $a_n'$ $b_n'$ einfach

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta a'_n = \; & \varepsilon'_n . n a_{2n} \quad + \varepsilon''_n . n (b_n - b_{2n}) \\
& + \varepsilon' \cdot \left( \frac{2(a_0 - y_a) \sin \frac{c}{2H}}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_\nu a_\nu p_{\nu,n} \right) \quad + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_\nu b_\nu q_{\nu,n} \\
& + h_n \cdot \left\{ -\tfrac{1}{2} b_n + \frac{1}{n\pi} \left( a_0 - y_a + \tfrac{3}{4} a_n \right) - \frac{n}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2} a_\nu \right\} \\
& - m_{n1} . a_n \\
& - \sigma'_{n1} . b_n \\
\Delta b'_n = \; & \varepsilon'_n . n b_{2n} \quad - \varepsilon''_n . n (a_n - a_{2n}) \\
& - \varepsilon' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_\nu b_\nu s_{\nu,n} \quad + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi} \sum_\nu a_\nu r_{\nu,n} \\
& + h_n \cdot \left\{ \tfrac{1}{2} a_n + \frac{1}{4 n \pi} b_n - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2} b_\nu \right\} \\
& - m_{n2} . b_n \\
& + \sigma'_{n2} . a_n .
\end{aligned}\right\} \quad (48)
$$

30. Entschließt man sich, bei allen Analysen immer das letztere Verfahren anzuwenden, so braucht man also nicht, die Instrumentalconstanten $\gamma_n$, $\Gamma_n$, $\varkappa_n$, $\dot{\gamma}_n$, $K_n$ bestimmt zu haben. Da es aber wünschenswert erschien, die Richtigkeit der Theorie durch Beobachten des Verhaltens der Constanten, sowie durch ihre Anwendung auf Analysen bekannter Curven zu prüfen (namentlich auch in der Erwägung, dass die Einführung der Constanten $\gamma_n$, $\dot{\gamma}_n$ in der Theorie auf der nicht ganz bewiesenen Annahme beruht, dass die so bezeichneten Größen während einer Analyse als constant angesehen werden dürfen), — so musste eine Reihe von Bestimmungen der Constanten

$$
\gamma_n \cos \Gamma_n,\; \gamma_n \sin \Gamma_n,\; \varkappa_n \cos K_n,\; \varkappa_n \sin K_n,\; \dot{\gamma}_n \cos K_n,\; \dot{\gamma}_n \sin K_n,
$$
$$
\varepsilon_n \cos E_n,\; \varepsilon_n \sin E,\; \varepsilon \cos E,\; \varepsilon \sin E,\; m_{n1},\; m_{n2},\; \sigma_{n1},\; \sigma_{n2}
$$

ausgeführt werden, die auch in der That ergab, dass alle diese Constanten bei richtiger Behandlung des Instrumentes sogar im Laufe längerer Zeiträume mit hinreichender Genauigkeit constant bleiben. Nur im Hinblick auf solche Bestimmungen geschieht es, wenn im nächsten Unterabschnitte, der von den

Bestimmungsmethoden der verschiedenen Instrumentalconstanten handelt, auch diejenigen für die Constanten $\gamma_n \cos \Gamma_n$ und $\gamma_n \sin \Gamma_n$, $\varkappa_n \cos K_n$ und $\varkappa_n \sin K_n$, $\dot{\gamma}_n \cos K_n$ und $\dot{\gamma}_n \sin K_n$ beschrieben werden. —

### Methoden zur Bestimmung der Constanten.

**31.** In den zunächst folgenden Paragraphen beschäftige ich mich mit den Bestimmungsmethoden derjenigen Constanten, welche ein für viele Mal bestimmt werden können. Ich nenne fortan diese Constanten kurz die regulären.

Um diese Constanten mit der wünschenswerten Genauigkeit bestimmen zu können, sind nur solche Verfahren zweckmäßig, welche präcise Einstellungen oder Ablesungen des Wagenindex an der Schienentheilung nicht voraussetzen; genauer gesagt, nur so beschaffene Bestimmungsmethoden, dass die von einem kleinen Einstellungs-, beziehungsweise Ablesungsfehler herrührende Ungenauigkeit der geographischen Längen der Messrollen sich im Resultate der Bestimmung eliminiert. Der Nonius am Wagenindex ist nur auf Ablesung der Zehntelmillimeter eingerichtet. Zwar gelingt es bei einiger Übung die Genauigkeit der Schätzung so weit zu treiben, dass der Ablesungsfehler selten größer als 0·02 mm ist. Jedoch, einerseits, genügt hier diese Genauigkeit manchmal nicht; anderseits sind so scharfe Ablesungen sehr zeitraubend und auch ermüdend, wodurch nach mehreren Ablesungen die Bestimmtheit des Urtheiles immer geringer wird.

Deshalb sind die unten beschriebenen Verfahren von solcher Art, dass diese Nothwendigkeit, soweit möglich, vermieden wird.

Man wird bei den unten beschriebenen Verfahren öfters bemerken können, dass die untersuchte Constante sich auch auf eine andere Weise würde bestimmen lassen. Ich beschreibe jedesmal nur dasjenige Bestimmungsverfahren, welches nach meinen Versuchen und Überlegungen sich als das genaueste (oder als das einzige befriedigend genaue) erwiesen hat, und unterdrücke ferner auch die ausdrückliche Angabe von mög-

lichen Modificationen des beschriebenen Verfahrens, welche unwesentlich und unmittelbar einleuchtend sind.

Die bisherige Definition (Art. 7) des Coordinatensystems $xy$ wird auch in diesen Darstellungen festgehalten. Es möge daran erinnert werden, dass dieses Coordinatensystem auf etwaigen auf der Unterlage des Instrumentes vorhandenen Aufdruck oder Zeichnung keinen Bezug nimmt.

32. Um die Constante $\sigma_{n2}-\sigma_{n1}$ zu bestimmen, bemerke man, dass, wenn $\lambda_{n1}$, $\lambda_{n2}$ zwei gleichzeitige Werte der geographischen Längen der beiden Messrollen sind, ihre Differenz nach (39)

$$\lambda_{n2}-\lambda_{n1} = 90^\circ + (\sigma_{n2}-\sigma_{n1})$$

ist, also andere Instrumentalconstanten nicht enthält.

Ich bringe nun durch Einstellungen des Index an der Schienentheilung den Fahrstift nacheinander in die vier Lagen

$$x = \frac{1}{8}\frac{c}{n}+\xi', \quad x = \frac{3}{8}\frac{c}{n}+\xi'', \quad x = \frac{5}{8}\frac{c}{n}+\xi''', \quad x = \frac{7}{8}\frac{c}{n}+\xi^{\mathrm{IV}},$$

wo $\xi'$, $\xi''$, $\xi'''$, $\xi^{\mathrm{IV}}$ Einstellungsfehler bedeuten. Folgende Figuren veranschaulichen die dadurch erzeugten Stellungen des Rollenpaares:

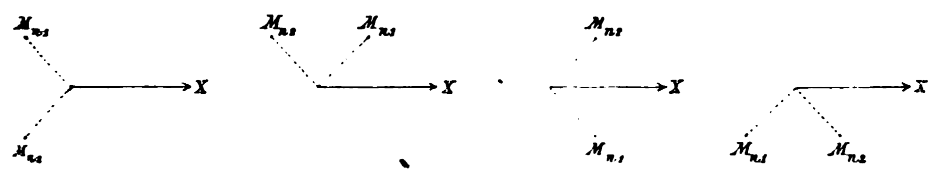



Fig. 9.

In jeder dieser Lagen gehe ich von einer und derselben Geraden $y =$ Const. aus und lasse, durch Fortrollen des Instrumentes, den Fahrstift von hier aus eine jedesmal möglichst gleich lange Strecke

$$l', \qquad l'', \qquad l''', \qquad l^{\mathrm{IV}}$$

in der Richtung der $y$-Axe durchlaufen. Die Verhältnisse zwischen diesen vier Strecken unterscheiden sich also von der

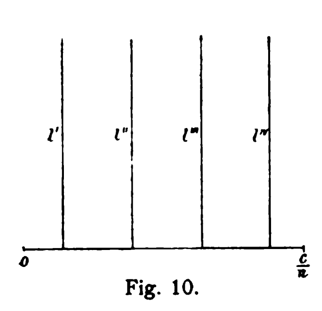


Fig. 10.

Einheit nur um kleine Größen erster Ordnung; ebenso sollen auch die durch Einstellungsfehler bedingten Fehler der geographischen Längen als klein von der ersten Ordnung angesehen werden können. Auf jeder Strecke vollziehen die Messrollen angenähert eine ganze Anzahl Revolutionen.

Die beiden »Ablesungen über $l'$«: $\alpha'_{n1}$ und $\alpha'_{n2}$, und die über die weiteren Strecken: $\alpha''_{n1}$ und $\alpha''_{n2}$, $\alpha'''_{n1}$ und $\alpha'''_{n2}$, $\alpha^{\text{IV}}_{n1}$ und $\alpha^{\text{IV}}_{n2}$ erlauben nun den constanten Längenunterschied $\lambda_{n2}-\lambda_{n1}$ zu berechnen, wenn die Streckenlängen $l', l'', l''', l^{\text{IV}}$ in Analysator-Millimetern bekannt sind.

In der That ist infolge von (38'), wenn cm den Analysator-Centimeter bedeutet,

$$\alpha'_{n1} = -\frac{l'}{\pi\,\text{cm}}\sin\lambda'_{n1} - \frac{\delta_{n1}}{\pi\,\text{cm}}\int_{l'} F_{n1}(\text{M}_{n1},s)\,ds - \frac{\delta_{n2}}{\pi\,\text{cm}}\int_{l'} G_{n2}(\text{M}_{n2},s)\,ds -$$

$$-\frac{\varkappa_n}{\pi\,\text{cm}}\sin 135°.\int_{l'}\cos\left(\frac{y}{L}+\text{K}_n\right)dy - \frac{m_{n1}l'}{\pi\,\text{cm}}\sin 135° -$$

$$-\frac{[z_n]_{l'}}{2\pi M_{n1}},$$

$$\alpha'_{n2} = -\frac{l'}{\pi\,\text{cm}}\sin\lambda'_{n2} - \frac{\delta_{n2}}{\pi\,\text{cm}}\int_{l'} F_{n2}(\text{M}_{n2},s)\,ds - \frac{\delta_{n1}}{\pi\,\text{cm}}\int_{l'} G_{n1}(\text{M}_{n1},s)\,ds -$$

$$-\frac{\varkappa_n}{\pi\,\text{cm}}\sin 225°.\int_{l'}\cos\left(\frac{y}{L}+\text{K}_n\right)dy - \frac{m_{n2}l'}{\pi\,\text{cm}}\sin 225° -$$

$$-\frac{[z_n]_{l'}}{2\pi M_{n2}},$$

wo $z_n$ die veränderliche (in Artt. 12. und 15. mit $h$ bezeichnete) Höhe des Kugelmittelpunktes über dem Umdrehungscentrum des Cylinders, und das Operationssymbol $[\ ]_{l'}$ wie gewöhnlich die »Substitution über $l'$« bezeichnet; denn die Schwankungen jener Höhe infolge Schrägheit und Excentricität des Cylinders

sind die einzigen Fehlerquellen von cyclischer Wirkung, welche bei der zur $y$-Axe parallelen Fahrt einen Einfluss haben. Nach der für kleine $\beta$ giltigen Formel

$$\text{arc}\sin(\sin\lambda+\beta)=\lambda+\beta\sec\lambda,$$

welche, wenn der Winkel $\lambda$ nicht nahe $=90°$ oder nahe $=270°$ ist, bis auf Glieder zweiter Ordnung des $\beta$ richtig ist, kann man nun bilden $\text{arc}\sin\left(\frac{-\alpha'_{n1}}{l'/\pi\,\text{cm}}\right)$ und $\text{arc}\sin\left(\frac{-\alpha'_{n2}}{l'/\pi\,\text{cm}}\right)$; man überzeugt sich, dass

$$\text{arc}\sin\left(\frac{-\alpha'_{n2}}{l'/\pi\,\text{cm}}\right)-\text{arc}\sin\left(\frac{-\alpha'_{n1}}{l'/\pi\,\text{cm}}\right)=$$

$$=\lambda_{n2}-\lambda_{n1}+\frac{\delta_{n1}}{l'}\left\{\int_{l'}F_{n1}(\mathrm{M}_{n1},s)\,ds-\int_{l'}G_{n1}(\mathrm{M}_{n1},s)\,ds\right\}\sec 45°+$$

$$+\frac{\delta_{n2}}{l'}\left\{-\int_{l'}F_{n2}(\mathrm{M}_{n2},s)\,ds+\int_{l'}G_{n2}(\mathrm{M}_{n2},s)\,ds\right\}\sec 45°+$$

$$+2\frac{\varkappa_n}{l'}\int_{l'}\cos\left(\frac{y}{L}+\mathrm{K}_n\right)dy+m_{n1}+m_{n2}+$$

$$+\frac{[z_n]_{l'}}{2l'}\left(\frac{1}{M_{n1}/\text{cm}}-\frac{1}{M_{n2}/\text{cm}}\right)\sec 45°.$$

Wie aus der Definition (22') der Functionen $F_{ni}$, $G_{nj}$ ersichtlich, sind aber die Integrale dieser Functionen über eine zur $y$-Axe parallele Strecke von der ersten Ordnung klein, wenn über die Integrationsstrecke die Veränderlichen $\bar{\mu}_{ni}$, $\bar{\mu}_{nj}$ um nahezu ein ganzes Vielfaches von $2\pi$ variieren; anderseits ist bei dem kleinen Factor erster Ordnung $[z_n]_{l'}$ $M_{n1}=M_{n2}$ zu setzen; man hat also, bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig,

$$\text{arc}\sin\left(\frac{-\alpha'_{n2}}{l'/\pi\,\text{cm}}\right)-\text{arc}\sin\left(\frac{-\alpha'_{n1}}{l'/\pi\,\text{cm}}\right)=$$

$$=\lambda_{n2}-\lambda_{n1}+2\frac{\varkappa_n}{l'}\int_{l'}\cos\left(\frac{y}{L}+\mathrm{K}_n\right)dy+m_{n1}+m_{n2}.$$

Ebenso findet man

$$\arc\sin\left(\frac{-\alpha''_{n2}}{l''/\pi\,\text{cm}}\right)-\arc\sin\left(\frac{-\alpha''_{n1}}{l''/\pi\,\text{cm}}\right)=$$

$$=\lambda_{n2}-\lambda_{n1}-2\frac{\varkappa_n}{l''}\int_{l''}\cos\left(\frac{y}{L}+\mathrm{K}_n\right)dy-m_{n1}-m_{n2}-$$

$$-\frac{[z_n]_{l''}}{2l''}\left(\frac{1}{M_{n1}/\text{cm}}+\frac{1}{M_{n2}/\text{cm}}\right)\sec 45^\circ,$$

$$\arc\sin\left(\frac{-\alpha'''_{n2}}{l'''/\pi\,\text{cm}}\right)-\arc\sin\left(\frac{-\alpha'''_{n1}}{l'''/\pi\,\text{cm}}\right)=$$

$$=\lambda_{n2}-\lambda_{n1}+2\frac{\varkappa_n}{l'''}\int_{l'''}\cos\left(\frac{y}{L}+\mathrm{K}_n\right)dy+m_{n1}+m_{n2},$$

$$\arc\sin\left(\frac{-\alpha^{\text{IV}}_{n2}}{l^{\text{IV}}/\pi\,\text{cm}}\right)-\arc\sin\left(\frac{-\alpha^{\text{IV}}_{n1}}{l^{\text{IV}}/\pi\,\text{cm}}\right)=$$

$$=\lambda_{n2}-\lambda_{n1}-2\frac{\varkappa_n}{l^{\text{IV}}}\int_{l^{\text{IV}}}\cos\left(\frac{y}{L}+\mathrm{K}_n\right)dy-m_{n1}-m_{n2}+$$

$$+\frac{[z_n]_{l^{\text{IV}}}}{2l^{\text{IV}}}\left(\frac{1}{M_{n1}/\text{cm}}+\frac{1}{M_{n2}/\text{cm}}\right)\sec 45^\circ.$$

Summiert man diese vier Gleichungen, so hat man offenbar bis auf kleine Größen zweiter Ordnung richtig

$$4(\lambda_{n2}-\lambda_{n1})=\sum_{r=1}^{r=4}\left[\arc\sin\left(\frac{-\alpha^{(r)}_{n2}}{l^{(r)}/\pi\,\text{cm}}\right)-\arc\sin\left(\frac{-\alpha^{(r)}_{n1}}{l^{(r)}/\pi\,\text{cm}}\right)\right]. \quad (49)$$

Von den verschiedenen Werten des $\arc\sin\left(\frac{-\alpha^{(r)}_{ni}}{l^{(r)}/\pi\,\text{cm}}\right)$ ist, wie aus der Ableitung ersichtlich, derjenige Wert zu nehmen, welcher sich von $\frac{-2n\pi x^{(r)}}{c}+\Lambda^0_{ni}$ nur wenig unterscheidet.

Bei der Befahrung werden die beiden Endpunkte der einzelnen Strecken $l'$, $l''$, $l'''$, $l^{\text{IV}}$ durch Eindrücken des Stiftes in die Unterlage markiert, und nach der Operation ihre Entfernungen von einander in Analysator-Millimetern ausgemessen. —

Um ein Beispiel zu geben, möge hier von meinen wiederholt ausgeführten derartigen Bestimmungen wiedergegeben werden, unter Hinzufügung einiger Texterläuterungen, das

Beobachtungs-Protokoll von 1899 Juni 22.[1]

Bestimmung der Constante $\sigma_{22} - \sigma_{21}$.

Das Instrument wird auf dem Millimeterpapiere aufgestellt, so, dass die $x$-Axe der Instrumentalcoordinaten nahezu parallel der der Papiercoordinaten ist, was geprüft wird durch Beobachten, ob die Fahrstiftspitze während der Verschiebung des Stiftes bei nichtrollendem Instrument eine der $x$-Linien des Papieres nicht verlässt.

Die Cylinder werden mit dem Pinsel abgewischt.

Die Rahmen der Axen der Rollen $M_{21}$, $M_{22}$ werden angewärmt.

Die Kugel 2 wird auf den Cylinder heruntergelassen. — Die Zwischenräume bei den Trommeln sind frei.[2]

---

[1] Die Ablesung der Rolle ist eine Zahl von 3 Decimalstellen, da die Zehntel einer Pars der Trommeltheilung Tausendstel-Revolutionen sind. Fand ich bei der Schätzung, dass die Ablesung »6 Zehntelpartes« zu wenig, »7 Zehntelpartes« aber zu viel wäre, konnte ich aber nicht entscheiden, was der Wahrheit näher sei, dann notierte ich als letzte Stelle der Ablesung $6_+$ oder $7_-$ (je nachdem ich glaubte, dass ich mir vielleicht doch leichter die Richtigkeit von 6, als von 7 einreden könnte, oder umgekehrt). Fand ich 6 zu wenig und 7 zu viel, war ich aber sicher, dass mir 6 richtiger vorkommt, als 7, dann notierte ich $6_{(+)}$, im umgekehrten Falle $7_{(-)}$. War ich unsicher, ob $6_{(+)}$ oder 6 zu lesen sei, dann notierte ich $6_{[+]}$; war ich unsicher, ob $7_{(-)}$ oder 7, dann notierte ich $7_{[-]}$.

Bei der Berechnung wurde dann sowohl $6_+$ wie $7_-$ mit 6·5 Zehntelpartes übersetzt; ein Unterschied zwischen diesen beiden Notierungen wurde nur dann gemacht, wenn die Rechnungsoperationen (etwa eine Mittelbildung oder Division) es nöthig machten, die Zahl 6·5 durch eine mit gerader Anzahl Zehntel zu ersetzen, also sich zwischen 6·4 und 6·6 zu entschließen. Die Notierung $6_{(+)}$ wurde mit 6·3 (eventuell, im Falle eines rechnerischen Bedürfnisses, mit 6·2), die Notierung $7_{(-)}$ mit 6·7 (eventuell 6·8) Zehntelpartes übersetzt. Die Notierung $6_{[+]}$ wurde übersetzt mit 6·2, die Notierung $7_{[-]}$ mit 6·8 Zehntelpartes.

Das Kleine Zählrad, welches die Vielfachen von 50 Revolutionen zu geben bestimmt ist, wurde nie mit abgelesen; erstens, weil bei solchen Befahrungen ein bleibender Irrthum um 50 Revolutionen ausgeschlossen ist, — zweitens, weil die Angaben dieser Zählräder sehr oft falsch sind.

[2] Dies pflegte ich vor jeder Operation nachzusehen. Vergl. S. 795, ZZ. 8 v. unt. bis 6 v. unt., und S. 797, ZZ. 15 bis 16.

Schiene 22·5:

| | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{22}$ |
|---|---|---|
| Anfangsablesung (oder »Papier 0«). . | 2·728 | $1{\cdot}077_{(+)}$ |
| Vorgerollt: Papier 312[1] ........... | $45{\cdot}696_{[-]}$ | $8{\cdot}048_{[+]}$ |
| » : Papier 445 ........... | 42·700 | $11{\cdot}017_{+}$ |
| Zurück zu »Papier 312« .......... | $45{\cdot}696_{-}$ | $8{\cdot}045_{+}$ |
| » » »Papier 0«............. | 2·726 | 1·074 |

$3^h\ 45^m$, Temperatur 15·4° R.

Schiene 67·5:

| | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{22}$ |
|---|---|---|
| Papier 0 ......... | $2{\cdot}736_{-}$ | $1{\cdot}060_{(-)}$ |
| » 312 ......... | 45·740 | $44{\cdot}035_{(+)}$ |
| » 445 ......... | $42{\cdot}756_{(-)}$ | 41·038 |
| » 312 ......... | 45·739 | $44{\cdot}035_{[-]}$ |
| » 0 ......... | 2·737 | $1{\cdot}063_{(+)}$ |

$4^h\ 5^m$, Temperatur 15·5° R.

Schiene 112·5:

| | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{22}$ |
|---|---|---|
| Papier 0 ......... | $2{\cdot}759_{(+)}$ | $1{\cdot}065_{+}$ |
| » 312 ......... | $9{\cdot}797_{(+)}$ | 44·098 |
| » 445 ......... | 12·801 | $41{\cdot}124_{(-)}$ |
| » 312 ......... | $9{\cdot}798_{(+)}$ | 44·097 |
| » 0 ......... | $2{\cdot}758_{[-]}$ | $1{\cdot}064_{+}$ |

$4^h\ 28^m$, Temperatur 15·5° R.

Schiene 157·5:

| | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{22}$ |
|---|---|---|
| Papier 0 ......... | 2·766 | $1{\cdot}080_{(-)}$ |
| » 312 ......... | $9{\cdot}754_{[-]}$ | 8·116 |
| » 445 ......... | $12{\cdot}731_{+}$ | $11{\cdot}115_{(-)}$ |
| » 312 ......... | $9{\cdot}754_{[-]}$ | 8·116 |
| » 0 ......... | $2{\cdot}765_{(-)}$ | $1{\cdot}083_{(+)}$ |

$4^h\ 53^m$, Temperatur 15·5° R.

Die Kugel 2 wird hinaufgehoben.

Das Instrument wird in die zu den $y$-Linien des Papieres parallele Lage verstellt, behufs Ausmessung der Entfernung

[1] Angabe, laut des Papiernetzes, der Ordinate in Millimetern, gezählt von derjenigen $x$-Linie des Papieres ab, auf welcher der Fahrstift bei der Anfangsablesung stand.

zwischen den bei »Papier 0« und den bei »Papier 312« vorhin gemachten Marken. Es finden sich folgende Schienenablesungen:

| | Fahrstiftspitze eingestellt auf die Marke »Papier 312« | | Marke »Papier 0« | Also die Entfernung der bei »Papier 312« von der bei »Papier 0« gemachten Marke |
|---|---|---|---|---|
| auf der vorhin bei »Schiene 22·5« befahrenen Ordinatenlinie: | 47·53 | und | 359·02 | 311·49 mm |
| „ „ „ „ »Schiene 67·5« „ „ : | 47·58 | „ | 359·05 | 311·47 mm |
| „ „ „ „ »Schiene 112·5« „ „ : | 47·55 | „ | 359·08 | 311·53 mm |
| „ „ „ „ »Schiene 157·5« „ „ : | 47·58 | „ | 359·08. | 311·50 mm. |

Das Instrument wird übertragen in eine geeignete Lage zur Ausmessung der Entfernungen zwischen den bei »Papier 312« und den bei »Papier 445« gemachten Marken; die entsprechenden Schienenablesungen sind:

| (Marke »Papier 445«) | | (Marke »Papier 312«) | Also die Entfernungen: |
|---|---|---|---|
| 61·33 | und | 194·23 | 132·90 mm |
| 61·28 | „ | 194·23 | 132·95 mm |
| 61·22 | „ | 194·12 | 132·90 mm |
| 61·28 | „ | 194·12. | 132·84 mm. |

$6^h$, Temperatur 15·6° R., Spannung $d'$.

Die Cylinder und Laufräder werden mit dem Pinsel abgewischt und das Instrument in den Kasten hineingelegt.

Berechnung. Aus den Beobachtungen bei »Schiene 22·5« ergibt sich:

| | $\alpha'_{n1}$ (Mittel) | $\alpha'_{n2}$ (Mittel) |
|---|---|---|
| Ablesung über $l' = 311·49$ mm ist......... | $-7·031_3$ | $-6·971_2$ |
| „ „ $l' = 444·39$ mm „ ......... | $-10·027_0$ | $-9·941_8$ |

also

| | $\arcsin\left(\frac{-\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}}\right)$ | $\arcsin\left(\frac{-\alpha'_{n2}}{l'/\pi \text{ cm}}\right)$ | Differenz |
|---|---|---|---|
| aus $l' = 311·49$ mm:...... | 134° 50'1 | 224° 40'6 | |
| „ $l' = 444·39$ mm:...... | 51·5 | 39·3 | |
| Mittel | 134 50·8 | 224 40·0 | } 89° 49'2 |

Ebenso ergeben die bei weiteren Stiftstellungen gemachten Beobachtungen die Werte für die weiteren arc sin:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $l'' = 311·47$ mm:...... | 44° 53'2 | 134° 52'2 | |
| $l'' = 444·42$ mm:...... | 52·4 | 52·9 | |
| Mittel | 44 52·8 | 134 52·6 | } 89° 59'8 |
| $l''' = 311·53$ mm:...... | 314° 46'6 | 44° 38'3 | |
| $l''' = 444·43$ mm:...... | 46·4 | 38·8 | |
| Mittel | 314 46·5 | 44 38·6 | } 89° 52'1 |
| $l^{IV} = 311·50$ mm:...... | 224° 48'8 | 314° 48'6 | |
| $l^{IV} = 444·34$ mm:...... | 48·0 | 49·0 | |
| Mittel | 224 48·4 | 314 48·8 | } 90° 0'4 |

$\lambda_{22} - \lambda_{21} = {}^1/_4$ Summe $= 89° 55'4$

Es ergibt sich somit: $\sigma_{22} - \sigma_{21} = -4'·6 = -0·0013$.

(Eine Wiederholung dieser Bestimmung am nächsten Tage behufs Controle ergab: $\sigma_{22} - \sigma_{21} = -4'·8$.)

**33.** Um die Constanten $m_{n1}$, $m_{n2}$ zu bestimmen, stelle ich den Fahrstift successive in die vier Lagen

$$x = 0 + \xi', \qquad x = \frac{1}{4}\frac{c}{n} + \xi'', \qquad x = \frac{1}{2}\frac{c}{n} + \xi''', \quad x = \frac{3}{4}\frac{c}{n} + \xi^{\text{IV}}$$

ein, wobei $\xi'$, $\xi''$, $\xi'''$, $\xi^{\text{IV}}$ Einstellungsfehler bedeuten, sodass die Stellungen des Rollenpaares nahezu die durch die folgenden Figuren veranschaulichten sind. In jeder dieser Lagen lasse ich

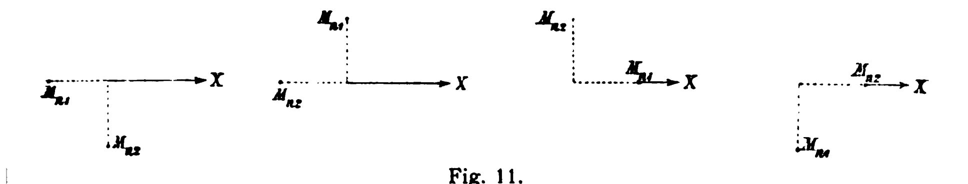


Fig. 11.

durch Rollen des Instrumentes den Fahrstift in der Richtung der $y$-Axe eine Strecke durchlaufen, welche annähernd gleich einem Vielfachen von $2L\pi$ ist, was durch Beobachten der am Laufrade angebrachten Theilung im Anfangs- und Endpunkte der Strecke constatiert wird.

Die Operation wird sodann mit um 180° veränderten Anfangs-Drehungsphasen der Messrollen wiederholt.

Sind die thatsächlich durchlaufenen vier Strecken $l'$, $l''$, $l'''$, $l^{\text{IV}}$ in Analysator-Millimetern bekannt, so liefert die Ablesung $\alpha'_{n2}$ sowohl als auch $\alpha'''_{n2}$ die Constante $m_{n2}$, die Ablesung $\alpha''_{n1}$ aber, sowohl als $\alpha^{\text{IV}}_{n1}$, die Constante $m_{n1}$.

In der That, die Formel (38') gibt

$$\int_{l'} d\mu_{n2} = \frac{1}{5\,\text{mm}}(1 + m_{n2})\int_{l'} \sin\lambda_{n2}\,dy + \frac{\delta_{n2}}{5\,\text{mm}}\int_{l'} F_{n2}(\mathrm{M}_{n2}, s)\,ds +$$
$$+ \frac{\delta_{n1}}{5\,\text{mm}}\int_{l'} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\,ds - \varkappa_n \frac{L}{5\,\text{mm}}\left[\sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right)\right]_{l'} + \frac{[z_n]_{l'}}{M_{n2}};$$

da aber $\sin\lambda_{n2}$ sich auf der Strecke $l'$ nur um eine Größe zweiter Ordnung von $-1$ unterscheidet, ferner

$$\varkappa_n\left[\sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right)\right]_{l'}$$

wegen der nahezu ganzen Anzahl von Cylinder-Revolutionen klein von der zweiten Ordnung ist, und dasselbe auch von $\frac{[z_n]_{l'}}{M_{n2}}$

gilt, so hat man, indem man noch beiderseits mit $\frac{-1}{2\pi}$ multipliciert,

$$\alpha'_{n2} = + \frac{l'}{\pi\,\text{cm}}(1+m_{n2}) - \frac{\delta_{n2}}{\pi\,\text{cm}}\int_{l'} F_{n2}(\mathbf{M}_{n2}, s)\,ds -$$

$$- \frac{\delta_{n1}}{\pi\,\text{cm}}\int_{l'} G_{n1}(\mathbf{M}_{n1}, s)\,ds.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\alpha'''_{n2} = - \frac{l'''}{\pi\,\text{cm}}(1+m_{n2}) - \frac{\delta_{n2}}{\pi\,\text{cm}}\int_{l'''} F_{n2}(\mathbf{M}_{n2}, s)\,ds -$$

$$- \frac{\delta_{n1}}{\pi\,\text{cm}}\int_{l'''} G_{n1}(\mathbf{M}_{n1}, s)\,ds.$$

Dabei ist, infolge von (22′),

$$\int_{l'} F_{n2}(\mathbf{M}_{n2}, s)\,ds = -\int_{l'}\left[\sin\left(\frac{-y}{5\,\text{mm}}+\mathbf{M}_{n2}\right) - \cos\left(\frac{-y}{5\,\text{mm}}+\mathbf{M}_{n2}\right)\right]dy,$$

$$\int_{l'} G_{n1}(\mathbf{M}_{n1}, s)\,ds = 0,$$

$$\int_{l'''} F_{n2}(\mathbf{M}_{n2}, s)\,ds = +\int_{l'''}\left[\sin\left(\frac{y}{5\,\text{mm}}+\mathbf{M}_{n2}\right) - \cos\left(\frac{y}{5\,\text{mm}}+\mathbf{M}_{n2}\right)\right]dy,$$

$$\int_{l'''} G_{n1}(\mathbf{M}_{n1}, s)\,ds = 0.$$

Man sieht also, dass diese Glieder sich nicht aufheben, wenn auch $l'$ nahezu $= l'''$ wäre. Bedeutet indessen $\{\ \}$ bei den Ablesungen das Mittel aus der Ablesung bei der ersten und der bei der zweiten Operation, so erhält man, da die Constante $\mathbf{M}_{n2}$ ihren Wert inzwischen um 180° verändert hat,

$$\{\alpha'_{n2}\} = + \frac{l'}{\pi\,\text{cm}}(1+m_{n2}), \qquad \{\alpha'''_{n2}\} = - \frac{l'''}{\pi\,\text{cm}}(1+m_{n2}),$$

oder kurz

$$1+m_{n2} = \frac{\{|\alpha'_{n2}|\}}{l'/\pi\,\text{cm}} = \frac{\{|\alpha'''_{n2}|\}}{l'''/\pi\,\text{cm}}. \tag{50}$$

Ebenso findet man

$$1 + m_{n1} = \frac{\{|\alpha''_{n1}|\}}{l''/\pi \text{ cm}} = \frac{\{|\alpha^{\text{IV}}_{n1}|\}}{l^{\text{IV}}/\pi \text{ cm}}. \tag{50}$$

Ein Beispiel dieser Bestimmung zu geben, dürfte überflüssig sein.

Die Forderung, das Verfahren nach Verdrehung der Rollen zu wiederholen, wäre umgangen, wenn auf der Strecke $l^{(r)}$ die Rolle sich ebenfalls um eine nahezu ganze Anzahl Revolutionen drehen würde. Dies mit einer nahezu ganzen Anzahl Revolutionen der Laufräder zu vereinigen, ist mit einiger Annäherung möglich, wenn man die Länge $l^{(r)}$ so wählt, dass die Rolle 14, oder so, dass sie 19 Revolutionen macht.

**34.** Um die Constanten $\gamma_n \cos \Gamma_n$, $\gamma_n \sin \Gamma_n$ zu bestimmen, stelle ich das Instrument auf in derjenigen Drehungsphase der Laufräder, auf welche die zu erhaltende Constante $\Gamma_n$ sich beziehen soll, und stelle den Fahrstift mittels Schienenablesung auf die Abscisse (siehe Fig. 12) $\frac{1}{4}\frac{c}{n} + \xi'$ ein, wo $\xi'$ der (unbekannte) Einstellungsfehler ist.

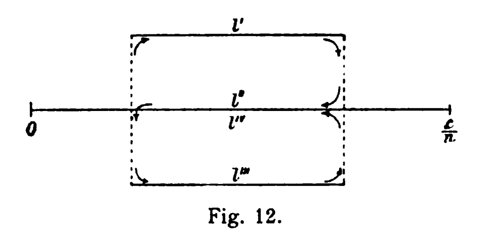



Fig. 12.

Dann rolle ich das Instrument um angenähert ein ungerades Vielfaches von $L\pi$ vor, lese in dem erreichten Punkte die Rolle $M_{n2}$ ab, verschiebe den Fahrstift längs der zur $x$-Axe möglichst parallelen Bahn $l'$ bis zur Abscisse $\frac{3}{4}\frac{c}{n} + \xi''$, und lese die Rolle $M_{n2}$ wieder ab; die Ablesung über $l'$ heiße $\alpha'_{n2}$. Da indessen dabei infolge Nichtverwendung der Bremse kleine Rollbewegungen des Instrumentes, die von der Rolle $M_{n2}$ registriert werden, unausbleiblich sind, verwende ich zu deren

Controle einen der übrigen Integrierapparate, den $k^{\text{ten}}$, welcher zu diesem Zwecke (längere Zeit vor der Operation) aus dem Draht ausgeschaltet worden ist und angenähert in seiner Anfangslage d. h. so steht, dass seine Cosinusrolle sich beim Rollen des Instrumentes nicht dreht. Die Controle geschieht, indem ich in genügend vielen (z. B. 9) Stationen innerhalb der Strecke $l'$ die Rolle $M_{k2}$ ablese.

Darauf rolle ich das Instrument zurück bis angenähert zu der Grundstellung und befahre sodann mit dem Fahrstift, wieder unter Ablesungen der Sinusrolle des Control-Apparates in Zwischenpunkten, eine zur $(-x)$-Axe möglichst parallele Strecke $l''$ bis zur Abscisse $\frac{1}{4}\frac{c}{n}+\xi'''$; die Ablesung der Rolle $M_{n2}$ über $l''$ heiße $\alpha''_{n2}$. Dann rolle ich das Instrument weiter rückwärts um angenähert ein ungerades Vielfaches von $L\pi$, und befahre, unter Ablesungen am Control-Apparate, eine zur $x$-Axe möglichst parallele Strecke $l'''$ bis zur Abscisse $\frac{3}{4}\frac{c}{n}+\xi^{\text{IV}}$, wobei die Ablesung über $l'''$ $\alpha'''_{n2}$ sei. Nach Vorwärtsrollen des Instrumentes bis angenähert zu der Grundstellung, befahre mit dem Fahrstift, unter Ablesungen am Control-Apparate, eine zur $(-x)$-Axe möglichst parallele Strecke $l^{\text{IV}}$ bis zur Abscisse $\frac{1}{4}\frac{c}{n}+\xi^{\text{V}}$, wobei die Ablesung über $l^{\text{IV}}$ $\alpha^{\text{IV}}_{n2}$ sei. Das bisher Geschilderte nenne ich die I. Befahrungshälfte.

Sodann wird das Instrument um angenähert $\frac{1}{4}$-Umdrehung des Laufrades vorgerollt und, von dieser neuen Stellung als Grundstellung aus, das gleiche Verfahren vorgenommen. Dies ist die II. Befahrungshälfte.

Die ganze Operation wird mit um 180° veränderter Anfangs-Drehungsphase der Rolle $M_{n1}$ wiederholt.

Die vier Ablesungen $\alpha'_{n2}$, $\alpha''_{n2}$, $\alpha'''_{n2}$, $\alpha^{\text{IV}}_{n2}$ der ersten Hälfte jeder Befahrung liefern dann die Constante $\gamma_n \cos \Gamma_n$, die vier Ablesungen $\alpha'_{n2}$, $\alpha''_{n2}$, $\alpha'''_{n2}$, $\alpha^{\text{IV}}_{n2}$ der zweiten Befahrungshälfte die Constante $\gamma_n \sin \Gamma_n$; in diesen beiden Constanten ist $\Gamma_n$ bezogen auf diejenige Anfangs-Drehungsphase der Laufräder, welche bei der Grundstellung der ersten Befahrungshälfte stattfand. Die Kenntnis der genauen Längen der einzelnen Befahrungsstücke ist dabei nicht nöthig.

In der That, da auf der Strecke $l^{(r)}$ der ersten oder der zweiten Befahrungshälfte $\frac{y}{L}$ nahezu constant und gleich $\frac{y^{(r)}}{L}$ ist, wo $y^{(r)}$ etwa die mittlere Ordinate dieser Strecke bezeichnet, so erhält man nach (38')

$$\int_{l^{(r)}} d\mu_{n2} = \frac{1}{5\,\mathrm{mm}} \sum_{l^{(r)}} \left(\int \sin\lambda_{n2}\, dy\right) -$$

$$- \frac{n\gamma_n}{5\,\mathrm{mm}} \cos\left(\frac{y^{(r)}}{L} + \Gamma_n\right) \int_{l^{(r)}} \cos\frac{2n\pi x}{c}\, dx +$$

$$+ \frac{\delta_{n2}}{5\,\mathrm{mm}} \int_{l^{(r)}} F_{n2}(\mathrm{M}_{n2}, s)\, ds + \frac{\delta_{n1}}{5\,\mathrm{mm}} \int_{l^{(r)}} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\, ds -$$

$$- \frac{n\dot{\gamma}_n}{5\,\mathrm{mm}} \sin\left(\frac{y^{(r)}}{L} + \mathrm{K}_n\right) \int_{l^{(r)}} \sin\frac{2n\pi x}{c}\, dx \quad + [\text{cycl. Gl.}];$$

die Integration $\int \sin\lambda_{n2}\, dy$ ist über das zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stationen enthaltene Intervall auszuführen, und die $\sum_{l^{(r)}}$ erstreckt sich auf alle Stationen-Intervalle der Strecke $l^{(r)}$. In (38'), daher auch in dieser Formel, ist $\Gamma_n$ auf diejenige Anfangs-Drehungsphase der Laufräder bezogen, von welcher aus die $y$ gezählt werden; wir wollen hier als solche die wählen, welche der Grundstellung der ersten Befahrungshälfte entspricht.

Das letzte ausgeschriebene Glied rechts in der obigen Formel ist von zweiter Ordnung. Das Integral $\int \sin\lambda_{n2}\, dy$ ist gleich dem Ordinatenunterschiede $\Delta y$ der Endpunkte des Intervalles, multipliciert mit einem Mittelwerte von $\sin\lambda_{n2}$; dieser letztere Factor aber ist, bei nicht zu großer Ausdehnung des Intervalles, nahezu gleich $-\cos\frac{2n\pi x}{c}$, wo $x$ die mittlere Abscisse in dem Intervalle ist; wird also dieser Factor bei den immer sehr klein bleibenden Schwankungen $\frac{\Delta y}{5\,\mathrm{mm}}$ durch $-\cos\frac{2n\pi x}{c}$ ersetzt, so begeht man damit bloß Fehler zweiter Ordnung. Ferner ist, infolge von (22'),

$$\int_{l^{(r)}} F_{n2}(\mathrm{M}_{n2}, s)\,ds = 0, \qquad \int_{l^{(r)}} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\,ds =$$

$$= \pm \frac{n\pi}{36} \sin\left(\overline{\mu_{n1}^{(r)}} + \mathrm{M}_{n1}\right) \cdot \int_{l^{(r)}} \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \sin^2 \frac{2n\pi x}{c} - 1\right) ds,$$

wo das obere Vorzeichen für den Fall der Strecke $l'$ oder $l'''$, das untere für $l''$ oder $l^{\text{IV}}$ gilt.

Man hat also die vier bis auf kleine Größen zweiter Ordnung genauen Formeln:

$$\int_{l'} d\mu_{n2} = -\sum_{l'} \left(\frac{\Delta y}{5\,\text{mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c}\right) + \frac{\gamma_n}{5\,\text{mm}} \cos\left(\frac{y'}{L} + \Gamma_n\right) \cdot \frac{c}{\pi} +$$
$$+ \frac{\delta_{n1}}{5\,\text{mm}} \int_{l'} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\,ds \quad + [\text{cycl. Gl.}],$$

$$\int_{l''} d\mu_{n2} = -\sum_{l''} \left(\frac{\Delta y}{5\,\text{mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c}\right) - \frac{\gamma_n}{5\,\text{mm}} \cos\left(\frac{y''}{L} + \Gamma_n\right) \cdot \frac{c}{\pi} +$$
$$+ \frac{\delta_{n1}}{5\,\text{mm}} \int_{l''} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\,ds \quad + [\text{cycl. Gl.}],$$

$$\int_{l'''} d\mu_{n2} = -\sum_{l'''} \left(\frac{\Delta y}{5\,\text{mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c}\right) + \frac{\gamma_n}{5\,\text{mm}} \cos\left(\frac{y'''}{L} + \Gamma_n\right) \cdot \frac{c}{\pi} +$$
$$+ \frac{\delta_{n1}}{5\,\text{mm}} \int_{l'''} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\,ds \quad + [\text{cycl. Gl.}],$$

$$\int_{l^{\text{IV}}} d\mu_{n2} = -\sum_{l^{\text{IV}}} \left(\frac{\Delta y}{5\,\text{mm}} \cos \frac{2n\pi x}{c}\right) - \frac{\gamma_n}{5\,\text{mm}} \cos\left(\frac{y^{\text{IV}}}{L} + \Gamma_n\right) \cdot \frac{c}{\pi} +$$
$$+ \frac{\delta_{n1}}{5\,\text{mm}} \int_{l^{\text{IV}}} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\,ds \quad + [\text{cycl. Gl.}].$$

Die hier vorkommenden cyclischen Glieder sind selbstverständlich Wirkungen nur derjenigen cyclischen Fehlerquellen, welche bei einer zur $y$-Axe senkrechten Fahrt einen Einfluss haben. Summiert man diese Gleichungen, so heben sich diese Glieder, bis auf kleine Größen zweiter Ordnung, zwischen je zwei einander entgegengerichteten Strecken $l^{(r)}$ auf. Die mit $\delta_{n1}$ multiplicierten Glieder der obigen Gleichungen eliminieren sich aber nicht. Es ergibt sich daher, nach Multiplication der Summe mit $\frac{-1}{2\pi}$, Einsetzung des Wertes

$$\frac{\Delta y}{\pi \text{ cm}} = \Delta \alpha_{k2},$$

wo $\alpha_{k2}$ die Ablesungen am Control-Apparate sind, und Berücksichtigung der angenäherten Relationen $\frac{y'}{L} = \frac{y''}{L} + \pi$, $\frac{y'''}{L} = \frac{y''}{L} - \pi$, $\frac{y^{\text{IV}}}{L} = \frac{y''}{L}$:

$$\begin{aligned}
&\left[\alpha'_{n2} - \sum\nolimits_{l'} \left(\Delta\alpha_{k2} . \cos\frac{2n\pi x}{c}\right)\right] + \\
&+ \left[\alpha''_{n2} - \sum\nolimits_{l''} \left(\Delta\alpha_{k2} . \cos\frac{2n\pi x}{c}\right)\right] + \\
&+ \left[\alpha'''_{n2} - \sum\nolimits_{l'''} \left(\Delta\alpha_{k2} . \cos\frac{2n\pi x}{c}\right)\right] + \\
&+ \left[\alpha^{\text{IV}}_{n2} - \sum\nolimits_{l^{\text{IV}}} \left(\Delta\alpha_{k2} . \cos\frac{2n\pi x}{c}\right)\right] = \qquad (51) \\
&= \frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}} \gamma_n \cos\Gamma_n \cos\frac{y''}{L} - \frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}} \gamma_n \sin\Gamma_n \sin\frac{y''}{L} - \\
&\quad - \frac{\delta_{n1}}{\pi \text{ cm}} \left[\int_{l'} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\, ds + \int_{l''} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\, ds + \right. \\
&\quad \left. + \int_{l'''} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\, ds + \int_{l^{\text{IV}}} G_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\, ds\right].
\end{aligned}$$

Es ist aber, gemäß der Festsetzung der $x$-Axe, auf der Strecke $l''$ der ersten Befahrungshälfte $\frac{y}{L} = 0$, auf der Strecke $l''$ der zweiten Befahrungshälfte aber $\frac{y}{L} = \frac{\pi}{2}$; Werte, deren Ungenauigkeiten klein von erster Ordnung sind.

Man sieht also, dass aus der ersten Befahrungshälfte die Constante $\gamma_n \cos\Gamma_n$, aus der zweiten die Constante $-\gamma_n \sin\Gamma_n$ erhalten wird — beides indessen noch mit dem Einflusse der Rollenexcentricität behaftet — wenn man den in (51) linksstehenden Ausdruck durch $\frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}}$ dividiert.

Dadurch, dass die ganze Befahrung nach Umdrehung der Rolle $M_{n1}$ wiederholt und für jede Constante das Mittel aus beiden Bestimmungen genommen wird, wird das letzte Glied ihres aus (51) folgenden Ausdruckes eliminiert.

Bei Betrachtung des unten mitgetheilten Beispieles könnte vielleicht der Zweifel aufkommen, ob bei diesen subtilen Bestimmungen, wo es sich, wie man sehen wird, um sehr kleine Größen handelt und noch eine ungefähre Kenntnis der vierten Decimale der Rollenrevolution vorausgesetzt wird, das gefundene Resultat nicht, infolge der unvermeidlichen Ablesungs- und anderen zufälligen Fehler, ein illusorisches ist. Es soll nun allerdings nicht geleugnet werden, dass diese die peinlichste Aufmerksamkeit erfordernden Beobachtungen jedenfalls wohl schon nahe an der Grenze der erreichbaren reellen Genauigkeit liegen. Indessen zeigten die Resultate der von mir wiederholt ausgeführten Bestimmungen eine nicht unbefriedigende Übereinstimmung, und nach derselben scheint es ziemlich sicher, dass sie doch in der Hauptsache der Ausdruck einer thatsächlichen Eigenschaft des Instrumentes sind. Wenn die Discordanzen der einzelnen Werte vielleicht noch nicht den erwünschten Grad der Kleinheit hatten gegenüber den Werten selbst, so ist auch zu bedenken, dass die in Rede stehenden Constanten bei meinem Exemplar des Analysators eben sehr klein sind; hat man aber ein Exemplar, bei welchem dieser Instrumentalfehler etwas stärker ist, so werden jene zufälligen Bestimmungsfehler deshalb doch nicht größer sein, und dann wird also sicher die Bestimmung und Berücksichtigung dieser Constanten volle Berechtigung haben.

Das Folgende ist eine etwas abgekürzte Wiedergabe meines

Beobachtungs-Protokolles von 1899 Juni 9.[1]

Bestimmung der Constanten $\gamma_2 \cos \Gamma_2$, $\gamma_2 \sin \Gamma_2$: ausgeschaltet ist der dritte Integrierapparat.

Der Control-Apparat wird in seine Anfangslage gedreht und diese geprüft.

$8^h\,20^m$, Temperatur 13·4° R.; Spannung $d'$.

Anfangsstellung: Laufradablesung 250°.

---

[1] Es möge bemerkt werden, dass an diesem Tage die unwillkürlichen Rollbewegungen etwas größer waren, als gewöhnlich. Die Correction einer Ablesung $\alpha_{n2}^{(r)}$ war sonst nur selten größer als 0·0010.

Der Wagenindex wird an der Schiene auf 45·0 eingestellt und das Instrument bis zur Laufradablesung 430° vorgerollt.

Schieneneinstellung

| | | (45·0) | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 | 105 | 115 | 125 | 135·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Laufrad 430: | $\alpha_{32}$ = | $37 \cdot 871_{+}$ | 2 | $2_{+}$ | $3_{+}$ | $4_{[-]}$ | $4_{[-]}$ | $4_{-}$ | $3_{+}$ | $3_{+}$ | $3_{+}$ |
| | $\alpha_{22}$ = | $2 \cdot 862_{[+]}$ | | | | | | | | | $\cdot 872_{[-]}$. |

Zurückgerollt zur Anfangsstellung;

| | | (135·0) | 125 | 115 | 105 | 95 | 85 | 75 | 65 | 55 | 45·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Laufrad 250: | $\alpha_{32}$ = | $35 \cdot 507_{-}$ | $7_{-}$ | $7_{-}$ | $6_{+}$ | $6_{(+)}$ | $6_{(+)}$ | $6_{+}$ | $6_{(+)}$ | $6_{+}$ | $7_{[-]}$ |
| | $\alpha_{22}$ = | $2 \cdot 866_{(-)}$ | | | | | | | | | $\cdot 857$. |

$8^{h}50^{m}$, Temp. 13·6° R.

Weiter rückwärts gerollt;

| | | (45·0) | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 | 105 | 115 | 125 | 135·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Laufrad 70: | $\alpha_{32}$ = | $33 \cdot 153_{(-)}$ | 4 | $5_{[-]}$ | 5 | $5_{[-]}$ | $5_{[-]}$ | 5 | $5_{(+)}$ | $5_{+}$ | $6_{(-)}$ |
| | $\alpha_{22}$ = | $2 \cdot 863_{-}$ | | | | | | | | | $\cdot 872_{-}$. |

Zurückgerollt zur Anfangsstellung;

| | | (135·0) | 125 | 115 | 105 | 95 | 85 | 75 | 65 | 55 | 45·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Laufrad 250: | $\alpha_{32}$ = | $35 \cdot 511$ | $1_{(+)}$ | $1_{+}$ | $1_{(+)}$ | $1_{(+)}$ | $1_{+}$ | $2_{-}$ | $2_{[-]}$ | 2 | 2 |
| | $\alpha_{22}$ = | $2 \cdot 880_{(-)}$ | | | | | | | | | $\cdot 873_{[-]}$. |

$9^{h}15^{m}$, Temp. 13·6° R.

Das Instrument wird vorgerollt über Laufrad 340 (Grundstellung der II. Befahrungshälfte) bis Laufrad 520.

| | | (45·0) | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 | 105 | 115 | 125 | 135·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Laufrad 520: | $\alpha_{32}$ = | 39·061₊ | $0_{(-)}$ | $9_{(+)}$ | 9 | $9_{(-)}$ | $8_{(+)}$ | 8 | $8_{[+]}$ | $8_{[+]}$ | 8 |
| | $\alpha_{22}$ = | 2·870 | | | | | | | | | ·$878_{(+)}$. |

Zurückgerollt zur Grundstellung;

| | | (135·0) | 125 | 115 | 105 | 95 | 85 | 75 | 65 | 55 | 45·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Laufrad 340: | $\alpha_{32}$ = | $36·690_{+}$ | $1_{[-]}$ | 1 | 1 | $1_{(+)}$ | $2_{[-]}$ | $2_{(+)}$ | $2_{(+)}$ | $3_{-}$ | 3 |
| | $\alpha_{22}$ = | 2·872 | | | | | | | | | ·$859_{(+)}$. |

$9^h 45^m$, Temp. 13·6° R.

Weiter rückwärts gerollt;

| | | (45·0) | 55 | 65 | 75 | 85 | 95 | 105 | 115 | 125 | 135·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Laufrad 160: | $\alpha_{32}$ = | $34·338_{+}$ | $9_{[-]}$ | 9 | 9 | $9_{+}$ | $0_{(-)}$ | $0_{(-)}$ | $0_{[-]}$ | 0 | 0 |
| | $\alpha_{22}$ = | $2·865_{+}$ | | | | | | | | | ·$872_{-}$. |

Zurückgerollt zur Grundstellung;

| | | (135·0) | 125 | 115 | 105 | 95 | 85 | 75 | 65 | 55 | 45·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Laufrad 340: | $\alpha_{32}$ = | 36·689 | $9_{[-]}$ | $9_{(-)}$ | $9_{(+)}$ | $0_{+}$ | $1_{[-]}$ | $1_{[-]}$ | $1_{[-]}$ | 1 | 1 |
| | $\alpha_{22}$ = | $2·877_{[+]}$ | | | | | | | | | ·$866_{(-)}$. |

$10^h 20^m$, Temp. 13·7° R., Spannung $d'$.

Die Operation wurde dann mit um 0·5 veränderter Anfangsablesung der Rolle $M_2$, wiederholt.

Berechnung. Aus der ersten Befahrungshälfte hat man:

$\alpha'_{22} = +0\cdot009_6,$

| Schienenintervalle | $\Delta\alpha_{32}$ | $-\cos\frac{2n\pi x}{c}$ | $-\Delta\alpha_{32}\cos\frac{2n\pi x}{c}$ |
|---|---|---|---|
| 45—55, 125—135 | $+0\cdot000_5$, 0 | +0·174 | +0·000 09 |
| 55—65, 115—125 | $+0\cdot000_5$, 0 | +0·500 | +0·000 25 |
| 65—75, 105—115 | $+0\cdot001_0$, 0 | +0·766 | +0·000 77 |
| 75—85, 95—105 | $+0\cdot000_3$, $-0\cdot000_3$ | +0·940 | 0 |
| 85—95 | 0 | +1·000 | 0 |
| | | Correction zum $\alpha'_{22}$.... | +0·001 11 |

$\alpha'_{22}$ corrigiert $= +0\cdot0107;$

$\alpha''_{22} = -0\cdot008_7,$

| Schienenintervalle | $\Delta\alpha_{32}$ | $-\Delta\alpha_{32}\cos\frac{2n\pi x}{c}$ |
|---|---|---|
| 135—125, 55—45 | 0, $+0\cdot000_3$ | +0·000 05 |
| 125—115, 65—55 | 0, $+0\cdot000_2$ | +0·000 10 |
| 115—105, 75—65 | 0, $-0\cdot000_2$ | −0·000 15 |
| 105— 95, 85—75 | $-0\cdot000_2$, $+0\cdot000_2$ | 0 |
| 95—85 | 0 | 0 |
| | Correction... | 0·000 00 |

$\alpha''_{22}$ corrigiert $= -0\cdot0087;$

ebenso findet man

| | Correction | |
|---|---|---|
| $\alpha'''_{22} = +0\cdot009_0,$ | +0·001 14, | $\alpha'''_{22}$ corrigiert $= +0\cdot0101;$ |
| $\alpha^{IV}_{22} = -0\cdot006_9,$ | +0·000 53, | $\alpha^{IV}_{22}$ corrigiert $= -0\cdot0064.$ |

Es ergibt sich daher

$$\gamma_2 \cos\Gamma_2 = \frac{+0\cdot0057}{\frac{4}{\pi}\;\frac{36}{\pi}} = +0\cdot000\,39.$$

Auf dieselbe Weise liefert die zweite Befahrungshälfte

| | Correction | |
|---|---|---|
| $\alpha'_{22} = +0\cdot008_3,$ | −0·001 41, | $\alpha'_{22}$ corr. $= +0\cdot0069$ |
| $\alpha''_{22} = -0\cdot012_7,$ | +0·001 59, | $\alpha''_{22}$ corr. $= -0\cdot0111$ |
| $\alpha'''_{22} = +0\cdot006_0,$ | +0·001 00, | $\alpha'''_{22}$ corr. $= +0\cdot0070$ |
| $\alpha^{IV}_{22} = -0\cdot011_5,$ | +0·001 91, | $\alpha^{IV}_{22}$ corr. $= -0\cdot0096$ |

und daraus

$$-\gamma_2 \sin \Gamma_2 = \frac{-0 \cdot 0068}{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{36}{\pi}} = -0 \cdot 000\,47.$$

Die Wiederholung mit umgedrehter Rolle ergab $\gamma_2 \cos \Gamma_2 = +0 \cdot 00033$, $-\gamma_2 \sin \Gamma_2 = -0 \cdot 00049$. Es ist somit, frei vom Einflusse der Rollenexcentricität,

$$\gamma_2 \cos \Gamma_2 = +0 \cdot 000\,36, \qquad \gamma_2 \sin \Gamma_2 = +0 \cdot 000\,48$$
$$(\text{oder:} \quad \gamma_2 = 0 \cdot 0006, \quad \Gamma_2 = +53°)$$

für den Fall: Laufradablesung in der Anfangsstellung $= 250°$.

**35.** Um die beiden Constanten $\varkappa_n \sin K_n$, $\varkappa_n \cos K_n$ zu bestimmen, stelle ich den Fahrstift successive auf die beiden Abscissen

$$x = \frac{1}{4}\frac{c}{n} + \xi', \qquad x = \frac{3}{4}\frac{c}{n} + \xi''',$$

wo $\xi'$, $\xi'''$ Einstellungsfehler bedeuten, ein. In der ersteren Lage lasse ich durch Rollen des Instrumentes den Fahrstift eine Strecke $l'$ in der Richtung der $y$-Axe und darauf, von demselben Punkte aus, eine Strecke $l''$ in der Richtung der $(-y)$-Axe durchlaufen. In der zweiten Lage gehe ich wieder von einem Punkte annähernd derselben Geraden $y =$ Const. aus und lasse den Fahrstift von hier aus eine Strecke $l'''$ in der Richtung der $y$-Axe und eine Strecke $l^{IV}$ in der Richtung der $(-y)$-Axe durchlaufen. Die vier Strecken sind einander annähernd gleich und beträgt jede annähernd ein ungerades Vielfaches von $L\pi$.

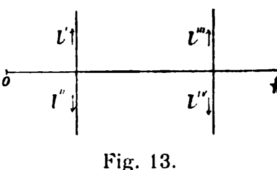


Fig. 13.

Dann rolle ich das Instrument vorwärts um annähernd $\frac{1}{4}$-Umdrehung der Laufräder, und befahre von dieser neuen Grundstellung aus wieder vier ebensolche Strecken.

Die vier Ablesungen $\alpha'_{n1}$, $\alpha''_{n1}$, $\alpha'''_{n1}$, $\alpha^{IV}_{n1}$ über die vier Strecken der ersten Hälfte der Befahrung liefern die Constante $\varkappa_n \sin K_n$, die vier Ablesungen $\alpha'_{n1}$, $\alpha''_{n1}$, $\alpha'''_{n1}$, $\alpha^{IV}_{n1}$ der zweiten Befahrungshälfte liefern die Constante $\varkappa_n \cos K_n$; $K_n$ in beiden bezogen auf

diejenige Anfangs-Drehungsphase der Laufräder, welche bei der Grundstellung der ersten Befahrungshälfte stattfand.

In der That ist, sowohl für die vier Strecken der ersten als für die vier Strecken der zweiten Befahrungshälfte, $\sin\lambda_{n1}$ auf den Strecken $l'$ und $l''$ von $+1$, auf $l'''$ und $l^{\mathrm{IV}}$ von $-1$ nur um Kleines zweiter Ordnung verschieden, und ist ferner

$$\int_{l^{(r)}} F_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s)\,ds = \pm \int_{l^{(r)}} \{\sin(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1}) - \cos(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1})\}\,ds,$$

$$\int_{l^{(r)}} G_{n2}(\mathrm{M}_{n2}, s)\,ds = 0,$$

wo das obere Vorzeichen für den Fall der Strecke $l'$ oder $l^{\mathrm{IV}}$, das untere für $l''$ oder $l'''$ gilt. Die Formel (38') gibt infolge dieser Umstände, für die vier Strecken einer Befahrungshälfte,

$$\int_{l'} d\mu_{n1} = \frac{l'}{5\,\mathrm{mm}} + \frac{\delta_{n1}}{5\,\mathrm{mm}} \int_{l'} \{\sin(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1}) - \cos(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1})\}\,ds +$$
$$+ \frac{\varkappa_n L}{5\,\mathrm{mm}} \left[\sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right)\right]_{l'} + \frac{m_{n1} l'}{5\,\mathrm{mm}} + \frac{[z_n]_{l'}}{M_{n1}},$$

$$\int_{l''} d\mu_{n1} = -\frac{l''}{5\,\mathrm{mm}} - \frac{\delta_{n1}}{5\,\mathrm{mm}} \int_{l''} \{\sin(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1}) - \cos(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1})\}\,ds +$$
$$+ \frac{\varkappa_n L}{5\,\mathrm{mm}} \left[\sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right)\right]_{l''} - \frac{m_{n1} l''}{5\,\mathrm{mm}} + \frac{[z_n]_{l''}}{M_{n1}},$$

$$\int_{l'''} d\mu_{n1} = -\frac{l'''}{5\,\mathrm{mm}} - \frac{\delta_{n1}}{5\,\mathrm{mm}} \int_{l'''} \{\sin(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1}) - \cos(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1})\}\,ds -$$
$$- \frac{\varkappa_n L}{5\,\mathrm{mm}} \left[\sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right)\right]_{l'''} - \frac{m_{n1} l'''}{5\,\mathrm{mm}} + \frac{[z_n]_{l'''}}{M_{n1}},$$

$$\int_{l^{\mathrm{IV}}} d\mu_{n1} = \frac{l^{\mathrm{IV}}}{5\,\mathrm{mm}} + \frac{\delta_{n1}}{5\,\mathrm{mm}} \int_{l^{\mathrm{IV}}} \{\sin(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1}) - \cos(\bar{\mu}_{n1} + \mathrm{M}_{n1})\}\,ds -$$
$$- \frac{\varkappa_n L}{5\,\mathrm{mm}} \left[\sin\left(\frac{y}{L} + \mathrm{K}_n\right)\right]_{l^{\mathrm{IV}}} + \frac{m_{n1} l^{\mathrm{IV}}}{5\,\mathrm{mm}} + \frac{[z_n]_{l^{\mathrm{IV}}}}{M_{n1}}.$$

Die fünften Glieder der rechten Seiten dieser Gleichungen sind von zweiter Ordnung. Zieht man von der Summe der beiden

ersten Gleichungen die der beiden letzten ab, so heben sich außerdem, wegen der angenäherten Gleichheit der vier Strecken, die vierten Glieder bis auf Größen zweiter Ordnung auf; in Bezug auf die zweiten Glieder ist zu bemerken, dass bis auf kleine Größen erster Ordnung richtig

$$\int_{l'''} \{\sin(\bar{\mu}_{n1}+\mathrm{M}_{n1})-\cos(\bar{\mu}_{n1}+\mathrm{M}_{n1})\}\, ds =$$
$$= \int_{l''} \{\sin(\bar{\mu}_{n1}+\mathrm{M}_{n1})-\cos(\bar{\mu}_{n1}+\mathrm{M}_{n1})\}\, ds,$$

$$\int_{l^{\mathrm{IV}}} \{\sin(\bar{\mu}_{n1}+\mathrm{M}_{n1})-\cos(\bar{\mu}_{n1}+\mathrm{M}_{n1})\}\, ds =$$
$$= \int_{l'} \{\sin(\bar{\mu}_{n1}+\mathrm{M}_{n1})-\cos(\bar{\mu}_{n1}+\mathrm{M}_{n1})\}\, ds.$$

Man erhält also durch die genannte Combination der vier Gleichungen, bis auf Glieder zweiter Ordnung genau,

$$\left.\begin{aligned} &\alpha'_{n1}+\alpha''_{n1}-\alpha'''_{n1}-\alpha^{\mathrm{IV}}_{n1}+\frac{l'-l''+l'''-l^{\mathrm{IV}}}{\pi\ \mathrm{cm}} = \\ &= \; 4\frac{L}{\pi\ \mathrm{cm}}\varkappa_n \cos \mathrm{K}_n \cdot \left[\sin\frac{y}{L}\right]_{l'} - 4\frac{L}{\pi\ \mathrm{cm}}\varkappa_n \sin \mathrm{K}_n \cdot \left[\cos\frac{y}{L}\right]_{l'}. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Es ist aber, gemäß der Festsetzung der $x$-Axe, für die Strecke $l'$ der ersten Befahrungshälfte $\left[\sin\frac{y}{L}\right]_{l'} = 0$ und $\left[\cos\frac{y}{L}\right]_{l'} = -2$, dagegen für die Strecke $l'$ der zweiten Befahrungshälfte $\left[\sin\frac{y}{L}\right]_{l'} = -2$ und $\left[\cos\frac{y}{L}\right]_{l'} = 0$; — Werte, deren Ungenauigkeiten klein von erster (beziehungsweise zweiter) Ordnung sind.

Man sieht also, dass aus den vier Ablesungen und vier Strecken der ersten Befahrungshälfte die Constante $\varkappa_n \sin \mathrm{K}_n$, aus den vier Ablesungen und vier Strecken der zweiten Befahrungshälfte die Constante $\varkappa_n \cos \mathrm{K}_n$ erhalten wird, wenn man die in (52) links stehende Summe durch $\frac{8L}{\pi\ \mathrm{cm}}$ dividiert.

Das Folgende ist eine etwas abgekürzte Wiedergabe meines

Beobachtungs-Protokolles von 1899 Mai 28.

Bestimmung der Constanten $\varkappa_3 \sin K_3$, $\varkappa_3 \cos K_3$.
$9^h\,55^m$ a. m., Temperatur 14·6° R., Spannung $c'\sharp$.
$10^h\,15^m$, Temp. 15·3° R.

Schiene 30·0:

| | | | $\alpha_{31}$ |
|---|---|---|---|
| | Laufradablesung | 250° ...... | 12·385$_{[-]}$ |
| Vorwärts, bis zu | » | 430 ...... | 10·022 |
| Zurück zu | » | 250 ...... | 12·385$_{[-]}$ |
| Rückwärts, bis zu | » | 70 ...... | 14·743$_{+}$ |
| Zurück zu | » | 250 ...... | 12·385 |

$10^h\,30^m$, Temp. 15·4° R.

Schiene 90·0:

| | | $\alpha_{31}$ |
|---|---|---|
| Laufrad | 250............. | 12·391 |
| » | 430............. | 14·754$_{+}$ |
| » | 250............. | 12·391$_{(+)}$ |
| » | 70............. | 10·035 |
| » | 250............. | 12·392 |

$10^h\,45^m$, Temp. 15·5° R.

Instrument vorgerollt um $\frac{1}{4}$-Umdrehung des Laufrades. Fahrstift zurück bis Schienenablesung 30·0.

Schiene 30·0:

| | | $\alpha_{31}$ |
|---|---|---|
| Laufrad | 340............. | 11·196$_{[+]}$ |
| » | 520............. | 8·823$_{(+)}$ |
| » | 340............. | 11·197 |
| » | 160............. | 13·544$_{(-)}$ |
| » | 340............. | 11·196$_{+}$ |

$11^h$, Temp. 15·6° R.

Schiene 90·0:

| | | $\alpha_{31}$ |
|---|---|---|
| Laufrad | 340............. | 11·205$_{-}$ |
| » | 520............. | 13·580$_{(+)}$ |
| » | 340............. | 11·205$_{+}$ |
| » | 160............. | 8·863 |
| » | 340............. | 11·205$_{(-)}$ |

$11^h\,15^m$, Temp. 15·7° R.

Instrument wird aufgestellt längs der Linie der bei »Schiene 30·0« gemachten Marken. Es finden sich folgende Schienenablesungen:

| an der bei | | gemachten Marke | |
|---|---|---|---|
| | »Laufrad 520« | | ......... 172·12 |
| | »Laufrad 430« | | ......... 209·65 |
| | »Laufrad 340« | | ......... $246 \cdot 84_{+}$ |
| | »Laufrad 250« | | ......... 283·98 |
| | »Laufrad 160« | | ......... $320 \cdot 54_{+}$ |
| | »Laufrad 70« | | ......... 358·17 |

$11^h\ 50^m$, Temp. 15·9° R.

Instrument vorgerollt bis zu der Linie der bei »Schiene 90·0« gemachten Marken. Es finden sich die Schienenablesungen:

| an der bei | | gemachten Marke | |
|---|---|---|---|
| | »Laufrad 520« | | ......... 172·38 |
| | »Laufrad 430« | | ......... 209·85 |
| | »Laufrad 340« | | ......... 247·03 |
| | »Laufrad 250« | | ......... $284 \cdot 13_{+}$ |
| | »Laufrad 160« | | ......... 320·68 |
| | »Laufrad 70« | | ......... 358·33 |

$12^h\ 20^m$, Temperatur 15·8° R., Spannung $c'\sharp$.

B e r e c h n u n g. Die erste Hälfte der Befahrung gibt folgende Ablesungen (Mittelwerte):

$$\alpha'_{31} = -2 \cdot 362_8, \quad \alpha''_{31} = +2 \cdot 358_6, \quad \alpha'''_{31} = +2 \cdot 363_4, \quad \alpha^{\text{IV}}_{31} = -2 \cdot 356_6,$$

$$\alpha'_{31} + \alpha''_{31} - \alpha'''_{31} - \alpha^{\text{IV}}_{31} = -0 \cdot 011_0$$

wobei die Strecken waren

$$l' = 74 \cdot 33 \text{ mm}, \quad l'' = 74 \cdot 19 \text{ mm}, \quad l''' = 74 \cdot 28_5 \text{ mm}, \quad l^{\text{IV}} = 74 \cdot 19_5 \text{ mm}.$$

$$l' - l'' + l''' - l^{\text{IV}} = +0 \cdot 23_0 \text{ mm};$$

$$\frac{1}{\pi \text{ cm}} (l' - l'' + l''' - l^{\text{IV}}) = +0 \cdot 0073.$$

Die zweite Befahrungshälfte gibt

$$\begin{array}{l|l} \alpha'_{31} = -2\cdot 373_3, & \\ \alpha''_{31} = +2\cdot 347_1, & \alpha'_{31}+\alpha''_{31}-\alpha'''_{31}-\alpha^{\text{iv}}_{31} = -0\cdot 059_4, \\ \alpha'''_{31} = +2\cdot 375_3, & \\ \alpha^{\text{iv}}_{31} = -2\cdot 342_1, & \end{array}$$

über die Strecken

$$\begin{array}{l|l} l' = 74\cdot 72_5 \text{ mm}, & l'-l''+l'''-l^{\text{iv}} = +2\cdot 02_5 \text{ mm}; \\ l'' = 73\cdot 70 \text{ mm}, & \\ l''' = 74\cdot 65 \text{ mm}, & \frac{1}{\pi \text{ cm}}(l'-l''+l'''-l^{\text{iv}}) = +0\cdot 0645. \\ l^{\text{iv}} = 73\cdot 65 \text{ mm}. & \end{array}$$

Es ergibt sich also

$$\varkappa_3 \sin \mathrm{K}_3 = \frac{-0\cdot 0037}{8L/\pi \text{cm}} = -0\cdot 00062,$$

$$\varkappa_3 \cos \mathrm{K}_3 = \frac{+0\cdot 0051}{8L/\pi \text{cm}} = +0\cdot 00085,$$

(oder: $\varkappa_3 = 0\cdot 0011$, $\mathrm{K}_3 = -37°$).

**36.** Zur Bestimmung der Constanten $\dot{\gamma}_n \sin \mathrm{K}_n$, $\dot{\gamma}_n \cos \mathrm{K}_n$ dient dasselbe Verfahren, wie es in Art. 34 beschrieben wurde, nur wird anstatt der Rolle $M_{n2}$ die Rolle $M_{n1}$ abgelesen und ist die Wiederholung mit umgedrehter Rolle nicht erforderlich.

Die vier Ablesungen $\alpha'_{n1}$, $\alpha''_{n1}$, $\alpha'''_{n1}$, $\alpha^{\text{iv}}_{n1}$ der ersten Hälfte der Befahrung liefern dann die Constante $\dot{\gamma}_n \sin \mathrm{K}_n$, die in der zweiten Befahrungshälfte gemachten Ablesungen $\alpha'_{n1}$, $\alpha''_{n1}$, $\alpha'''_{n1}$, $\alpha^{\text{iv}}_{n1}$ die Constante $\dot{\gamma}_n \cos \mathrm{K}_n$; $\mathrm{K}_n$ in beiden bezogen auf diejenige Anfangs-Drehungsphase der Laufräder, welche bei der Grundstellung der ersten Befahrungshälfte stattfand. Die Kenntnis der genauen Längen der einzelnen Befahrungsstücke ist dabei nicht erforderlich.

In der That findet man durch Anwendung der Formel (38') auf die Strecke $l^{(r)}$ der ersten oder der zweiten Befahrungshälfte, analog wie in 34.,

$$\int_{l^{(r)}} d\mu_{n1} = \frac{1}{5\,\mathrm{mm}} \sum_{l^{(r)}} (\int \sin \lambda_{n1} dy) +$$
$$+ \frac{n\gamma_n}{5\,\mathrm{mm}} \cos\left(\frac{y^{(r)}}{L} + \Gamma_n\right) \int_{l^{(r)}} \sin \frac{2n\pi x}{c} dx +$$
$$+ \frac{\delta_{n1}}{5\,\mathrm{mm}} \int_{l^{(r)}} F_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s) ds + \frac{\delta_{n2}}{5\,\mathrm{mm}} \int_{l^{(r)}} G_{n2}(\mathrm{M}_{n2}, s) ds -$$
$$- \frac{n\gamma_n}{5\,\mathrm{mm}} \sin\left(\frac{y^{(r)}}{L} + \mathrm{K}_n\right) \int_{l^{(r)}} \cos \frac{2n\pi x}{c} dx + [\text{cycl. Gl.}];$$

das zweite Glied rechts ist von zweiter Ordnung; ferner ist hier

$$\int_{l^{(r)}} F_{n1}(\mathrm{M}_{n1}, s) ds = 0,$$

$$\int_{l^{(r)}} G_{n2}(\mathrm{M}_{n2}, s) ds =$$
$$= \pm \frac{n\pi}{36} \sin(\bar{\mu}_{n2} + \mathrm{M}_{n2}) \int_{l^{(r)}} \left(\frac{K_n}{K_n + C_n} \cos^2 \frac{2n\pi x}{c} - 1\right) ds,$$

wo das obere Vorzeichen für den Fall der Strecke $l'$ oder $l'''$, das untere für $l''$ oder $l^{\mathrm{IV}}$ gilt, und $\bar{\mu}_{n2}$ offenbar innerhalb der ganzen Befahrungshälfte constant bleibt. Wenn man die vorhergehende Formel für $\int_{l^{(r)}} d\mu_{n1}$ auf die vier Strecken $l'$, $l''$, $l'''$, $l^{\mathrm{IV}}$ anwendet und die vier Gleichungen summiert, so heben sich daher die der Rollenexcentricität entsprechenden Glieder derselben bis auf kleine Größen zweiter Ordnung auf; ebenso heben sich die cyclischen Glieder auf zwischen je zwei einander entgegengerichteten Strecken. Man erhält

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\alpha'_{n1} + \sum_{l'} \left(\Delta\alpha_{k2} . \sin \frac{2n\pi x}{c}\right)\right] + \\
&+ \left[\alpha''_{n1} + \sum_{l''} \left(\Delta\alpha_{k2} . \sin \frac{2n\pi x}{c}\right)\right] + \\
&+ \left[\alpha'''_{n1} + \sum_{l'''} \left(\Delta\alpha_{k2} . \sin \frac{2n\pi x}{c}\right)\right] + \\
&+ \left[\alpha^{\mathrm{IV}}_{n1} + \sum_{l^{\mathrm{IV}}} \left(\Delta\alpha_{k2} . \sin \frac{2n\pi x}{c}\right)\right] = \\
&= \frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi\,\mathrm{cm}} \gamma_n \cos \mathrm{K}_n \sin \frac{y''}{L} + \frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi\,\mathrm{cm}} \gamma_n \sin \mathrm{K}_n \cos \frac{y''}{L} .
\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Man sieht, dass aus der ersten Befahrungshälfte $\dot{\gamma}_n \sin K_n$, aus der zweiten $\dot{\gamma}_n \cos K_n$ dadurch erhalten wird, dass man den Wert des in (53) links stehenden Ausdruckes durch

$$\frac{4}{\pi} \frac{c}{\pi \text{ cm}}$$

dividiert.

Selbstverständlich kann das Verfahren auf eine Befahrungshälfte beschränkt werden, wenn $K_n$ bereits bekannt und bloß $\dot{\gamma}_n$ gesucht wird. Man bestimmt dann z. B. nur die Constante $\dot{\gamma}_n \cos K_n$, während man dabei das Instrument in derjenigen Anfangs-Drehungsphase der Laufräder aufgestellt hat, auf welche bezogen $K_n = 0°$ ist.

**37.** Zur Bestimmung der Constanten $\varepsilon_n \sin E_n$, $\varepsilon_n \cos E_n$ sind für verschiedene Integrierapparate verschiedene Methoden zweckmäßig.

*a)* Ist der $n^{\text{te}}$ Integrierapparat einer, welchen man unmittelbar neben (d. h. vor oder hinter) den Integrierapparat von zweimal so hoher Nummer einschalten kann, dann ist es möglich, seine Excentricitätsconstanten nach einer Methode zu bestimmen, welche weder präcise Schieneneinstellungen, noch die Kenntnis anderer Constanten des Instrumentes voraussetzt. Jener neben dem zu untersuchenden eingeschaltete Integrierapparat dient dann nämlich zur Controle der Drehungen, welche der zu untersuchende Integrierapparat zwischen den verschiedenen Schieneneinstellungen hätte bei Abwesenheit seines Excentricitätsfehlers erleiden sollen.

Ist allgemein $n$ die Nummer des zu untersuchenden, $k$ die des Control-Apparates, so hat man nach den Relationen (34) (z. B. der zweiten):

$$\left.\begin{aligned} n\varepsilon_n\left[\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} - \Pi_n^k\right) + \sin \Pi_n^k\right] = \\ = -(\lambda_n - \Lambda_n) + \frac{n}{k}(\lambda_k - \Lambda_k) - \left(\frac{h_k}{k} - \frac{h_n}{n}\right)\frac{nx}{c} + \\ + n\varepsilon_k\left[\sin\left(\frac{-2k\pi x}{c} - \Pi_k^n\right) + \sin \Pi_k^n\right]. \end{aligned}\right\} \quad (34^{\text{bis}})$$

Für $k = 2n$ hat man

$$\left.\begin{aligned} &n\varepsilon_n\left[\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c}-\Pi_n^{2n}\right)+\sin\Pi_n^{2n}\right]= \\ &=-(\lambda_n-\Lambda_n)+\frac{1}{2}(\lambda_{2n}-\Lambda_{2n})-\left(\frac{h_{2n}}{2n}-\frac{h_n}{n}\right)\frac{nx}{c}+ \\ &\qquad+n\varepsilon_{2n}\left[\sin\left(\frac{-4n\pi x}{c}-\Pi_{2n}^n\right)+\sin\Pi_{2n}^n\right]. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Man nehme nun an, man hätte den Fahrstift successive in die Lagen $x = x' = 0 + \xi'$, $x = x''' = \frac{1}{2}\frac{c}{n} + \xi'''$, $x = x^{\text{v}} = \frac{c}{n} + \xi^{\text{v}}$ gebracht, wobei $\xi'$, $\xi'''$, $\xi^{\text{v}}$ unbekannte Einstellungsfehler sind und die Einstellungen selbst immer mit nach rechts gerichteter Bewegung bewirkt wurden, — und es seien die Drehungen, welche die beiden Integrierapparate zwischen je zwei Lagen des Fahrstiftes thatsächlich vollzogen haben, auf irgendeine Weise (worauf ich sofort zurückkomme) genau festgestellt worden. Wendet man die Formel (54) auf diese drei Lagen an, so hat man

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= -(\lambda_n'-\Lambda_n)+\frac{1}{2}(\lambda_{2n}'-\Lambda_{2n}) \\ 2n\varepsilon_n\sin\Pi_n^{2n} &= -(\lambda_n'''-\Lambda_n)+\frac{1}{2}(\lambda_{2n}'''-\Lambda_{2n})-\frac{1}{2}\left(\frac{h_{2n}}{2n}-\frac{h_n}{n}\right) \\ 0 &= -(\lambda_n^{\text{v}}-\Lambda_n)+\frac{1}{2}(\lambda_{2n}^{\text{v}}-\Lambda_{2n})-\left(\frac{h_{2n}}{2n}-\frac{h_n}{n}\right), \end{aligned}\right.$$

oder, wenn man von der mittleren Gleichung einmal die erste, das andere Mal die letzte abzieht, und beide Differenzen summiert,

$$4n\varepsilon_n\sin\Pi_n^{2n} = \\ = -\left[(\Delta\lambda_n)_{\text{I}}^{\text{III}}-\tfrac{1}{2}(\Delta\lambda_{2n})_{\text{I}}^{\text{III}}\right]+\left[(\Delta\lambda_n)_{\text{III}}^{\text{V}}-\tfrac{1}{2}(\Delta\lambda_{2n})_{\text{III}}^{\text{V}}\right]; \tag{55}$$

die Abkürzung $(\Delta\lambda_n)_{\text{I}}^{\text{III}}$ steht anstatt $\lambda_{n1}'''-\lambda_{n1}' \equiv \lambda_{n2}'''-\lambda_{n2}'$, stellt also die Drehung des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates zwischen der Einstellung $x'$ und $x'''$ dar, und Analoges gilt von den übrigen Symbolen rechts. Ähnlich hat man, für die beiden Abscissenwerte $x = x'' = \frac{1}{4}\frac{c}{n} + \xi''$, $x = x^{\text{IV}} = \frac{3}{4}\frac{c}{n} + \xi^{\text{IV}}$, die Gleichung

$$2n\varepsilon_n \cos \Pi_n^{2n} = -\left[(\Delta\lambda_n)_{\rm II}^{\rm IV} - \tfrac{1}{2}(\Delta\lambda_{2n})_{\rm II}^{\rm IV}\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{h_{2n}}{2n} - \frac{h_n}{n}\right)$$

oder

$$2n\varepsilon_n \cos \Pi_n^{2n} =$$

$$= -\left[(\Delta\lambda_n)_{\rm II}^{\rm IV} - \tfrac{1}{2}(\Delta\lambda_{2n})_{\rm II}^{\rm IV}\right] + \frac{1}{2}\left[(\Delta\lambda_n)_{\rm I}^{\rm V} - \tfrac{1}{2}(\Delta\lambda_{2n})_{\rm I}^{\rm V}\right]. \quad (55')$$

Die Formeln (55) und (55′) lassen, wenn die Veränderungen der geographischen Längen bestimmt sind, die Constanten $\varepsilon_n, \Pi_n^{2n}$ berechnen; $E_n$ erhält man, indem man zu der Constante $\Pi_n^{2n}$ die mit genügender Genauigkeit bekannte Differenz $\Phi_n' - \Phi_n^{2n}$ addiert, wo $\Phi_n'$, wie in **18.**, die Anomalie desjenigen Punktes bezeichnet, welcher unter normalen Umständen der Ankunftspunkt des Drahtes an der Scheibe $H_n$ ist, $\Phi_n^{2n}$ aber die Anomalie des Punktes, in welchem bei der Operation das zwischen den Scheiben $H_n, H_{2n}$ liegende Drahtstück die untersuchte Scheibe berührte.

Die Bestimmung dieser Veränderungen der geographischen Längen ist im vorliegenden Falle dadurch vereinfacht, dass die Lagen des Integrierapparates, welche die festzustellende Drehung desselben begrenzen, solche sind, in welchen eine — und zwar in beiden dieselbe — Messrolle nahezu auf der $X$-Axe liegt. Wenn nämlich in einer Lage, in welcher die Messrolle $M_{\nu i}$ eines Integrierapparates nahezu auf der $X$-Axe steht, eine zur $y$-Axe parallele, von der Anfangsstellung des Instrumentes ausgehende Strecke $l$ befahren wird, deren Länge annähernd gleich einem Vielfachen von $2L\pi$ ist, dann ist, nach den Formeln (38′) und (22′), bis auf Glieder zweiter Ordnung genau,

$$\sin\lambda_{\nu i} = -\frac{(\alpha_{\nu i})_l}{l/\pi\,\mathrm{cm}} + \frac{\delta_{\nu j}}{l}\,\frac{M_{\nu j}}{K_\nu}\sin\bar{\lambda}_{\nu j}\int_l \sin\left(\frac{y\sin\bar{\lambda}_{\nu j}}{5\,\mathrm{mm}} + \mathrm{M}_{\nu j}\right)dy;$$

daher, je nachdem die Rolle $M_{\nu i}$ nahezu auf der $(+X)$-Axe oder der $(-X)$-Axe steht,

$$\text{entweder:}\quad \lambda_{\nu i} = \frac{-(\alpha_{\nu i})_l}{l/\pi\,\mathrm{cm}} - \frac{\delta_{\nu j}}{l/5\,\mathrm{mm}}\,\frac{M_{\nu j}}{K_\nu}\left[\cos(\bar{\mu}_{\nu j} + \mathrm{M}_{\nu j})\right]_l,$$

$$\text{oder:}\quad \pi - \lambda_{\nu i} = \frac{-(\alpha_{\nu i})_l}{l/\pi\,\mathrm{cm}} - \frac{\delta_{\nu j}}{l/5\,\mathrm{mm}}\,\frac{M_{\nu j}}{K_\nu}\left[\cos(\bar{\mu}_{\nu j} + \mathrm{M}_{\nu j})\right]_l,$$

— beide Werte richtig bis auf kleine Größen zweiter Ordnung (und Vielfache von $2\pi$). Auf diese Weise kann $\lambda_{\nu i}$ unabhängig von der Kenntnis von Instrumentalconstanten gemessen werden, wenn die Länge $l$ annähernd genau bekannt ist. Der Coefficient von $\delta_{\nu j}$ kann durch die Wahl einer genügend großen, oder einer solchen Länge $l$, dass auf derselben die Rolle $M_{\nu j}$ nicht viel mehr und nicht viel weniger als eine ganze Anzahl Revolutionen vollzieht, so klein gemacht werden, dass das Glied

$$\frac{\delta_{\nu j}}{l/_{5\,\mathrm{mm}}}\,\frac{M_{\nu j}}{K_\nu}\left[\cos\left(\bar{\mu}_{\nu j}+\mathrm{M}_{\nu j}\right)\right]_l$$

praktisch von zweiter Ordnung ist.[1]

Dieses vortheilhafteste Verfahren zur Bestimmung der Excentricitätsconstanten $\varepsilon_n$, $\mathrm{E}_n$ ist bei meinem Instrument leider nur auf einen Integrierapparat, nämlich den ersten, anwendbar; denn für keinen anderen lässt sich die unmittelbare Anschaltung an den $2n^{\text{ten}}$ Integrierapparat durchführen. — Das Folgende ist mein

Beobachtungsprotokoll von 1899 August 2.

$9^h 35^m$ a. m., Temperatur 12·9° R., Spannung $c'$♯.
$10^h 5^m$, Temp. 13·6° R.

Schiene 0:

| | | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{11}$ |
|---|---|---|---|
| Laufrad | 70 ..... | 2·227₋ | 14·367$_{[-]}$ |
| » | 70+2×360..... | ·209$_{[-]}$ | ·380 |
| » | 70 ..... | ·231 | ·366$_{(+)}$ |
| » | 70+2×360..... | ·211$_{(-)}$ | ·378$_{(+)}$ |
| » | 70 ..... | ·232$_{(-)}$ | ·365$_{+}$ |
| » | 70+2×360..... | ·212 | ·378₋ |
| » | 70 ..... | ·232 | ·365$_{(+)}$ |

$10^h 40^m$, Temp. 13·7° R.

[1] Bei den unten wiedergegebenen Beobachtungen von 1899 August 2 war die Vorsorge vergessen worden, den Coefficient von $\delta_{\nu j}$ klein zu machen; die Drehung der Rollen $M_{\nu j}$ war in der That nicht viel verschieden von einer ungeraden Anzahl Halbrevolutionen. Indessen kann dadurch das Resultat nicht wesentlich beeinflusst worden sein; denn selbst unter Annahme des großen Wertes $\frac{1}{100}$ für $\delta_{\nu j}$ und des ungünstigsten Wertes (0) für $\mathrm{M}_{\nu j}$ würde der Fehler der gemessenen geographischen Länge nur 0·00007 (circa 15″) betragen.

Schiene 90:

| | | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{12}$ |
|---|---|---|---|
| Laufrad | 70 ..... | $\cdot 237_{[-]}$ | $31 \cdot 063_{+}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 285_{[+]}$ | $\cdot 083_{[-]}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 237_{(-)}$ | $\cdot 064_{+}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 283_{[-]}$ | $\cdot 082_{(-)}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 236_{(-)}$ | $\cdot 064_{+}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 283_{[-]}$ | $\cdot 082_{-}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 234_{[+]}$ | $\cdot 065_{(-)}$ |

$11^h 15^m$, Temp. 13·7° R.

Schiene 180:

| | | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{11}$ |
|---|---|---|---|
| Laufrad | 70 ..... | $\cdot 244$ | $14 \cdot 382_{[+]}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 209_{(-)}$ | $\cdot 376$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 246_{-}$ | $\cdot 384_{-}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 211_{(-)}$ | $\cdot 379_{[-]}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 246_{[+]}$ | $\cdot 384_{[-]}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 210_{+}$ | $\cdot 382$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 247$ | $\cdot 389_{[+]}$ |

$11^h 45^m$, Temp. 13·9° R.

Schiene 270:

| | | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{12}$ |
|---|---|---|---|
| Laufrad | 70 ..... | $\cdot 265_{-}$ | $31 \cdot 047_{[+]}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 305_{(-)}$ | $\cdot 035_{[+]}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 268_{+}$ | $\cdot 048$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 304_{+}$ | $\cdot 037_{[+]}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 268_{+}$ | $\cdot 048_{(+)}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 303_{-}$ | $\cdot 037_{(+)}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 267_{+}$ | $\cdot 049_{(+)}$ |

$12^h 20^m$, Temp. 13·9° R.

Schiene 360:

| | | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{11}$ |
|---|---|---|---|
| Laufrad | 70 ..... | $\cdot 278_{+}$ | $14 \cdot 403_{[-]}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 240_{(+)}$ | $\cdot 393_{(+)}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 278_{(-)}$ | $\cdot 403_{+}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 238_{[-]}$ | $\cdot 393_{[+]}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 276_{(+)}$ | $\cdot 401_{+}$ |
| » | 70+2×360..... | $\cdot 234_{-}$ | $\cdot 391_{(+)}$ |
| » | 70 ..... | $\cdot 273_{[+]}$ | $\cdot 399_{-}$ |

$1^h 0^m$, Temp. 13·8° R., Spannung $c'$.

Berechnung. Aus den Ablesungen bei »Schiene 0« hat man im Mittel $\alpha'_{21} = 2\cdot210_3 - 2\cdot230_3 = -0\cdot0200$ und $\alpha'_{11} = 14\cdot378_6 - 14\cdot366_0 = +0\cdot0126$, daher

$$\lambda'_{21} = \pi + \frac{-0\cdot0200}{l/\pi\,\mathrm{cm}} \qquad \lambda'_{11} = \pi + \frac{+0\cdot0126}{l/\pi\,\mathrm{cm}};$$

in analoger Weise findet man:

$$\lambda''_{21} = \quad \frac{+0\cdot0477}{l/\pi\,\mathrm{cm}} \qquad \lambda''_{12} = \pi + \frac{+0\cdot0177}{l/\pi\,\mathrm{cm}}$$

$$\lambda'''_{21} = -\pi + \frac{-0\cdot0357}{l/\pi\,\mathrm{cm}} \qquad \lambda'''_{11} = \quad \frac{-0\cdot0058}{l/\pi\,\mathrm{cm}}$$

$$\lambda^{\mathrm{IV}}_{21} = -2\pi - \frac{+0\cdot0367}{l/\pi\,\mathrm{cm}} \qquad \lambda^{\mathrm{IV}}_{12} = \quad \frac{-0\cdot0116}{l/\pi\,\mathrm{cm}}$$

$$\lambda^{\mathrm{V}}_{21} = -3\pi + \frac{-0\cdot0392}{l/\pi\,\mathrm{cm}} \qquad \lambda^{\mathrm{V}}_{11} = -\pi + \frac{-0\cdot0090}{l/\pi\,\mathrm{cm}}.$$

Man hat also

$$(\Delta\lambda_1)^{\mathrm{III}}_{\mathrm{I}} = -\ \pi - \frac{0\cdot0068}{l/\pi\,\mathrm{cm}}, \qquad (\Delta\lambda_1)^{\mathrm{V}}_{\mathrm{III}} = -\ \pi - \frac{0\cdot0148}{l/\pi\,\mathrm{cm}},$$

$$(\Delta\lambda_2)^{\mathrm{III}}_{\mathrm{I}} = -2\pi - \frac{0\cdot0157}{l/\pi\,\mathrm{cm}}, \qquad (\Delta\lambda_2)^{\mathrm{V}}_{\mathrm{III}} = -2\pi - \frac{0\cdot0035}{l/\pi\,\mathrm{cm}},$$

$$(\Delta\lambda_1)^{\mathrm{IV}}_{\mathrm{II}} = -\ \pi - \frac{0\cdot0061}{l/\pi\,\mathrm{cm}},$$

$$(\Delta\lambda_2)^{\mathrm{IV}}_{\mathrm{II}} = -2\pi - \frac{0\cdot0110}{l/\pi\,\mathrm{cm}}.$$

Daraus ergibt sich nach den Bestimmungsformeln (55) und (55′)

$$\varepsilon_1 \sin \Pi^2_1 = \frac{1}{4}\,\frac{-0\cdot0141}{l/\pi\,\mathrm{cm}} = -0\cdot00037,$$

$$\varepsilon_1 \cos \Pi^2_1 = \frac{1}{2}\,\frac{+0\cdot0056}{l/\pi\,\mathrm{cm}} = +0\cdot00030.$$

Da der Verlauf des Drahtes der normale war, so ist die Größe $\Pi^2_1$ zugleich die Instrumentalconstante $\mathbf{E}_1$ selbst; die

Excentricitätsconstanten des ersten Integrierapparates sind also endgiltig

$$\varepsilon_1 \sin E_1 = -0\cdot0004, \qquad \varepsilon_1 \cos E_1 = +0\cdot0003.$$

*b)* Ebenfalls keine präcisen Schieneneinstellungen, wohl aber die Kenntnis einer Instrumentalconstante ist erforderlich bei dem nachstehend geschilderten Verfahren, welches zur Bestimmung der Excentricitätsconstanten $\varepsilon_n \sin E_n$, $\varepsilon_n \cos E_n$ eines Integrierapparates dient, der sich an einen mit halb so hoher Nummer versehenen anschalten lässt.

In diesem Falle ist $k = \frac{1}{2} n$, und die Relation ($34^{bis}$) gibt

$$n\varepsilon_n\left[\sin\left(\frac{-2n\pi x}{c} - \Pi_n^{\frac{1}{2}n}\right) + \sin \Pi_n^{\frac{1}{2}n}\right] =$$

$$= -(\lambda_n - \Lambda_n) + 2(\lambda_{\frac{1}{2}n} - \Lambda_{\frac{1}{2}n}) - \left(\frac{2h_{\frac{1}{2}n} - h_n}{n}\right)\frac{nx}{c} +$$

$$+ n\varepsilon_{\frac{1}{2}n}\left[\sin\left(\frac{-n\pi x}{c} - \Pi_{\frac{1}{2}n}^n\right) + \sin \Pi_{\frac{1}{2}n}^n\right]. \quad (56)$$

Wendet man diese Formel an auf die Abscissen $x = x' = = 0 + \xi'$, $x = x''' = \frac{1}{2}\frac{c}{n} + \xi'''$, $x = x^{\mathrm{v}} = \frac{c}{n} + \xi^{\mathrm{v}}$, $x = x^{\mathrm{vii}} = = \frac{3}{2}\frac{c}{n} + \xi^{\mathrm{vii}}$, $x = x^{\mathrm{ix}} = 2\frac{c}{n} + \xi^{\mathrm{ix}}$, und summiert die so erhaltenen fünf Gleichungen, nachdem man sie der Reihe nach mit —1, 2, —2, 2, —1 multipliciert hat, so findet man

$$8n\varepsilon_n \sin \Pi_n^{\frac{1}{2}n} = -\left[(\Delta\lambda_n)_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}\right] +$$

$$+ \left[(\Delta\lambda_n)_{\mathrm{III}}^{\mathrm{V}} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{\mathrm{III}}^{\mathrm{V}}\right] - \left[(\Delta\lambda_n)_{\mathrm{V}}^{\mathrm{VII}} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{\mathrm{V}}^{\mathrm{VII}}\right] +$$

$$+ \left[(\Delta\lambda_n)_{\mathrm{VII}}^{\mathrm{IX}} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{\mathrm{VII}}^{\mathrm{IX}}\right]. \quad (57)$$

Wendet man die Formel (56) an auf die Abscissen $x = x'' = = \frac{1}{4}\frac{c}{n} + \xi''$, $x = x^{\mathrm{iv}} = \frac{3}{4}\frac{c}{n} + \xi^{\mathrm{iv}}$, $x = x^{\mathrm{vi}} = \frac{5}{4}\frac{c}{n} + \xi^{\mathrm{vi}}$, $x = x^{\mathrm{viii}} = \frac{7}{4}\frac{c}{n} + \xi^{\mathrm{viii}}$, und summiert die so erhaltenen vier Gleichungen, nachdem man sie der Reihe nach mit —1, 1, —1, 1 multipliciert hat, so findet man

$$4n\varepsilon_n \cos \mathrm{II}_{\frac{n}{2}}^{\frac{1}{2}n} =$$
$$= -\left[(\Delta\lambda_n)_{\mathrm{II}}^{\mathrm{IV}} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{\mathrm{II}}^{\mathrm{IV}}\right] - \left[(\Delta\lambda_n)_{\mathrm{VI}}^{\mathrm{VIII}} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{\mathrm{VI}}^{\mathrm{VIII}}\right] - \left(\frac{2h_{\frac{1}{2}n} - h_n}{n}\right)$$

oder

$$4n\varepsilon_n \cos \mathrm{II}_{\frac{n}{2}}^{\frac{1}{2}n} =$$
$$= -\left[(\Delta\lambda_n)_{\mathrm{II}}^{\mathrm{IV}} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{\mathrm{II}}^{\mathrm{IV}}\right] - \left[(\Delta\lambda_n)_{\mathrm{VI}}^{\mathrm{VIII}} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{\mathrm{VI}}^{\mathrm{VIII}}\right] -$$
$$- \frac{1}{2}\left[(\Delta\lambda_n)_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IX}} - 2(\Delta\lambda_{\frac{1}{2}n})_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IX}}\right]. \qquad (57')$$

Die in (57) und (57′) auftretenden Drehungen des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates sind durch je zwei derartige Lagen begrenzt, dass in jeder der beiden Lagen eine, und zwar in beiden dieselbe, Messrolle dieses Apparates nahezu auf der $X$-Axe liegt; sie können daher, so, wie im vorigen Falle, durch Befahrungen zur $y$-Axe paralleler Strecken ohne Kenntnis von Instrumentalconstanten bestimmt werden. Die damit gleichzeitigen Drehungen des $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Integrierapparates dagegen sind derartige, dass in jeder der beiden die Drehung begrenzenden Lagen eine, aber nicht in beiden dieselbe, Messrolle dieses Apparates nahezu auf der $X$-Axe liegt. Hat man daher in jeder der beiden Lagen des Control-Apparates die geographische Länge der nahezu auf der $X$-Axe liegenden Messrolle ermittelt, so muss man, um aus der Differenz der beiden Werte die Drehung des Apparates abzuleiten, den constanten Längenunterschied $90^\circ + \sigma_{\frac{n}{2},2} - \sigma_{\frac{n}{2},1}$ seiner Messrollen kennen.

*c)* Auch für einen Integrierapparat $H_n$, welcher sich weder an den $2n^{\text{ten}}$, noch an den $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ unmittelbar (oder vermittelt durch Scheiben, die unter einer geringen Differenz der beiden Grenzanomalien des Drahtes umwickelt sind) anschließen lässt, kann man noch zur Bestimmung der Excentricitätsconstanten einen Control-Apparat $H_k$ verwenden; in diesem allgemeinsten Falle jedoch erfordert die Bestimmung die Kenntnis dreier Constanten des Control-Apparates.

Man gibt dem Fahrstift successive die Abscissen $x = x' = 0 + \xi'$, $x = x'' = \frac{1}{4}\frac{c}{n} + \xi''$, $x = x''' = \frac{1}{2}\frac{c}{n} + \xi'''$, $x = x^{\text{iv}} = \frac{3}{4}\frac{c}{n} + \xi^{\text{iv}}, \ldots$; wendet man die Gleichung ($34^{\text{bis}}$) an auf die genügend weit fortgesetzte Abscissenfolge $x', x''', x^{\text{v}}, \ldots$ einerseits, $x'', x^{\text{iv}}, \ldots$ anderseits, so erhält man wieder zwei Gleichungensysteme, aus denen sich zwei Bestimmungsformeln von ähnlicher Form wie (57) und (57′) ergeben. Die darin vorkommenden Drehungen des Control-Apparates werden jedoch im allgemeinen durch Lagen begrenzt sein, in welchen keine seiner Messrollen nahezu auf der $X$-Axe liegt. Um hier bei jeder Abscisseneinstellung $x^{(r)}$ die Lage des Rollenpaares des Control-Apparates kennen zu lernen, liest man am besten, bei den Befahrungen der Strecken $l^{(r)}$, seine beiden Rollen ab und ermittelt daraus $\lambda_{k1}$ mittels der nachstehend abgeleiteten Formel.

Es ist allgemein, wenn ein Winkel $\lambda$ durch die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \sin\lambda = a + \xi \\ \cos\lambda = b + \eta, \end{cases} \qquad \xi, \eta \text{ von der ersten Ordnung klein,}$$

definiert ist, dieser Winkel bis auf Glieder zweiter Ordnung genau ausgedrückt durch

$$\lambda = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} + \xi\cos\lambda - \eta\sin\lambda. \qquad (*)$$

Schreibt man die Gleichung (38′) für den $k^{\text{ten}}$ Apparat, integriert sie über $l^{(r)}$, welches annähernd gleich einem Vielfachen von $2L\pi$ sein soll, setzt darin successive $i = 1$, $i = 2$, setzt schließlich für $\lambda_{k2}$ seinen Wert $\lambda_{k1} + 90° + (\sigma_{k2} - \sigma_{k1})$ ein, so erhält man zwei Gleichungen für $\sin\lambda_{k1}$, $\cos\lambda_{k1}$, welche die Form der oben angeschriebenen haben; die Glieder $a, b$ sind in diesem Falle $\frac{5\text{ mm}}{l^{(r)}}\int_{l^{(r)}} d\mu_{k1}$, $\frac{5\text{ mm}}{l^{(r)}}\int_{l^{(r)}} d\mu_{k2}$. Wendet man darauf die Formel (*) an, so findet man

$$\lambda_{k1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha_{k1}^{(r)}}{\alpha_{k2}^{(r)}} -$$

$$- \frac{\delta_{k1}}{l^{(r)}/5\text{ mm}} \cos \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \Big[\cos(\bar{\mu}_{k1}+\mathrm{M}_{k1}) + \sin(\bar{\mu}_{k1}+\mathrm{M}_{k1}\Big]_{l^{(r)}} +$$

$$+ \frac{\delta_{k1}}{l^{(r)}/5\text{ mm}} \sin \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \cdot \frac{M_{k1}}{K_k} \Big[\cos(\bar{\mu}_{k1}+\mathrm{M}_{k1})\Big]_{l^{(r)}} +$$

$$+ \frac{\delta_{k2}}{l^{(r)}/5\text{ mm}} \frac{M_{k2}}{K_k} \cos \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \Big[\cos(\bar{\mu}_{k2}+\mathrm{M}_{k2})\Big]_{l^{(r)}} -$$

$$- \frac{\delta_{k2}}{l^{(r)}/5\text{ mm}} \sin \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \Big[\cos(\bar{\mu}_{k2}+\mathrm{M}_{k2}) + \sin(\bar{\mu}_{k2}+\mathrm{M}_{k2})\Big]_{l^{(r)}} -$$

$$-(\sigma_{k2}-\sigma_{k1}) \sin^2 \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} + \{m_{k1}-m_{k2}\} \sin \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \cos \frac{2k\pi x^{(r)}}{c}.$$

Wenn die Coefficienten von $\delta_{k1}$, $\delta_{k2}$ durch geeignete Wahl der Länge $l^{(r)}$ hinreichend klein gemacht worden sind, dann bleibt einfach

$$\lambda_{k1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha_{k1}^{(r)}}{\alpha_{k2}^{(r)}} - (\sigma_{k2}-\sigma_{k1}) \sin^2 \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} +$$

$$+ \{m_{k1}-m_{k2}\} \sin \frac{2k\pi x^{(r)}}{c} \cos \frac{2k\pi x^{(r)}}{c}.$$

*d)* Eine immer anwendbare Methode, welche indessen nur dann sich empfehlen dürfte, wenn kein anderes Verfahren ausführbar ist, ist die directe Methode, welche nicht die Beobachtung der Drehungen eines Control-Apparates zwischen je zwei Schieneneinstellungen, sondern die Ablesungen dieser Einstellungen selbst benutzt.

Man gibt dem Fahrstift der Reihe nach die Abscissen

$$x = x' = 0 + \xi', \quad x = x'' = \frac{1}{4} \frac{c}{n} + \xi'', \quad x = x''' = \frac{1}{2} \frac{c}{n} + \xi''', \ldots,$$

wo $\xi', \xi'', \xi''', \ldots$ die abgelesenen Einstellungsfehler sind, und misst in jeder Lage die geographische Länge der nahezu auf der $X$-Axe befindlichen Rolle des zu untersuchenden $n^{\text{ten}}$ Apparates; dann sind, unter der Annahme, dass die abgelesenen Einstellungsfehler gleich den wirklichen seien, in der Gleichung (39) $\lambda_{ni}$ und $x$ bekannt, und man erhält ein System

von Gleichungen (39), welches erlaubt die Constanten $\varepsilon_n \sin E_n$, $\varepsilon_n \cos E_n$ zu berechnen. Die übrigen Constanten des $n^{\text{ten}}$ Integrierapparates, welche in (39) vorkommen, können durch Differenzen der Gleichungen eliminiert werden, die beiden Constanten $\varepsilon \sin E$, $\varepsilon \cos E$ jedoch im allgemeinen nicht. Die Kenntnis der letzteren wird also erfordert.

Man hat in der That aus den drei für $i = 1$ und für $x = x'$, $x = x'''$, $x = x^{\text{v}}$ gebildeten Gleichungen (39) die beiden Differenzgleichungen

$$-2n\varepsilon_n \sin E_n = (\Delta\lambda_{n1})_{\text{I}}^{\text{III}} + \pi + \frac{2n\pi}{c}(\xi''' - \xi') - \\ - n\varepsilon \sin\left(\frac{1}{2n}\frac{c}{H} + E\right) + n\varepsilon \sin E - \frac{h_n}{2n}$$

$$+2n\varepsilon_n \sin E_n = (\Delta\lambda_{n1})_{\text{III}}^{\text{V}} + \pi + \frac{2n\pi}{c}(\xi^{\text{v}} - \xi''') - \\ - n\varepsilon \sin\left(\frac{1}{n}\frac{c}{H} + E\right) + n\varepsilon \sin\left(\frac{1}{2n}\frac{c}{H} + E\right) - \frac{h_n}{2n},$$

woraus sich ergibt

$$4n\varepsilon_n \sin E_n = (\Delta\lambda_{n1})_{\text{III}}^{\text{V}} - (\Delta\lambda_{n1})_{\text{I}}^{\text{III}} + \frac{2n\pi}{c}(\xi^{\text{v}} - 2\xi''' + \xi') - \\ - n\varepsilon\left[\sin\left(\frac{1}{n}\frac{c}{H} + E\right) - 2\sin\left(\frac{1}{2n}\frac{c}{H} + E\right) + \sin E\right]. \quad (58)$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich aus den drei für $i = 2$ und $x = x''$, $x^{\text{IV}}$, $x^{\text{VI}}$ gebildeten Gleichungen (39)

$$4n\varepsilon_n \cos E_n = (\Delta\lambda_{n2})_{\text{IV}}^{\text{VI}} - (\Delta\lambda_{n2})_{\text{II}}^{\text{IV}} + \frac{2n\pi}{c}(\xi^{\text{VI}} - 2\xi^{\text{IV}} + \xi'') - \\ - n\varepsilon\left[\sin\left(\frac{5}{4n}\frac{c}{H} + E\right) - 2\sin\left(\frac{3}{4n}\frac{c}{H} + E\right) + \sin\left(\frac{1}{4n}\frac{c}{H} + E\right)\right]. \quad (58')$$

Man kann in dem concreten Falle, durch Hinzunahme weiterer oder Wahl anderer Abscisseneinstellungen aus den obigen beiden Folgen, diese Methode so einzurichten trachten, dass in den endgiltigen Bestimmungsformeln die Factoren bei $\varepsilon \sin E$, $\varepsilon \cos E$ möglichst klein werden, damit die Ungenauigkeit der Kenntnis dieser Constanten bloß mit einem kleinen

Bruchtheile des eigenen Betrages in die zu bestimmenden Constanten hineinkommt. Bestimmte Vorschriften lassen sich hiefür nicht geben, da dies von der speciellen Configuration des verwendeten Analysators abhängt.

Einigermaßen genaue Werte kann man bei diesem Bestimmungsverfahren nur dadurch zu erhalten hoffen, dass man die Bestimmung mehrere Male wiederholt, um den Einfluss von Ablesungsfehlern abzuschwächen. —

**38.** Als letzte der regulären Instrumentalconstanten bleiben noch $\varepsilon \sin E$, $\varepsilon \cos E$ übrig. Diese Constanten der Formel für die geographischen Längen im $n^{\text{ten}}$ Integrierapparat sind für sämmtliche Apparate einer Gruppe (S. 15) gemeinsam. Die für die untere Gruppe geltenden hängen von den Eigenschaften der beiden linken Leitrollen, die für die obere Gruppe geltenden von den Eigenschaften der vorderen linken Leitrolle allein ab.

Ich spreche in dem Folgenden der Kürze halber immer nur von »der Leitrolle«; die Worte »beziehungsweise Leitrollenpaar« sind zu ergänzen.

Die für einen Integrierapparat angewendete Methode, seine Excentricitätsconstanten dadurch zu bestimmen, dass man die miteinander gleichzeitigen Drehungen misst, welche der untersuchte und der als Control-Apparat an ihn angeschaltete Apparat vollzogen haben, lässt sich nicht auf die Bestimmung der Excentricitätsconstanten der Leitrolle übertragen, weil man kein Mittel hat, die Drehungen der Leitrolle unabhängig zu messen (da sie keine Messrollen trägt), dieselben vielmehr nur aus ihren Wirkungen auf die Drehung des daran angeschlossenen Integrierapparates erkannt werden müssen. Die Nothwendigkeit präciser Schienenablesungen lässt sich hier also nicht umgehen.

In den obigen Bemerkungen ist das Principielle der Bestimmungsmethode bereits ausgesprochen. Man benutzt einen unmittelbar (oder unter geringer Differenz der Grenzanomalien des Drahtes an jeder Zwischenscheibe) nach der Leitrolle eingeschalteten Integrierapparat gleichsam als Reagens, indem seine Drehungsphasen die Wirkungen der Excentricitätsconstanten der Leitrolle sollen erkennen lassen. Man gibt durch

Schieneneinstellungen, welche möglichst genau abgelesen werden müssen, dem Fahrstift der Reihe nach geeignete Abscissen von diesen, bei welchen seine Cosinusrolle, oder von diesen, bei welchen seine Sinusrolle nahezu auf der $X$-Axe liegt (eventuell von beiden Abscissenfolgen), damit man die zwischen je zwei Lagen einer Folge vollzogene Drehung unabhängig von der Kenntnis seiner Constanten messen kann. Durch Einsetzung der abgelesenen Abscissenwerte und der gemessenen Werte der geographischen Längen in die entsprechenden aus (39) gebildeten Differenzgleichungen erhält man ein Gleichungensystem, in welchem die sonstigen noch vorkommenden Constanten sich durch bloße Summationen und Subtractionen eliminieren lassen. Man erhält zwei Bestimmungsformeln, welche nur die beiden Unbekannten $\varepsilon \sin \mathrm{E}$, $\varepsilon \cos \mathrm{E}$, jedoch jede die beiden, enthalten.

Welcher Apparat als Reagens-Apparat benutzt werden solle, und wie die verschiedenen Abscissen am zweckmäßigsten gewählt und combiniert werden sollen, um in den Schlussformeln günstige Verhältnisse der Coefficienten zu erhalten, das hängt von der speciellen Configuration des verwendeten Analysators ab. Nur als Beispiel soll hier das Verfahren genauer beschrieben werden, welches ich für mein Instrument angewendet habe.

Ich benutzte, um die Constanten $\varepsilon \sin \mathrm{E}$, $\varepsilon \cos \mathrm{E}$ des Leitrollenpaares zu bestimmen, als Reagens den 3ten Integrierapparat, und gab dem Fahrstift die sechs Abscissenwerte, welche folgenden Ablesungen entsprechen: $x' = \frac{c}{6} + \xi'$, $x'' = 2\frac{c}{6} + \xi''$, $x''' = 3\frac{c}{6} + \xi'''$, $x^{\text{IV}} = 4\frac{c}{6} + \xi^{\text{IV}}$, $x^{\text{V}} = 5\frac{c}{6} + \xi^{\text{V}}$, $x^{\text{VI}} = 6\frac{c}{6} + \xi^{\text{VI}}$, wo $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{\text{VI}}$ abgelesene Einstellungsfehler sind. In diesen Lagen steht die Cosinusrolle des Apparates nahezu auf der $X$-Axe. Die Gleichung (39) gibt

$$\lambda_{31}^{(r)} = \pi - r\pi - 6\pi\frac{\xi^{(r)}}{c} + 3\varepsilon_3[\sin(r\pi + \mathrm{E}_3) - \sin \mathrm{E}_3] +$$
$$+ 3\varepsilon \cos \mathrm{E} . \sin\frac{r}{6}\frac{c}{H} + 3\varepsilon \sin \mathrm{E} . \left(\cos\frac{r}{6}\frac{c}{H} - 1\right) +$$
$$+ \frac{r}{6} h_3 + \sigma_{31} .$$

Bildet man aus dieser Gleichung die Ausdrücke für $(\Delta\lambda_{31})_{I}^{III}$, $(\Delta\lambda_{31})_{III}^{V}$, $(\Delta\lambda_{31})_{II}^{IV}$, $(\Delta\lambda_{31})_{IV}^{VI}$, setzt dann in diesen Ausdrücken den Wert $\frac{1}{6}\frac{c}{H} = 218^\circ 51'$ ein, so findet man, durch Additionen und Subtractionen der vier Gleichungen,

$$\left\{\begin{aligned} &7\cdot 06\,\varepsilon \cos \mathrm{E} - 0\cdot 64\,\varepsilon \sin \mathrm{E} = \\ &\qquad = (\Delta\lambda_{31})_{III}^{V} - (\Delta\lambda_{31})_{IV}^{VI} + 6\pi \frac{(\xi^{V} - \xi''') - (\xi^{VI} - \xi^{IV})}{c} \\ &0\cdot 87\,\varepsilon \cos \mathrm{E} - 7\cdot 10\,\varepsilon \sin \mathrm{E} = \\ &\qquad = (\Delta\lambda_{31})_{I}^{III} - (\Delta\lambda_{31})_{II}^{IV} + 6\pi \frac{(\xi''' - \xi') - (\xi^{IV} - \xi'')}{c}. \end{aligned}\right.$$

**39.** Nach den oben erörterten Methoden zur Bestimmung der regulären Instrumentalconstanten wurden diese für mein Instrument wiederholt bestimmt.

Die in der nachstehenden Tafel angegebenen Werte können als geltend für den Sommer 1899 angesehen werden.

Die Constanten $\Gamma_n$, $\mathrm{K}_n$ sind auf den Fall reduciert, wenn bei der Anfangsstellung des Instrumentes die Laufradtheilung 0° zeigt; die Werte der Constanten $\mathrm{E}_n$, E beziehen sich selbstverständlich auf den Fall der Coincidenz der an den betreffenden Horizontalrädern angebrachten Marken mit den zugehörigen Marken am Gerüst des Instrumentes.

Constanten, deren Werte durch einen Strich ersetzt sind, wurden nicht oder nicht genau bestimmt.

| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ | $n=6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_{n2}-\sigma_{n1}$ | +0·0018 | −0·0014 | +0·0012 | $=\sigma_{12}-\sigma_{11}$ | $=\sigma_{22}-\sigma_{21}$ | $=\sigma_{32}-\sigma_{31}$ |
| $m_{n1}$ | −0·0002 | +0·0002 | −0·0015 | $=m_{11}$ | $=m_{21}$ | $=m_{31}$ |
| $m_{n2}$ | −0·0012 | −0·0011 | −0·0007 | $=m_{12}$ | $=m_{22}$ | $=m_{32}$ |
| $\gamma_n$ | 0·0013 | 0·0006 | 0·0005 | $=\gamma_1$ | $=\gamma_2$ | $=\gamma_3$ |
| $\Gamma_n$ | 278° | 162° | 307° | $=\Gamma_1$ | $=\Gamma_2$ | $=\Gamma_3$ |
| $\varkappa_n$ | 0·0017 | 0·0016 | 0·0012 | $=\varkappa_1$ | $=\varkappa_2$ | $=\varkappa_3$ |
| $\mathrm{K}_n$ | 105° | 21° | 77° | $=\mathrm{K}_1$ | $=\mathrm{K}_2$ | $=\mathrm{K}_3$ |
| $\dot{\gamma}_n$ | −0·0005 | −0·0003 | −0·0003 | $=\dot{\gamma}_1$ | $=\dot{\gamma}_2$ | $=\dot{\gamma}_3$ |
| $\varepsilon_n \cos \mathrm{E}_n$ | +0·0002 | +0·0003 | — | — | — | — |
| $\varepsilon_n \sin \mathrm{E}_n$ | −0·0005 | +0·0001 | — | — | — | — |
| $\varepsilon \cos \mathrm{E}$ | | +0·0001 | | | — | |
| $\varepsilon \sin \mathrm{E}$ | | −0·0000 | | | — | |

In dem in den Correctionsformeln eingeführten Constantensystem sind die Werte der regulären Constanten demnach folgende:

| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ | $n=6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma'_n$ | +0·0002 | −0·0006 | +0·0003 | $=\gamma'_1$ | $=\gamma'_2$ | $=\gamma'_3$ |
| $\gamma''_n$ | −0·0013 | +0·0002 | −0·0004 | $=\gamma''_1$ | $=\gamma''_2$ | $=\gamma''_3$ |
| $\varkappa'_n$ | −0·0002 | +0·0007 | +0·0001 | $=\varkappa'_1$ | $=\varkappa'_2$ | $=\varkappa'_3$ |
| $\varkappa''_n$ | +0·0006 | +0·0003 | +0·0003 | $=\varkappa''_1$ | $=\varkappa''_2$ | $=\varkappa''_3$ |
| $\varepsilon'_n$ | +0·0002 | +0·0003 | — | — | — | — |
| $\varepsilon''_n$ | −0·0005 | +0·0001 | — | — | — | — |
| $\varepsilon'$ | | +0·0001 | | | — | |
| $\varepsilon''$ | | −0·0001 | | | — | |
| $m_{n1}$ | −0·0002 | +0·0002 | +0·0015 | $=m_{11}$ | $=m_{21}$ | $=m_{31}$ |
| $m_{n2}$ | −0·0012 | −0·0011 | −0·0007 | $=m_{12}$ | $=m_{22}$ | $=m_{32}$ |
| $\sigma'_{n1}-\sigma'_{n2}$ | +0·0018 | −0·0014 | +0·0012 | $=\sigma'_{12}-\sigma'_{11}$ | $=\sigma'_{22}-\sigma'_{21}$ | $=\sigma'_{32}-\sigma'_{31}$ |

**40.** Die Constanten $h_n$, $\sigma'_{n1}$ müssen bei jeder Analyse besonders bestimmt werden.

Es empfiehlt sich, dieselben vor und nach der Analyse zu bestimmen, und bei der Anwendung der Formel (44) Mittelwerte aus beiden Bestimmungen zu verwenden.

Die Bestimmung selbst geschieht in folgender Weise.

Man stellt den Wagenindex auf 0, wobei man möglichst genau den Einstellungsfehler $\xi'$ abliest, befährt eine der $y$-Axe parallele Strecke $l'$ von geeigneter [siehe 37. *a)*] Länge ein- oder mehreremale abwechselnd hin und zurück und bildet die Ablesungen sämmtlicher Cosinusrollen über die Strecke $l'$. Dann stellt man den Wagenindex auf 360, wobei man möglichst genau den Einstellungsfehler $\xi''$ abliest, und befährt wieder eine der $y$-Axe parallele Strecke $l''$ von geeigneter Länge, in derselben Weise wie früher und wieder unter Ablesungen der Cosinusrollen. Die Einstellungen sind immer mit nach rechts gerichteter Bewegung zu bewirken.

Aus den Ablesungen der Cosinusrollen über die Strecke $l'$ erhält man in der That, wenn die Länge $l'$ roh bekannt ist, nach der Formel

$$\lambda'_{n1} = \pi + \frac{\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}}, \qquad (59)$$

die geographischen Längen sämmtlicher Cosinusrollen für die Abscisse $\xi'$ des Fahrstiftes. Ebenso aus den Ablesungen über $l''$, nach der Formel

$$\lambda''_{n1} = (1-2n)\pi + \frac{\alpha''_{n1}}{l''/\pi \text{ cm}}, \qquad (60)$$

die geographischen Längen der Cosinusrollen für die Abscisse $c+\xi''$ des Fahrstiftes.

Wendet man nun die Gleichung (39) auf die Strecke $l'$ an, wobei man für $\lambda_{n1}$ den Wert (59) einsetzt, so ergibt sich

$$\sigma_{n1} = \frac{\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}} - \frac{2n\pi\xi'}{c}. \qquad (61)$$

$\sigma'_{n1}$ erhält man aus $\sigma_{n1}$, wenn man die bekannte reguläre Constante $n\varepsilon \sin \mathrm{E}$ abzieht.

Wendet man aber die Gleichung (39) an auf die beiden Strecken $l'$, $l''$, und zieht die beiden entsprechenden Gleichungen voneinander ab, so findet man

$$h_n = \frac{\alpha''_{n1}}{l''/\pi \text{ cm}} - \frac{\alpha'_{n1}}{l'/\pi \text{ cm}} + \frac{2n\pi(\xi''-\xi')}{c} - 2 \sin \frac{c}{2H} \cdot n\varepsilon', \qquad (62)$$

wo $\varepsilon'$ die bekannte reguläre Constante des Analysators ist.

In der Ausführung der Bestimmung empfiehlt es sich, zur Verminderung des Einflusses der ungenauen Kenntnis der Einstellungsfehler, die beiden Einstellungen einige Male zu wiederholen, indem man immer die Einstellung auf 0 und die auf 360 abwechseln lässt.

## Die Fehler des Millimeterpapieres und der Aufstellung.

**41.** In der obigen Theorie der Instrumentalfehler ist noch ein Umstand unberücksichtigt geblieben, der zwar noch zu den Fehlern des Instrumentes gehört, den es aber zweckmäßiger erschien in Verbindung mit den Papier- und Aufstellungsfehlern zu berücksichtigen.

Ist nämlich die Richtung, in welcher bei stillstehendem Instrument der Fahrstift sich verschiebt, nicht genau senkrecht zu der Rollrichtung des Instrumentes, dann würden offenbar

die Gleichungen (38′) und (39) [und damit auch alle daraus nachher gezogenen Folgerungen] giltig bleiben, wenn man darin unter $xy$ die Coordinaten, unter $dx dy$ die Verrückungscomponenten, des Fahrstiftes in einem schiefwinkligen Coordinatensystem verstehen würde, dessen $x$-Linien die Richtung haben, in welcher der Fahrstift ohne Rollen des Instrumentes bewegt werden kann, dessen $y$-Linien aber die Richtung haben, in welcher das Gerüst beim Rollen bewegt wird. Als die Ordinatenaxe selbst gilt dann selbstverständlich wieder diejenige Gerade der letzteren Familie, auf welcher die Fahrstiftspitze sich befindet, während der Wagenindex auf dem Schienenstrich 0 steht; die Abscissenaxe aber brauchte bisher nicht festgelegt zu werden.

Wir wollen nun hier ein solches schiefwinkliges Coordinatensystem einführen, und bezeichnen es mit $x'y'$. Es gelten also die Gleichungen, welche aus (38′) und (39) mittels Ersetzung von $xy$ durch $x'y'$ entstehen. $c$ und mm haben dabei genau dieselben Bedeutungen wie früher, desgleichen bedeuten $\Lambda_{n1}^0 = 180°$, $\Lambda_{n2}^0 = 270°$.

Da es ferner wegen der späteren Betrachtungen zweckmäßig ist, die Abscissenaxe festzulegen, definieren wir sie folgendermaßen. Nachdem das Instrument auf dem Papier aufgestellt worden, gibt es unter den verschiedenen Stellungen, welche es durch Rollen successive annimmt, nur eine von der Art, dass in derselben der Fahrstift ohne Rollen des Instrumentes mit dem Ausgangspunkte der gezeichneten Curve $C$ in Coincidenz gebracht werden kann. Diese Stellung bezeichne ich künftig als die Anfangsstellung des Instrumentes, und den Strahl, welchen der Fahrstift in dieser Stellung (nach wachsenden Schienenablesungen) beschreibt, als die Abscissenaxe des Systems $x'y'$.

**42.** Die zur Analyse vorliegende Curve ist gezeichnet nach Maßgabe des auf dem Millimeterpapier vorgedruckten Netzes. Ihr Anfangs- und Endpunkt liegen also auf einer und derselben Linie der Familie der Abscissenlinien des Papieres, und der Abstand dieser Punkte voneinander beträgt 360 Papier-Millimeter der Abscissenrichtung.

Es wird fortan stets angenommen, dass man bei Umfahrungen zu analysierender Curven nach der folgenden Regel vorgeht:

1) von dem Ausgangspunkte der gezeichneten Curve befährt man diese bis zu ihrem Endpunkte am anderen Ende des zu untersuchenden Intervalls der Zeichnung (unbekümmert darum, dass dadurch der Wagenindex möglicherweise über den Strich 360 der Schiene etwas hinausgleitet oder ihn nicht erreicht); 2) von hier aus rollt man das Instrument, wenn nöthig, vor- oder rückwärts, bis es in seine Anfangsstellung kommt; 3) dann verschiebt man den Fahrstift bei stillstehendem Instrument bis zur Coincidenz mit dem Ausgangspunkte der gezeichneten Curve.

Die durch 1) vom Fahrstift beschriebene Bahn deckt sich vollständig mit der Curve $C$; die durch 1) und 2) vom Fahrstift beschriebene Bahn bezeichne ich mit $S$; die gesammte Bahn des Fahrstiftes mit $\Sigma$.

Die Gesammtdrehung der Rolle $M_{ni}$ bei dieser Umfahrung ist offenbar gegeben durch die Formel

$$\left.\begin{aligned}
\int_\Sigma d\mu_{ni} = &\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dy' + \\
&+\gamma_n\cdot\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_S n\cos\left(\frac{y'}{L}+\Gamma_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dx' + \\
&+\left(\varkappa_n+\frac{c}{2\pi L}\gamma_n\right)\cdot\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_S \cos\left(\frac{y'}{L}+K_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dy' + \\
&+\varepsilon_n\cdot\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_S n\left[\sin\left(\frac{2n\pi x'}{c}+E_n\right)-\sin E_n\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dy' + \\
&\qquad+\varepsilon\cdot\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_S n\left[\sin\left(\frac{x'}{H}+E\right)-\sin E\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dy' + \\
&+h_n\cdot\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_S \frac{x'}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dy' + \\
&+m_{ni}\cdot\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dy' + \\
&+\sigma_{ni}\cdot\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_S \cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dy' + \\
&+\delta_{ni}\cdot\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_\Sigma F_{ni}(M_{ni},s)\,ds + \delta_{nj}\cdot\frac{1}{5\,\mathrm{mm}}\int_\Sigma G_{nj}(M_{nj},s)\,ds.
\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Wurde die Umfahrung wiederholt nach Umkehrung der Messrollen und bezeichnet dann $\int_{\Sigma} d\mu_{ni}$ das arithmetische Mittel der beiden Gesammtdrehungen der Rolle $M_{ni}$, so fällt in der Formel (63) die letzte Zeile weg.

**43.** Von dem zum Auftragen der Curve verwendeten Millimeterpapier setze ich nur voraus, dass seine Linien gerade und seine kleinsten Felder congruente Parallelogramme sind. Man muss vor dem Auftragen der Curve sich von diesen Eigenschaften überzeugen.

Ich setze dagegen nicht voraus, dass die Linien der einen Familie senkrecht zu den der anderen stehen; nicht, dass die einen oder dass die anderen richtig getheilt seien, d. h. dass ihre Millimeter mit den wahren oder mit den Analysator-Millimetern übereinstimmen; auch nicht, dass die Partes der Ordinatenrichtung jenen der Abscissenrichtung gleich seien. Diese letzteren Eigenschaften treffen nach meinen Erfahrungen in der Regel alle nicht zu. Dagegen wird vorausgesetzt (was ja immer zutrifft), dass die Abweichungen davon klein seien.

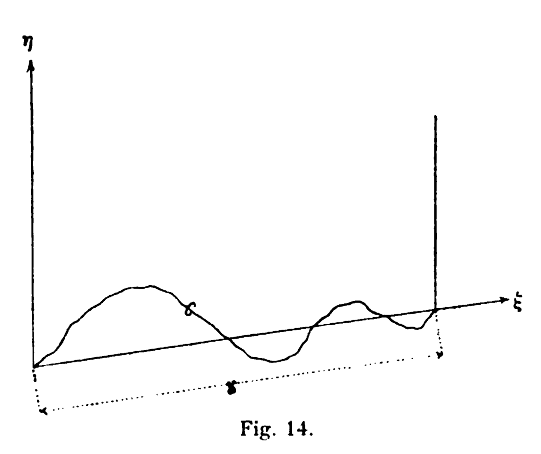



Fig. 14.

Wir nehmen nun die durch den Ausgangspunkt der Curve hindurchgehende Gerade der Familie der Abscissenlinien des Papiernetzes als die $\xi$-Axe, die durch jenen Punkt hindurchgehende Ordinatenlinie des Papiernetzes als die $\eta$-Axe eines schiefwinkligen Coordinatensystems $\xi\eta$. Die Entfernung des

Endpunktes der Curve $C$ von ihrem Ausgangspunkte nenne ich $\gamma$.

Wenn nun die Coordinate $\eta$ des laufenden Punktes $P$ der Curve in Function seiner Coordinate $\xi$ dargestellt ist in der Form

$$\eta = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos \frac{2n\pi\xi}{\gamma} + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin \frac{2n\pi\xi}{\gamma}, \qquad (64)$$

so ist es die Anzahl der in der Länge $a_n$ beziehungsweise $b_n$ enthaltenen Papier-Centimeter der Ordinatenrichtung, welche gesucht wird. Denn diese Centimeter sind es, gemäß der Entstehungsweise der Zeichnung, welche bestimmte Einheiten der abhängigen Variablen des behandelten Variablenpaares vertreten. Bezeichnen wir einen Papiercentimeter der Ordinatenrichtung kurz mit 1 Cm (im Gegensatz zum Analysatorcentimeter cm), so werden also gesucht die abstracten Zahlen

$$\mathfrak{a}_n = \frac{a_n}{1\,\mathrm{Cm}}, \qquad \mathfrak{b}_n = \frac{b_n}{1\,\mathrm{Cm}}.$$

Die Längen $a_n$, $b_n$, Coefficienten der Entwicklung (64), haben, entsprechend den Formeln (3), da $\eta_e = \eta_a$ ist, die Ausdrücke

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\int_C \sin\frac{2n\pi\xi}{\gamma}\,d\eta, \qquad b_n = \frac{1}{n\pi}\int_C \cos\frac{2n\pi\xi}{\gamma}\,d\eta. \quad (65)$$

Es handelt sich also nur noch darum, diese Ausdrücke zurückzuführen auf die Ablesungen des Analysators über die Bahn $\Sigma$, oder auf die unmittelbar aus diesen Ablesungen in früher angegebener Weise gebildeten rohen Coefficienten $a'_n$, $b'_n$.

**44.** Dies wird sofort erreicht durch Transformation von Coordinaten.

Das Coordinatensystem des Instrumentes, $x'y'$, ist schon definiert worden. Seine $x'$-Axe geht darnach durch den Ausgangspunkt der Curve $C$. In der nachstehenden Figur ist das Coordinatensystem $\xi\eta$ durch volle, das Coordinatensystem $x'y'$ durch unterbrochene Linien, die gesammte Bahn $\Sigma$ des Fahrstiftes durch die starke Contour dargestellt. Die Ablenkung der $x'$-Axe von der $\xi$-Axe sei $\omega$, die der $y'$-Axe von der $\eta$-Axe sei $\psi$;

die Entfernung des Anfangspunktes des Systems $x'y'$ von dem des Systems $\xi\eta$, also die Entfernung, in welcher sich der Strich 0 der Schiene von dem Wagenindex befindet, während die Fahrstiftspitze mit dem Ausgangspunkte der Curve coincidiert, sei $pc$. $\omega, \psi, p$ sollen von der ersten Ordnung klein sein.

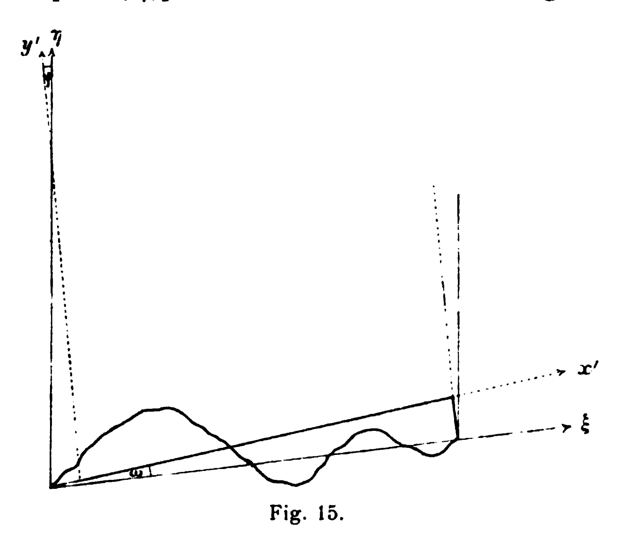



Fig. 15.

Man kann, zunächst, die Ausdrücke (65) so schreiben, indem man den kurzen, vom Endpunkte der Curve $C$ zum Ankunftspunkte an der $x'$-Axe sich erstreckenden Theil der Bahn $\Sigma$ mit $T$ bezeichnet:

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\int_S \sin\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n1}^0\right) d\eta,$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\int_S \sin\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n2}^0\right) d\eta - \frac{1}{n\pi}\int_T d\eta.$$

Lässt man in den Transformationsformeln von $\xi\eta$ auf $x'y'$ rechts Glieder zweiter Ordnung der Fehler weg, so findet man

$$\begin{cases} \xi = pc + x' - \psi y' \\ \eta = \qquad \omega x' + y'. \end{cases}$$

Setzt man also $\dfrac{c}{\gamma} = 1 + l$, so, dass $l$ ein kleiner Bruch erster Ordnung ist, so hat man

$$\sin\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma}+\Lambda_{ni}^0\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{ni}^0\right)-l\cdot\frac{2n\pi x'}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{ni}^0\right)-$$

$$-p\,.\,2n\pi\,\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{ni}^0\right)+$$

$$+\psi\cdot\frac{2n\pi y'}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{ni}^0\right).$$

$$d\eta=\omega\,dx'+dy',$$

$$\int_T d\eta=\omega c,$$

wo rechts nur Glieder zweiter Ordnung der Fehler weggelassen worden sind. Setzt man diese Werte in die Ausdrücke von $a_n$, $b_n$ ein, so ergibt sich, bis auf Glieder zweiter Ordnung genau,

$$\left.\begin{aligned}
a_n=-\frac{1}{n\pi}\int_S\sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{n1}^0\right)dy'&+\\
+2l\cdot\int_S\frac{x'}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{n1}^0\right)dy'&+\\
+2p\cdot\int_S\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{n1}^0\right)dy'&-\\
-2\psi\cdot\int_S\frac{y'}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{n1}^0\right)dy'&,\\
b_n=-\frac{1}{n\pi}\int_S\sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{n2}^0\right)dy'&+\\
+2l\cdot\int_S\frac{x'}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{n2}^0\right)dy'&+\\
+2p\cdot\int_S\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{n2}^0\right)dy'&-\\
-2\psi\cdot\int_S\frac{y'}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda_{n2}^0\right)dy'&-\frac{\omega}{n\pi}c.
\end{aligned}\right\}\quad(66)$$

Wenn man in der Gleichung (63) unter $\int_\Sigma d\mu_{ni}$ das Mittel aus zwei durch Umdrehung der Rollen unterschiedenen Umfahrungen versteht (demgemäß die letzte Zeile weglässt) und

beide Seiten mit $\frac{-1}{2n\pi}$ cm multipliciert, dann steht links $a'_n$ beziehungsweise $b'_n$; rechts aber, als erstes Glied

$$-\frac{1}{n\pi}\int_S \sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{ni}\right)dy'.$$

Subtrahiert man daher die so erhaltene Gleichung, gebildet für $i=1$, $i=2$, von der ersten, beziehungsweise zweiten der Gleichungen (66), so erhält man die beiden Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
a_n-a'_n = &+\gamma_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\cos\left(\frac{y'}{L}+\Gamma_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dx'+\\
&+\left(\varkappa_n+\frac{c}{2\pi L}\gamma_n\right)\cdot\frac{1}{n\pi}\int_S\cos\left(\frac{y'}{L}+K_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy'+\\
&+\varepsilon_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\left[\sin\left(\frac{2n\pi x'}{c}+E_n\right)-\sin E_n\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy'+\\
&\quad+\varepsilon\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\left[\sin\left(\frac{x'}{H}+E\right)-\sin E\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy'+\\
&+(h_n+2n\pi l)\cdot\int_S\frac{x'}{n\pi c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy'-\\
&-m_{n1}\,.\,a'_n-\\
&-(\sigma_{n1}+2n\pi p)\,.\,b'_n-\\
&-2\psi\cdot\int_S\frac{y'}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n1}\right)dy',\\
b_n-b'_n = &+\gamma_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\cos\left(\frac{y'}{L}+\Gamma_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dx'+\\
&+\left(\varkappa_n+\frac{c}{2\pi L}\gamma_n\right)\cdot\frac{1}{n\pi}\int_S\cos\left(\frac{y'}{L}+K_n\right)\sin\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy'+\\
&+\varepsilon_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\left[\sin\left(\frac{2n\pi x'}{c}+E_n\right)-\sin E_n\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy'+\\
&\quad+\varepsilon\cdot\frac{1}{\pi}\int_S\left[\sin\left(\frac{x'}{H}+E\right)-\sin E\right]\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy'+\\
&+(h_n+2n\pi l)\cdot\int_S\frac{x'}{n\pi c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy'-\\
&-m_{n2}\,.\,b'_n+\\
&+(\sigma_{n2}+2n\pi p)\,.\,a'_n-\\
&-2\psi\cdot\int_S\frac{y'}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi x'}{c}+\Lambda^0_{n2}\right)dy'-\omega\cdot\frac{c}{n\pi},
\end{aligned}\right\}\quad(67)$$

in welchen man, übrigens, offenbar $x', y', c$, wegen der kleinen Coefficienten, überall durch $\xi, \eta, \gamma$ ersetzen darf.

Diese Formeln sind, abgesehen von ihrer je letzten Zeile, den Formeln (41) vollständig analog. Die completen Formeln für Corrigierung der rohen Coefficienten werden sich somit von den beiden Formeln (44) [oder (48)], nach welchen die Correction hinsichtlich der Instrumentalfehler allein erfolgt, nur dadurch unterscheiden, dass zu den rechten Seiten der letzteren noch die Glieder:

$$-2\psi \cdot \int_S \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n1}^0\right) d\eta \quad \text{in der ersten,}$$

$$-2\psi \cdot \int_S \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n2}^0\right) d\eta - \omega \cdot \frac{c}{n\pi} \quad \text{in der zweiten}$$

hinzutreten, und dass ferner einige der Constanten durch gewisse andere ersetzt werden. In den hinzutretenden Gliedern kann man das Symbol $\int_S$ durch $\int_C$ ersetzen, da $\int_T \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{ni}^0\right) d\eta$ klein [sogar von mindestens zweiter Ordnung] ist.

**45.** Es bleibt also, um die completen Correctionsformeln in der endgiltigen Form hinschreiben zu können, nur übrig, das Integral

$$-2\int_C \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{ni}^0\right) d\eta$$

auszuwerten. Bezeichnet man wieder mit $\int_{(C)}$ eine Integration, erstreckt auf alle nach Ausschluss etwa vorhandener der $\eta$-Axe paralleler Abschnitte zurückbleibenden Abschnitte der Curve $C$, und wendet die (43) analoge Transformation

$$\int_C \varphi(\xi) \cdot d(\eta^2) = \left[\varphi(\xi) \cdot \eta^2\right]_C - \int_{(C)} \eta^2 \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} d\xi$$

an, so erhält man

$$-2\int_C \frac{\eta}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma}+\Lambda_{ni}^0\right)d\eta =$$

$$= \frac{2n\pi}{\gamma c}\int_{(C)}\eta^2 . \sin\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma}+\Lambda_{ni}^0\right)d\xi,$$

oder

$$-2\int_C \frac{\eta}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma}+\Lambda_{n1}^0\right)d\eta =$$

$$= \frac{2n\pi}{\gamma c}\mathfrak{A}_0\int_0^\gamma \sin\frac{2n\pi\xi}{\gamma}d\xi + \frac{2n\pi}{\gamma c}\sum_q \mathfrak{A}_q\int_0^\gamma \cos\frac{2q\pi\xi}{\gamma}\sin\frac{2n\pi\xi}{\gamma}d\xi +$$

$$+\frac{2n\pi}{\gamma c}\sum_q \mathfrak{B}_q\int_0^\gamma \sin\frac{2q\pi\xi}{\gamma}\sin\frac{2n\pi\xi}{\gamma}d\xi,$$

$$-2\int_C \frac{\eta}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma}+\Lambda_{n2}^0\right)d\eta =$$

$$= -\frac{2n\pi}{\gamma c}\mathfrak{A}_0\int_0^\gamma \cos\frac{2n\pi\xi}{\gamma}d\xi - \frac{2n\pi}{\gamma c}\sum_q \mathfrak{A}_q\int_0^\gamma \cos\frac{2q\pi\xi}{\gamma}\cos\frac{2n\pi\xi}{\gamma}d\xi -$$

$$-\frac{2n\pi}{\gamma c}\sum_q \mathfrak{B}_q\int_0^\gamma \sin\frac{2q\pi\xi}{\gamma}\cos\frac{2n\pi\xi}{\gamma}d\xi,$$

wo $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_q$, $\mathfrak{B}_q$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ die Coefficienten der Entwickelung

$$\eta^2 = \mathfrak{A}_0 + \sum_q \mathfrak{A}_q\cos\frac{2q\pi\xi}{\gamma} + \sum_q \mathfrak{B}_q\sin\frac{2q\pi\xi}{\gamma} \tag{68}$$

bezeichnen. Diese Coefficienten werden bestimmte Functionen der Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ sein; ich schreibe sie daher

$$\mathfrak{A}_0(a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots), \qquad \mathfrak{A}_q(a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots),$$
$$\mathfrak{B}_q(a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots),$$

oder kurz (symbolisch):

$$\mathfrak{A}_0(a, b), \qquad \mathfrak{A}_q(a, b), \qquad \mathfrak{B}_q(a, b).$$

Man hat also

$$\begin{cases} -2\psi \int_S \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n1}^0\right) d\eta = \psi \frac{n\pi}{c} \mathfrak{B}_n(a,b) \\ -2\psi \int_S \frac{\eta}{c} \cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma} + \Lambda_{n2}^0\right) d\eta = -\psi \frac{n\pi}{c} \mathfrak{A}_n(a,b). \end{cases}$$

Der Nachweis, dass die auf der rechten Seite von (68) stehende Reihe, gebildet mit den Coefficienten

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu a_\nu^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu b_\nu^2, \\ \mathfrak{A}_q &= \left\{2a_0 a_q + \frac{1}{2}\sum_{\nu\neq q} a_\nu a_{|\nu-q|} + \frac{1}{2}\sum_\nu a_\nu a_{\nu+q}\right\} + \\ &\quad + \left\{\frac{1}{2}\sum_{\nu\neq q} \frac{\nu-q}{|\nu-q|} b_\nu b_{|\nu-q|} + \frac{1}{2}\sum_\nu b_\nu b_{\nu+q}\right\}, \\ \mathfrak{B}_q &= 2a_0 b_q - \sum_{\nu\neq q} \frac{\nu-q}{|\nu-q|} a_\nu b_{|\nu-q|} + \sum_\nu a_\nu b_{\nu+q}, \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

convergiert und die Function $\eta^2$ darstellt, wird im Folgenden wenigstens für die (für die Praxis ja hauptsächlich in Betracht kommenden) Fälle geliefert, wo die zur Analyse vorgelegte Curve $C$ keine der $\eta$-Axe parallele Stücke hat, der Differentialquotient der abhängigen Variablen nach der Argumentvariablen also endlich bleibt. In den Ausdrücken (69) sind die Summenzeichen so verstanden, dass $\sum_\nu$ sich auf die Werte $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ erstreckt, $\sum_{\nu\neq q}$ aber bloß auf die Werte $\nu = 1, 2, \ldots, q-1, q+1, q+2, \ldots$.

Wenn nämlich die Curve $C$ die genannte Eigenschaft besitzt, dann werden, infolge eines bekannten Satzes, die Coefficienten $a_m$, $b_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ der Fourier'schen Entwicklung

$$\eta = a_0 + \sum_m a_m \cos\frac{2m\pi\xi}{\gamma} + \sum_m b_m \sin\frac{2m\pi\xi}{\gamma}$$

so beschaffen sein, dass

$$a_m < \frac{\mathfrak{Z}}{m^2}, \qquad b_m < \frac{\mathfrak{Z}}{m^2}, \tag{70}$$

wo $\mathfrak{Z}$ eine von $m$ unabhängige endliche Zahl ist; $a_0$ ist bekanntlich gleich dem Mittelwerte $\bar{\eta}$ sämmtlicher $\eta$ des Intervalles.

Bezeichnet man zur Abkürzung $\frac{2\pi\xi}{\gamma}$ mit $\varphi$, so sind in den Doppelreihen

$$\sum_q \left[\sum_{\nu \neq q} \tfrac{1}{2} a_\nu a_{|\nu-q|}\right] \cos q\varphi, \qquad \sum_q \left[\sum_\nu \tfrac{1}{2} a_\nu a_{\nu+q}\right] \cos q\varphi$$

infolge der Eigenschaft (70) sowohl die Zeilen (die Reihen $q =$ const.), als auch die Columnen (die Reihen $\nu =$ const.) absolut und somit unbedingt convergente Reihen; es kann in ihnen daher die Reihenfolge der Summationen umgekehrt werden, wodurch sie übergehen in die ebenfalls unbedingt convergenten Reihen

$$\sum_\nu \tfrac{1}{2} a_\nu \left[\sum_{q \neq \nu} a_{|\nu-q|} \cos q\varphi\right], \qquad \sum_\nu \tfrac{1}{2} a_\nu \left[\sum_q a_{\nu+q} \cos q\varphi\right].$$

Es ist daher auch

$$\sum_q \left\{\sum_{\nu \neq q} \tfrac{1}{2} a_\nu a_{|\nu-q|} + \sum_\nu \tfrac{1}{2} a_\nu a_{\nu+q}\right\} \cos q\varphi =$$

$$\begin{aligned} = \sum_\nu \tfrac{1}{2} a_\nu \Big\{ & \big[a_1(\cos(\nu+1)\varphi + \cos(\nu-1)\varphi) + \\ & + a_2(\cos(\nu+2)\varphi + \cos(\nu-2)\varphi) + \ldots + \\ & + a_{\nu-1}(\cos(2\nu-1)\varphi + \cos\varphi) + \\ & + a_\nu \cos 2\nu\varphi + \\ & + a_{\nu+1}\cos(2\nu+1)\varphi + \\ & + a_{\nu+2}\cos(2\nu+2)\varphi + \ldots\big] + \\ & + \big[a_{\nu+1}\cos\varphi + a_{\nu+2}\cos 2\varphi + \ldots\big]\Big\}, \end{aligned}$$

oder

$$\sum_q \left\{ \sum_{\nu \neq q} \frac{1}{2} a_\nu a_{|\nu-q|} + \sum_\nu \frac{1}{2} a_\nu a_{\nu+q} \right\} \cos q\varphi =$$
$$= \sum_\nu a_\nu \cos \nu\varphi \left\{ a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots \right\} - \frac{1}{2} \sum_\nu a_\nu^2;$$

ebenso erhält man

$$\sum_q \left\{ \sum_{\nu \neq q} \frac{1}{2} \frac{\nu - q}{|\nu - q|} b_\nu b_{|\nu-q|} + \sum_\nu \frac{1}{2} b_\nu b_{\nu+q} \right\} \cos q\varphi =$$
$$= \sum_\nu b_\nu \sin \nu\varphi \left\{ b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \ldots \right\} - \frac{1}{2} \sum_\nu b_\nu^2.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\sum_q \left\{ - \sum_{\nu \neq q} \frac{\nu - q}{|\nu - q|} a_\nu b_{|\nu-q|} + \sum_\nu a_\nu b_{\nu+q} \right\} \sin q\varphi =$$
$$= 2 \sum_\nu a_\nu \cos \nu\varphi \left\{ b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \ldots \right\} =$$
$$= 2 \sum_\nu b_\nu \sin \nu\varphi \left\{ a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots \right\} \cdot$$

Die hier auf den rechten Seiten stehenden vier Doppelreihen sind ebenfalls nach Zeilen und Columnen unbedingt convergente.

Es folgt also, dass die Reihe

$$\mathfrak{A}_0 + \sum_q (\mathfrak{A}_q \cos q\varphi + \mathfrak{B}_q \sin q\varphi),$$

mit den Coefficientenwerten (69), (unbedingt) convergent und dass ihr Wert gleich ist

$$a_0^2 + 2 a_0 \sum_q (a_q \cos q\varphi + b_q \sin q\varphi) +$$
$$+ \sum_\nu \Big[ \quad (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi) \sum_\rho a_\rho \cos \rho\varphi +$$
$$+ (b_\nu \sin \nu\varphi + a_\nu \cos \nu\varphi) \sum_\rho b_\rho \sin \rho\varphi \Big]$$

oder

$$\left\{ a_0 + \sum_\nu a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi) \right\} \cdot \left\{ a_0 + \sum_\rho (a_\rho \cos \rho\varphi + b_\rho \sin \rho\varphi) \right\}.$$

Jede der beiden unbedingt convergenten Reihen $a_0+\sum_\nu(a_\nu \cos\nu\varphi+ +b_\nu \sin\nu\varphi)$, $a_0+\sum_\rho(a_\rho \cos\rho\varphi+b_\rho \sin\rho\varphi)$ stellt aber in der That die Function $\eta$ dar. Somit ist der Satz (69) bewiesen.

Man hat also schließlich

$$\left\{\begin{aligned} -2\psi\int_S \frac{\eta}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma}+\Lambda^0_{n1}\right)d\eta &= \psi\frac{n\pi}{c}\,[2a_0 b_n+D_n(a,b)] \\ -2\psi\int_S \frac{\eta}{c}\cos\left(\frac{-2n\pi\xi}{\gamma}+\Lambda^0_{n2}\right)d\eta &= -\psi\frac{n\pi}{c}\,[2a_0 a_n+C_n(a,b)], \end{aligned}\right.$$

wo

$$C_n=\frac{1}{2}\left(\sum_{\nu\neq n} a_\nu a_{|\nu-n|}+\sum_\nu a_\nu a_{\nu+n}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{\nu\neq n}\frac{\nu-n}{|\nu-n|}\,b_\nu b_{|\nu-n|}+\sum_\nu b_\nu b_{\nu+n}\right),$$

$$D_n=-\sum_{\nu\neq n}\frac{\nu-n}{|\nu-n|}\,a_\nu b_{|\nu-n|}+\sum_\nu a_\nu b_{\nu+n}.$$

In der praktischen Anwendung ist man genöthigt, die Summen in $C_n$, $D_n$ auf die Glieder zu beschränken, bei welchen kein Index größer als $N$ ist. Die Summensymbole $\sum_{\nu\neq n}$, $\sum_\nu$ sollen künftig mit dieser Beschränkung verstanden werden. Für den Fall meines Instrumentes ($N=6$) z. B., ist

$$\begin{aligned}
C_1 &= (a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5+a_5a_6) + (b_1b_2+b_2b_3+b_3b_4+b_4b_5+b_5b_6)\\
C_2 &= \tfrac{1}{2}a_1^2+(a_1a_3+a_2a_4+a_3a_5+a_4a_6) - \tfrac{1}{2}b_1^2+(b_1b_3+b_2b_4+b_3b_5+b_4b_6)\\
C_3 &= a_1a_2+(a_1a_4+a_2a_5+a_3a_6) - b_1b_2+(b_1b_4+b_2b_5+b_3b_6)\\
C_4 &= a_1a_3+\tfrac{1}{2}a_2^2+(a_1a_5+a_2a_6) - b_1b_3-\tfrac{1}{2}b_2^2+(b_1b_5+b_2b_6)\\
C_5 &= a_1a_4+a_2a_3+(a_1a_6) - b_1b_4-b_2b_3+(b_1b_6)\\
C_6 &= a_1a_5+a_2a_4+\tfrac{1}{2}a_3^2 - b_1b_5-b_2b_4-\tfrac{1}{2}b_3^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
D_1 &= (a_1b_2-a_2b_1)+(a_2b_3-a_3b_2)+(a_3b_4-a_4b_3)+(a_4b_5-a_5b_4)+(a_5b_6-a_6b_5)\\
D_2 &= a_1b_1+(a_1b_3-a_3b_1)+(a_2b_4-a_4b_2)+(a_3b_5-a_5b_3)+(a_4b_6-a_6b_4)\\
D_3 &= (a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_4-a_4b_1)+(a_2b_5-a_5b_2)+(a_3b_6-a_6b_3)\\
D_4 &= (a_1b_3+a_3b_1)+a_2b_2+(a_1b_5-a_5b_1)+(a_2b_6-a_6b_2)\\
D_5 &= (a_1b_4+a_4b_1)+(a_2b_3+a_3b_2)+(a_1b_6-a_6b_1)\\
D_6 &= (a_1b_5+a_5b_1)+(a_2b_4+a_4b_2)+a_3b_3.
\end{aligned}$$

**46.** Die completen Formeln zur Corrigierung der rohen Coefficienten $a'_n$, $b'_n$ sind also [vergl. (44)]:

$$
\left.\begin{aligned}
a_n - a'_n = {} & \gamma'_n \cdot \frac{c}{2\pi} B_n \qquad - \gamma''_n \cdot \frac{c}{2\pi} B'_n \\
& - \varkappa'_n . L A'_n \qquad - \varkappa''_n . L A_n \\
& + \varepsilon'_n . n a'_{2n} \qquad - \varepsilon''_n . n (b'_{2n} - b'_n) \\
& + \varepsilon' . \left( \frac{2 \sin \frac{c}{2H}}{\pi} a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_\nu a'_\nu p_{\nu, n} \right) \qquad + \varepsilon'' . \frac{1}{\pi} \sum_\nu b'_\nu q_{\nu, n} \\
& + (h_n + 2n\pi l) . \left\{ -\tfrac{1}{2} b'_n + \frac{1}{n\pi} \left( a_0 + \tfrac{3}{4} a'_n \right) - \frac{n}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2} a'_\nu \right\} \\
& - m_{n1} . a'_n \\
& - \left( \sigma'_{n1} + 2n\pi p - \tfrac{2n\pi a_0}{c} \psi \right) . b'_n \\
& + \psi \cdot \frac{n\pi}{c} D_n(a', b') \\[2ex]
b_n - b'_n = {} & - \gamma'_n \cdot \frac{c}{2\pi} A_n \qquad + \gamma''_n \cdot \frac{c}{2\pi} A'_n \\
& - \varkappa'_n . L B'_n \qquad - \varkappa''_n . L B_n \\
& + \varepsilon'_n . n b'_{2n} \qquad + \varepsilon''_n . n (a'_{2n} - a'_n) \\
& - \varepsilon' . \frac{1}{\pi} \sum_\nu b'_\nu s_{\nu, n} + \varepsilon'' . \frac{1}{\pi} \sum_\nu a'_\nu r_{\nu, n} \\
& + (h_n + 2n\pi l) . \left\{ \tfrac{1}{2} a'_n + \frac{1}{4n\pi} b'_n - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2} b'_\nu \right\} \\
& - m_{n2} . b'_n \\
& + \left( \sigma'_{n2} + 2n\pi p - \tfrac{2n\pi a_0}{c} \psi \right) . a'_n \\
& - \psi . \frac{n\pi}{c} C_n(a', b') \qquad - \omega . \frac{c}{n\pi} .
\end{aligned}\right\} \quad (71)
$$

Es ist aber, wenn man mit $\alpha_n$, $\beta_n$ die durch $n$ dividierten Ablesungen der Rollen über die Contour $\Sigma$ (arithmetischen Mittel aus zwei durch Umdrehung der Rollen unterschiedenen Umfahrungen) bezeichnet,

$$a'_n = \alpha_n \text{ cm}, \qquad b'_n = \beta_n \text{ cm};$$

anderseits, es wurde gesetzt

$$a_n = \mathfrak{a}_n \text{ Cm}, \qquad b_n = \mathfrak{b}_n \text{ Cm}.$$

Setzt man also diese Werte in die Formeln (71) ein, dividiert beiderseits mit 1 Cm und setzt in dem Resultate

$$\frac{1\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{Cm}} = 1 + m,$$

so dass $m$ ein kleiner Bruch erster Ordnung ist, so erhält man schließlich die Formeln für $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{a}_n = \alpha_n & + \gamma_n' \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\pi\,\mathrm{cm}}\right) B_n - \gamma_n'' \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\pi\,\mathrm{cm}}\right) B_n' \\
& - \varkappa_n' \cdot \left(\frac{L}{1\,\mathrm{cm}}\right) A_n' - \varkappa_n'' \cdot \left(\frac{L}{1\,\mathrm{cm}}\right) A_n \\
& + \varepsilon_n' \cdot n\,\alpha_{2n} - \varepsilon_n'' \cdot n(\beta_{2n} - \beta_n) \\
& + \varepsilon' \cdot \left(\frac{2 \sin \frac{c}{2H}}{\pi}\,\alpha_0 + \frac{1}{\pi}\sum_\nu \alpha_\nu p_{\nu,n}\right) + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi}\sum_\nu \beta_\nu q_{\nu,n} \\
& + (h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{-\tfrac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{n\pi}\left(\alpha_0 + \tfrac{3}{4}\alpha_n\right) - \frac{n}{\pi}\sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2}\,\alpha_\nu\right\} \\
& - (m_{n1} - m) \cdot \alpha_n \\
& - \left(\sigma_{n1}' + 2n\pi p - 2n\,\frac{\pi\,\mathrm{cm}}{c}\,\alpha_0 \psi\right) \cdot \beta_n \\
& + \psi \cdot n\,\frac{\pi\,\mathrm{cm}}{c}\,D_n(\alpha, \beta) \\[1ex]
\mathfrak{b}_n = \beta_n & - \gamma_n' \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\pi\,\mathrm{cm}}\right) A_n + \gamma_n'' \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\pi\,\mathrm{cm}}\right) A_n' \\
& - \varkappa_n' \cdot \left(\frac{L}{1\,\mathrm{cm}}\right) B_n' - \varkappa_n'' \cdot \left(\frac{L}{1\,\mathrm{cm}}\right) B_n \\
& + \varepsilon_n' \cdot n\,\beta_{2n} + \varepsilon_n'' \cdot n(\alpha_{2n} - \alpha_n) \\
& - \varepsilon' \cdot \frac{1}{\pi}\sum_\nu \beta_\nu s_{\nu,n} + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi}\sum_\nu \alpha_\nu r_{\nu,n} \\
& + (h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{\tfrac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{4n\pi}\beta_n - \frac{1}{\pi}\sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2 - n^2}\,\beta_\nu\right\} \\
& - (m_{n2} - m) \cdot \beta_n \\
& + \left(\sigma_{n2}' + 2n\pi p - 2n\,\frac{\pi\,\mathrm{cm}}{c}\,\alpha_0 \psi\right) \cdot \alpha_n \\
& - \psi \cdot n\,\frac{\pi\,\mathrm{cm}}{c}\,C_n(\alpha, \beta) - \omega \cdot \frac{1}{n}\,\frac{c}{\pi\,\mathrm{cm}},
\end{aligned}\right\} \quad (72)$$

wo mit $\alpha_0$ das Verhältnis $\frac{\bar{\eta}}{Cm}$ oder $\frac{\bar{\eta}}{cm}$ bezeichnet wurde. Hierbei ist, für mein Instrument, $\frac{c}{\pi\ cm}=\frac{36}{\pi}=11{\cdot}73$, $\frac{L}{1\ cm}=2{\cdot}36$.

Hat man aber, wie man dies wohl immer vorziehen wird, die Fehler $\gamma'_n$, $\gamma''_n$, $\varkappa'_n$, $\varkappa''_n$ schon während der Umfahrungen eliminiert (nach Art. 29.), so bleibt einfach

$$\left.\begin{aligned}
a_n = {} & \alpha_n(1-m_{n1}+m) \quad +\varepsilon'_n . n\alpha_{2n} \quad -\varepsilon''_n . n(\beta_{2n}-\beta_n) \\
& +\varepsilon' . \left(\frac{2\sin\frac{c}{2H}}{\pi}\alpha_0+\frac{1}{\pi}\sum_\nu \alpha_\nu p_{\nu,n}\right) \quad +\varepsilon'' . \frac{1}{\pi}\sum_\nu \beta_\nu q_{\nu,n} \\
& +(h_n+2n\pi l) . \left\{-\tfrac{1}{2}\beta_n+\frac{1}{n\pi}\left(\alpha_0+\tfrac{3}{4}\alpha_n\right)-\frac{n}{\pi}\sum_{\nu\neq n}\frac{1}{\nu^2-n^2}\alpha_\nu\right\} \\
& -\left(\sigma'_{n1}+2n\pi p-2n\frac{\pi\ cm}{c}\alpha_0\psi\right) . \beta_n \\
& -\psi . n\frac{\pi\ cm}{c}D_n(\alpha,\beta) \\
b_n = {} & \beta_n(1-m_{n2}+m) \quad +\varepsilon'_n . n\beta_{2n} \quad +\varepsilon''_n . n(\alpha_{2n}-\alpha_n) \\
& -\varepsilon' . \frac{1}{\pi}\sum_\nu \beta_\nu s_{\nu,n} \quad +\varepsilon'' . \frac{1}{\pi}\sum_\nu \alpha_\nu r_{\nu,n} \\
& +(h_n+2n\pi l) . \left\{\tfrac{1}{2}\alpha_n+\frac{1}{4n\pi}\beta_n-\frac{1}{\pi}\sum_{\nu\neq n}\frac{\nu}{\nu^2-n^2}\beta_\nu\right\} \\
& +\left(\sigma'_{n2}+2n\pi p-2n\frac{\pi\ cm}{c}\alpha_0\psi\right) . \alpha_n \\
& -\psi . n\frac{\pi\ cm}{c}C_n(\alpha,\beta) \quad -\omega . \frac{1}{n}\,\frac{c}{\pi\ cm} .
\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

In diesem Falle werden die Constanten $p$, $\omega$ und $\psi$, welche von der Beziehung zwischen Instrument und Papier abhängen, während der zweiten Umfahrung andere Werte haben, als während der ersten; die Formeln (73) beziehen sich offenbar auf die arithmetischen Mittel der beiden Werte.

**47.** Die Constanten $m$, $l$, $p$, $\psi$, $\omega$ bestimmt man in der folgenden Weise.

Man stellt das Instrument, vor der Analyse, den $\eta$-Linien parallel auf, stellt den Wagenindex einmal auf den Strich 0, dann auf den Strich 360 der Schienentheilung ein, wobei man

jedesmal eine Marke in das Papier drückt, und beobachtet dann auf dem Papier, wie viel Partes mehr als 360 zwischen den Marken enthalten seien. Dieser Überschuss, dividiert durch 360, ist die Constante $m$.

Man verstellt darauf das Instrument in die den $\xi$-Linien parallele Lage und vergleicht in derselben Weise die 360 mm der Schienentheilung mit der Anzahl Partes der $\xi$-Linie. Der Überschuss der letzteren, dividiert durch 360, ist die Constante $l$.

Man drückt, bei zu den $\xi$-Linien paralleler Aufstellung des Instrumentes, eine Marke in das Papier, rollt das Instrument über eine längere Strecke vorwärts und macht wieder eine Marke. Die beobachtete Abnahme der $\xi$-Coordinate von der ersteren zu der zweiten Marke, dividiert durch die Länge der zurückgelegten Strecke, ist die Constante $\psi$. Von dieser Operation einschließlich ab, darf die Aufstellung des Instrumentes selbstverständlich vor der Analyse nicht mehr geändert werden.

Man rollt das Instrument bis der Fahrstift auf der $x'$-Axe steht, stellt den Wagenindex auf den Strich 0, oder einen der benachbarten, der Schienentheilung ein und drückt eine Marke in das Papier; man beobachtet dann, um welchen Bruchtheil einer Pars die Marke entfernt ist nach rechts von dem zugehörigen Strich der $\xi$-Axe. Dieser Bruch, dividiert durch 360, ist die Constante $p$.

Die gleichen vier Operationen wiederholt man in umgekehrter Reihenfolge nach Schluss der Analyse.

Selbstverständlich kann man alle obigen Operationen auch so ausführen, dass man, anstatt den Index auf die Striche der Schienentheilung, die Fahrstiftspitze auf die Striche der Papiertheilung einstellt, die Nichtcoincidenzen dagegen an der Schiene beobachtet. Diese sind dann negativ zu nehmen.

Auch kann man offenbar, anstatt die Constanten $h_n$, $\sigma_{n1}$ (nach 40.) getrennt von den Constanten $l, p$ zu bestimmen, gleich die Verbindungen $h_n+2n\pi l$, $\sigma_{n1}+2n\pi p$ ermitteln; man modificiert zu diesem Zwecke das in 40. angegebene Verfahren insofern, dass man, anstatt den Index auf die Striche 0 und 360 der Schiene einzustellen, die Fahrstiftspitze auf die Striche 0 und 360 der Theilung der $\xi$-Axe einstellt.

Die Constante $\omega$ kann, wohl am bequemsten, während der Analyse selbst bestimmt werden. Man braucht zu diesem Zwecke nur, irgend eine der Sinusrollen über die Theilstrecke $T$ (S. 869) der Umfahrungscontour abzulesen. Die Ablesung ist gleich $-\omega . \frac{c}{\pi \text{ cm}}$.

48. Man sieht ein, dass (in erster Ordnung) nichts geändert wird, wenn man bei den Umfahrungen die Rückkehr vom Endpunkte zum Ausgangspunkte der Curve $C$, anstatt — wie früher angegeben — über die Strecke $T$ und die $x'$-Axe, über die beiden anderen Seiten des auf diesen aufgebauten Parallelogramms ausführt.

## Beispiel.

49. 1899 Juni 11. Probe-Analyse einer Sinusoide; untere Scheiben.

Es war die Curve $\eta = 10 \text{Cm} \times \sin \frac{2\pi\xi}{\gamma}$ gezeichnet worden. Die correcten Werte der Zahlen $a_n$, $b_n$ sind hier also

$$a_n = 0, \qquad b_1 = 10, \quad b_2 = b_3 = 0.$$

Es wurden vier Umfahrungen gemacht, die beiden letzten nach Veränderung der Anfangsablesungen der Rollen um 0·5 gegen die beiden ersten. Die Fehler $\gamma'_n$, $\gamma''_n$, $\varkappa'_n$, $\varkappa''_n$ habe ich diesmal nicht bei den Umfahrungen eliminiert. Zur Reduction sind daher die Formeln (72) anzuwenden. —

Der Analysator wurde behufs Bestimmung der Constante $m$ parallel den $\eta$-Linien gestellt; es wurde, im Mittel aus Messungen in der Nähe der $\eta$-Axe und in der Nähe der Geraden $\xi = \gamma$, die Beziehung gefunden:

$$360 \text{ mm} = 359 \cdot 29 \text{ Mm}.$$

Das Instrument wurde in die zur Ausführung der Umfahrung geeignete Aufstellung gebracht. Es wurde, im Mittel aus directen Messungen in der Nähe der Geraden $\eta = -10$ Cm und solchen in der Nähe der Geraden $\eta = +10$ Cm, der Wert gefunden:

$$-\omega \frac{c}{\pi \text{ cm}} = -0 \cdot 0025.$$

Befahrungen von $y'$-Linien in der Nähe der $y'$-Axe und solche in der Nähe der Geraden $x' = c$ lieferten, durch Beobachtungen des Verhaltens der Fahrstiftspitze relativ zu den $\eta$-Linien des Papieres, im Mittel

$$\psi = -\frac{0 \cdot 04}{300} = -0 \cdot 00013.$$ [1]

Die Kugeln wurden auf die Cylinder heruntergelassen. Befahrungen der $y'$-Linie, welche der Einstellung der Fahrstiftspitze auf den Strich 0 der $\xi$-Axe entsprach, und Mittel aus Befahrungen der beiden $y'$-Linien, welche den Einstellungen der Spitze auf die Striche $-1$ und $+1$ entsprachen, ergaben durch Beobachtungen der Cosinusrollen folgende Mittelwerte:

$$\sigma_{11} + 2\pi p = +0 \cdot 00100,$$
$$\sigma_{21} + 2.2\pi p = +0 \cdot 00053,$$
$$\sigma_{31} + 3.2\pi p = -0 \cdot 00420.$$

Die Verbindung derselben Beobachtungen mit den Beobachtungen, welche gemacht wurden bei unter analogen Einstellungen am anderen Ende des Zeichnungs-Intervalles ausgeführten Befahrungen, ergab:

$$h_1 + 2\pi l = -0 \cdot 0094,$$
$$h_2 + 2.2\pi l = -0 \cdot 0174,$$
$$h_3 + 3.2\pi l = -0 \cdot 0279.$$

Bei den Umfahrungen selbst wurden folgende Ablesungen gefunden:

[1] Die Fehler $\omega$, $\psi$ (die der Beobachter im allgemeinen nicht durch die Aufstellung beliebig klein machen kann, da ihre Differenz durch das Papier bestimmt ist) sind nicht selten mehrere Male so groß, wie hier.

Die Correctionen zu $\alpha_n$, $\beta_n$ sind daher, für das Mittel der Umfahrungen, folgende:

| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ |
|---|---|---|---|
| $+\gamma'_n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\pi\ \mathrm{cm}}\right) B_n - \gamma''_n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\pi\ \mathrm{cm}}\right) B'_n$ | $-0 \cdot 0022$ | 0 | $+0 \cdot 0015$ |
| $-\varkappa'_n \cdot \left(\frac{L}{\mathrm{cm}}\right) A'_n \quad - \varkappa''_n \cdot \left(\frac{L}{\mathrm{cm}}\right) A_n$ | 0 | $-0 \cdot 0004$ | 0 |
| $+\varepsilon'_n \cdot n\alpha_{2n} \quad - \varepsilon''_n \cdot n(\beta_{2n} - \beta_n)$ | $-0 \cdot 0050$ | 0 | 0 |
| $+\varepsilon' \cdot \left(\frac{2\sin\frac{c}{2H}}{\pi}\alpha_0 + \frac{1}{\pi}\sum_\nu \alpha_\nu p_{\nu,n}\right) + \varepsilon'' \cdot \frac{1}{\pi}\sum_\nu \beta_\nu q_{\nu,n}$ | $-0 \cdot 0002$ | $-0 \cdot 0003$ | $+0 \cdot 0003$ |
| $+(h_n + 2n\pi l) \cdot \left\{-\frac{1}{2}\beta_n + \frac{1}{n\pi}\left(\alpha_0 + \frac{3}{4}\alpha_n\right) - \frac{n}{\pi}\sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\nu^2 - n^2}\alpha_\nu\right\}$ | $+0 \cdot 0490$ | 0 | 0 |
| $-(m_{n1} - m) \cdot \alpha_n$ | 0 | 0 | 0 |
| $-\left(\sigma'_{n1} + 2n\pi p - 2n\frac{\pi\ \mathrm{cm}}{c}\alpha_0\psi\right) \cdot \beta_n$ | $-0 \cdot 0128$ | 0 | 0 |
| $+\psi \cdot n\frac{\pi\ \mathrm{cm}}{c} D_n(\alpha, \beta)$ | 0 | 0 | 0 |
| Summe....... | $+0 \cdot 0288$ | $-0 \cdot 0007$ | $+0 \cdot 0018$; |

| | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ |
|---|---|---|---|
| $-\gamma'_n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\pi\ \mathrm{cm}}\right) A_n + \gamma''_n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\pi\ \mathrm{cm}}\right) A'_n$ | 0 | +0·0022 | 0 |
| $-\varkappa'_n \cdot \left(\frac{L}{\mathrm{cm}}\right) B'_n \quad - \varkappa''_n \cdot \left(\frac{L}{\mathrm{cm}}\right) B_n$ | −0·0002 | 0 | −0·0000 |
| $+\varepsilon'_n . n \beta_{2n} \quad + \varepsilon''_n . n(\alpha_{2n}-\alpha_n)$ | 0 | 0 | 0 |
| $-\varepsilon' . \frac{1}{\pi}\sum_\nu \beta_\nu s_{\nu,n} \quad + \varepsilon'' . \frac{1}{\pi}\sum_\nu \alpha_\nu r_{\nu,n}$ | +0·0000 | +0·0002 | −0·0002 |
| $+(h_n+2n\pi l) . \left\{\frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{4n\pi}\beta_n - \frac{1}{\pi}\sum_{\nu \neq n} \frac{\nu}{\nu^2-n^2}\beta_\nu\right\}$ | −0·0078 | −0·0190 | −0·0114 |
| $-(m_{n2}-m) . \beta_n$ | −0·0074 | 0 | 0 |
| $+\left(\sigma'_{n2}+2n\pi p-2n\frac{\pi\ \mathrm{cm}}{c}\alpha_0\psi\right) . \alpha_n$ | 0 | 0 | 0 |
| $-\psi . n\frac{\pi\ \mathrm{cm}}{c} C_n(\alpha,\beta) \quad - \quad \omega . \frac{1}{n}\frac{c}{\pi\ \mathrm{cm}}$ | −0·0020 | −0·0027 | −0·0006 |
| Summe....... | −0·0174 | −0·0193 | −0·0122. |

Es ergibt sich also

$$a_1 = +\ 0\cdot0006 \qquad a_2 = -0\cdot0003 \qquad a_3 = -0\cdot0013$$
$$b_1 = +10\cdot0036 \qquad b_2 = +0\cdot0019 \qquad b_3 = +0\cdot0040.$$

Lässt man jetzt in den Resultaten die letzte Stelle fort, so hat man die folgende vergleichende Zusammenstellung:

| | $a_1$ | $b_1$ | $a_2$ | $b_2$ | $a_3$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Correcte Werte ........ | 0 | +10·000 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Rohe Werte ($\alpha_n$, $\beta_n$)..... | —0·029 | +10·021 | +0·000 | +0·021 | —0·003 | +0·017 |
| Reducierte Werte ...... | +0·001 | +10·004 | —0·000 | +0·002 | —0·001 | +0·004. |

## Inhalts-Übersicht.



# Über Stromunterbrechung, mit besonderer Berücksichtigung des Wehnelt'schen Unterbrechers

von

Dr. **Anton Lampa.**

Aus dem physikalischen Cabinet der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1901.)

In meiner Abhandlung »Eine Studie über den Wehnelt-schen Unterbrecher«[1] habe ich das Phänomen des Öffnungsfunkens einer kurzen Discussion unterzogen. Zweck der folgenden Zeilen ist es, die an jener Stelle gemachten Andeutungen näher zu begründen und einige Betrachtungen allgemeinerer Natur anzuschließen.

Ich betrachte einen Stromkreis, welcher aus einer Stromquelle, einer Selbstinduction und einem Condensator in der durch die nebenstehende Figur 1 dargestellten Anordnung besteht. Die Zuleitungsdrähte zum Condensator seien zu beiden Seiten der Öffnungsstelle angeschlossen, ihr Widerstand heiße $w_2$. Die Öffnungsstelle sei zunächst geschlossen, im Stromkreise fließe ein constanter Strom $J_0 = \frac{E_0}{W}$, worin $E_0$ die elektromotorische Kraft der Stromquelle, $W$ den Gesammtwiderstand des Kreises bedeutet. Die Potentialdifferenz der Condensatorplatten ist also

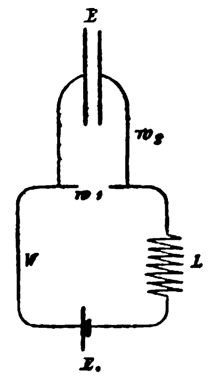


Fig. 1.

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CIX, Abth. IIa., Juli 1900, S. 891—901.

zunächst gleich Null. Nun werde der Stromkreis an der durch $w_1$ bezeichneten Stelle unterbrochen. Wir bemerken zunächst, dass wir den Widerstand der Zuleitungsdrähte zum Condensator $w_2$ als sehr klein voraussetzen wollen; es wird dann die Potentialdifferenz der Elektroden an der Öffnungsstelle stets annähernd dieselbe sein wie diejenige des Condensators. Beim Öffnen des Stromkreises beginnt nun die Ladung des Condensators, deren Verlauf in der bekannten Weise verfolgt werden kann.[1] Es werde die Capacität des Condensators mit $C$, die Potentialdifferenz desselben zur Zeit $t$ mit $E$, die Selbstinduction mit $L$ und der Strom zur Zeit $t$ mit $J$ bezeichnet; da für $t = 0 : E = 0$ und $J = J_0 = \frac{E_0}{W}$, und $w_2$ gegen $W$ vernachlässigt wird, erhält man

$$E = \frac{E_0}{CW\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

und

$$J = \frac{E_0}{W\beta} e^{-\alpha t}[-\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t],$$

worin $\alpha = \frac{W}{2L}$ und $\beta = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{W^2}{4L^2}}$. Hiebei ist vorausgesetzt, dass $\frac{1}{CL} > \frac{W^2}{4L^2}$.

Die Potentialdifferenz des Condensators — somit auch diejenige der Elektroden der Unterbrechungsstelle — ändert sich also nach den Gesetzen einer gedämpften Schwingung. Ihr absolutes (zugleich erstes) Maximum erreicht sie zur Zeit $t_0 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$. Ist dieses Maximum kleiner als die Potentialdifferenz, welche nöthig ist, um die Öffnungsstelle mittels eines Funkens zu durchbrechen, so kommt es überhaupt nicht zur Bildung eines Öffnungsfunkens. Es kann jedoch auch die Höhe des Funkenpotentiales niedriger sein, in welchem Falle der Öffnungsfunken entsteht. Bis zur Erreichung dieses Potentiales verläuft dann der Strom $J$ nach der oben angegebenen Formel;

[1] Vergl. K. R. Johnson, Drude, Annalen der Physik, 2, S. 179 (1900).

von diesem Momente an ist jedoch der Stromverlauf durch complicierte Gesetze bestimmt, die ihn so lange beherrschen, als eine Entladung durch die Funkenstrecke hindurchgeht.

Um eine Orientierung über diese Phase des Vorganges zu gewinnen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Die Zeit, welche vom Momente der Unterbrechung an bis zur Erreichung des Funkenpotentiales verfließt, sei $T$; $T$ ist dabei $< t_0$. Dann ist also das Funkenpotential

$$E_T = \frac{E_0}{CW\beta} e^{-\alpha T} \sin \beta T.$$

Zur Zeit $T$ tritt nun eine Stromverzweigung ein; ein Theil des Stromes fließt zum Condensator, ein Theil zur Funkenstrecke. Während die für den ersteren Theil bestimmenden Umstände leicht anzugeben sind, ist diese Aufgabe für die Funkenstrecke nicht so einfach zu lösen. Der Zusammenhang zwischen Elektrodenspannung und Stromstärke ist in der Funkenstrecke ein complicierter, das Ohm'sche Gesetz gilt für die Funkenstrecke nicht mehr. Für die Zwecke unserer qualitativen Betrachtung begnügen wir uns, von diesen Complicationen absehend, die Sache so anzusehen, als ob im Momente der Erreichung des Funkenpotentials die Öffnungsstelle durch einen selbstinductionslosen Widerstand $w_1$ überbrückt würde; die Stromstärke in diesem Widerstande sei $i_1$. Bezeichnen wir noch die Stromstärke in der aus Stromquelle und Selbstinduction bestehenden Strombahn, deren Widerstand $W$ ist, mit $J$, die Stromstärke in den selbstinductionslosen Zuleitungsdrähten zum Condensator, deren Widerstand $w_2$ sei, mit $i_2$, so wird der Stromverlauf durch das folgende Gleichungssystem bestimmt:

$$J = i_1 + i_2 \qquad 1)$$

$$WJ + w_1 i_1 = -L\frac{dJ}{dt} \qquad 2)$$

$$WJ + w_2 i_2 = -L\frac{dJ}{dt} - E \qquad 3)$$

$$i_2 = C\frac{dE}{dt}. \qquad 4)$$

Hiebei wurde die Potentialdifferenz $E_0$ der Stromquelle vernachlässigt, was zulässig ist; deren Berücksichtigung würde übrigens bloß eine geringfügige Complication der Formeln bedingen.

Die Differentiation von 3) unter Berücksichtigung von 4) ergibt einerseits

$$w_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = -L \frac{d^2 J}{dt^2} - W \frac{dJ}{dt}, \qquad 5)$$

während aus 1) und 2) durch Elimination von $i_1$

$$i_2 = \frac{L}{w_1} \frac{dJ}{dt} + \frac{W+w_1}{w_1} J \qquad 6)$$

folgt. Bestimmen wir noch aus dieser Gleichung $\frac{di_2}{dt}$ und tragen die Werte von $\frac{di_2}{dt}$ und $i_2$ in 5) ein, so erhalten wir nach entsprechender Reduction die Gleichung zur Bestimmung von $J$

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \frac{CW(w_1+w_2)+Cw_1w_2+L}{CL(w_1+w_2)} \frac{dJ}{dt} + \frac{W+w_1}{CL(w_1+w_2)} J = 0. \qquad 7)$$

Mit Hilfe des für $J$ gefundenen Wertes ergibt sich dann aus 6) $i_2$, aus 1) $i_1$ und aus 3) $E$; die Constanten des für $J$ gefundenen Ausdruckes sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen; dieselben lauten, falls wir für diese zweite Phase des Stromverlaufes die Zeitzählung mit dem Momente der Erreichung des Funkenpotentiales beginnen, dass für $t = 0$ einerseits $i_1 = 0$ und $i_2 = J_T$, welche zwei Bedingungen identisch sind, anderseits $E = E_T$ ist.

Die Ströme $J$, $i_1$, $i_2$ sind, wie man sieht, von gleicher Art. Wir werden also zunächst zu untersuchen haben, welcher Art $J$ ist, ob periodisch, aperiodisch oder der Grenzfall zwischen diesen beiden. Wir schreiben zu diesem Zwecke Gleichung 7) in abgekürzter Form

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \lambda \frac{dJ}{dt} + \mu J = 0.$$

Es ist $J = e^{\gamma t}$ eine particuläre Lösung, wo $\gamma$ durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\gamma^2 + \lambda\gamma + \mu = 0,$$

d. i. weiter

$$\gamma = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}.$$

Dann ist $J$ aperiodisch, wenn

$$\frac{\lambda^2}{4} - \mu > 0,$$

periodisch, wenn

$$\frac{\lambda^2}{4} - \mu < 0,$$

der Grenzfall, wenn

$$\frac{\lambda^2}{4} - \mu = 0.$$

Um eine größere Vereinfachung für die weiteren Betrachtungen zu erzielen, bedenken wir, dass $w_2$ sehr klein genommen wurde, also vernachlässigt werden kann. $w_2$ ist direct Null in dem uns interessierenden Falle, dass $C$ die Capacität des Stromkreises $W$, der die Selbstinduction $L$ hat, ist. Es wird dann

$$\lambda = \frac{CWw_1 + L}{CLw_1}$$

und

$$\mu = \frac{W + w_1}{CLw_1},$$

somit

$$\frac{\lambda^2}{4} - \mu = \frac{(CWw_1 + L)^2}{4C^2L^2w_1^2} - \frac{W + w_1}{CLw_1}$$

$$= \frac{(CWw_1 - L)^2 - 4CLw_1^2}{4C^2L^2w_1^2}.$$

Nun haben wir vorausgesetzt, dass $\frac{1}{CL} > \frac{W^2}{4L^2}$, d. i. $L > \frac{W^2C}{4}$. Wir können demnach $L = (1 + \delta)\frac{W^2C}{4}$ setzen,

worin $\delta > 0$. Nehmen wir ferner $W$ als Maßeinheit des Widerstandes und setzen $w_1 = \varkappa W$, so wird

$$\frac{\lambda^2}{4} - \mu = \frac{[4\varkappa - (1+\delta)]^2 - 16\varkappa^2(1+\delta)}{4 W^2 C^2 \varkappa^2 (1+\delta)^2}.$$

Der Nenner dieses Bruches ist eine positive Größe. Das Vorzeichen des Bruches wird demnach durch das Vorzeichen des Zählers bestimmt sein. Zunächst bemerken wir, dass für $\varkappa = \infty$, d. h. einen unendlichen Widerstand der Funkenstrecke, der Bruch sich auf $\frac{-12-16\delta}{4 W^2 C^2 (1+\delta)^2}$, also, da $\delta > 0$, einen negativen Wert reduciert, d. h. $J$, wie es der ersten Voraussetzung entspricht, oscillatorisch ist. Sobald ein Funken auftritt, ist jedoch der Ersatzwiderstand $w_1$ endlich. Suchen wir zunächst jenen Wert von $\varkappa$, für welchen der Stromverlauf während des Bestehens des Funkens den Grenzfall zwischen der periodischen und aperiodischen Form bildet. Für diesen muss $\frac{\lambda^2}{4} - \mu = 0$, d. h.

$$[4\varkappa - (1+\delta)]^2 - 16\varkappa^2(1+\delta) = 0$$

sein. Diese Gleichung ergibt

$$\varkappa = \frac{1+\delta}{4\delta}(\pm\sqrt{1+\delta} - 1).$$

Diese Lösung ist jedoch nur scheinbar eine doppelte. $\varkappa$ ist stets eine positive Größe, es hat also, da $\delta > 0$, nur die Lösung

$$\varkappa_0 = \frac{1+\delta}{4\delta}(\sqrt{1+\delta} - 1) \tag{8}$$

einen physikalischen Sinn. Sie bedeutet, dass der Stromverlauf während der Einschaltung von $w_1$ den Grenzfall zwischen der periodischen und aperiodischen Form bildet. Untersuchen wir nun, was eine Vergrößerung von $\varkappa$ für einen Einfluss auf die Stromform hat. Setzen wir $\varkappa_1 = \varkappa_0 + \sigma$, worin $\sigma$ eine positive Größe ist; wir finden dann mit Rücksicht auf 8)

$$[4\varkappa_1 - (1+\delta)]^2 - 16\varkappa_1^2(1+\delta) = -32\sigma\varkappa_0\delta - 16\sigma^2\delta - 8\sigma(1+\delta),$$

welche Größe negativ ist, da $\sigma$, $\varkappa_0$, $\delta$ positiv sind; d. h. also, der Stromverlauf ist periodisch, wenn

$$\varkappa_1 > \frac{1+\delta}{4\delta}(\sqrt{1+\delta}-1).$$

Eine Verkleinerung von $\varkappa$ unter den Wert von $\varkappa_0$ hingegen bedeutet eine aperiodische Stromform. Setzen wir nämlich $\varkappa_2 = \varkappa_0 - \tau$, so finden wir mit Rücksicht auf 8)

$$[4\varkappa_2-(1+\delta)]^2-16\varkappa_2^2(1+\delta) = 32\tau\varkappa_0\delta-16\tau^2\delta+8\tau(1+\delta);$$

nun kann $\varkappa$ nie negativ werden; es muss also

$$\tau \leqq \varkappa_0, \qquad \tau^2 \leqq \tau\varkappa_0, \quad \text{somit} \quad 16\tau^2\delta \leqq 16\tau\varkappa_0\delta;$$

d. h. der gefundene Ausdruck ist stets positiv, die Stromform aperiodisch.

Zusammenfassend können wir also sagen: Sobald der Funken einsetzt, muss die ursprünglich periodische Stromform nicht nothwendig periodisch bleiben. Sie kann vielmehr eine der drei möglichen Formen annehmen, und zwar wird sie periodisch sein, wenn

$$\varkappa > \frac{1+\delta}{4\delta}(\sqrt{1+\delta}-1),$$

aperiodisch sein, wenn

$$\varkappa < \frac{1+\delta}{4\delta}(\sqrt{1+\delta}-1),$$

den Grenzfall bilden, wenn

$$\varkappa = \frac{1+\delta}{4\delta}(\sqrt{1+\delta}-1).$$

Diese Stromformen werden nun solange bestehen, bis die Potentialdifferenz an der Öffnungsstelle soweit absinkt, dass der Funken erlischt. Von diesem Augenblicke an ist der Stromverlauf wieder durch das einfachere Gleichungssystem bestimmt, das zuerst Thomson für die Entladung eines Condensators aufgestellt hat. Wollte man die Berechnung des weiteren

Vorganges wirklich durchführen, so müsste man die Formeln für $J$, $i_1$, $i_2$ und $E$ aufstellen, die Constanten aus den Anfangsbedingungen bestimmen und mit Hilfe jenes Wertes der Elektrodenspannung, bei welcher der Funken abreißt, den Wert von $J$ für diesen Zeitmoment berechnen, um die Anfangsbedingungen für diese neue Phase zu erhalten. Zu der oben angeführten Schwierigkeit, welche uns veranlasst hat, einen Ersatzwiderstand $w_1$ für die Funkenstrecke einzuführen, wodurch wir uns auf eine qualitative Betrachtung beschränkt haben, träte nun eine neue hinzu, welche dem Umstande entspringt, dass die Elektrodenspannung, bei welcher der Funken abreißt, nicht identisch ist mit jener, bei welcher er einsetzt. Es hätte daher keinen Sinn, die Rechnung in dieser Hinsicht weiterzuführen. Die Möglichkeit einer periodischen Form des Öffnungsfunkens erhellt aber aus den vorstehenden Betrachtungen, und dies ist für unsere Zwecke genügend. Nehmen wir z. B. denjenigen Fall, welcher gerade noch die Ausbildung einer ganzen Schwingung (im weiteren Sinne), also eines Hin- und Herganges im Öffnungsfunken gestattet.

Das erste Maximum würde die Potentialdifferenz an der Unterbrechungsstelle (ohne Auftreten des Funkens) zur Zeit $t_0 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$, das erste Minimum — d. i. also das erste Maximum der Potentialdifferenz mit zu dem ursprünglichen entgegengesetzten Vorzeichen — zu einer Zeit $t_1 = t_0 + \frac{\pi}{\beta}$ erreichen. Wir wollen also annehmen, dass der Wert des Funkenpotentials für den ersten einsetzenden Funken kleiner sei als das erste Minimum $E_{t_1} = \frac{E_0}{C W \beta} e^{-\alpha t_1} \sin \beta t_1$.

Wir haben gesehen, dass durch dauernde Zuschaltung eines Nebenschlusses $w_1 = \varkappa W$ die periodische Stromform erhalten bleibt (natürlich mit Änderung der Periode), wenn nur $\varkappa > \frac{1+\delta}{4\delta}(\sqrt{1+\delta}-1)$; umso weniger wird eine bloß zeitweilige Zuschaltung dieses Nebenschlusses den Charakter der Stromform verändern können. Wir werden also in dem auftretenden Öffnungsfunken mindestens einen Hin- und einen

Hergang, also mindestens eine vollständige (gedämpfte) Schwingung constatieren können.

---

Nachdem die Möglichkeit eines oscillatorischen Charakters des Öffnungsfunkens festgestellt ist, entsteht uns die weitere Aufgabe, das Experiment mit dem Resultate der theoretischen Überlegungen zu vergleichen. Wie ich in meiner eingangs citierten Arbeit erwähnte, erhält man bei der Unterbrechung des Stromkreises mittels eines Stromschlüssels oder eines Hg-Unterbrechers keine merkliche Beeinflussung eines Coherers durch den Unterbrechungsfunken. Diese Unterbrechungsfunken sind also nicht oscillatorisch. Der Grund ist darin zu suchen, dass die Unterbrechung selbst relativ langsam vor sich geht, der Ersatzwiderstand $w_1$ der Funkenstrecke relativ lange Zeit hindurch einen kleinen Wert hat, welcher die Stromform während des Bestehens des Funkens zu einer aperiodischen macht. Sobald nun die Potentialdifferenz an der Unterbrechungsstelle so klein wird, dass der Funke erlischt, tritt zwar in dem Stromkreise wieder die oscillatorische Bewegung der Elektricität auf, doch ist nicht genügend Energie mehr vorhanden, um noch einmal das Funkenpotential zu erreichen. Einen oscillatorischen Charakter des Öffnungsfunkens werden wir somit nur bei möglichst plötzlichen explosionsartigen Unterbrechungen erwarten dürfen. Solche sind beim Wehnelt-Unterbrecher vorhanden und ich fand in der That, dass der Unterbrechungsfunke des Wehnelt-Unterbrechers oscillatorisch ist — allerdings nur, wenn die active Elektrode negativ ist. Bei der normalen Schaltung (active Elektrode positiv) ist der Unterbrechungsfunke ebenfalls nicht oscillatorisch, eine eigenthümliche Thatsache, welche weiter unten noch besprochen werden soll. Die Beobachtungen bei activer negativer Elektrode bestätigen die oben dargelegte Auffassung, dass die Geschwindigkeit der Unterbrechung, die Plötzlichkeit der Einschaltung des Widerstandes $w_1$, von Bedeutung ist. Ich reproduciere hier die diesbezüglichen Beobachtungen. In den Stromkreis des Unterbrechers war ein Inductorium (ohne Condensator) — bei offenem secundären Kreise — geschaltet. Wenn nun die active

der activen Elektrode Einfluss übt. Das Entladungspotential ist ja ceteris paribus höher, wenn die Spitze positiv, als wenn sie negativ ist. Mit der Erreichung eines höheren Potentials an der Öffnungsstelle ist aber ein größerer Potentialabfall bei dem Abklingen des primären Stromes gesichert, und selbst wenn das letztere bei Positivität und Negativität der activen Elektrode gleichartig und gleich schnell verliefe, würde dieser Umstand bei Positivität der activen Elektrode einen größeren Wert der

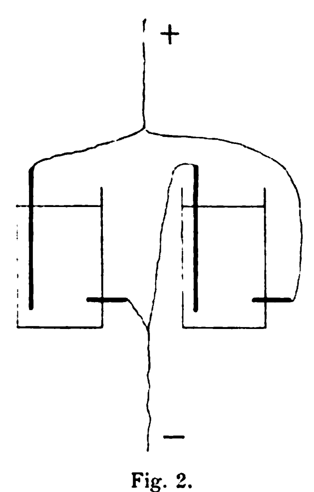


Fig. 2.

maximalen Potentialdifferenz an den Polen des Secundärkreises bedingen.

Auf die Erklärung der eben berührten Thatsache, die Gegenstand so vieler schöner Untersuchungen gewesen ist brauche ich hier nicht näher einzugehen. Doch möchte ich nicht unterlassen, zu erwähnen, dass eine Spitze als Elektrode in einem Elektrolyten ein ganz ähnliches Verhalten zeigt. Herr stud. P. Ehrenfest hat einen diesbezüglichen Versuch gemacht, indem er zwei Wehnelt'sche Unterbrecher parallel, aber entgegengesetzt in denselben Stromkreis schaltete (Fig. 2). Es arbeitet dann stets jener Unterbrecher, bei welchem die active Elektrode negativ ist (die Möglichkeit, den Wehnelt'schen Unterbrecher mit Wechselstrom zu betreiben, steht mit dieser Ventilwirkung im Zusammenhang). Dass hier der Stromdurchgang auch wirklich in jener Zelle einsetzt, in welcher die Spitze

negativ ist — ungleich dem Vorgange in Luft — liegt offenbar in dem Verhalten des Elektrolyten, welches ein einfacheres ist als das der dielektrischen oder sehr schwach leitenden Luft, das, wie schon Faraday gelehrt hat,[1] für die Erscheinung bestimmend ist.

Für den Unterschied im Verhalten der activen Elektrode bei Positivität und Negativität sind aber noch weitere Umstände maßgebend, die zum Theile schon der Funkenentladung in der Luft eigenthümlich, zum Theile durch die besonderen Verhältnisse im Wehnelt'schen Unterbrecher bedingt sind. Was die ersteren anlangt, sei es mir gestattet, eine Stelle aus Faraday's Untersuchungen anzuführen (Exp. Res. XIII, §. 1502): »Wenn man nun eine kleine Kugel mittels einer kräftigen Maschine dahin bringt, dass sie Büschel oder büschelförmige Funken gibt, so kann man den Unterschied, den sie im positiven und negativen Zustande zeigt, einigermaßen verstehen und erklären. Sie gibt bekanntlich im positiven Zustande einen weit größeren und kräftigeren Funken und sie gibt ihn mit größerer Leichtigkeit aus als im negativen; in der That beginnt der Funke, obgleich er so viel mehr Elektricität auf einmal fortnimmt, bei einer nur wenig, wenn überhaupt irgend höheren Spannung. Anderseits kann die Entladung, wenn die Kugel negativ ist, bei geringerer Spannung beginnen, aber sie währt nur eine sehr kurze Zeit, und es geht jedesmal nur sehr wenig Elektricität über. Diese Umstände stehen miteinander in directem Zusammenhange; denn die Ausdehnung, welche der positive Funke erreichen kann, und die Größe und Ausdehnung des positiven Büschels sind Folgen davon, dass bei einer einzigen Entladung viel Elektricität von der positiven Fläche fortgehen kann« (deutsch von Kalischer).

Dieses Verhalten lässt sich so auffassen, als ob die Funkenstrecke bei positiver Spitze einen viel kleineren Widerstand[2] besäße als bei negativer, wodurch aber, gemäß den oben mitgetheilten Betrachtungen, die Entladung bei positiver activer

[1] Exp. Res., Ser. XIII, §. 1480 u. f.

[2] Hier und im folgenden gebrauche ich die Bezeichnung »Widerstand der Funkenstrecke« in dem früher dargelegten Sinne.

Elektrode die aperiodische Form annehmen würde, bei negativer zumindest noch die Bedingungen für das Zustandekommen einer der ersten folgenden Entladung, bei welcher die active Elektrode schon die entgegengesetzte Polarität hat, gegeben wären. Bei dieser zweiten Entladung liegen nun die Verhältnisse auf den ersten Blick so wie bei ursprünglich positiver activer Elektrode, man könnte also erwarten, dass sie aperiodisch vor sich gehen und den ganzen Entladungsvorgang abschließen werde. Nun treten aber, wie man mit dem rotierenden Spiegel sieht, mehrere Oscillationen auf, wenn die active Elektrode negativ ist. Dies würde also dafür sprechen, dass der Widerstand der Funkenstrecke nach dem Durchgange der Halbschwingung noch sehr groß bliebe, so dass also bei der zweiten Halbschwingung, wo die Elektrode positiv wird, auch noch die periodische Stromform erhalten bleiben könnte. Eine solche Nachwirkungserscheinung steht durchaus nicht im Widerspruche mit den sonstigen Erfahrungen über Gasentladungen, insoferne sie selbst in Stromkreisen, wo ohne ihr Vorhandensein continuierliche Strömung vorhanden wäre, Anlass zu oscillierenden Stromformen geben kann.[1]

Was nun die dem Wehnelt'schen Unterbrecher eigenthümlichen Umstände betrifft, so wäre folgendes zu bemerken (ich setze dabei voraus, dass die active Elektrode eine Pt-Spitze, der Elektrolyt verdünnte $H_2SO_4$ sei): Untersucht man die leuchtende Hülle bei Positivität der negativen Elektrode, so zeigt sie die H-Linien; Linien, welche dem Spectrum der Elektrodensubstanz angehören, treten nicht auf. Die Entladung wird also nur durch das Gas vermittelt. Die Gashülle besteht aber aus H und O, da außer der normalen Elektrolyse auch Dissociation des $H_2O$-Dampfes stattfindet. Tritt nun der Funke auf, so wird durch ihn eine Rückbildung des $H_2O$, und durch dessen geringeres Volum und eventuelle Verflüssigung eine Verkleinerung der Funkenstrecke herbeigeführt. Dieser Umstand könnte möglicherweise sogar, selbst wenn die ursprüngliche Funkenstrecke einen so großen Widerstand hätte, dass die Entladung periodisch werden könnte, durch rasche Verminderung dieses Widerstandes die

[1] Vergl. W. Kaufmann, Elektrodynamische Eigenthümlichkeiten leitender Gase. Drude's Ann., 2., S. 177, 178 (1900).

periodische Stromform herbeiführen. Für die Verflüssigung des rückgebildeten $H_2O$-Dampfes ist offenbar auch die Temperatur des umgebenden Elektrolyten von Bedeutung; und es stimmt mit der hier vertretenen Anschauung sehr gut überein, dass mit Steigerung der Temperatur des Elektrolyten die Wirkungsfähigkeit des Unterbrechers abnimmt.

Ist die active Elektrode negativ, so entfällt die günstige Wirkung der Rückbildung des dissociierten $H_2O$-Dampfes. Das Spectrum der Lichthülle zeigt die Linien des H und des Elektrodenmateriales (Pt). Im rotierenden Spiegel sieht man ein nahezu continuierliches, silberglänzendes Lichtband, welches von schwachleuchtenden, röthlichgelben Lichtballen durchsetzt ist. Der Eindruck der Continuität dieses Lichtbandes steigt, wenn an die Unterbrechungsstelle eine größere Capacität angehängt wird. Diese Beobachtungen, sowie die rasche Abnützung führen zu dem Schlusse, dass bei negativer activer Elektrode eine Verdampfung des Elektrodenmateriales stattfindet (hiemit steht in Übereinstimmung, dass bei einer Funkenstrecke die negative Elektrode höhere Temperatur hat als die positive). Das Vehikel für den Entladungsfunken wird somit hier in erster Linie ein Strom von Metalldampf sein, während die Gashülle wenig oder gar nicht in leitenden Zustand versetzt wird. Die Gashülle hindert aber eine rasche Abkühlung des Metalldampfes, so dass auch bei der Umkehr der Stromrichtung noch Metalldampf oder zumindest noch eine hohe Temperatur der Elektrode besteht; dadurch kann aber die Verflüssigung des durch den jetzt auftretenden Funken, der mindestens theilweise das Gas als Leitungsbahn benützt, rückgebildeten $H_2O$-Dampfes verhindert oder verzögert werden. Auf diese Weise findet auch dieser zweite Funke, bei welchem die active Elektrode positiv ist, noch einen genügend großen Widerstand, um die periodische Stromform nicht in die aperiodische zu verwandeln. — Die dem Unterbrecher eigenthümlichen Verhältnisse unterstützen also die Eigenthümlichkeiten der Funkenentladung; durch ihr Zusammenwirken werden jene Verhältnisse geschaffen, welche bei Positivität der activen Elektrode einen aperiodischen, bei Negativität derselben einen periodischen Öffnungsfunken herbeiführen.

Auf die Erläuterung aller hier zur Sprache gebrachten Eigenthümlichkeiten der Funkenentladung einzugehen, würde nicht nur den Rahmen dieser Arbeit überschreiten, sondern hieße auch, die Resultate zahlreicher experimenteller und theoretischer Untersuchungen über die Gasentladungen einfach wiederholen. Ich hoffe jedoch, dass aus den vorstehenden Darlegungen die Berechtigung, die Physik der Gasentladungen zur Aufklärung der Vorgänge im Wehnelt'schen Unterbrecher heranzuziehen, ersichtlich ist; damit ist aber die Aufgabe durchgeführt, welche Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist.

---

# Über die Grenzen zwischen Polymorphie und Isomerie

von

**Rud. Wegscheider.**

Aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juni 1901.)

Der Fall, dass zwei Körper von gleicher chemischer Zusammensetzung verschieden sind, ist ungemein häufig. Sind die beiden Körper flüssig oder gasförmig, so nennt man sie isomer oder polymer, je nachdem ihr Moleculargewicht gleich oder verschieden ist. Soweit diese Fälle bisher genau untersucht sind, kann man den Isomeren immer verschiedene Structurformeln zuschreiben, wobei die Structurverschiedenheit auf Verschiedenheit der Bindungen oder der räumlichen Lagerung beruhen kann. Die Verschiedenheit gleich zusammengesetzter flüssiger oder gasförmiger Stoffe lässt sich daher im Sinne der Atomtheorie immer auf die Verschiedenheit der Molekeln (verschiedene Größe oder verschiedene Anordnung der Atome in gleich großen Molekeln) zurückführen.

Bei festen Körpern von gleicher Zusammensetzung, aber verschiedenen Eigenschaften unterscheidet man dagegen Isomerie, Polymerie und Polymorphie (früher auch als physikalische Isomerie bezeichnet). Im Sinne der Atomtheorie liegt bei Isomeren und Polymeren Verschiedenheit der Molekeln vor. Dagegen kann die Polymorphie als Verschiedenheit der Anordnung gleicher Molekeln betrachtet werden. Es erhebt

sich nun die Frage, wie die Polymorphie experimentell von der Isomerie, beziehungsweise Polymerie unterschieden werden kann.

### Kennzeichen der Polymorphie.

Die Annahme der Polymorphie neben der Isomerie und Polymerie hat selbstverständlich nur dann Berechtigung, wenn es gelingt, Kennzeichen anzugeben, mittels deren polymorphe Formen von Isomeren und Polymeren experimentell unterschieden werden können.

Als ein derartiges Kennzeichen gilt der Umstand, dass bei polymorphen Formen die Verschiedenheit auf den festen Zustand beschränkt ist, dass also polymorphe Formen identische Schmelzen, Lösungen und Dämpfe geben.[1] Daher ist auch zu erwarten, dass aus den Lösungen oder Schmelzen polymorpher Formen beide feste Formen abscheidbar sein müssen, wenn es gelingt, die flüssige Phase in den übersättigten (überkalteten) Zustand überzuführen. Das ist in der That in vielen Fällen beobachtet worden.

Ein zweites Kennzeichen polymorpher Formen wird darin erblickt, dass sie identische Abkömmlinge liefern, während Isomere verschiedene Abkömmlinge geben.[2]

Die beiden erwähnten Kennzeichen stehen im Einklang mit der moleculartheoretischen Auffassung, nach welcher es sich bei Polymorphie um identische, bei Isomerie um verschiedene Molekeln handelt.

### Unzulänglichkeit der vorstehenden Kennzeichen.

Es ist leicht einzusehen, dass das Zutreffen der beiden dargelegten Kennzeichen nicht immer genügt, um das Vorliegen von Isomerie auszuschließen, wenigstens so lange der Isomeriebegriff in seiner gegenwärtigen, aus der Wertigkeitslehre hervorgegangenen Bedeutung gebraucht wird.

Die neueren Untersuchungen auf dem Gebiete der organischen Chemie haben zahlreiche Beispiele von Isomeren

---

[1] Vergl. Ostwald, Grundriss der allg. Chemie, 3. Aufl., S. 232.

[2] Vergl. Ostwald, Lehrb. der allg. Chemie, 2. Aufl. II[2], S. 402—403.

kennen gelehrt, welche sich leicht ineinander umwandeln lassen. Innerhalb einer Gruppe von Körpern, welche die gleiche umwandlungsfähige Atomgruppe enthalten, wird die Leichtigkeit der Umwandlung sehr wesentlich beeinflusst durch jene Radicale, welche mit der umwandlungsfähigen Gruppe verbunden sind. So wird beispielsweise die gegenseitige Umwandelbarkeit der stereoisomeren Oxime

$$\begin{array}{c} X-C-Y \\ \| \\ N-OH \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} X-C-Y \\ \| \\ OH-N \end{array}$$

durch die Natur der Reste $X$ und $Y$ in hohem Maße beeinflusst.[1] Die stereoisomeren Benzaldoxime sind im reinen Zustande verhältnismäßig recht beständige Körper;[2] es ist nicht allzu schwierig, aus ihnen isomere Abkömmlinge zu erhalten. Demgemäß ist es nicht zweifelhaft, dass es sich um Isomerie handelt. Von der β-Benzoylpropionsäure sind ebenfalls zwei Oxime (Phenylketoximpropionsäuren) bekannt.[3] Hier lagert sich aber die labile (Anti-) Form im festen Zustande rasch in die stabile Form um; isomere Abkömmlinge sind nicht dargestellt. Man könnte daher in diesem Falle Polymorphie annehmen, wenn nicht durch die Leitfähigkeitsbestimmungen von Hantzsch und Miolati[4] die Verschiedenheit der Lösungen nachgewiesen wäre.

Es ist aber wohl denkbar, dass bei Isomeren die Umlagerung auch in Lösung so rasch vor sich geht, dass die Verschiedenheit der Lösungen nicht mehr nachweisbar ist. So hat man entsprechend den Ausführungen von Hantzsch[5] allen Grund, anzunehmen, dass das Dinitroäthankalium das Salz einer Säure $CH_3-C(NO_2)=NO_2H$, das freie Dinitroäthan dagegen ein wahrer Dinitrokörper ist. Beim Ansäuern der Lösung des Dinitroäthankaliums geht aber die frei werdende

[1] Hantzsch, Ber. der Deutschen chem. Ges. XXV, 2164 [1892].
[2] Vergl. Beckmann, Ber. der Deutschen chem. Ges. XXIII, 1686 [1890].
[3] Dollfus, Ber. der Deutschen chem. Ges. XXV, 1932 [1892].
[4] Zeitschrift f. physikal. Chemie, X, 24 [1892].
[5] Ber. der Deutschen chem. Ges. XXXII, 575 [1899].

Säure so rasch in den Dinitrokörper über, dass die Verschiedenheit der Lösungen der beiden Isomeren kaum nachweisbar ist;[1] die schwachen Anzeichen der Verschiedenheit der Lösungen von Dinitroäthan und *i*-Dinitroäthan würden kaum als beweiskräftig gelten können, wenn nicht in ähnlichen Fällen das Vorliegen von Isomerie mit voller Sicherheit nachgewiesen wäre.

Die angeführten Beispiele genügen wohl, um zu zeigen, dass es Isomere gibt, die sich außerordentlich leicht ineinander umwandeln. Es kann daher auch die Möglichkeit nicht als ausgeschlossen betrachtet werden, dass zwei Isomere in fester Form darstellbar sind, die wegen der Leichtigkeit der Umlagerung durchwegs identische Abkömmlinge liefern und bei denen auch der Nachweis der Verschiedenheit der Schmelzen, Lösungen oder Dämpfe nicht gelingt.

Es ist daher vollkommen zulässig, Isomerie auch in Fällen anzunehmen, wo weder die Überführung in isomere Abkömmlinge, noch der Nachweis der Verschiedenheit von Schmelzen und Lösungen gelingt, wenn in anderen analogen Fällen das Vorliegen von Isomerie nachgewiesen ist. Demgemäß habe ich z. B. die beiden Formen des Protocatechualdehydphenylhydrazons als stereoisomer aufgefasst,[2] obwohl die Beobachtungen auch mit der Annahme von Polymorphie verträglich waren.

Man muss daher sagen: Es existiert keine scharfe Grenze zwischen Isomerie und Polymorphie. In noch höherem Maße als bei organischen Körpern gilt das bei anorganischen. Die Zahl der Isomerien bei anorganischen Stoffen ist verhältnismäßig sehr klein. Man muss daher annehmen, dass anorganische Isomere in der Regel nicht existenzfähig sind, da die Umwandlung in die stabile Form zu rasch erfolgt. Demgemäß wird man nur in seltenen Fällen erwarten dürfen, aus anorganischen Isomeren isomere Abkömmlinge zu bekommen. Die Identität der Abkömmlinge ist also bei anorganischen Körpern kein Beweis gegen das Vorliegen von Isomerie. Man ist daher

[1] Hantzsch und Veit, Ber. der Deutschen chem. Ges. XXXII, 626 [1899].

[2] Monatshefte für Chemie, XIV, 386 [1893]; XVII, 250 [1896].

wesentlich auf die Untersuchung der Identität von Schmelzen und Lösungen angewiesen; auch da muss aber die Möglichkeit zugegeben werden, dass isomere Stoffe infolge Eintretens einer Umlagerung identische Schmelzen und Lösungen geben.

## Berechtigung des Polymorphiebegriffes.

Angesichts der Unsicherheit der Abgrenzung zwischen Polymorphie und Isomerie muss die Frage aufgeworfen werden, ob denn die Abtrennung der Polymorphie von der Isomerie wissenschaftlich überhaupt von Nutzen ist. Das eine ist klar, dass der Nutzen der Abtrennung mit Recht bestritten werden kann, wenn sie nur darauf beruht, dass man sich für die Verschiedenheit zweier gleich zusammengesetzter fester Körper zwei verschiedene theoretische Anschauungen zurechtlegen kann (Verschiedenheit der Molekeln und Verschiedenheit der Anordnung der Molekeln), ohne dass die Thatsachen einen entsprechenden Unterschied erkennen lassen. Zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage ist es von Nutzen, sich klar zu machen, auf welchen Grundsätzen die Eintheilung der Stoffe überhaupt beruht.

Die Verschiedenheit der Körper wird durch die Verschiedenheit ihrer Eigenschaften erkannt. Demgemäß unterscheidet man zunächst homogene und inhomogene Körper. Die Erfahrung ergibt ferner, dass die Eigenschaften homogener Körper durch Änderung der äußeren Bedingungen innerhalb gewisser Grenzen stetig verändert werden können, ohne dass dabei die Homogenität gestört wird oder die chemische Zusammensetzung sich ändert. Wir fassen nun Körper, welche unter denselben äußeren Bedingungen dieselben Eigenschaften annehmen und deren Eigenschaften ohne Störung der Homogenität und ohne Änderung der chemischen Zusammensetzung ineinander übergeführt werden können, zu einer Art zusammen. So betrachten wir festes Silber bei 0° und bei 600° als denselben Körper, obwohl die Eigenschaften sehr wesentliche Verschiedenheiten aufweisen. Die so erhaltenen Arten von Körpern zerfallen wieder in Lösungen und chemische

Individuen.[1] Die weitere Eintheilung der chemischen Individuen erfolgt nach ihrer chemischen Zusammensetzung, d. h. nach den Elementen, aus denen sie bestehen, und weiter nach den Gewichtsverhältnissen, in denen sie die Elemente enthalten.

Nun gibt es aber zahlreiche Körper von gleicher chemischer Zusammensetzung, die nicht in eine Art zusammengefasst werden können, entweder weil sie sich nicht in der erwähnten Weise stetig in einander überführen lassen, oder weil sie unter gleichen äußeren Bedingungen verschiedene Eigenschaften behalten. Eine weitere Eintheilung derartiger Körper nehmen wir nun in folgender Weise vor. Wir fassen chemische Individuen von gleicher Zusammensetzung zu einem Stoffe zusammen, wenn sie verschiedene Formart (Aggregatzustand) haben, aber unter Änderung der Formart und entsprechender unstetiger Änderung der Eigenschaften ineinander überführbar sind; diese Zusammenfassung rechtfertigt sich dadurch, dass solche Körper verwandte chemische und auch physikalische Eigenschaften besitzen, soweit es die Verschiedenheit der Formart zulässt.

Die Zusammenfassung flüssiger und gasförmiger, in einander verwandelbarer chemischer Individuen von gleicher Zusammensetzung zu einem Stoffe lässt sich noch insbesondere dadurch begründen, dass in diesen Fällen auch eine Umwandlung unter stetiger Änderung der Eigenschaften (durch Überführung in den kritischen Zustand) möglich ist. Es wird also hier derselbe Gesichtspunkt benutzt, der dazu geführt hat, festes Silber von verschiedenen Temperaturen als einen Körper zu betrachten. Die Erfahrung lehrt nun, dass fast immer mit einem gasförmigen Körper nur ein flüssiger Körper zu einem Stoff zusammengefasst werden kann. In den wenigen Fällen, wo zu einem Gase mehrere Flüssigkeiten zu gehören scheinen, kann man immer annehmen, dass die Flüssigkeiten als verschiedene Stoffe zu betrachten sind. Die Identität der Dämpfe lässt sich dann so deuten, dass die zu den verschiedenen Flüssigkeiten gehörenden verschiedenen Dämpfe

[1] Bezüglich der Definition der chemischen Individuen siehe Ostwald Grundriss der allg. Chemie, 3. Aufl., S. 374.

ineinander umwandelbar sind, sei es, dass sich ein Gleichgewicht einstellt, oder dass einer der beiden Dämpfe nicht existenzfähig ist. Durch die gemachten Annahmen ist man also in vereinzelten Fällen zur Annahme hypothetischer, nicht realisierbarer Dämpfe genöthigt; aber gegenüber der erzielten Vereinfachung der Eintheilung der Stoffe kommt dieser Nachtheil nicht in Betracht.

Viel verwickelter sind die Beziehungen zwischen der flüssigen und der festen Formart. Man macht sehr häufig die Erfahrung, dass es mehrere feste Körper gibt, welche auf Grund der angegebenen Gesichtspunkte mit derselben Flüssigkeit zu einem Stoffe zusammengefasst werden können. Würde man nun wieder die Annahme machen, dass solche feste Körper verschiedene Stoffe sind, so müsste man eine große Zahl von hypothetischen, nicht realisierbaren Flüssigkeiten annehmen.

Dem kann man entgehen, wenn man die Zusammenfassung durch die Formart unterschiedener chemischer Individuen zu einem Stoffe, oder die damit zusammenfallende Annahme, dass jeder Stoff in drei Formarten existieren könne, aufgibt. Hiedurch würde man aber eine Vereinfachung der Systematik der Stoffe fallen lassen, welche sich als sehr nützlich erwiesen hat. Es ist daher viel sachgemäßer, anzunehmen, dass eine Flüssigkeit mit mehreren festen Körpern zu einem Stoffe zusammengefasst werden kann. Diese Annahme rechtfertigt sich auch dadurch, dass für Formartsänderungen und Umwandlungen fester Körper ineinander, die zur selben Flüssigkeit gehören, dieselben Gesetze gelten. Die verschiedenen festen Körper, welche zu einer und derselben Flüssigkeit gehören, können ebenfalls als verschiedene Formarten eines Stoffes betrachtet werden. Es ist also nur folgerichtig, derartige feste Körper zu einem Stoffe zusammenzuziehen, wenn man das bei zusammengehörigen Flüssigkeiten und Gasen thut.

Feste Körper, welche mit derselben Flüssigkeit zu einem Stoffe vereinigt werden können, nennt man nun polymorphe Formen. Die Berechtigung der Einführung des Polymorphiebegriffes ergibt sich aus dem Vorhergegangenen. Ebenso ergibt sich daraus das erste früher erwähnte Kennzeichen der Poly-

morphie, dass nämlich die Schmelzen, Lösungen und Dämpfe polymorpher Formen identisch sind.

Eine weitere Rechtfertigung des Begriffes der Polymorphie liegt darin, dass die ausgesprochenen Fälle von Polymorphie von den charakteristischen Beispielen von Isomerie wirklich auffällig verschieden sind. Als isomer im weitesten Sinne wird man Körper zu betrachten haben, welche trotz gleicher chemischer Zusammensetzung nicht zu einem Stoffe zusammengefasst werden können, weil sie im flüssigen oder gasförmigen Zustand unter gleichen äußeren Bedingungen verschiedene Eigenschaften haben. Betrachtet man nun einerseits die polymorphen Formen des Benzophenons, anderseits Methyläther und Äthylalkohol, so fällt auf, dass die polymorphen Formen identische Abkömmlinge geben, Isomere dagegen in der Regel verschiedene. Gerade dieser Unterschied berechtigt, polymorphe Formen als denselben Stoff im Sinne des Chemikers zu betrachten, Isomere dagegen als verschiedene Stoffe. Die Beschreibung der chemischen Eigenschaften der Körper wird durch diese Gruppierung sehr vereinfacht. Hieraus ergibt sich auch das zweite, früher erwähnte Kennzeichen zur Unterscheidung von Isomerie und Polymorphie. Beide eingangs erwähnten Kennzeichen hängen also mit dem Begriffe der Polymorphie innig zusammen.

Hienach ist die Einführung des Polymorphiebegriffes als zweckmäßig zu bezeichnen, obwohl die Grenzen zwischen Isomerie und Polymorphie nicht scharf sind. Die Zweckmäßigkeit beruht darauf, dass durch die Zusammenfassung von Körpern in verschiedenen Formarten zu einem Stoffe die Eintheilung der Körper und die Beschreibung ihrer Eigenschaften, insbesondere auch der chemischen, sehr vereinfacht wird und dass durch den Polymorphiebegriff die Annahme einer großen Anzahl rein hypothetischer Flüssigkeiten und Dämpfe erspart wird, wenn die ersterwähnte Zusammenfassung durchgeführt wird.

Diesen Gesichtspunkten trägt der radicale Standpunkt nicht Rechnung, den Lehmann[1] formuliert hat, indem er sagt:

[1] Molecularphysik II, 413, Leipzig, Engelmann, 1889.

»1. Kein Körper besitzt mehr als eine Krystallform, oder zeigen zwei Körper verschiedene Krystallformen, so sind sie chemisch verschieden...«

»2. Kein Körper besitzt mehr als einen Aggregatzustand; die sogenannten drei Aggregatzustände eines Körpers sind thatsächlich drei chemisch verschiedene Körper«.

Hiezu ist zu bemerken, dass polymorphe Formen und Körper in verschiedenen Formarten zweifellos verschiedene Energieinhalte haben und insoferne als chemisch verschieden betrachtet werden können. Aber dasselbe gilt auch für Körper, die sich bei gleicher Krystallform oder gleicher Formart bloß durch die Temperatur unterscheiden; auch hier kann man chemische Verschiedenheit annehmen. Thut man das nicht, so ist es auch beim Übergange vom flüssigen zum gasförmigen Zustande nicht nothwendig, zumal dieser Übergang geradeso wie die bloße Temperaturänderung stetig erfolgen kann. Es liegt aber auch kein ausreichender Grund vor, die Beziehungen zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten, oder zwischen polymorphen Formen anders zu behandeln, als die zwischen Flüssigkeiten und Gasen, zumal in keinem dieser Fälle stetige Übergänge als ausgeschlossen betrachtet werden können.

Wie man die chemische Verschiedenheit definieren soll, ist eine Zweckmäßigkeitsfrage, sobald man von dem grundsätzlich gewiss richtigen Standpunkte abgeht, dass nur Körper von in jeder Beziehung gleichen Eigenschaften chemisch identisch sind. Jedenfalls ist die chemische Verschiedenheit bei Isomeren in der Regel von ganz anderer Art als bei Körpern, die sich durch die Temperatur, die Krystallform oder den Aggregatzustand unterscheiden.

## Die Beziehungen der Polymerie zur Isomerie und Polymorphie.

Ein im vorhergehenden nicht berücksichtigtes Eintheilungsprincip für Körper von gleicher Zusammensetzung liefert das Moleculargewicht. Stellt man sich auf den Standpunkt, dass chemische Verschiedenheit auf Verschiedenheit der Molekeln beruht, so muss man Polymere als chemisch verschieden ansehen. Es ist kein Zweifel, dass diese Auffassung

bei der Benützung der Formeln der chemischen Dynamik nothwendig ist.

Bei der chemischen Eintheilung der Körper stellt man sich dagegen keineswegs immer auf diesen Standpunkt. Man betrachtet allerdings Polymere, wie Äthylen und Butylen, als verschiedene Stoffe, also Polymere, die sich chemisch verschieden verhalten und bei denen die Polymerie auch unter gleichen äußeren Bedingungen und bei gleicher Formart erhalten bleibt. Dagegen betrachtet man flüssiges Wasser und Wasserdampf trotz der Verschiedenheit des Moleculargewichtes als denselben Stoff, ebenso gasförmige und flüssige oder gelöste Essigsäure, obwohl das Moleculargewicht im Gaszustande veränderlich und in Lösung von der Natur des Lösungsmittels abhängig ist. Man unterscheidet also, obwohl es vielleicht nie ausdrücklich ausgesprochen worden ist, zwei Arten von Polymerie, eine, welche die Annahme chemischer Verschiedenheit begründet (also zur chemischen Isomerie im weitesten Sinne gehört), und eine, welche mit der Annahme identischer Stoffe verträglich ist. Es ist nicht schwer, sich atomistische Vorstellungen über diese zwei Arten von Polymerie zu machen. Ich gehe darauf nicht ein, sondern will nur hervorheben, dass nach den herrschenden Anschauungen das Vorliegen von Polymerie die Annahme desselben Stoffes und daher auch die Annahme von Polymorphie nicht ausschließt. Stoffe, die zugleich polymorph und polymer sind, sind vielleicht die polymorphen Formen der Nitrate von Kalium und Ammonium.[1]

## Weitere Kennzeichen zur Unterscheidung von Isomerie und Polymorphie.

Die Erörterungen des vorletzten Abschnittes haben die Beibehaltung des Begriffes der Polymorphie als zweckmäßig erscheinen lassen. Anderseits ist aber gezeigt worden, dass die bisher erwähnten Kennzeichen zur Unterscheidung von Polymorphie und Isomerie keine scharfe Abgrenzung geben. Es ist daher wünschenswert, noch andere derartige Kennzeichen ins Auge zu fassen.

---

[1] Wolf Müller, Zeitschrift f. physikal. Chemie, XXXI, 354 [1899].

Ein derartiges Kennzeichen hat Schaum[1] hervorgehoben, indem er sagt: »Das Charakteristische für die Polymorphie krystallisierter Phasen ist die Umwandlungsfähigkeit derselben im krystallisierten Zustande«. Ich kann jedoch die Bedeutung dieses Kennzeichens nicht so hoch veranschlagen wie Schaum. Man wird ihm vielleicht mit einigem Vorbehalt zustimmen können, wenn er sagt: »Diejenigen Fälle, welche eine solche Umwandlung unter keinen Umständen zeigen, wird man zur chemischen Isomerie rechnen müssen«. Dagegen scheint es mir zu weit zu gehen, wenn Schaum in der Einleitung der erwähnten Abhandlung[2] sagt: »Bei genauer Betrachtung des Wesens der beiden Isomeriearten« (der physikalischen und chemischen) »lässt sich jedoch ein sicheres Kriterium ausfindig machen, welches in allen Fällen eine directe Entscheidung ermöglicht«. Welches Kennzeichen damit gemeint ist, ergibt sich aus der zuerst angeführten Stelle und insbesondere aus folgendem Satze:[3] »Von diesen« (den polymorphen Formen) »unterscheiden sich aber die gleichgewichtsisomeren« (tautomeren) »Körper durch die Unmöglichkeit der Umwandlung im krystallisierten Zustande bei Ausschluss jeglicher Spur eines Lösungsmittels«.

Ich glaube nicht, dass die Umwandlungsfähigkeit im festen Zustande bei Ausschluss jeder Spur von Lösungsmitteln eine charakteristische Eigenschaft der polymorphen Formen ist. In der Literatur findet sich eine nicht unerhebliche Anzahl von Angaben über Umlagerungen von unzweifelhaften Isomeren ineinander im festen Zustande. Es ist schwer anzunehmen, dass da immer etwas Lösungsmittel im Spiele gewesen ist. Das α-Acetyldibenzoylmethan z. B. lagert sich nach Claisen[4] auch in reinem Zustande in die β-Form um. Bei dem bereits erwähnten labilen Oxim der β-Benzoylpropionsäure[5] wird ausdrücklich angegeben, dass die Umwandlung auch im Exsiccator erfolgt, wenn auch etwas langsamer als an der Luft. Beim

[1] Liebig's Ann., *300*, 218 [1898].
[2] S. 206.
[3] S. 223.
[4] Liebig's Ann., *291*, 74, 83 [1896].
[5] Dollfus, Ber. der Deutschen chem. Ges. XXV, 1934 [1892].

*p*-Bromphenylnitromethan scheint die Umlagerung an der Luft und im Exsiccator sogar gleich schnell zu erfolgen;[1] in diesem Falle liegt wahrscheinlich nicht nur Structurverschiedenheit, sondern außerdem Polymerie vor. Ich glaube daher, dass die Umwandlung im festen Zustande bei Ausschluss von Lösungsmitteln auch bei Isomeren vorkommt. Der Umstand, dass Schaum[2] in einem Falle (beim *m*-Nitro-*p*-Acettoluid) nachgewiesen hat, dass die Umlagerung der beiden Formen nicht im trockenen Zustande, wohl aber bei Gegenwart von Alkohol eintritt, scheint mir kein genügender Beweis dafür, dass bei isomeren Stoffen Umlagerung im trockenen Zustande nie eintreten kann.

Außerdem ist noch ein weiterer Gesichtspunkt in Betracht zu ziehen. Die Umlagerungsgeschwindigkeit hängt sowohl bei isomeren, als bei polymorphen Körpern von den Umständen (Spuren von Verunreinigungen u. dergl.) ab. Insbesondere kommt auch der Fall vor, dass die Umlagerung in trockenem Zustande leichter geht als bei Gegenwart eines Lösungsmittels. So lässt sich die niedrig schmelzende Form der α-Hemipinmethylestersäure im getrockneten Zustande ohne Schwierigkeit durch Verreiben mit der hochschmelzenden Form in letztere umlagern. Dagegen trat keine erhebliche Umlagerung ein, als die niedrigschmelzende Form neben einem Krystall der hochschmelzenden Form eine Woche unter Benzol stand.[3] Da somit die Umwandlungsgeschwindigkeit von Umständen, die man als Zufälligkeiten bezeichnen kann, in hohem Maße und in vorläufig regelloser Weise abhängt, glaube ich nicht, dass sich auf Unterschiede in der Umwandlungsgeschwindigkeit ein in allen Fällen sicheres Kennzeichen gründen lässt.

Auch der Fall ist denkbar, dass bei polymorphen Formen die Umwandlung im trockenen Zustande erst bei Temperaturen eintreten würde, bei denen die betreffenden Körper nicht mehr chemisch unzersetzt oder nicht mehr fest bleiben. Würde z. B.

---

[1] Hantzsch und Schultze, Ber. der Deutschen chem. Ges. XXIX, 2255 [1896].

[2] S. 224.

[3] Wegscheider, Monatshefte für Chemie, XVIII, 591—593 [1897].

Calciumcarbonat schon bei 300° in Kalk und Kohlendioxyd zerfallen, so könnte der thatsächlich bei dieser Temperatur eintretende Übergang von Arragonit in Kalkspath nicht beobachtet werden. Man würde dann nach dem Schaum'schen Kriterium die beiden Körper als chemisch isomer aufzufassen haben, da Arragonit sich zwar im frisch gefällten feuchten Zustande, aber nicht im getrockneten Zustande bei niedrigen Temperaturen in Kalkspath verwandelt.[1] Und doch spricht gerade in diesem Falle die Gleichartigkeit des chemischen Verhaltens für Polymorphie.

Ich halte es wohl für möglich, dass das Schaum'sche Kennzeichen in vielen Fällen zutreffen wird. Aber es lässt vielleicht die Möglichkeit von Irrthümern nach beiden Richtungen zu, was bei anderen Kennzeichen nicht im gleichen Maße der Fall ist.

Bei dieser Sachlage ist es jedenfalls wünschenswert, noch nach anderen Kennzeichen zur Unterscheidung von Isomerie und Polymorphie zu suchen. Einige derartige Kennzeichen will ich im folgenden besprechen, und zwar die Schmelzpunkte, Löslichkeiten, Dampfspannungen, das chemische Verhalten und die Krystallisationsgeschwindigkeit der Schmelzen und Lösungen.

## Schmelzpunkte isomerer und polymorpher Körper.

Es ist eine experimentell festgestellte und theoretisch begründete Thatsache, dass von zwei polymorphen Formen die in der Nähe des Schmelzpunktes stabile den höheren Schmelzpunkt hat.[2] Der theoretische Beweis ergibt sich aus nachstehender Figur 1, in der die Abscissen Temperaturen, die Ordinaten Drucke und die Curven I, II und III Dampfdruckcurven sind. I und II beziehen sich auf die beiden polymorphen Formen, III auf die dazugehörige Flüssigkeit. Da jene Körper

[1] Vergl. Ostwald, Lehrhuch der allg. Chemie, 2. Aufl., I., 946.

[2] Vergl. Lehmann, Molecularphysik, I, 688 (Leipzig, Engelmann, 1888); Ostwald, Lehrbuch der allg. Chemie, 2. Aufl., II², S. 442; — derselbe, Grundriss der allg. Chemie, 3. Aufl., 184; Van t'Hoff, Vorlesungen über theoretische und phys. Chemie, 2. Heft, S. 126.

stabiler sind, welche bei der betreffenden Temperatur den kleineren Dampfdruck haben, sind die Schmelzpunkte die Schnittpunkte der Dampfdruckcurven der festen und flüssigen Körper. Die Dampfdruckcurven steigen nothwendig mit der Temperatur an. Daher muss die Dampfdruckcurve jener festen Modification, welche in der Nähe des Schmelzpunktes den höheren Dampfdruck hat und daher labil ist, mit der Dampfdruckcurve der Flüssigkeit bei niedrigerer Temperatur zum Schnitt kommen, als die Dampfdruckcurve der zweiten festen

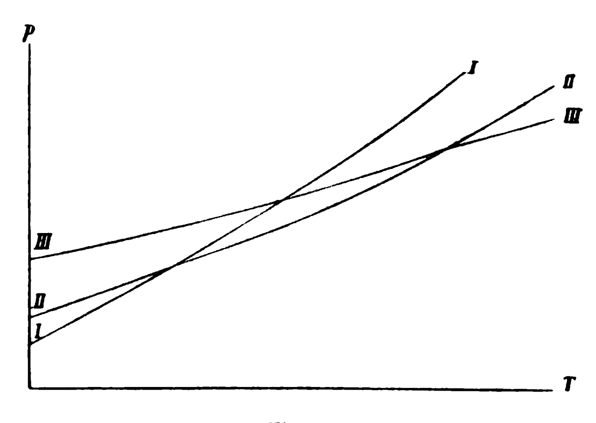



Fig. 1.

Modification. Daraus folgt der niedrigere Schmelzpunkt der in Nähe des Schmelzpunktes labilen Form.

Dieser Schluss lässt sich nur bei polymorphen Körpern durchführen. Als polymorphe Formen werden dabei feste Körper betrachtet, welche identische Flüssigkeiten und Dämpfe liefern. Dagegen ist der Schluss nicht mehr durchführbar, wenn man zwei feste Körper voraussetzt, welche verschiedene Schmelzen (wenn auch von gleicher Zusammensetzung) oder gar verschiedene Dämpfe geben, also isomer, nicht polymorph sind.

Wenn die Dämpfe verschieden sind, so kann überhaupt nicht aus dem größeren Dampfdruck auf die größere Labilität geschlossen werden.

Nimmt man aber an, dass die Dämpfe identisch, die Flüssigkeiten jedoch verschieden sind, so bekommt man nachstehende

graphische Darstellung (Fig. 2). Sind I und II die Dampfdruckcurven der festen Körper, III und IV die der Flüssigkeiten, so sind zwei Fälle möglich. Beziehen sich die Curven I und III, ferner II und IV auf zusammengehörige Stoffe, so sind die Schmelztemperaturen die Abscissen der Punkte *B* und *D*. In diesem Falle hat die stabile feste Form I den tieferen Schmelzpunkt. Gehören dagegen die Curven II und III, ferner I und IV zusammen, so sind die Schmelztemperaturen die

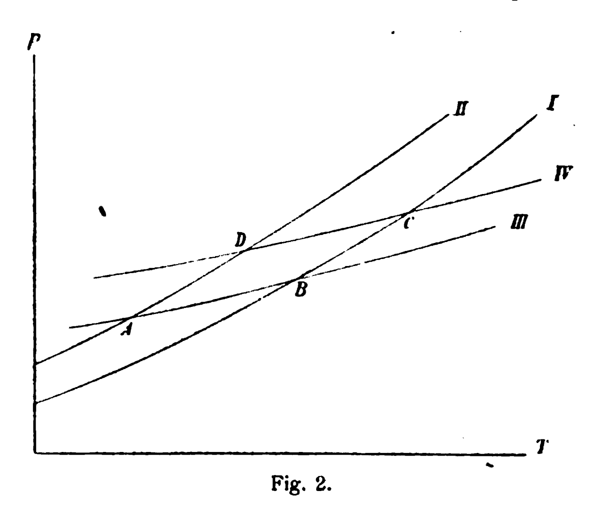



Fig. 2.

Abscissen der Schnittpunkte *A* und *C*. Dann hat von den beiden Isomeren die labile Form den tieferen Schmelzpunkt, geradeso wie bei polymorphen Formen.

Fälle, in denen die im festen Zustande labile Form den höheren Schmelzpunkt hat, sind in der That bekannt. Ich erinnere nur an die beiden Benzaldoxime[1] und an die Phenylnitromethane und *p*-Bromphenylnitromethane.[2]

Man kann daher Folgendes sagen: Liegt der Schmelzpunkt der in der Nähe des Schmelzpunktes *labilen* Form *höher* als der Schmelzpunkt der unter gleichen Umständen stabilen Form, so handelt es sich sicher

---

[1] Beckmann, Ber. der Deutschen chem. Ges. XXIII, 1680 [1890], und frühere Mittheilungen; F. K. Cameron, Journ. of Phys. Chem., *2*, 409 [1898].

[2] Hantzsch und Schultze, Ber. der Deutschen chem. Ges. XXIX, 699, 2251 [1896].

um Isomerie und nicht um Polymorphie. Liegt dagegen der Schmelzpunkt der in der Nähe des Schmelzpunktes labilen Form tiefer als der der stabilen, so kann Isomerie oder Polymorphie vorliegen.[1]

Die Benützung dieses Kennzeichens kann bei enantiotropen Körpern dann schwierig werden, wenn der Umwandlungspunkt in der Nähe der Schmelzpunkte liegt. Wenn ein Umwandlungspunkt existiert, so kreuzen sich die Dampfdruckcurven der beiden festen Körper unterhalb der Dampfdruckcurven der Flüssigkeiten. Die Beziehung zwischen Schmelzpunkt und Stabilität unterhalb des Umwandlungspunktes ist dann gerade umgekehrt wie die Beziehung zur Stabilität oberhalb des Umwandlungspunktes. Beispielsweise hat der monokline Schwefel einen höheren Schmelzpunkt (117°) als der rhombische (113°). Das ist mit Polymorphie verträglich, da in der Nähe des Schmelzpunktes der monokline Schwefel die stabile Form bildet. Unterhalb des Umwandlungspunktes (96°) ist der monokline Schwefel die labile Form. Würde nun das Stabilitätsverhältnis der beiden Schwefelformen nur unterhalb 96° untersucht und würde man annehmen, dass dieses Verhältnis sich bis zum Schmelzpunkte nicht umkehrt, so würde man zu einem irrigen Schlusse kommen.

### Löslichkeit und Dampfdruck.

In ähnlicher Weise wie die Schmelzpunkte können auch die Löslichkeiten und Dampfspannungen fester Körper verwendet werden, um das Vorliegen von Polymorphie auszuschließen. Geben zwei feste Körper identische Lösungen und Dämpfe, so hat zufolge einer bekannten Schlussfolgerung der unter bestimmten Bedingungen labile Körper unter diesen Bedingungen größere Löslichkeit und größere Dampfspannung als der stabile. Sind dagegen die Lösungen oder Dämpfe verschieden, so muss diese Beziehung nicht zutreffen.

Man kann daher sagen: Wenn von zwei festen, ineinander verwandelbaren Körpern derjenige, welcher

[1] Dieser Satz ist in anderer Form bereits von W. D. Bancroft (Journ. of Phys. Chem., *2*, 143 ff., insbesondere S. 148 [1898]) ausgesprochen und begründet worden.

unter bestimmten Umständen unbeständig ist, unter denselben Umständen die kleinere Löslichkeit oder die kleinere Dampfspannung hat, so liegt Isomerie vor. Polymorphie ist in diesem Falle ausgeschlossen. Hat dagegen der unbeständige feste Körper größere Löslichkeit oder Dampfspannung, so kann Isomerie oder Polymorphie vorliegen.

Auf Grund dieser Erwägungen scheint es mir auch (im Gegensatze zur Auffassung von Ostwald[1] möglich, dass der amorphe Schwefel in Schwefelkohlenstoff weniger löslich ist als die krystallisierten Formen, obwohl der amorphe Schwefel die unbeständigste Form ist. Dann ist gerade in diesem Löslichkeitsverhältnisse ein Beweis dafür zu erblicken, dass amorpher und krystallisierter Schwefel nicht im Verhältnisse der Polymorphie stehen, sondern chemisch verschiedene Stoffe (Isomere oder Polymere) sind. Diese Auffassung wäre selbst dann noch möglich, wenn sich entsprechend der Auffassung von Ostwald ein Lösungsgleichgewicht zwischen Schwefelkohlenstoff und amorphem Schwefel nicht in absehbarer Zeit einstellen sollte. Die Verhältnisse könnten nämlich dadurch verwickelt werden, dass in der Lösung eine langsame Umlagerung des amorphen Schwefels in krystallisierten eintritt; dann wäre die Löslichkeit des amorphen Schwefels überhaupt nicht direct bestimmbar. Die Auffassung, dass der zähe und der krystallisierte Schwefel, beziehungsweise der aus letzterem entstehende leichtflüssige Schwefel Isomere sind, ist übrigens von Ostwald selbst[2] und von Schaum[3] ausgesprochen worden.

## Das chemische Verhalten isomerer und polymorpher Stoffe.

Die Möglichkeit, aus zwei gleich zusammengesetzten und ineinander umwandelbaren festen Stoffen verschiedene Abkömmlinge zu bekommen, ist ein Kennzeichen für das Vorliegen von Isomerie. Im vorhergehenden wurde bereits erwähnt, dass dieses Kennzeichen bei anorganischen Stoffen in der

[1] Lehrbuch der allg. Chemie, 2. Aufl., II², 460.
[2] Lehrbuch der allg. Chemie, 2. Aufl., II², 400 [1897].
[3] Liebig's Ann., *300*, 209 [1898].

Regel nicht mit Erfolg anwendbar ist. Es liegt nahe, auch Stoffe als verschieden (isomer) zu betrachten, welche zwar durchwegs identische Abkömmlinge liefern, bei denen aber die Reactionsfähigkeit (die Geschwindigkeit der Überführung in Abkömmlinge) unter gleichen Bedingungen sehr verschieden ist. Die Aufstellung dieses Kennzeichens rechtfertigt sich durch zwei Gründe.

Erstens sind bei ausgesprochenen Beispielen von Polymorphie erhebliche Unterschiede hinsichtlich der Reactionsgeschwindigkeiten nicht nachgewiesen, während sie bei Isomeren in der Regel vorhanden sind. Insbesondere liegen sehr bedeutende Unterschiede der Reactionsgeschwindigkeiten bei Bildung desselben Productes immer dann vor, wenn isomere Stoffe verschiedene Abkömmlinge geben; einer der beiden Abkömmlinge wird aus der einen Muttersubstanz mit erheblicher Geschwindigkeit gebildet, aus der anderen dagegen mit der Geschwindigkeit Null oder wenigstens mit kleinerer Geschwindigkeit, wenn eine nicht allzu rasch verlaufende Umlagerung ins Spiel kommt.

Der zweite Grund, der für die Aufstellung des erwähnten Kennzeichens spricht, folgt aus dem Begriffe der Polymorphie im Gegensatze zur Isomerie. Bei der Aufstellung des Polymorphiebegriffes liegt geradeso wie bei der Zusammenfassung von drei durch den Aggregatzustand unterschiedenen Körpern zu einem Stoffe die Absicht zugrunde, die Eintheilung der Stoffe möglichst zu vereinfachen, indem man verschiedene Körper, die sich zwar durch die Formart, aber nicht erheblich durch das chemische Verhalten unterscheiden, zu einem Stoffe zusammenfasst. Ähnliches chemisches Verhalten begründet also die Annahme von Polymorphie, verschiedenes chemisches Verhalten die Annahme von Isomerie. Bei anorganischen Körpern von gleicher Zusammensetzung drückt sich aber das verschiedene chemische Verhalten in der Regel überhaupt nur durch die Verschiedenheit der Reactionsgeschwindigkeit aus, da in den meisten Fällen isomere Abkömmlinge nicht zu erhalten sind. Es entspricht daher durchaus den principiellen Gesichtspunkten, welche für die Aufstellung des Polymorphie-

begriffes maßgebend sind, wenn man insbesondere bei anorganischen Substanzen das im vorstehenden dargelegte Kennzeichen benützt.

Dass dieses Kennzeichen nur eine Wahrscheinlichkeit, aber keine Gewissheit begründen kann, braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden.

## Die Krystallisationsgeschwindigkeit der Schmelzen und Lösungen.

Polymorphe Formen geben, ihrem Begriffe entsprechend, identische Schmelzen, Lösungen und Dämpfe. Nun wird allgemein in übersättigten, beziehungsweise überkalteten Lösungen, Schmelzen und Dämpfen durch Einsaat der dazugehörigen festen Phasen die Übersättigung aufgehoben, also Ausscheidung in fester Form bewirkt. Diese Ausscheidung tritt, soweit bekannt, mit erheblicher Anfangsgeschwindigkeit ein, wenn auch die vollständige Aufhebung der Übersättigung bisweilen längere Zeit braucht; eine Ausnahme bilden höchstens sehr zähe Schmelzen und Lösungen (Syrupe). Wenn nun zwei oder mehrere feste Stoffe identische Lösungen, Schmelzen und Dämpfe geben, so ist zu erwarten, dass alle polymorphen Formen die Übersättigungszustände aufheben, und zwar mit Geschwindigkeiten von gleicher Größenordnung. In der That verhalten sich alle zweifellosen Formen von Polymorphie dementsprechend.

Ganz anders ist es bei Isomeren. Liefern zwei feste Körper, welche sich nicht leicht ineinander umwandeln, verschiedene Schmelzen, Lösungen oder Dämpfe, so kann die Übersättigung mit Sicherheit nur durch jene feste Substanz aufgehoben werden, welche zu der betreffenden übersättigten Phase gehört; die isomere feste Substanz ist wirkungslos, wenn sie nicht etwa zugleich isomorph ist, oder sie wirkt wie beliebige andere Fremdkörper, insoferne Aufhebung der Übersättigung durch Schütteln u. dergl. möglich ist.

Nicht so ausgesprochen ist allerdings der Gegensatz von Isomerie und Polymorphie, wenn man Isomere in Betracht zieht, die sich leicht in einander verwandeln. Es ist denkbar, dass ein Körper eine übersättigte Phase, die aus seinem

Isomeren entstanden ist, zum Krystallisieren bringt, sei es, dass der feste Körper sich umwandelt und dadurch mit jenem Stoffe identisch wird, der in der übersättigten Phase vorhanden ist, sei es, dass in der übersättigten Phase sich ein Gleichgewicht einstellt; im letzteren Falle kann das Gleichgewicht durch die Einsaat einer festen Phase und die dadurch bewirkte Krystallisation gestört werden, derart, dass der auskrystallisierende Stoff immer wieder nachgebildet wird. Findet die Umwandlung in der übersättigten Phase mit großer Geschwindigkeit statt, so kann sich ein Fall von Isomerie wie ein Fall von Polymorphie verhalten, indem die Aufhebung der Übersättigung durch beide Formen mit annähernd gleicher Geschwindigkeit bewirkt wird.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich der Schluss, dass Isomerie als wahrscheinlich zu erachten ist, wenn übersättigte Lösungen, Schmelzen oder Dämpfe durch eine der beiden festen Formen rasch, durch die andere dagegen langsam zum Krystallisieren gebracht werden. Verhalten sich dagegen beide feste Formen ungefähr gleich, so ist Polymorphie wahrscheinlich, aber auch Isomerie möglich, wenn leichte Umwandelbarkeit der beiden Stoffe nicht ausgeschlossen ist.

Diese Betrachtung kann noch durch eine andere Gedankenreihe gestützt werden.

In jenen Fällen, wo wir die verschiedenen Aggregatzustände als Formen eines und desselben Stoffes ansehen, stellt sich das Gleichgewicht zwischen zwei Aggregatzuständen in der Regel mit großer Geschwindigkeit ein; z. B. stellt sich über einer Flüssigkeit in kurzer Zeit der richtige Dampfdruck ein. Das Schmelzen tritt sofort ein, wenn der Schmelzpunkt erreicht ist und die nöthige Wärme zugeführt wird. Ebenso bewirkt die Einsaat eines Krystalles der betreffenden Verbindung rasch die Erstarrung einer unterkühlten Schmelze oder den Beginn des Auskrystallisierens einer übersättigen Lösung; die vollständige Aufhebung der Übersättigung kann allerdings längere Zeit dauern.

Wenn dagegen mit der Aggregatzustandsänderung zugleich eine chemische Änderung verbunden ist, stellt sich das Gleichgewicht zwischen zwei Aggregatzuständen häufig mit

geringerer Geschwindigkeit ein. So stellt sich das Gleichgewicht zwischen Calciumcarbonat, Kalk und Kohlendioxyd langsamer ein als ein gewöhnlicher Sublimationsdruck.[1] Ähnliches zeigt sich bei der Verdampfung von Ammoncarbonat.[2] Auch die Gleichgewichtsspannung des Wasserdampfes neben Krystallwasserverbindungen stellt sich nicht selten langsamer ein als ein gewöhnlicher Dampfdruck. Während Überschreitungserscheinungen beim Schmelzen von Stoffen, die hiebei keine chemische Veränderung erleiden, nicht bekannt sind, sind solche Überschreitungserscheinungen beim Schmelzen von Krystallwasserverbindungen unschwer zu erhalten.[3]

Macht man sich die Anschauungen von Van t'Hoff[4] über die Natur der hemmenden Wirkungen bei Zustandsänderungen zu eigen, so wird man ebenfalls zur Ansicht geführt, dass Zustandsänderungen, welche mit chemischen Änderungen verbunden sind, durchschnittlich langsamer verlaufen, als vergleichbare gewöhnliche Aggregatzustandsänderungen. Denn zu jenen Hemmungen, welche beiden Vorgängen gemeinsam sind, kommen bei chemischen Vorgängen noch besondere Hemmungen.[5]

Es entspricht den nunmehr entwickelten Gesichtspunkten, wenn man auch eine abnorm geringe Lösungs- oder Verdampfungsgeschwindigkeit als ein Anzeichen dafür betrachtet, dass bei diesen Vorgängen eine chemische Umwandlung eintritt. Dieses Kennzeichen ist aber unzuverlässig, weil bei festen Körpern die Lösungs- und Verdampfungsgeschwindigkeit in hohem Maße von ihrer Vertheilung u. s. w. abhängt.

Es ergibt sich somit aus der Geschwindigkeit, mit welcher zwei feste Körper die Übersättigung der zugehörigen Schmelzen, Lösungen und Dämpfe aufheben, und vielleicht auch aus der Geschwindigkeit, mit der sie gesättigte Lösungen und Dämpfe liefern, ebenfalls ein Kennzeichen zur Unterscheidung von Isomerie und Polymorphie; große

[1] Vergl. Ostwald, Lehrbuch der allg. Chemie, 2. Aufl., II², 525.
[2] Naumann, Handbuch der allg. und physikal. Chemie, S. 385 [1877].
[3] Ostwald, Lehrbuch der allg. Chemie, 2. Aufl., I., 994; II², 379.
[4] Vorl. über theor. und physikal. Chemie, 1. Heft, S. 202.
[5] A. o. O., S. 204.

Geschwindigkeitsunterschiede deuten auf Isomerie. Identität der Lösungen und Dämpfe ist hiebei natürlich vorausgesetzt. Auch dieses Kennzeichen liefert nur Wahrscheinlichkeitsgründe. Die Anwendung dieses Kennzeichens auf die Allotropie des Phosphors wird in einer besonderen Mittheilung erörtert.

## Zusammenfassung.

I. Die Unterscheidung von Isomerie und Polymorphie ist trotz der unscharfen Grenzen zweckmäßig.

II. Polymerie kann sowohl bei Polymorphie, als auch bei chemischer Verschiedenheit auftreten.

III. Zur Unterscheidung von Polymorphie und Isomerie können folgende Kennzeichen dienen:

1. Isomerie wird bewiesen durch die Verschiedenheit der zu festen Körpern von gleicher Zusammensetzung gehörigen Schmelzen, Lösungen oder Dämpfe.

2. Isomerie ist bewiesen, wenn zwei feste Körper von gleicher Zusammensetzung verschiedene Abkömmlinge liefern.

3. Die Umwandelbarkeit fester Formen bei Ausschluss von Lösungsmitteln kommt überwiegend bei Polymorphie, aber auch bei Isomerie vor.

4. Isomerie liegt vor, wenn die in der Nähe des Schmelzpunktes stabile Form den niedrigeren Schmelzpunkt hat.

5. Isomerie liegt vor, wenn der unter den Versuchsbedingungen stabilere feste Körper die größere Löslichkeit oder Dampfspannung hat.

6. Isomerie ist mit Wahrscheinlichkeit anzunehmen, wenn die beiden festen Formen mit sehr verschiedener Reactionsgeschwindigkeit dieselben Abkömmlinge liefern.

7. Isomerie liegt wahrscheinlich vor, wenn in übersättigten Lösungen, überkalteten Schmelzen und Dämpfen die Übersättigung durch die beiden zugehörigen festen Formen mit sehr verschiedener Geschwindigkeit aufgehoben wird. Auch eine abnorm geringe Verdampfungs- oder Lösungsgeschwindigkeit der einen festen Form kann vielleicht als Kennzeichen für Isomerie dienen.

# Bestimmung einiger Refractionsäquivalente

von

**Alois Bromer.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1901.)

Zur Vermehrung des Beobachtungsmateriales über Refractionsäquivalente[1] bestimmte ich die Molecularrefractionen von einigen bisher selten oder gar nicht untersuchten anorganischen Verbindungen und berechnete die Atomrefractionen der darin vorkommenden Elemente.

Die Substanzen, deren Lösungen ich untersuchte, lieferte die chemische Fabrik E. Merck, Darmstadt.

Die optischen Messungen wurden an dem Totalreflectometer von Pulfrich[2] im verdunkelten Zimmer durchgeführt.

Es wurden so die Brechungsexponenten für die $D$-Linie ($\lambda = 589 \cdot 3$) mit Natriumlicht, ferner für die $C$-Linie $= H_\alpha (\lambda = 656 \cdot 3)$ und $F$-Linie $= H_\beta (\lambda = 486)$ durch mit Wasserstoff gefüllte Geißlerröhren ermittelt, und zwar nach der Formel

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 i},$$

wobei $N$ der Brechungsexponent des Glases für die betreffende Lichtart ist und $\sphericalangle i$ direct bis auf Minuten genau (schätzungsweise auf $^1/_{10}{}'$) am Apparate abgelesen wurde. Dabei war

$$N_C = 1 \cdot 60998, \quad N_D = 1 \cdot 61475, \quad N_F = 1 \cdot 62671.$$

---

[1] Eine übersichtliche Darstellung der Theorie der Refractionsäquivalente gibt A. Hauke, diese Sitzungsberichte, 105. Bd., Abth. IIa., 1896, Juli.

[2] C. Pulfrich, Wied. Ann., XXX, S. 193; XXXI, S. 274.

Für Natriumlicht berechnete Pulfrich eine Tabelle für die zu $\sphericalangle i_D$ gehörigen $n_D$, für die $C$- und $F$-Linie berechnete ich die Werte und stellte sie in Tabelle I zusammen.

Als Refractionsconstante $r$ wählte ich die $n^2$-Formel

$$r = \frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d},$$

die ich auf ihre Constanz bei verschiedenen Temperaturen an Wasser (Tabelle II) und an zwei verschieden concentrierten Aluminiumbromidlösungen (Tabelle III und IV) prüfte.

Die Bestimmung von $n_D$ wurde gleichfalls an dem Pulfrich'schen Instrumente, das mit einer geeigneten Vorrichtung zur Ermittelung der Brechungsexponenten bei verschiedenen Temperaturen versehen war, durchgeführt.

Die Überlegenheit der $n^2$-Formel hinsichtlich der Constanz bei verschiedenen Temperaturen den beiden anderen früher meist verwendeten Formeln gegenüber tritt deutlich hervor.

Bei steigender Temperatur fand ich eine geringe Abnahme der Refractionsconstanten, theilweise mit ziemlich regelmäßigem Gang, wenngleich die Änderungen besonders bei der $n^2$-Formel unter die Fehlergrenze der Beobachtung, die in diesem Falle 0·0001 beträgt, fallen.

Über 40° C. wurde, wie auch Bender[1] bemerkt, die Bestimmung von $n_D$ wegen der Undeutlichkeit der Grenze zwischen Hell und Dunkel schwierig und weniger genau.

Mit zunehmender Concentration nimmt die Constanz aller drei Ausdrücke etwas ab.

---

[1] C. Bender, Wied. Ann., LXVIII, S. 343 bis 349, 1899.

Tabelle I.

| $i$ Grade | $i$ Minuten | $n_C$ | $10^{-5}\Delta n_C$ | $n_D$ | $10^{-5}\Delta n_D$ | $n_F$ | $10^{-5}\Delta n_F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 0 | 1·35170 | 91 | 1·35761 | 91 | | |
| | 10 | 079 | 91 | 670 | 90 | | |
| | 20 | 1·34988 | 91 | 580 | 90 | | |
| | 30 | 897 | 90 | 490 | 90 | | |
| | 40 | 807 | 90 | 400 | 89 | | |
| | 50 | 717 | 90 | 311 | 89 | | |
| 62 | 0 | 1·34627 | 89 | 1·35222 | 89 | | |
| | 10 | 538 | 89 | 133 | 89 | | |
| | 20 | 449 | 89 | 044 | 88 | | |
| | 30 | 360 | 89 | 1·34956 | 88 | | |
| | 40 | 271 | 88 | 868 | 88 | | |
| | 50 | 183 | 88 | 780 | 88 | | |
| 63 | 0 | 1·34095 | 88 | 1·34692 | 87 | | |
| | 10 | 007 | 87 | 605 | 87 | | |
| | 20 | 1·33920 | 87 | 518 | 87 | | |
| | 30 | 833 | 86 | 431 | 86 | | |
| | 40 | 747 | 86 | 345 | 86 | | |
| | 50 | 661 | 86 | 259 | 86 | | |
| 64 | 0 | 1·33575 | 86 | 1·34173 | 85 | 1·35586 | 85 |
| | 10 | 489 | 86 | 088 | 85 | 501 | 84 |
| | 20 | 403 | 85 | 003 | 85 | 417 | 84 |
| | 30 | 318 | 84 | 1·33918 | 48 | 333 | 83 |

| $i$ Grade | $i$ Minuten | $n_C$ | $10^{-5}\Delta n_C$ | $n_D$ | $10^{-5}\Delta n_D$ | $n_F$ | $10^{-5}\Delta n_F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 30 | 1·33318 | 84 | 1·33918 | 84 | 1·35333 | 83 |
| | 40 | 234 | 84 | 834 | 84 | 250 | 83 |
| | 50 | 150 | 84 | 750 | 84 | 167 | 82 |
| 65 | 0 | 1·33066 | | 1·33666 | 83 | 1·35085 | 82 |
| | 10 | | | 583 | 83 | 003 | 82 |
| | 20 | | | 500 | 82 | 1·34921 | 82 |
| | 30 | | | 418 | 82 | 839 | 82 |
| | 40 | | | 336 | 82 | 757 | 81 |
| | 50 | | | 254 | 81 | 676 | 81 |
| 66 | 0 | | | 1·33173 | 81 | 1·34595 | 80 |
| | 10 | | | 092 | 81 | 515 | 79 |
| | 20 | | | 011 | 80 | 436 | 79 |
| | 30 | | | 1·32931 | 80 | 357 | 78 |
| | 40 | | | 851 | 79 | 279 | 78 |
| | 50 | | | 772 | 79 | 201 | 78 |
| 67 | 0 | | | 1·32693 | 79 | 1·34123 | 78 |
| | 10 | | | 614 | 78 | 045 | 78 |
| | 20 | | | 536 | 78 | 1·33967 | 77 |
| | 30 | | | 458 | 77 | 890 | 77 |
| | 40 | | | 381 | 77 | 813 | 77 |
| | 50 | | | 304 | 77 | 736 | 76 |
| 68 | 0 | | | 1·32227 | | 1·33660 | |

Tabelle II.

$H_2O$.

| $t°$ | Dichte $= d$ | $n_D$ | $\frac{n_D^2-1}{n_D^2+2} \cdot \frac{1}{d} = r$ | $10^{-5}\Delta r$ | $\frac{n_D-1}{d} = r'$ | $10^{-5}\Delta r'$ | $\frac{n_D^2-1}{d} = r''$ | $10^{-5}\Delta r''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | 0·998252 | 1·33302 | 0·20606 | | 0·33360 | | 0·77830 | |
| | | | | — 4 | | —12 | | —46 |
| 25 | 0·997098 | 1·33251 | 0·20602 | | 0·33348 | | 0·77784 | |
| | | | | — 3 | | —10 | | —42 |
| 30 | 0·995705 | 1·33195 | 0·20599 | | 0·33338 | | 0·77742 | |
| | | | | 0 | | — 5 | | —32 |
| 35 | 0·994098 | 1·33136 | 0·20599 | | 0·33333 | | 0·77710 | |
| | | | | — 5 | | —16 | | —62 |
| 40 | 0·992330 | 1·33061 | 0·20594 | | 0·33317 | | 0·77648 | |
| | | | | — 7 | | —19 | | —71 |
| 45 | 0·990350 | 1·32977 | 0·20587 | | 0·33298 | | 0 77577 | |
| | | | | — 3 | | —11 | | —57 |
| 50 | 0·988130 | 1·32891 | 0·20584 | | 0·33287 | | 0·77520 | |

Tabelle III.

**$Al_2B_6$.**

0·06 Normallösung. — Procentgehalt 3·034.

| $t°$ | Dichte $= d$ | $n_D$ | $\frac{n_D^2-1}{n_D^2+2} \cdot \frac{1}{d} = r$ | $10^{-5}\Delta r$ | $\frac{n_D-1}{d} = r'$ | $10^{-5}\Delta r'$ | $\frac{n_D^2-1}{d} = r''$ | $10^{-5}\Delta r''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15° | 1·0169 | 1·33695 | 0·20436 | | 0·33135 | | 0·77403 | |
| | | | | − 7 | | −31 | | −63 |
| 20 | 1·0160 | 1·33633 | 0·20429 | | 0·33104 | | 0·77340 | |
| | | | | − 6 | | −17 | | −55 |
| 25 | 1·0150 | 1·33583 | 0·20423 | | 0·33087 | | 0·77285 | |
| | | | | − 5 | | −11 | | −41 |
| 30 | 1·0138 | 1·33533 | 0·20418 | | 0·33076 | | 0·77244 | |
| | | | | − 6 | | −16 | | −60 |
| 35 | 1·0123 | 1·33467 | 0·20412 | | 0·33060 | | 0·77184 | |
| | | | | − 2 | | − 9 | | −42 |
| 40 | 1·0106 | 1·33402 | 0·20410 | | 0·33051 | | 0·77142 | |
| | | | | + 4 | | + 1 | | −20 |
| 45 | 1·0086 | 1·33336 | 0·20414 | | 0·33052 | | 0·77122 | |

Tabelle IV

**$Al_2B_6$.**

0·22 Normallösung. — Procentgehalt 11·772.

| $t°$ | Dichte $= d$ | $n_D$ | $\frac{n_D^2-1}{n_D^2+2}\cdot\frac{1}{d}=r$ | $10^{-5}\Delta r$ | $\frac{n_D-1}{d}=r'$ | $10^{-5}\Delta r'$ | $\frac{n_D^2-1}{d}=r''$ | $10^{-5}\Delta r''$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | 1·0687 | 1·34649 | 0·19946 | | 0·32412 | | 0·76055 | |
| 25 | 1·0679 | 1·34597 | 0·19938 | — 8 | 0·32393 | —19 | 0·75993 | —62 |
| 30 | 1·0666 | 1·34535 | 0·19931 | — 7 | 0·32377 | —16 | 0·75936 | —57 |
| 35 | 1·0652 | 1·34478 | 0·19928 | — 3 | 0·32366 | —11 | 0·75893 | —43 |
| 40 | 1·0637 | 1·34412 | 0·19921 | — 7 | 0·32350 | —16 | 0·75832 | —61 |
| 45 | 1·0620 | 1·34343 | 0·19918 | — 3 | 0·32338 | —12 | 0·75782 | —50 |

In letzterer Zeit wurden auch wieder einige neue Versuche gemacht, auf rein empirischem Wege Formeln für die Refractionsconstante aufzustellen; so bevorzugt Zecchini[1] den Ausdruck

$$\frac{n^2-1}{n^2+3} \cdot \frac{1}{d},$$

J. F. Eykmann[2] die Formel

$$\frac{n^2-1}{n^2+0 \cdot 4} \cdot \frac{1}{d};$$

Edwards[3] wählt für die specifische Brechung den Ausdruck

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{d}.$$

Dem ersten Versuche, den Ketteler[4] mit Einführung zweiconstantiger Formeln machte, folgte Hibbert,[5] indem er $(n-1)(v-\beta) =$ Constanz setzte, wobei $v$ das wirkliche Volumen der Masseneinheit, $\beta$ hingegen dasselbe aber bei continuierlicher Raumerfüllung ist.

Während die oben erwähnten Ausdrücke, die bei speciellen Versuchsbedingungen oft recht gute Werte liefern, im allgemeinen wegen ihrer Inconstanz bei Änderung des Aggregatzustandes nicht in Betracht kommen können, ist dies von der Hibbert'schen Formel nicht zu sagen. Für die praktische Verwertung ist sie aber wegen der Unsicherheit von $\beta$ von wenig Bedeutung.

---

Die Refractionsäquivalente berechnete ich unter der Annahme der Giltigkeit des Biot-Arago'schen Gesetzes.

---

[1] Zecchini, Gazz. chim. ital. XXV, p. 269 bis 285, 1895.

[2] Eykmann, Rec. trav. chim. Pays-Bas, XIV, p. 185 bis 202, 1895. — Rec. Pays-Bas, XV, p. 52 bis 60, 1896.

[3] F. W. Edwards, Am. chem. Journal, XVI, p. 625 bis 634, 1895.

[4] Ketteler, Wied. Ann. XXXIII, S. 356, 1888; XXXV, S. 662, 1888.

[5] Hibbert, Phil. Magaz. (5) XL, p. 321 bis 345, 1895.

Entspricht nämlich 1 Gramm-Molecül des Stoffes $p$ Molecülen Wasser, so besteht folgende Relation:

$$(18\cdot01p+m)r_L = 18\cdot01pr_W+mr_S,$$

wobei $m$ das Moleculargewicht des gelösten Stoffes, 18·01 das des Wassers, $r_L$, $r_W$, $r_S$ die Refractionsconstanten der Lösung, beziehungsweise des Wassers und der Substanz sind. Als Molecularrefraction $M$ für die gelöste Substanz ergibt sich also

$$M = mr_S = (18\cdot01p+m)r_L - 18\cdot01pr_W,$$

oder da

$$p = \frac{q_W m}{q_S \,.\, 18\cdot01}$$

ist, wobei $q_W$ und $q_S$ das Gewicht des Wassers, beziehungsweise des gelösten wasserfreien Salzes ist, so folgt weiter

$$M = \frac{m}{q_S}[(q_W+q_S)r_L - q_W r_W] =$$

$$= \frac{m}{q_S}[q_L r_L - q_W r_W],$$

wobei $q_L = q_W+q_S$ das Gewicht der Lösung bedeutet.

Für $r_W$, bezogen auf die Linie $H_\alpha$, fand ich bei 20° C. 0·205067.

In Tabelle V gebe ich meine sämmtlichen Messungen wieder.

Der Procentgehalt, der stets durch Wägung bestimmt wurde, bezieht sich auf wasserfreies Salz und 100 Gewichtstheile der Lösung.

Die Dichte $d$ wurde meist mit der Mohr'schen Wage, in einzelnen Fällen mit dem Pyknometer ermittelt und auf Wasser von 4° C. bezogen.

Unter den Werten von $n$ sind die Temperaturen bei den optischen Messungen angegeben.

Unter der Columne $\mu$ ist das Verhältnis der Lösung zur Normallösung (= 1 Gramm-Molecül pro Kilogramm der Lösung) gegeben.

Tabelle V (1).

| Substanz | Formel | $m$ | Procentgehalt | $d$ | $p$ | $\mu$ | $n_C$ | $n_D$ | $n_F$ | $r_L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Lithiumsulfat | $Li_2SO_4 + H_2O$ | 110·12 + 18·01 | 4·81 | 1·0384 | 103·075 | 0·44 | 1·33940 $t = 20°$ | 1·34155 $t = 20°$ | 1·34228 $t = 20°$ | 0·2015 | 15·50 |
| | | | 0·928 | 1·0052 | 631·308 | 0·09 | 1·33254 $t = 20°$ | 1·33486 $t = 20°5$ | 1·33548 $t = 20°$ | 0·2043 | 14·49 |
| Magnesiumbromid | $MgBr_2 + 6H_2O$ | 184·29 + 108·08 | 10·80 | 1·0951 | 84·476 | 0·60 | 1·35070 $t = 19°$ | 1·35302 $t = 19°$ | | 0·1970 | 24·05 |
| | | | 1·877 | 1·0147 | 534·819 | 0·10 | 1·33438 $t = 19°5$ | 1·33648 $t = 19°5$ | 1·33758 $t = 19°5$ | 0·2035 | 22·67 |
| Aluminiumbromid | $Al_2Br_6$ | 533·94 | 8·04 | 1·0594 | 361·32 | 0·15 | 1·34436 $t = 20°$ | 1·34683 $t = 19°$ | 1·34786 $t = 20°$ | 0·2003 | 76·14 |
| | | | 3·034 | 1·0168 | 947·425 | 0·06 | 1·33446 $t = 19°$ | 1·33656 $t = 19°5$ | 1·33757 $t = 19°$ | 0·2031 | 74·76 |

Tabelle V (2).

| Substanz<br>1 | Formel<br>2 | $m$<br>3 | Procent-gehalt<br>4 | $d$<br>5 | $p$<br>6 | $\mu$<br>7 | $n_C$<br>8 | $n_D$<br>9 | $n_F$<br>10 | $r_L$<br>11 | $M$<br>12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aluminium-sulfat | $Al_2(SO_4)_3$ + $18 H_2O$ | 342·34 + 324·18 | 3·698 | 1·0370 | 494·85 | 0·11 | 1·33867<br>$t = 20°$ | 1·34129<br>$t = 20°5$ | 1·34233<br>$t = 20°$ | 0 2013 | 35·60 |
| | | | 1·359 | 1·0113 | 1379·8 | 0·04 | 1·33382<br>$t = 20°$ | 1·33616<br>$t = 20°5$ | 1·33695<br>$t = 20°$ | 0·2037 | 35·49 |
| Calcium-phosphat. | $CaH_4(PO_4)_2$ + $H_2O$ | 234·09 + 18·01 | 2·506 | 1·0171 | 332·966 | 0·11 | 1·33472<br>$t = 19°$ | 1·33689<br>$t = 19°$ | 1·33776<br>$t = 19°$ | 0·2032 | 36·27 |
| Chromsulfat | $Cr_2(SO_4)_3$ | 392·38 | 4·814 | 1·0283 | 430·9 | 0·12 | | | 1·34058<br>$t = 21°$ | | |
| | | | 1·112 | 1·0040 | 1937·74 | 0·03 | 1·33222<br>$t = 20°5$ | 1·33464<br>$t = 20°5$ | 1·33535<br>$t = 20°5$ | 0·2043 | 53·38 |
| | | | 0·114 | 0·9989 | 19760·0 | 0·003 | 1·33130<br>$t = 20°5$ | 1·33349<br>$t = 20°5$ | 1·33432<br>$t = 20°5$ | 0·2050 | 60·92 |

Tabelle V (3).

| Substanz | Formel | $m$ | Procent-gehalt | $d$ | $p$ | $\mu$ | $n_C$ | $n_D$ | $n_F$ | $r_L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Eisenbromid | $Fe_2Br_6$ | 591·78 | 8·016 | 1 0641 | 376·99 | 0·13 | 1·34518 $t = 20°$ | 1·34748 $t = 20°$ | | 0·1998 | 81·07 |
| | | | 1·56 | 1·0107 | 1830·0 | 0·03 | 1·33373 $t = 19°$ | 1·33575 $t = 19°$ | 1·33698 $t = 19°$ | 0·2039 | 76·11 |
| Kobaltchlorür | $CoCl_2 + 6H_2O$ | 129·91 + 108·08 | 5·784 | 1·0550 | 117·47 | 0·45 | 1·34473 $t = 20°$ | 1·34738 $t = 20°$ | 1·34801 $t = 20°$ | 0·2012 | 17·94 |
| | | | 1·226 | 1·0101 | 581·16 | 0·09 | 1·33390 $t = 20{,}°5$ | 1·33615 $t = 20°$ | 1·33692 $t = 20{,}°5$ | 0·2041 | 16·51 |
| | | | 0·082 | 0·9995 | 8826 | 0·006 | 1·33120 $t = 20°$ | 1·33345 $t = 20°$ | 1·33431 $t = 20°$ | 0·2047 | 16·20 |
| Nickelnitrat | $Ni(NO_3)_2 + 6H_2O$ | 182·78 + 108·08 | 5·041 | 1·0427 | 191·14 | 0·27 | 1·33900 $t = 20°$ | 1·34134 $t = 21°$ | 1·34201 $t = 20°$ | 0·2005 | 20·98 |

Tabelle V (4).

| Substanz | Formel | $m$ | Procent-gehalt | $d$ | $p$ | $\mu$ | $n_C$ | $n_D$ | $n_F$ | $r_L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Nickelsulfat | $NiSO_4 + 7H_2O$ | 154·76 + 126·07 | 5·098 | 1·0533 | 159·92 | 0·33 | 1·34004 $t = 20°5$ | 1·34314 $t = 20°$ | 1·34379 $t = 20°5$ | 0·1990 | 13·36 |
| | | | 1·871 | 1·0096 | 455·7 | 0·13 | 1·33232 $t = 20°5$ | 1·33540 $t = 20°5$ | 1·33579 $t = 20°5$ | 0·2033 | 12·96 |
| Arsentrijodid | $AsJ_3$ | 455·58 | 1·898 | 1·0192 | 1296 | 0·04 | 1·33532 $t = 19°$ | 1·33779 $t = 19°$ | 1·33870 $t = 19°$ | 0·2032 | 49·01 |
| Orthoarsen-säure | $AsO(OH)_3 + \frac{1}{2} H_2O$ | 142·02 + 9·01 | 2·391 | 1·0161 | 348·27 | 0·17 | 1·33382 $t = 20°$ | 1·33574 $t = 19°5$ | 1·33698 $t = 20°$ | 0·2029 | 15·22 |
| Rubidiumnitrat | $RbNO_3$ | 147·44 | 16·001 | 1·1093 | 42·968 | 1·1 | 1·34284 $t = 19°$ | 1·34511 $t = 19°5$ | 1·34646 $t = 19°$ | 0·1905 | 16 81 |
| Palladium-chlorür | $PdCl_2$ | 176·91 | 0·37 | 1·0022 | 2581·7 | 0·02 | 1·33192 $t = 19°$ | 1·33377 $t = 19°$ | | 0·2047 | 19·89 |

Tabelle V (5).

| Substanz 1 | Formel 2 | $m$ 3 | Procent-gehalt 4 | $d$ 5 | $p$ 6 | $\mu$ 7 | $n_C$ 8 | $n_D$ 9 | $n_F$ 10 | $r_L$ 11 | $M$ 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cäsiumnitrat | $CsNO_3$ | 194·96 | 4·381 | 1·0311 | 236·02 | 0·23 | 1·33403 $t = 19°$ | 1·33612 $t = 19°$ | 1·33729 $t = 19°$ | 0·2000 | 17·24 |
| Baryumchlorat | $Ba(ClO_3)_2 + H_2O$ | 304·34 + 18·01 | 7·204 | 1·0591 | 217·62 | 0·24 | 1·33868 $t = 19°$ | 1·34077 $t = 19.5°$ | 1·34183 $t = 19°$ | 0·1973 | 29·60 |
| Baryumjodid | $BaJ_2 + 2H_2O$ | 391·15 + 36·02 | 1·42 | 1·0204 | 1496 | 0·04 | 1·33652 $t = 19°$ | 1·33843 $t = 19.5°$ | 1·34002 $t = 19°$ | 0·2035 | 37·74 |
| Baryum-dithionat | $BaS_2O_6 + 2H_2O$ | 297·55 + 36·02 | 12·024 | 1·1051 | 120·83 | 0·40 | 1·34574 $t = 19°$ | 1·34779 $t = 19°$ | 1·34892 $t = 19°$ | 0·1926 | 30·21 |
| | | | 1·15 | 1·0157 | 1417·8 | 0·04 | 1·33352 $t = 19°$ | 1·33555 $t = 20°$ | 1·33659 $t = 19°$ | 0·2040 | 34·23 |
| Osmium-tetroxyd | $OsO_4$ | 255 | 1·316 | 1·0061 | 1063·61 | 0·05 | 1·33175 $t = 19°$ | 1·33377 $t = 19°$ | 1·33467 $t = 19°$ | 0·2039 | 28·75 |

Tabelle V (6).

| Substanz | Formel | $m$ | Procent-gehalt | $d$ | $p$ | $\mu$ | $n_C$ | $n_D$ | $n_F$ | $r_L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Goldcyanid | $Au(CN)_3 + 3H_2O$ | 275·32 + 54·03 | 2 643 | 1·0181 | 561·39 | 0·10 | 1·33369 $t = 19^\circ 5$ | 1·33590 $t = 19^\circ 2$ | 1·33686 $t = 19^\circ 5$ | 0·2025 | 29·80 |
| Quecksilber-cyanid | $Hg(CN)_2$ | 252·34 | 8·466 | 1·0661 | 151·49 | 0·33 | 1·33674 $t = 20^\circ$ | 1·33909 $t = 20^\circ 5$ | 1·33997 $t = 20^\circ$ | 0·1950 | 21·10 |
| | | | 2·593 | 1·0183 | 526·31 | 0·10 | 1·33256 $t = 20^\circ$ | 1·33493 $t = 20^\circ 5$ | 1·33569 $t = 20^\circ$ | 0·2018 | 18·98 |
| Uranylnitrat | $UO_2(NO_3)_2 + 6H_2O$ | 395·58 + 108·06 | 12·984 | 1·1161 | 147·17 | 0·33 | 1·34391 $t = 19^\circ$ | 1·34594 $t = 19^\circ 5$ | | 0·1898 | 34·65 |
| | | | 2·853 | 1·0212 | 747·72 | 0·07 | 1·33369 $t = 19^\circ$ | 1·33571 $t = 19^\circ$ | 1·33686 $t = 19^\circ$ | 0·2019 | 37·58 |
| Reines Wasser | $H_2O$ | 18 01 | — | 0·99825 | | | 1·33124 $t = 20^\circ$ | 1·33302 $t = 20^\circ$ | 1 33750 $t = 20^\circ$ | 0·205067 | 3·6941 |

Bei einzelnen Lösungen konnten wegen der Farbe nicht alle drei Brechungsexponenten bestimmt werden.

Was die Genauigkeit der einzelnen Werte anlangt, so ist Folgendes zu bemerken.

Da eine sichere Ablesung von halben Minuten des $\sphericalangle i$, was eine Änderung von 4 bis 5 Einheiten der fünften Decimalstelle in $n$ hervorbringt, vielfach unmöglich war, so können die Werte von $n$ nur eine Genauigkeit von einer Einheit der vierten Decimalstelle verlangen.

Bei Bestimmung der Dichte beträgt die Fehlergrenze 1 bis 2 Stellen der vierten Decimale.

Eine Reduction der Brechungsexponenten auf die Mitteltemperatur 20° C. konnte ich nicht durchführen, da mir das Beobachtungsmateriale fehlte; auch hielt ich sie für unnöthig, indem, wie aus den betreffenden Temperaturangaben ersichtlich ist, das Maximum der Abweichung von 20° C. +1° und —0·5° betrug, was höchstens eine Änderung von 5 bis 8 Einheiten der fünften Decimale von $n$ hervorbringen kann.

Für die Bestimmung der Molecularrefraction, die bis auf Einheiten der zweiten Decimale genau ist, hat dies keinen Einfluss.

Aus den Mittelwerten der Molecularrefractionen versuchte ich die Atomrefractionen $A$ der einzelnen Elemente mit Benützung folgender Daten zu berechnen. Nach Brühl[1] setzte ich

$$A_{\mathrm{H}} = 1\cdot103, \quad A_{\mathrm{Cl}} = 6\cdot014, \quad A_{\mathrm{Br}} = 8\cdot863,$$
$$A_{\mathrm{J}} = 13\cdot808, \quad A_{\mathrm{O}} = 1\cdot506, \quad A_{\mathrm{O''}} = 2\cdot326.$$

Diese Werte sind aus großem Beobachtungsmateriale ermittelt und bis auf die zweite Decimale als sichere Mittelwerte zu betrachten.

Außerdem rechnete ich einige Beobachtungen Gladstone's[2] und Hauke's[3] um und fand so im Mittel

$$M_{\mathrm{NO_3}} = 8\cdot41, \quad M_{\mathrm{SO_4}} = 8\cdot92, \quad M_{\mathrm{(CN)_2}} = 12\cdot85.$$

[1] Brühl, Zeitschrift für phys. Chemie, VII, S. 140 bis 191, 1891.
[2] Gladstone, Proc. Roy. Soc. LX, p. 141, 1896.
[3] A. Hauke, diese Sitzungsber., 105. Bd., Abth. IIa., Juli 1896.

Zum Vergleiche mit dem letzten Werte diene die Angabe Mascart's[1] und Brühl's,[2] die für Natriumlicht $M_{(CN)_2} = 12 \cdot 32$ finden.

Mit Landolt[3] setzte ich $M_{(OH)} = 2 \cdot 62$.

Die Atomrefraction des Ca, berechnet aus dem Calciumphosphat, ist wegen des sehr schwankenden[4] Wertes von $A_P$ (zwischen 3 und 11) zu unsicher und musste ausgeschieden werden.

Die so gefundenen Refractionsäquivalente der untersuchten Elemente gebe ich, geordnet nach steigendem Atomgewichte $a$, in Tabelle VI wieder; zum Vergleiche sind anbei die von A. Hauke und Gladstone ermittelten Werte angegeben.

Die Übereinstimmung, besonders mit den Werten von Hauke, ist mit Ausnahme von Au und Cs ziemlich befriedigend (die Abweichung beträgt im Maximum $+1 \cdot 79$ $-1 \cdot 60$; im Durchschnitte $+0 \cdot 84$ und $-0 \cdot 74$), zumal meine Werte im allgemeinen aus weit complicierteren Verbindungen berechnet wurden.

Zugleich stellte ich die wahren specifischen Gewichte $= \frac{a}{A}$ zusammen. Dieselben müssen natürlich immer größer sein als die scheinbaren specifischen Gewichte. Das trifft bei meinen Messungen bei Fe, Os und Au nicht zu; allerdings ist die Differenz, besonders bei Au, nur klein. Bei diesen Elementen kommt also der Refractionsconstante sicherlich nicht die Bedeutung des wahren Molecularvolumens,[5] d. i. des von der Substanz continuierlich erfüllten Raumes zu. Es sind eben entweder die ermittelten Atomrefractionen nicht die wirklichen, oder die Partikelchen dieser Elemente sind nicht kugelförmig, wie es die Voraussetzung verlangt.

---

[1] Mascart, Compt. rend. LXXXVI, p. 321; p. 1182, 1878.

[2] Brühl, Berichte der deutschen chem. Gesellschaft, 26. Jahrg., S. 806 bis 809, 1893.

[3] Landolt, Lieb. Ann., 213, S. 75, 1882.

[4] Siehe Zecchini, Berl. Ber. XLIX, S. 32.

[5] F. Exner, Monatshefte für Chemie, VI, S. 249, 1885.

Tabelle VI.

**Refractionsäquivalente $A$ und wahre specifische Gewichte $\frac{a}{A}$.**

| Element | $a$ Atom-gewicht | $A$ | $\frac{a}{A}$ | $A$ | $\frac{a}{A}$ | $A$ | $\frac{a}{A}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | nach meinen Messungen | | nach Hauke | | nach Gladstone | |
| Li...... | 7·03 | 3·04 | 2·31 | 2·49 | 2·82 | 2·19 | 3·20 |
| Mg..... | 24·36 | 5·63 | 4·33 | 4·47 | 5·44 | 3·97 | 6·05 |
| Al...... | 27·08 | 7·76 | 3·49 | 7·00 | 3·86 | 4·25 | 6·35 |
| Cr...... | 52·01 | 15·19 | 3·42 | 14·66 | 3·58 | 6·65 | 7·89 |
| Fe...... | 56·00 | 10·21 | 5·49 | 9·94 | 5·62 | 4·75 | 11·80 |
| Ni...... | 58·70 | 4·70 | 12·49 | 5·31 | 11·04 | 4·26 | 13·27 |
| Co ..... | 59·00 | 4·85 | 12·17 | 5·54 | 10·08 | 4·37 | 13·42 |
| As ..... | 75·00 | 7·59 | 9·88 | | | 7·30 | 10·26 |
| Rb ..... | 85·40 | 8·40 | 10·18 | 6·61 | 12·89 | 7·66 | 11·12 |
| Pd ..... | 106·00 | 7·86 | 13·49 | | | 7·44 | 14·31 |
| Cs ..... | 132·90 | 8·83 | 15·05 | 12·59 | 10·54 | 11·75 | 11·28 |
| Ba ..... | 137·43 | 9·31 | 14·76 | 9·83 | 13·92 | 9·47 | 14·47 |
| Os ..... | 191·00 | 22·73 | 8·40 | | | | |
| Au ..... | 197·20 | 10·53 | 18·73 | 17·71 | 11·08 | 7·81 | 25·11 |
| Hg ..... | 200·30 | 7·19 | 27·86 | 8·79 | 22·66 | 8·80 | 22·73 |
| U ...... | 239·50 | 16·29 | 14·70 | 16·57 | 14·49 | 8·16 | 29·40 |

# XVIII. SITZUNG VOM 11. JULI 1901.

Das w. M. Herr Hofrath Zd. H. Skraup in Graz dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Beendigung verschiedener Experimentaluntersuchungen.

Herr Dr. Heinrich Uzel in Königgrätz spricht den Dank für die ihm gewährte Subvention für eine wissenschaftliche Reise nach Ceylon zum Studium der dort häufig vorkommenden Formen tropischer Insecten aus.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

I. »Die Materie, ihre Kräfte, Schwingungen und Bewegungen«, von Herrn Nikolaus Strupp in Neunmühlen (Mähren).

II. »System der Sensitometrie photographischer Platten«, von Herrn Hofrath Dr. J. M. Eder in Wien.

III. »Theorie der vollständigen Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen«, und

IV. »Über einen neuen Gesichtspunkt in der Theorie des Pfaff'schen Problems der Functionsgruppen und der Berührungstransformationen«, beide von Herrn S. Kantor in Wien.

Das w. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet vier Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag:

I. »Über Condensationen von Phenylaceton mit aromatischen Aldehyden«, von den Herren G. Goldschmiedt und H. Krczmař.

II. »Neue Beobachtungen über Chloridbildung mittels Thionylchlorid«, von Herrn Dr. Hans Meyer.

III. »Zur Kenntnis der β-Benzoylpicolinsäure«, von Herrn Dr. B. Jeiteles.

IV. »Über einige Derivate der β-Kresotinsäure«, von Herrn stud. phil. Max Fortner.

Das w. M. Herr Hofrath Zd. H. Skraup in Graz übersendet drei Abhandlungen, welche im chemischen Institute der Universität Graz verfasst worden sind.

I. »Über die Cellobiose«, von den Herren Zd. H. Skraup und J. König.

II. »Synthetische Versuche mit Acetochlorglycose und Acetochlorgalactose«, von den Herren Zd. H. Skraup und R. Kremann.

III. »Über die Acetylierung von löslicher Stärke«, von Herrn Dr. Fritz Pregl, Privatdocent für Physiologie.

Das c. M. Herr Hofrath Dr. A. Bauer übersendet zwei im Laboratorium für allgemeine Chemie an der technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeiten, betitelt:

I. »Über Nitroverbindungen des Anthragallols« (II. Mittheilung), von den Herren Max Bamberger und Fritz Böck.

II. »Über Nitroverbindungen des Anthragallols» (III. Mittheilung), von den Herren Max Bamberger und Fritz Böck.

Das c. M. Herr Prof. J. M. Pernter überreicht folgende Abhandlung: »Untersuchungen über die Polarisation des Lichtes in trüben Medien und des Himmelslichtes, mit Rücksicht auf die Erklärung der blauen Farbe des Himmels«.

Ferner überreicht das c. M. Herr Prof. J. M. Pernter nachfolgende zwei Arbeiten aus der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus:

1. »Über den Arbeitswert einer Luftdruckvertheilung und über die Erhaltung der Druckunterschiede«, von Herrn Max Margules.
2. »Isothermen von Österreich«, von Herrn Wilhelm Trabert.

Das w. M. Herr Hofrath F. Steindachner legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Herpetologische und ichthyologische Ergebnisse einer Reise nach Südamerika mit einer Einleitung von Therese Prinzessin von Baiern.«

Herr Hofrath F. Steindachner überreicht eine Arbeit des Herrn Custos Dr. L. v. Lorenz über »*Hadropithecus stenognathus* nebst Bemerkungen zu einigen anderen ausgestorbenen Lemuren von Madagaskar«.

Herr Hofrath Steindachner berichtet über das Vorkommen einer bisher noch unbeschriebenen *Paraphoxinus*-Art, die in den Karstgewässern und Quellen bei Gacko (Fluss Gračanica und Mušica), in der Zalomska in der Ebene von Nevesinje in der Hercegovina, sowie im Flusse Ljuta bei Grinda östlich von Ragusa vecchia, in großer Individuenzahl von den Herren Dr. Rebel und Dr. Sturany im Jahre 1899, sowie von Herrn Hawelka (1896), gesammelt wurde.

Herr Dr. Adalbert Prey, Adjunct am k. k. Gradmessungs-Bureau, überreicht eine Arbeit unter dem Titel: »Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse des Systems 70 Ophiuchi«.

Das c. M. Herr Director Th. Fuchs legt eine Mittheilung vor unter dem Titel: »Über den Charakter der Tiefseefauna des Rothen Meeres auf Grund der von der Österreichischen Tiefsee-Expedition gewonnenen Ausbeute«.

Herr Dr. Adolf Jolles überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Beiträge zur Kenntnis der Eiweißkörper«. (II. Mittheilung.)

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak legt eine vorläufige Mittheilung von Herrn C. Doelter vor, betitelt: »Über das Verhalten des vulcanischen Magmas beim Erstarren«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Fritz Hasenöhrl, betitelt: »Über das Gleichgewicht eines elastischen Kreiscylinders«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Franz Exner legt eine vorläufige Mittheilung des Herrn Dr. H. Benndorf vor: »Über ein mechanisch registrierendes Elektrometer für luftelektrische Messungen«.

Das w. M. Herr Prof. F. Becke legt eine Abhandlung des Referenten der Erdbeben-Commission der kaiserlichen Akademie, Herrn Prof. J. N. Woldřich in Prag vor, welche den Titel führt: »Das nordostböhmische Erdbeben vom 10. Jänner 1901«.

Das w. M. Herr Hofrath K. Toldt legt eine Arbeit von Herrn Dr. Siegmund v. Schumacher vor, welche den Titel führt: »Zur Biologie des Flimmerepithels«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht sieben in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

I. »Über die Trimethylpentanolsäure«, von den Herren Karl Michel und Karl Spitzauer.

II. »Condensation von Zimmtaldehyd mit Isobutyraldehyd«, von den Herren K. Michel und K. Spitzauer.

III. »Über Paraldol und zähflüssiges Acetaldol«, von Herrn A. K. Novak.

IV. »Über aromatische Polycarbylamine«, von Herrn Felix Kaufler.

V. »Über die partielle Hydrolyse von Triamidomesitylen«, von Herrn F. Wenzel.

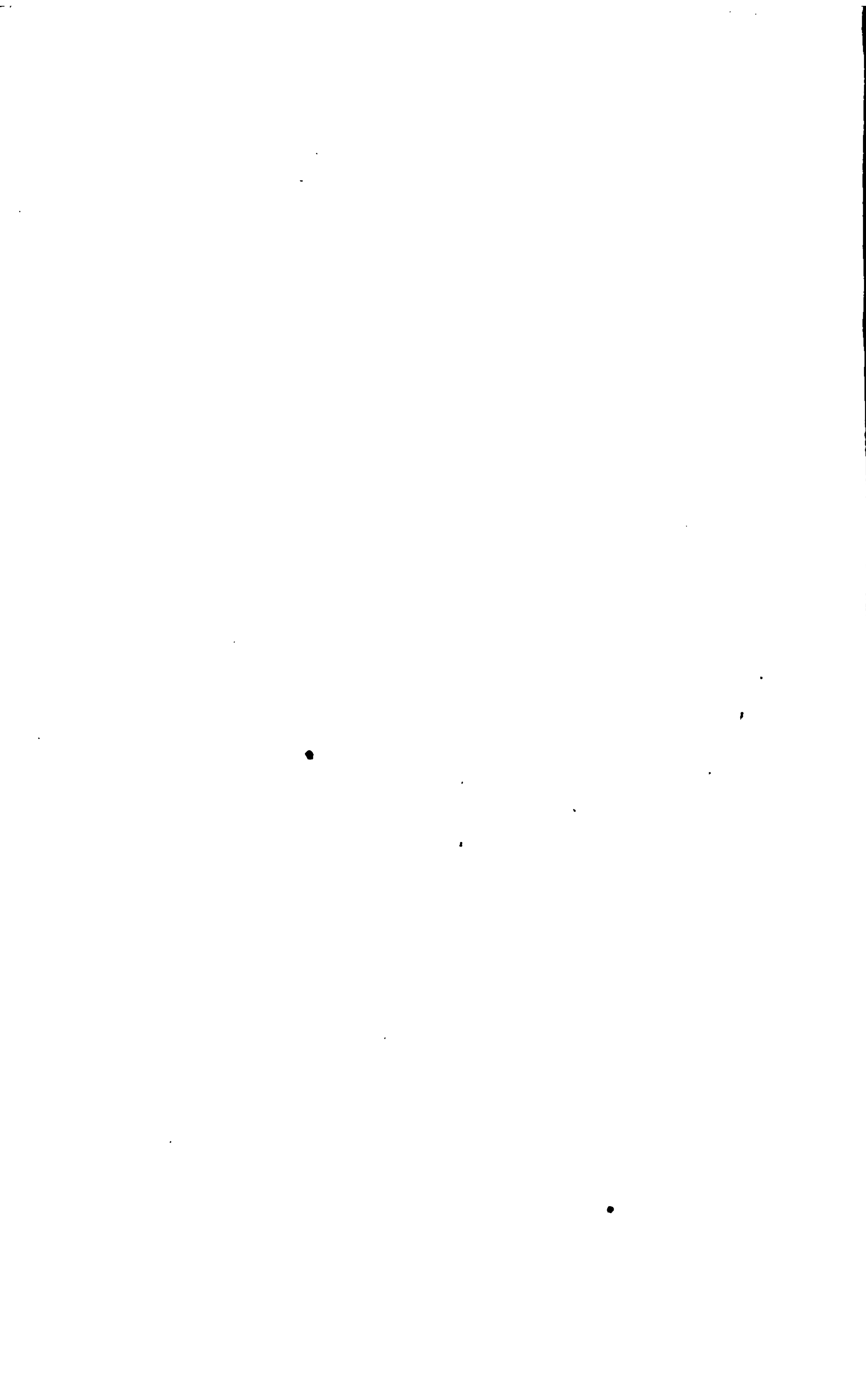
VI. »Notiz über das Cotoin«, von Herrn J. Pollak.

VII. »Über die Nitrosierung des Methylphloroglucindimethyläthers«, von den Herren J. Pollak und M. Solamonica.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Koch K. R., Relative Schweremessungen, ausgeführt im Auftrage des königl. Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens. I. Messungen auf zehn Stationen des Tübinger Meridians. Stuttgart, 1901.

Kohn R., Versuche über eine elektrochemische Mikroskopie und ihre Anwendung auf Pflanzenphysiologie. (Vorläufige Mittheilung.) Prag, 1901. 8°.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.



# SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. VIII. UND IX. HEFT.

JAHRGANG 1901. — OCTOBER UND NOVEMBER.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 1 TAFEL UND 9 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1901.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

# INHALT

des 8. und 9. Heftes October und November 1901 des CX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.



Preis des ganzen Heftes: 3 K 20 h = 3 Mk. 20 Pfg.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

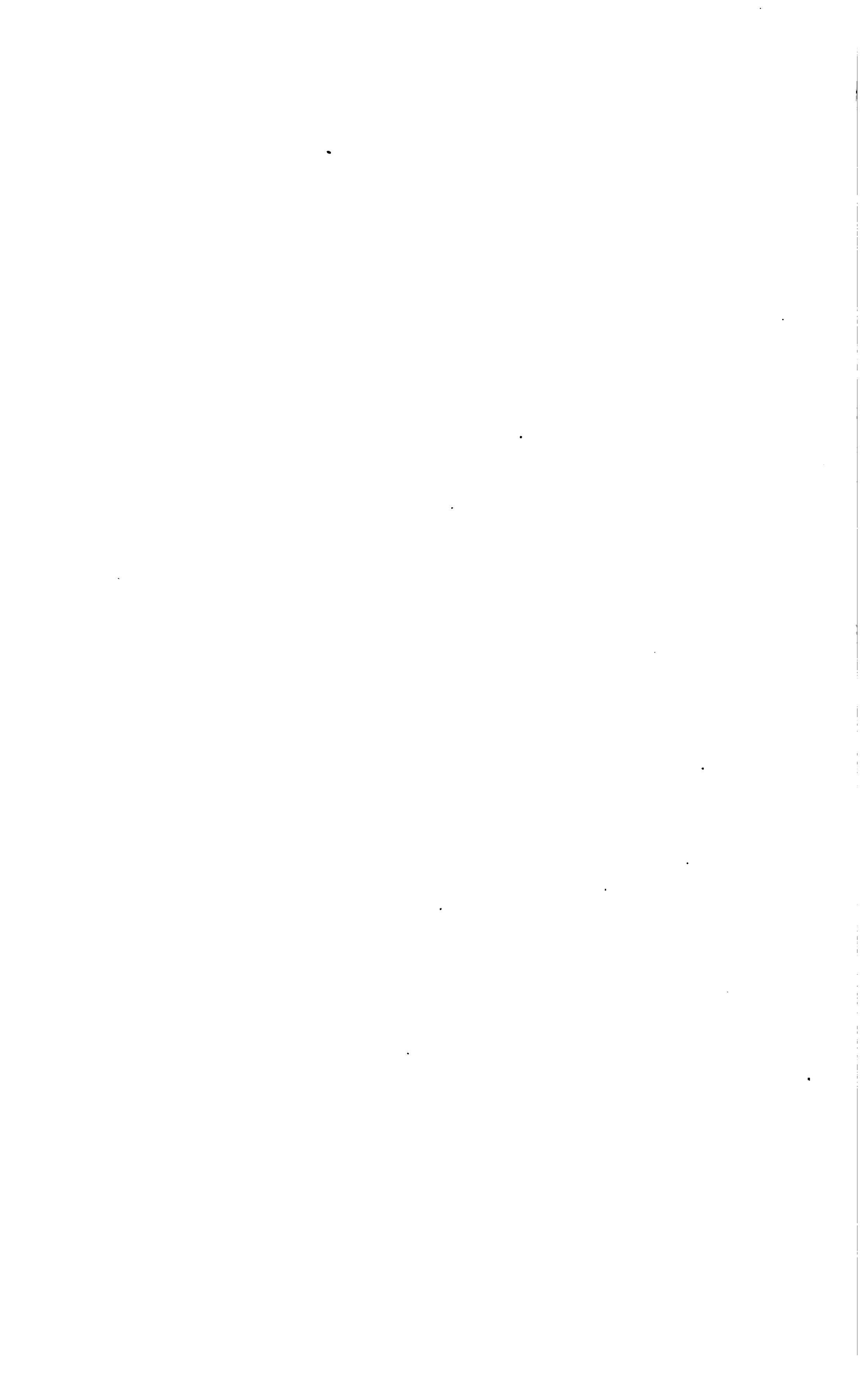
# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. VIII. HEFT.

### ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



# XIX. SITZUNG VOM 10. OCTOBER 1901.

---

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 110, Abth. I, Heft I bis IV (Jänner bis April 1901). — Abth. II. a, Heft IV (April 1901). — Abth. II. b., Heft II bis IV (Februar bis April 1901); Heft V (Mai 1901). — Monatshefte für Chemie, Bd. XXII, Heft VI (Juni 1901); Heft VII (Juli 1901).

Der Vorsitzende, Herr Präsident Prof. E. Sueß, begrüßt die Classe bei Wiederaufnahme der Sitzungen nach den akademischen Ferien und heißt das neueintretende w. M. Herrn Prof. Dr. Victor Uhlig herzlich willkommen.

Der Vorsitzende gedenkt ferner des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 9. September l. J. in Wien erfolgte Ableben des w. M. der philosophisch-historischen Classe, Herrn Prof. Dr. Wilhelm Tomaschek, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, verliest eine Note des Curatoriums der kaiserlichen Akademie vom 19. September l. J., worin die Allerhöchste Bestätigung der diesjährigen Wahlen der Akademie mitgetheilt wird.

Das Executiv-Comité des I. ägyptischen medicinischen Congresses in Cairo übersendet eine Einladung zu der am 14. December 1902 stattfindenden Versammlung.

Der Festausschuss der Naturhistorischen Gesellschaft in Nürnberg übersendet eine Einladung zu dem am 26. und 27. October d. J. stattfindenden 100jährigen Stiftungsfeste der Gesellschaft.

Herr Heinrich Friese in Innsbruck übersendet die beiden Pflichtexemplare seines mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie herausgegebenen Werkes: »Die Bienen Europas.« Theil VI.

Herr Dr. Fridolin Krasser in Wien dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Förderung seiner botanischen Studien über fossile Pflanzen.

Von dem Leiter der botanischen Forschungsreise nach Brasilien, dem w. M. Herrn Prof. R. v. Wettstein, sind zwei weitere Berichte über die Arbeiten dieser Expedition eingelaufen.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt das 1. Heft des IV 1. Bandes der im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebenen »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen« vor.

Der Secretär theilt mit, dass das c. M. Herr Hofrath J. v. Radinger seine in der Sitzung vom 11. October 1900 vorgelegte Arbeit »Der Äther und das Licht« zurückgezogen hat.

Der Secretär legt ferner folgende eingesendete Abhandlungen vor:

I. »Die Erdbeben Polens. Des historischen Theiles I. Abtheilung«, von Herrn Prof. Dr. W. Láska in Lemberg.

II. »Weitere Untersuchungen über physikalische Zustandsänderungen der Kolloide. I. Mittheilung: Verhalten der Gelatine«, von den Herren Dr. Wolfgang Pauli und Dr. Peter Rona in Wien.

III. »Beweis des fünften Postulates Euklids«, von Herrn Prof. P. Raimund Fischer in Braunau in Böhmen.

Das c. M. Herr Prof. Rudolf Hoernes in Graz übersendet folgende zwei Abhandlungen:

I. »Erdbeben und Stoßlinien Steiermarks«.

II. »Neue Cerithien aus der Formengruppe der *Clava bidentata* (Defr.) Grat. von Oisnitz in Mittel-Steiermark nebst Bemerkungen über die Vertretung dieser Gruppe im Eocän, Oligocän und Miocän (in mediterranen und sarmatischen Schichten)«.

Das w. M. Herr Hofrath L. Pfaundler in Graz übersendet eine Arbeit von Herrn Dr. Karl Przibram, betitelt: »Photographische Studien über die elektrische Entladung«.

Das c. M. Herr Hofrath A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Prag von den Herren Prof. Alois Smolka und Ed. Halla, betitelt: »Über α- und β-Naphtylbiguanid«.

Herr Dr. Karl Kellner in Wien übersendet ein Paket, enthaltend Muster zu seinem in der Sitzung am 5. November 1896 überreichten versiegelten Schreiben behufs Wahrung der Priorität, welches die Aufschrift trägt: »Experimenteller Beweis über die Verwandelbarkeit der sogenannten Grundstoffe«

Das w. M. Herr Prof. Fr. Exner legt eine Arbeit des Herrn Prof. Dr. Egon Ritter v. Oppolzer in Innsbruck vor, welche den Titel führt: »Zur Theorie der Scintillation der Fixsterne«.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben legt das von der Verlagsbuchhandlung A. Hölder in Wien der kaiserlichen Akademie geschenkweise überlassene II. Heft des XIII. Bandes der »Arbeiten aus den zoologischen Instituten der Universität Wien und der zoologischen Station in Triest« vor.

Herr Dr. Franz Schaffer in Wien überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: »Neue geologische Studien im südöstlichen Kleinasien«.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Albert I[er], Prince souverain de Monaco, Résultats des Campagnes scientifiques accomplies sur son yacht. Fascicules XIX, XX.

Astronomical Laboratory at Groningen, Publications, Nr. 5, 8. Edited by Prof. J. C. Kapteyn. Groningen, 1900. 4°.

Brühl Jul. Wilh., Roscoe-Schorlemmer's ausführliches Lehrbuch der Chemie. VIII. Bd.: Die Kohlenwasserstoffe und ihre Derivate oder organische Chemie, VI. Theil. Bearbeitet in Gemeinschaft mit Edward Hjelt und Ossian Aschan. Braunschweig, 1901, 8°.

Comstock Charles Worthington, The application of Quaternions to the Analysis of internal stress. Denver, 1901. 8°.

Cyon E., v., Die physiologischen Grundlagen der Geometrie von Euklid. Eine Lösung des Raumproblems. Bonn, 1901. 8°.

— Die physiologischen Verrichtungen der Hypothese. Bonn. 1900. 8°.

Deutsche akademische Vereinigung zu Buenos Aires, Veröffentlichungen, Bd. I, Heft IV, Heft V. 8°.

Duport M. H., Mémoire sur la loi de l'attraction universelle. Dijon, 1901. 8°.

Goppelsroeder Friedrich, Capillaranalyse, beruhend auf Capillaritäts- und Adsorptionserscheinungen mit dem Schlusscapitel: Das Emporsteigen der Farbstoffe in den Pflanzen. Basel, 1901. 8°.

Genna Pietro, Calcolo del Π col metodo dei triangoli inscritti. Marsala, 1901. 8°.

Jamshedji Edalji B. A. B. Sc., Reciprocally related figures and the property of equianharmonicity. Ahmedabad, 1901. 8°.

Niederösterr. Landesausschuss, Bericht über die Amtswirksamkeit vom 1. Juli 1899 bis 30. Juni 1900. VI. Gesundheitswesen, Landes-Wohlthätigkeitsanstalten, Militäreinquartierung und Vorspann. Referent Leopold Steiner. Wien, 1900. 8°.

Museum of the Brooklyn Institute of Arts and Sciences Science Bulletin. Vol. I. Nr. 1. 8°.

Niedenzu Franz, Arbeiten aus dem botanischen Institute des kgl. Lyceum Hosianum in Braunsberg, Ostpreußen: I. De genere Byrsonima. 4°.

Schlütter Wilhelm, Schwingungsart und Weg der Erdbebenwellen. I. Theil: Neigungen. Göttingen, 1901. 8°.

Sixta Václav, Dr., Über die morphologische Bedeutung der *Monotremata (Sauromammalia), Ornithorhynchus* und *Echidna*. Hohenmauth, 1901. 8°.

Sperber Joachim, Dr., Leitfaden für den Unterricht in der anorganischen Chemie, didaktisch bearbeitet. Zweiter Theil. Zürich, 1901. 8°.

Sresnewsky B., Dr., Geschützte Rotationsthermometer. Beitrag zur Frage über die Ermittlung der wahren Lufttemperatur. Jurjew, 1901. 8°.

Stiatessi Raffaelo, Spoglio delle osservazioni sismiche dal 1 Novembre 1900 al 31 Luglio 1901. Mugello, 1901. 8°.

Technische Hochschule in Karlsruhe, Verschiedene Inauguraldissertationen und Programm.

Universidad de La Plata, Publicaciones, Facultad de Ciencias Fisico-matemáticas, Nr. 1, Julio 1901. 8°.

University of Missouri, The University of Missouri Studies Volume I, Number I. Groß-8°.

Vallot J., Annales de l'Observatoire météorologique physique et glaciaire du Mont Blanc. Tome IV, Tome V. Paris, 1901. 4°.

Vámossy Stephan, v., Dr., Beiträge zur Geschichte der Medicin in Pressburg. Pressburg, 1901. 8°.

Wild H., Über den Föhn und Vorschläge zur Beschränkung seines Begriffes. Zürich, 1901. 4°.

# Photographische Studien über die elektrische Entladung

von

**Karl Przibram.**

**(Vorgelegt in der Sitzung am 10. October 1901.)**

In meiner ersten Veröffentlichung [1] über die Photographie elektrischer Entladungen bemerkte ich Folgendes: Springt bei der Aufnahme ein Funke über die Platte, so erscheinen die Äste des begleitenden positiven Büschels dunkel auf hellem Grund, theils mit hellerem, theils mit dunklerem Rande, so dass die ganze Figur reliefartig hervortritt (Tafel, Fig. 2). Diese auffallende Erscheinung habe ich näher untersucht.

Zunächst ist zu bemerken, dass dieselbe »Umkehrung« auch an den von der Kathode ausgehenden positiven Büscheln des Rückschlages zu beobachten ist. Etwas ähnliches sind wohl auch die »dunklen Enden« der positiven Büschel auf Fig. 18 des Armstrong'schen Werkes.[2]

Man kann sich bei der Betrachtung solcher Figuren kaum des Eindruckes erwehren, dass man es hier mit Schlieren zu thun hat, die durch die Büschel erzeugt und durch den Funken beleuchtet werden. Für diese Ansicht sprechen auch folgende Versuche:

1. Es wird eine Büschelentladung aufgenommen und die Platte dann durch einen in der Nähe überspringenden Funken belichtet. Es zeigt sich keine »Umkehrung«. Dieser Versuch wurde angestellt, um zu entscheiden, ob nicht etwa eine photographische Umkehrung im Spiele sei, wie sie von

---

[1] Diese Sitzungsberichte, 108, II a, S. 1161.

[2] Electrical movement in air and water, 1897.

Clayden[1] an nachträglich belichteten Funkenaufnahmen beobachtet wurde.

2. Auf ein und derselben Platte wird erst bei größerer Elektrodendistanz ein Büschel, dann bei kleinerer ein Funke aufgenommen. Nur die zur Funkenentladung gehörigen Büschel zeigen Umkehrung.

3. Es wird erst ein Funke, dann ein Büschel aufgenommen. Resultat wie bei 2.

4. Es wird ein Büschel auf der Platte aufgenommen, während zu gleicher Zeit ein Funke ein paar Centimeter über der Platte überspringt. Die Enden der positiven Büschel sind dunkel mit hellem Saum; die positive Figur im Inneren der negativen ist deutlich umgekehrt.

5. Es werden Funkenaufnahmen auf Platten gemacht, deren Rückseite mit »Antisol« (einem gebräuchlichen Mittel gegen die sogenannten Lichthöfe) bestrichen sind. Die Umkehrung der Büschel ist sehr undeutlich oder fehlt ganz.

Eine hinreichende Erklärung der Umkehrung wäre nun folgende: längs der Zweige des Büschels wird die Luft erwärmt und bildet so Schläuche von geringerem Brechungsexponenten als die Umgebung. Ein Theil der vom Funken ausgehenden Strahlen wird von der Rückseite der Platte, wenn diese nicht mit »Antisol« bestrichen ist, zurückgeworfen, dringt von unten in jene Schläuche ein und wird bei geeigneter Neigung von der Innenwand derselben auf die Platte außerhalb des Büschels total reflectiert, so dass diese Theile mehr Licht empfangen, als die vom Büschel bestrichenen.

Ein zweiter Punkt, auf den ich näher eingegangen bin, ist der Formunterschied der positiven und negativen Figur. In der eingangs citierten Arbeit versuchte ich darzulegen, wie die Betrachtung der Größenverhältnisse der Figuren zu dem Schlusse führt, die Entladung beginne an der Anode später als an der Kathode, breite sich aber rascher aus. Es scheint nun, dass diese Annahme auch die Formverschiedenheit einigermaßen erklären könnte.

[1] Vergl. R. W. Wood, Dank lightning-flashes and the Clayden-effect. Nature, LXI, p. 104.

Man wäre auf den ersten Blick geneigt, zwischen der Ausdehnung und der Verästelung der Figuren einen einfachen Zusammenhang festzustellen, derart, dass die größere Figur auch die mehr verästelte ist. Dies ist auch der Fall; allein die Größe ist nicht der einzige bestimmende Factor, da z. B. in Luft eine positive Figur weit mehr verzweigt ist, als eine gleichgroße negative. Vielmehr scheint alles, was den Eintritt der Entladung verzögert, die Verästelung zu begünstigen. Wenn dem so ist, so hätte also die charakteristische Form des positiven Büschels die gleiche Ursache wie seine größere Ausdehnung, nämlich die erst verhinderte, dann gleichsam explosionsartig erfolgende Ausbreitung.

Belege für die aufgestellte Behauptung sind folgende:

1. In $CO_2$, in dem die Entladung schwieriger eintritt, sind beide Figuren mehr zerfasert.

2. Um der Entladung ein künstliches Hindernis zu schaffen, schaltete ich vor die Kathode eine kleine Funkenstrecke. Es zeigte sich dann in der That, dass die negative Figur, welche bei den Controlaufnahmen ohne Funkenstrecke eine verschwommene runde Scheibe war, in einzelne zerfaserte Sectoren zerfiel.

3. Dass das plötzliche Eintreten der Entladung für die Entstehung von Verästelungen nothwendig ist, geht aus den Versuchen Reitlinger's[1] hervor, welcher zeigte, dass Halbleiter als Elektrode, wobei also die Elektricität nur langsam zugeführt wird, den negativen ähnliche positive Lichtenberg'sche Figuren liefern.

4. Bringt man zwischen die Kathode und die photographische Platte ein dünnes Gelatineblatt, und gelingt es der Entladung, dasselbe zu durchbrechen, so treten aus dem so entstandenen feinen Loch dünne, spitze, am Ende ausgefranste Lichtstreifen hervor, welche eher positiven Ästen, als negativen Figuren gleichen. Von der Art und Weise, wie der Entladungsverzug die Verästelung bewirkt, kann man sich leicht eine Vorstellung machen. Das Entladungspotential wird erst nur an einzelnen Punkten der Elektrode erreicht. An diesen beginnt

[1] Diese Sitzungsberichte, 83, II, S. 683.

die Entladung und schreitet längs der Kraftlinien weiter. Ist nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit gering, so werden trotz der eingetretenen Entladung auch noch andere Punkte der Elektrode auf das Entladungspotential gebracht werden, bis endlich die Entladung von der ganzen Elektrode oder doch einem großen Theile derselben ausgeht, wie bei der negativen Figur in freier Luft. Schreitet dagegen die Entladung von ihren ersten Ausgangspunkten, infolge plötzlicher Überwindung eines Übergangswiderstandes bei hohem Potential, sehr rasch weiter, so wird ein großer Theil der der Elektrode zugeführten Elektricität auf diesen ersten Wegen nachströmen und daher keine wesentliche Potentialerhöhung an anderen Punkten der Elektrode bewirken. Die Entladung geht daher nur in einzelnen Zweigen vor sich. Die gleiche Betrachtung kann man auf jeden Punkt der Entladungsbahn anwenden, den man ja als Ausgangspunkt einer neuen Entladung auffassen kann.

# Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(XX. Mittheilung)

**(enthaltend die Spectra von Tm, As, Se, S, P, O, N, H, Fl, Cl, Br, J, Ra, Po)**

von

Prof. **Franz Exner,** w. M. k. Akad., und Dr. **E. Haschek.**

(Mit 1 Textfigur.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1901.)**

## LXI. Thulium.

Das ultraviolette Spectrum des Thuliums ist bisher unbekannt. Nur im sichtbaren Theile des Funkenspectrums hat Thalèn seinerzeit einige Linien bestimmt. Wir verdanken der Güte des Herrn P. T. Cleve ein thuliumhältiges Präparat, das uns wenigstens die Hauptlinien dieses Elementes zu bestimmen gestattete. Die Spectraluntersuchung des Präparates ergab als Hauptbestandtheil Yb, dessen Spectrum vollständig vorhanden war. Außerdem enthielt dasselbe noch Erbium in deutlicher Menge. Die 237 Thuliumlinien, welche wir gemessen haben, unter denen sich einige recht kräftige befinden, stellen natürlich nicht das gesammte Spectrum des Thuliums vor, sondern können nur die stärkeren Linien desselben enthalten. Ein thuliumreicheres Präparat würde ohne Zweifel ein sehr viel linienreicheres Spectrum ergeben, das in seinem Charakter viel Ähnlichkeit mit dem des Ytterbiums haben dürfte. Da unser Thuliumspectrum jedenfalls unvollständig ist, so haben wir dasselbe bei der im nachfolgenden mitgetheilten Tabelle der Linienzahlen nicht berücksichtigt. Bemerkt sei schließlich noch, dass auch unter den Linien des Erbiums und Ytterbiums sich Linien des Thuliumspectrums finden. Es scheint das Erbium

stärker mit Thulium verunreinigt zu sein als das Ytterbium. In beiden Fällen ist aber die Verunreinigung nur eine sehr geringe.

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 2296·32 | 1 | 2729·59 | 1+ | 2986·60 | 2 |
| 2309·67 | 1 | 30·84 | 1+ | 90·66 | 1 |
| 23·80 | 1+ | 31·49 | 1+ | 98·5 | 1+ |
| 26·28 | 1+ | 44·18 | 1 | 3008·2 | 1+ Mo? |
| 28·58 | 1 | 44·81 | 1 | 13·80 | 1+ |
| 29·40 | 1 | 66·10 | 1+ | 14·65 | 1 |
| 31·90 | 2 | 68·35 | 1+ | 15·43 | 2 |
| 38·43 | 2 | 70·1 | 1+ br. | 16·98 | 1 |
| 41·82 | 1+ | 75·10 | 1+ | 17·20 | 1 |
| 42·15 | 1+ | 77·15 | 1 | 18·75 | 1 |
| 53·17 | 1 | 85·18 | 1 | 19·20 | 1+ |
| 57·13 | 2 | 86·30 | 1 | 20·71 | 5 |
| 61·33 | 2+ | 88·10 | 1 | 46·16 | 1 |
| 64·1 | 1+ | 89·52 | 1+ Cr? | 48·90 | 1 |
| 66·47 | 1 | 91·74 | 1+ | 50·86 | 2 |
| 75·3 | 1+ (Fe)? | 94·71 | 1 | 52·7 | 1+ |
| 2409·10 | 1 | 97·38 | 2 | 53·83 | 1+ |
| 26·26 | 1 | 2812·42 | 1+ | 56·20 | 2 |
| 89·57 | 2 | 18·25 | 1 | 73·20 | 3 |
| 2519·88 | 1 | 19·63 | 1 | 73·62 | 1 |
| 61·82 | 1 | 20·34 | 1 | 73·95 | 1+ |
| 88·34 | 1 | 27·14 | 1 | 79·00 | 1 |
| 2624·45 | 1 | 31·67 | 1 | 81·5 | 1+ |
| 59·35 | 1 | 55·53 | 1 | 93·22 | 1 Va? |
| 63·2 | 1+ | 68·10 | 1+ | 97·03 | 1+ |
| 68·29 | 1 | 69·36 | 3 | 98·16 | 1+ |
| 79·65 | 1 | 89·75 | 1+ Mn? | 98·73 | 2 |
| 82·41 | 2 | 91·04 | 1 Mo? | 99·75 | 1 |
| 88·06 | 1 Va? | 2903·15 | 1+ Mo? | 3110·97 | 1+ |
| 99·56 | 1 | 18·40 | 1 | 18·55 | 1+ Va? |
| 99·92 | 1 | 25·73 | 1 | 25·00 | 1 |
| 2707·09 | 1 | 26·84 | 1 | 29·27 | 1+ |
| 07·64 | 1+ | 28·34 | 1+ | 31·39 | 6 |
| 13·47 | 1 | 36·14 | 2 | 34·02 | 3 |
| 19·56 | 2 | 51·39 | 2+ | 51·17 | 3 |
| 21·29 | 2 | 59·79 | 1 | 52·53 | 1+ |
| 24·54 | 1 Mn? | 65·96 | 2 | 57·50 | 2 |
| 29·14 | 1+ | 74·37 | 1+ | 68·30 | 1 |

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 3170·00 | 1 | 3368·50 | 1+ | 3700·40 | 5 |
| 72·96 | 3 | 69·76 | 1 | 01·52 | 5 |
| 73·66 | 1 | 74·67 | 1 | 05·01 | 1 |
| 73·81 | 1 | 81·46 | 1 | 18·05 | 3 |
| 85·60 | 1+ | 97·65 | 2 | 25·23 | 2 |
| 95·50 | 1 | 98·16 | 1 | 34·27 | 3 |
| 3204·13 | 1+ | 3400·09 | 1 | 44·20 | 2 |
| 07·80 | 1 | 25·25 | 5 | 51·95 | 1 |
| 10·66 | 1 | 25·77 | 1 | 56·99 | 2 |
| 10·94 | 1 | 30·11 | 2 | 61·50 | 5 |
| 12·17 | 1 | 31·33 | 2 | 62·07 | 4 |
| 15·60 | 1 | 41·25 | 1 | 62·67 | 1 |
| 16·80 | 1 | 41·64 | 4 | 83·68 | 2 |
| 24·35 | 1+ | 49·97 | 1+ | 85·50 | 2+ r. |
| 31·65 | 1+ | 53·80 | 3 | 90·98 | 1 |
| 35·54 | 1 | 62·36 | 5 | 95·92 | 5 |
| 36·93 | 2 (Mn)? | 81·91 | 1 | 3848·17 | 7 |
| 40·38 | 2 | 92·74 | 1 | 88·23 | 1+ |
| 41·70 | 3 | 95·35 | 1+ | 89·10 | 1+ |
| 49·55 | 1+ | 3500·71 | 1+ | 90·71 | 1 |
| 50·04 | 1 | 13·15 | 1 | 92·82 | 1 |
| 51·50 | 1 | 35·00 | 1 | 3900·95 | 2 |
| 51·83 | 1 | 35·67 | 3 (Ti)? | 16·59 | 1 Va? |
| 55·02 | 1+ | 36·34 | 2 | 22·00 | 1 |
| 58·24 | 2 | 45·09 | 1 | 29·72 | 2+r. |
| 61·03 | 1+ | 66·04 | 2 | 49·40 | 1 |
| 64·31 | 1+ | 66·62 | 1 | 73·20 | 1 |
| 66·80 | 2 | 74·23 | 1 | 73·72 | 1 |
| 67·56 | 2 | 3607·50 | 1 | 96·67 | 3 |
| 69·13 | 3 | 08·93 | 2 | 4094·34 | 3 |
| 76·94 | 1 | 09·66 | 1 | 4106·01 | 3 |
| 83·55 | 2 | 43·80 | 2 | 38·50 | 1+ |
| 85·74 | 2 | 47·39 | 1 | 87·78 | 3 |
| 91·14 | 3 | 53·75 | 2 (Ti)? | 4200·08 | 1 |
| 3302·62 | 2 | 61·0 | 1+ | 03·91 | 2 |
| 09·95 | 2 | 65·96 | 1 | 42·31 | 4 |
| 10·70 | 1 Cr? | 68·22 | 2 | 4360·09 | 1 |
| 18·43 | 1+ | 73·31 | 1 | 86·62 | 1 |
| 23·35 | 1 | 78·15 | 2 | 4481·45 | 1 |
| 55·00 | 1 | 79·04 | 2 | 4522·75 | 2 |
| 62·79 | 4 | 83·33 | 1+ | 4616·10 | 2 |

## LXII. Arsen.

Von Messungen des ultravioletten Arsenspectrums liegen bisher vor die Zahlen von Kayser und Runge[1] im Bogen und die von Hartley und Adeney[2] im Funken. Wir verwendeten zur Aufnahme eine Legierung aus 40% As und 60% Ni. Das elementare As war von Merck bezogen. Das Spectrum zeigt starke Unterschiede mit dem Bogenspectrum und enthält mäßig starke, theils umgekehrte, theils sehr verwaschene Linien. Die Zahl derselben beträgt 44.

| λ | i | λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|---|---|
| 2134·37 | 1 | 2493·07 | 4 | 3922·60 | 100 |
| 56·3 | 1+ | 2745·10 | 5 | 31·4 | 1+ br. |
| 65·53 | 2+ | 80·37 | 10 | 48·85 | 1+ br. |
| 92·21 | 2+ | 2831·0 | 1+ br. | 4037·18 | 30 |
| 2229·96 | 1 | 43·80 | 2+ | 64·55 | 1+ |
| 66·82 | 1+ | 60·60 | 8 | 82·8 | 1+ br. |
| 71·53 | 1+ | 98·86 | 2 | 4188·00 | 2 |
| 88·28 | 3+ | 2926·3 | 1+ br. | 97·8 | 1+ br. |
| 2350·02 | 10 | 59·8 | 3+ br. | 4208·1 | 1+ br. |
| 63·10 | 1+ | 91·2 | 1+ | 29·5 | 1+ br. |
| 69·75 | 3 | 3032·97 | 1 | 4368·50 | 1+ |
| 70·87 | 3 | 3116·7 | 2+ br. | 4466·6 | 1+ br. |
| 81·32 | 2+ | 19·70 | 1+ | 95·5 | 2+ br. |
| 2437·30 | 1 | 3256·0 | 2+ | 4540·0 | 2+ br. |
| 56·62 | 4 | 3545·75 | 1+ | | |

## LXIII. Selen.

Wir suchten das Selenspectrum durch Aufschmelzen elementaren Selens auf Kohle zu erhalten, konnten jedoch keine Linien bekommen. Dasselbe Resultat ergab sich bei Verwendung von Elektroden aus Selenkupfer, auch wenn auf dieselben elementares Selen aufgetragen wurde. Es scheint somit,

[1] Kayser und Runge, Berl. Akad. (1893).

[2] Hartley und Adeney, Phil. Trans., 175 (1884).

dass man bei normalem Druck, wenigstens bei Anwendung des Transformatorfunkens, kein Spectrum erhält. Damit stimmen auch die älteren Angaben Ciamician's,[1] der bei Untersuchung der Funkenspectren der Halogene nur bei niederen Drucken Linien erhielt, dagegen bei Atmosphärendruck ein continuierliches Spectrum beobachtete, das die Linien überstrahlte. Auch die Messungen von Salet[2] und Plücker und Hittorf[3] beziehen sich auf Geißler'sche Röhren bei niederem Druck.

## LXIV. Schwefel.

Wir versuchten das Schwefelspectrum dadurch aufzunehmen, dass wir elementaren Schwefel auf Kohle oder Elektroden aus Schwefelkupfer und Schwefelsilber in freier Luft und endlich dieselben Elektroden in einer mit Schwefeldioxyd gefüllten Kugel verwendeten. Das Resultat war in allen Fällen ein negatives, es konnten keine Linien beobachtet werden. Die bisherigen Messungen des Spectrums beziehen sich auf Geißler'sche Röhren, wie z. B. die neueren von Eder und Valenta.[4]

## LXV. Phosphor.

Die Aufnahmen führten, wie bei den vorhergehenden Elementen, zu einem negativen Resultat. Verwendet wurden Elektroden aus Kohle mit aufgeschmolzenem elementaren Phosphor in der oben erwähnten Kugel. Subjectiv war nur ein äußerst schwaches continuierliches Spectrum zu erkennen.

## LXVI. Sauerstoff.

Das ultraviolette Spectrum des Sauerstoffes wurde gemessen im Geißlerrohr von Neovius,[5] sowie Hartley und Adeney[6] gelegentlich ihrer Bestimmung des Luftspectrums,

---

1 Ciamician, diese Sitzungsber., Bd. 78 (1878).

2 Salet, Ann. chim. phys., Bd. 28 (1873).

3 Plücker und Hittorf, Phil. Trans., Bd. 155 (1865).

4 Eder und Valenta, Denkschr. der Wiener Akad., Bd. 67 (1898).

5 Neovius, Bihang till k. Svensk. Vet. Akad. Handlingar. Bd. 17 (1891).

6 Hartley und Adeney, Phil. Trans., 175 (1884).

jedoch ohne Trennung des Sauerstoffes vom Stickstoff. Wir haben die Luftlinien bei der Ausmessung der Spectren in den meisten Fällen mitgemessen, so dass die Wellenlängen derselben trotz der Verwaschenheit der Linien recht genau bestimmt sind. Wir geben darum in der folgenden Tabelle auch die Mittelwerte mit einer wesentlich größeren Genauigkeit, als sie den Einzelmessungen, wie bei unseren übrigen Linienangaben zukommen. Unter *n* ist die Anzahl der Einzelmessungen und unter *F* der wahrscheinliche Fehler des Mittels angegeben. Aus den Luftlinien haben wir die Stickstofflinien durch eine besondere Aufnahme des Stickstoffspectrums eliminiert. Doch bleibt bei sieben der gemessenen Linien die Zugehörigkeit zu Sauerstoff oder Stickstoff fraglich. Die Zahl der Sauerstofflinien beträgt 104.

| λ | *i* | *n* | *F* | λ | *i* | *n* | *F* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2318·71 | 1+ | 2 | 0·004 | 3727·471 | 4+ | 23 | 0·004 |
| 2418·70 | 1+ | 3 | 0·04 | 44·4 | 1+ N? | 1 | — |
| 33·63 | 1+ | 7 | 0·01 | 49·663 | 5+ | 18 | 0·007 |
| 45·55 | 1+ | 1 | — | 54·82 | 1+ | 6 | 0·05 |
| 78·70 | 1+ | 3 | 0·03 | 60·00 | 1+ | 2 | 0·00 |
| 2522·30 | 1+ | 3 | 0·14 | 3804·23 | 1+ | 4 | 0·02 |
| 3007·42 | 2+ br. | 5 | 0·05 | 24·23 | 1+ | 2 | 0·02 |
| 3135·3 | 1+ | 1 | — | 48·18 | 1+ | 4 | 0·02 |
| 39·45 | 1+ | 1 | — | 51·50 | 1+ | 3 | 0·00 |
| 3265·41 | 1+ br. | 8 | 0·03 | 63·70 | 1+ | 7 | 0·04 |
| 3320·80 | 1+ | 2 | 0·00 | 64·74 | 1+ | 4 | 0·02 |
| 25·1 | 1+ br. | 1 | — | 82·47 | 3+ | 12 | 0·01 |
| 54·20 | 1+ | 2 | 0·00 | 3907·73 | 1+ | 4 | 0·02 |
| 77·33 | 1+ | 10 | 0·01 | 12·20 | 3+ | 12 | 0·01 |
| 90·43 | 2+ br. | 11 | 0·006 | 45·250 | 3+ | 14 | 0·008 |
| 3408·39 | 1+ | 4 | 0·02 | 47·55 | 1+ | 2 | 0·03 |
| 71·08 | 1+ br. N? | 9 | 0·06 | 54·547 | 4+ | 30 | 0·006 |
| 3545·23 | 1+ N? | 3 | 0·03 | 73·439 | 8+ | 31 | 0·006 |
| 60·43 | 1+ N? | 3 | 0·10 | 82·904 | 2+ | 18 | 0·005 |
| 89·2 | 1+ br. N? | 1 | — | 4014·1 | 1+ | 1 | — |
| 94·60 | 1+ br. N? | 3 | 0·06 | 70·043 | 10+ | 28 | 0·007 |
| 3709·45 | 1+ | 2 | 0·04 | 72·40 | 10+ | 19 | 0·01 |
| 12·946 | 2+ | 21 | 0·005 | 76·082 | 10+ | 22 | 0·006 |

| λ | i | n | F | λ | i | n | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4079·11 | 2+ | 11 | 0·01 | 4328·70 | 1+ | 2 | 0·03 |
| 85·36 | 3+ | 10 | 0·01 | 31·23 | 1+ | 5 | 0·02 |
| 89·23 | 2+ | 3 | 0·08 | 37·01 | 2+ | 10 | 0·007 |
| 93·15 | 3+ | 17 | 0·01 | 45·713 | 3+ | 23 | 0·004 |
| 4105·147 | 5+ | 19 | 0·006 | 47·58 | 2+ | 13 | 0·008 |
| 11·06 | 2+ | 7 | 0·02 | 49·572 | 6+ | 23 | 0·006 |
| 12·26 | 2+ | 11 | 0·008 | 51·542 | 3+ | 24 | 0·008 |
| 14·20 | 1+ | 8 | 0·02 | 67·044 | 3+ | 22 | 0·004 |
| 19·460 | 8+ | 23 | 0·006 | 69·48 | 1+ | 4 | 0·01 |
| 20·62 | 3+ | 10 | 0·01 | 96·14 | 2+ | 13 | 0·01 |
| 21·73 | 2+ | 9 | 0·01 | 4415·07 | 8+ | 15 | 0·02 |
| 24·27 | 2+ | 8 | 0·01 | 17·144 | 5+ | 21 | 0·004 |
| 29·60 | 1+ | 7 | 0·02 | 43·29 | 1+ | 3 | 0·02 |
| 33·022 | 2+ | 12 | 0·004 | 52·57 | 2+ | 13 | 0·008 |
| 42·36 | 1+ | 5 | 0·03 | 65·54 | 2+ | 14 | 0·02 |
| 43·89 | 1+ | 5 | 0·03 | 68·06 | 2+ | 10 | 0·01 |
| 53·56 | 4+ | 15 | 0·01 | 69·55 | 1+ | 2 | 0·03 |
| 56·83 | 1+ | 2 | 0·02 | 4591·131 | 3+ | 14 | 0·005 |
| 69·49 | 2+ | 9 | 0·01 | 96·306 | 3+ | 17 | 0·008 |
| 72·0 | 1+ | 1 | -- | 4609·73 | 1+ | 4 | 0·02 |
| 85·72 | 6+ | 17 | 0·01 | 38·99 | 2+ | 13 | 0·006 |
| 90·06 | 7+ | 17 | 0·01 | 41·944 | 3+ | 17 | 0·003 |
| 4253·74 | 1+ br. | 5 | 0·03 | 51·00 | 2+ | 11 | 0·004 |
| 82·43 | 1+ N? | 4 | 0·02 | 61·76 | 2+ | 11 | 0·01 |
| 4303·74 | 1+ br. | 2 | 0·006 | 76·34 | 2+ | 8 | 0·01 |
| 17·274 | 3+ | 20 | 0·006 | 99·39 | 2+ | 10 | 0·02 |
| 19·779 | 3+ | 24 | 0·005 | 4705·56 | 2+ | 9 | 0·02 |
| 25·85 | 1+ | 10 | 0·02 | 10·3 | 1+ | 1 | — |
| 27·61 | 1+ | 6 | 0·02 | | | | |

## LXVII. Stickstoff.

Die Aufnahme des Stickstoffspectrums erfolgte zwischen Aluminiumelektroden und diente zur Ausscheidung der Stickstofflinien aus dem Luftspectrum. Die Tabelle der Wellenlängen ist analog wie beim Sauerstoff angeordnet. Die Linienzahl beträgt 89. Auch das Stickstoffspectrum wurde im ultra-

violetten Theile von Neovius[1] und Hartley und Adency[2] gemessen.

| λ | i | n | F | λ | i | n | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3329·55 | 2+ br. | 9 | 0·03 | 4097·428 | 3+ | 24 | 0·006 |
| 31·89 | 2+ br. | 5 | 0·03 | 4103·46 | 3+ | 24 | 0·01 |
| 66·0 | 1+ br. | 1 | — | 16·65 | 1+ | 2 | 0·03 |
| 67·43 | 1+ | 3 | 0·04 | 33·85 | 2+ | 8 | 0·02 |
| 74·2 | 1+ | 1 | — | 46·03 | 4+ | 19 | 0·01 |
| 3437·431 | 3+ | 27 | 0·005 | 52·21 | 1+ | 4 | 0·02 |
| 71·08 | 1+ br. O? | 9 | 0·06 | 76·16 | 3+ br. | 7 | 0·16 |
| 3545·23 | 1+ O? | 3 | 0·03 | 79·80 | 1+ br. | 2 | 0·27 |
| 60·43 | 1+ O? | 3 | 0·10 | 96·20 | 1+ | 3 | 0·15 |
| 89·2 | 1+ br. O? | 1 | — | 99·2 | 1+ | 1 | — |
| 94·60 | 1+ br. O? | 3 | 0·06 | 4206·80 | 2+ br. | 5 | 0·02 |
| 3729·41 | 1+ | 3 | 0·006 | 11·5 | 1+ | 1 | — |
| 44·4 | 1+ O? | 1 | — | 22·5 | 1+ | 1 | — |
| 58·41 | 1+ | 8 | 0·03 | 23·35 | 1+ | 3 | 0·05 |
| 71·09 | 1+ | 6 | 0·02 | 28·56 | 3+ br. | 8 | 0·06 |
| 3830·82 | 2+ br. | 7 | 0·02 | 36·93 | 5+ br. | 11 | 0·04 |
| 39·30 | 3+ br. | 5 | 0·02 | 41·94 | 5+ br. | 12 | 0·03 |
| 43·12 | 1+ | 3 | 0·03 | 66·45 | 1+ | 4 | 0·06 |
| 45·27 | 1+ | 3 | 0·03 | 76·0 | 1+ | 2 | 0·00 |
| 50·65 | 1+ | 2 | 0·00 | 4332·10 | 1+ | 6 | 0·03 |
| 57·2 | 1+ br. | 1 | — | 48·14 | 2+ | 9 | 0·02 |
| 61·83 | 1+ | 6 | 0·02 | 61·80 | 1+ | 4 | 0·02 |
| 93·43 | 1+ | 3 | 0·05 | 71·7 | 1+ | 2 | 0·00 |
| 3909·29 | 1+ | 8 | 0·01 | 79·75 | 1+ | 1 | — |
| 19·242 | 10+ | 19 | 0·006 | 92·5 | 1+ | 1 | — |
| 40·20 | 3+ br. | 4 | 0·08 | 4401·33 | 1+ | 8 | 0·03 |
| 56·043 | 6+ | 28 | 0·004 | 26·078 | 2+ | 15 | 0·006 |
| 95·262 | 50+ | 29 | 0·004 | 30·30 | 1+ | 7 | 0·06 |
| 4025·77 | 3+ br. | 3 | 0·10 | 32·62 | 2+ br. | 8 | 0·06 |
| 35·07 | 4+ br. | 10 | 0·02 | 34·4 | 1+ | 1 | — |
| 41·48 | 5+ br. | 15 | 0·02 | 47·226 | 20+ | 29 | 0·005 |
| 56·5 | 1+ br. | 1 | — | 60·25 | 1+ | 2 | 0·03 |
| 63·70 | 1+ | 2 | 0·06 | 77·95 | 1+ | 9 | 0·02 |
| 81·70 | 1+ | 10 | 0·02 | 4507·78 | 2+ | 6 | 0·02 |

[1] Neovius, l. c.
[2] Hartley und Adeney, l. c.

| λ | i | n | F | λ | i | n | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4514·95 | 1+ | 2 | 0·03 | 4640·70 | 1+ | 5 | 0·02 |
| 30·08 | 2+ br. | 5 | 0·03 | 43·273 | 5+ | 18 | 0·005 |
| 44·88 | 1+ | 3 | 0·12 | 49·257 | 5+ [1] | 19 | 0·005 |
| 52·65 | 1+ | 2 | 0·03 | 54·78 | 1+ | 3 | 0·01 |
| 4601·671 | 5+ | 19 | 0·006 | 75·0 | 1+ | 1 | — |
| 07·342 | 4+ | 18 | 0·003 | 4705·20 | 1+ | 2 | 0·00 |
| 14·050 | 3+ | 17 | 0·004 | 18·45 | 1+ | 2 | 0·03 |
| 21·571 | 4+ | 18 | 0·008 | 79·85 | 1+ | 2 | 0·03 |
| 30·725 | 15+ | 24 | 0·005 | 88·25 | 1+ | 2 | 0·03 |
| 34·20 | 1+ | 4 | 0·00 | 4803·4 | 1+ | 1 | — |

## LXVIII. Wasserstoff.

Auch beim Wasserstoff gelang es uns nicht, bei normalem Druck messbare Linien zu erzeugen. Auf den Platten konnte überhaupt nichts entdeckt werden, während die subjective Betrachtung des sichtbaren Theiles eine enorme Verbreiterung der Linien auf ungefähr 50 AE ergab, eine Beobachtung, welche u. a. auch jüngst von Rayleigh[2] gemacht wurde. Alle bisherigen Messungen beziehen sich auf das Spectrum in Geißlerröhren.

## LXIX. Fluor.

Aufnahmen aus Fluorammonium auf Kohlenelektroden in der Kugel ergaben keine Linien. Im sichtbaren Theile ließ sich subjectiv ein schwaches continuierliches Spectrum mit ganz flachen, ungemein breiten Maximis erkennen.

## LXX. Chlor.

Das Chlorgas lieferte bei normalem Drucke zwischen Kohlenelektroden 11 schwache, verwaschene Linien. Die bisherigen Messungen, z. B. die von Eder und Valenta,[3] beziehen

[1] Soll nach Neovius dem O angehören.

[2] Rayleigh, Phil. Mag., Bd. 1 (1901).

[3] Eder und Valenta, Denkschr. der Wiener Akad., Bd. 68 (1899).

sich alle auf Geißler'sche Röhren und zeigen, dass das Chlor bei niederem Drucke sehr zahlreiche und scharfe Linien gibt.

| λ | i | λ | i |
|---|---|---|---|
| 3602·2 | 1+ br. | 4307·6 | 1+ br. |
| 4132·6 | 1+ br. | 43·95 | 2+ |
| 58·1 | 1+ br. | 73·0 | 1+ br. |
| 67·9 | 1+ br. | 4794·68 | 3+ |
| 4254·6 | 1+ br. | 4810·20 | 2+ |
| | | 19·60 | 1+ |

## LXXI. Brom.

Wir versuchten das Spectrum des Broms in der Weise aufzunehmen, dass wir die Kugel, welche die Elektroden enthielt, mit flüssigem Brom beschickten. Obwohl der Funke demnach in einer bei etwa 20° C. mit Bromdampf gesättigten Atmosphäre überschlug, konnten wir keine Linien erhalten. Im Geißlerrohr wurde das Brom von Eder und Valenta[1] untersucht.

## LXXII. Jod.

Bei Verwendung von Kohlenelektroden mit aufgeschmolzenem elementaren Jod in der Kugel konnten wir keine Linien erhalten. Subjectiv zeigte sich ein schwaches continuierliches Spectrum. Im Ultraviolett ist das Jod bisher nicht untersucht.

## LXXIII. Radium.

Das Funkenspectrum des Radiums wurde bisher untersucht von Demarcay,[2] Runge[3] und Berndt.[4] Dass die Resultate der einzelnen Beobachter in Bezug auf die Identificierung der Linien in vielen Fällen nicht übereinstimmen,

[1] Eder und Valenta, Denkschr. der Wiener Akad., Bd. 68 (1899).

[2] Demarcay, C. R., 129 (1899); C. R., 131 (1900).

[3] Runge, Ann. der Phys., Bd. 2 (1900).

[4] Berndt, Phys. Zeitschr., Bd. 2 (1900/01).

kann bei der Schwierigkeit der Beschaffung des Materiales und bei der Ungleichförmigkeit desselben je nach der Darstellungsweise nicht Wunder nehmen. Das Material, das uns zur Verfügung stand, bezogen wir als Chlorid von der Société Centrale des Produits chimiques in Paris mit einer Activität von 240. Die Zahl der Linien, die wir mit Wahrscheinlichkeit dem Radium zuschreiben müssen, beträgt 17.

| λ | i | |
|---|---|---|
| 2512·46 | 1+ | sehr schwach in Ba |
| 2736·20 | 1+ br. | — |
| 2813·60 | 1 | sehr schwach in Ba |
| 16·25 | 2+ br. | — |
| 31·98 | 1 | — |
| 77·10 | 1+ | sehr schwach in Ba |
| 2908·0 | 1+ br. | — |
| 76·17 | 1+ | — |
| 3079·97 | 2 | schwach in Ba |
| 3126·53 | 1 | sehr schwach in Ba |
| 3541·77 | 1+ | sehr schwach in Ba |
| 3649·33 | 2+ | schwach in Ba |
| 3814·62 | 3 | — |
| 61·77 | 3+ [1] | schwach in Ba |
| 3993·25 | 3+ [2] | — |
| 4053·81 | 1+ | sehr schwach in Ba |
| 4682·41 | 1 | — |
| 4781·4 | 1+ br. | — |

Die Linien, welche wir als auch im Ba vorkommend bezeichnen, wurden in einem sehr kräftig exponierten Spectrum von Baryumnitrat beobachtet. Nach den Intensitätsverhältnissen der starken Baryumlinien im Radiumpräparat und im Baryumnitrat ist es schwer zu glauben, dass dieselben dem Baryum angehören. Wir haben sie darum vorläufig in der Tabelle der Radiumlinien belassen. Von den Linien, welche Demarcay

[1] Diese Linie gehört nicht dem Radium an.

[2] Diese Linie steht dicht neben einer starken Baryumlinie.

dem Radium zuschreibt, gehören gewiss einige, wie Runge bemerkt, dem Baryum an. Die Linien 4627·4 und 4699·8, die in unserem Radiumspectrum gleichfalls fehlen, differieren jedoch in der Wellenlänge von den benachbarten Baryumlinien so stark, dass sie kaum mit denselben identificiert werden können. Die Linie 4641·9 gehört dem Sauerstoff an. Die fünf Linien Demarcay's zwischen 4340 und 4533 konnten wir so wenig sehen wie Runge. Sie scheinen wenigstens zum Theile dem Ti und Ca anzugehören. Von den drei Linien, welche Runge für das Radium angibt, konnten wir die eine bei 4826·14, welche auch Demarcay beobachtet hat, nicht finden. Auch Berndt gibt dieselbe nicht an. Dagegen führt letzterer eine Linie bei 2708·6 auf, welche von keinem der anderen Beobachter gesehen wurde. Allen Messungen gemeinsam sind nur die beiden Linien bei 3814 und 4682; letztere hat auch Miethe[1] gelegentlich einer Untersuchung des Radiums mit einem neuen Funkenapparat gesehen; eine zweite von ihm als sehr stark bezeichnete Linie $\lambda = 4348$ wird von keinem der übrigen Beobachter angeführt.

## LXXIV. Polonium.

Über das Poloniumspectrum herrscht noch größere Unklarheit als bezüglich des Radiumspectrums. Demarcay[2] und Runge[3] konnten keine Linien entdecken, Berndt[4] findet deren 15, von denen es aber sehr zweifelhaft sein dürfte, ob sie dem Polonium angehören. Wir haben zwei verschiedene Präparate untersucht, ein älteres Präparat des Herrn Curie (Wismuthnitrat) mit der Activität 5000 und ein Poloniumwismuthmetall von der Activität 300, wie es die Société Centrale des produits chimiques liefert. Im ersteren konnten wir eine Reihe schwacher Linien bemerken, die wir mit bekannten zu identificieren nicht imstande waren. Wir führen sie der

[1] Miethe, Phys. Zeitschr., Bd. 2, Febr. 1901.
[2] Mitgetheilt von P. Curie, C. R., Bd. 127 (1898).
[3] Runge, l. c.
[4] Berndt, l. c.

Vollständigkeit halber hier an, ohne damit sagen zu wollen, dass dieselben dem Polonium angehören.

**Wismuth-Poloniumnitrat.**

| λ | i |
|---|---|
| 3289·49 | 2 Yb? |
| 3944·90 | 2+Ho? |
| 4167·81 | 2 |

Im zweiten Präparat fanden wir nur Fe, Bi, As. Vom ersten Präparat haben wir nur die stärkeren Linien angegeben. Man kann sie nicht wohl als Polonium bezeichnen. Auch stimmen die Linien durchaus nicht mit jenen, welche Berndt gefunden hat. Von letzteren gehört die größere Zahl gewiss Verunreinigungen an, die wir, soweit eine Identificierung möglich ist, in der folgenden Tabelle der Berndt'schen Linien durch die beigeschriebenen Symbole bezeichnen:

| λ | | λ | | λ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2327·3 | Fe | 3168·2 | Ti | 3462·0 | Ti |
| 2661·9 | Sn? Pb? | 3191·2 | Ti | 3467·1 | Cd |
| 2977·0 | Ru | 3349·2 | Ti | 3821·9 | Rh? |
| 3152·2 | Ti | 3361·5 | Ti | 4007·7 | Ti |
| 3162·9 | Ti | 3342·0 | Mn? [1] | 4596·3 | O |

Die hier angeführten Linien stimmen wieder nicht mit unseren, so dass man sagen muss, dass bisher keine Poloniumlinien mit Sicherheit nachgewiesen sind.

[1] Die Wellenlänge scheint durch einen Druckfehler entstellt zu sein.

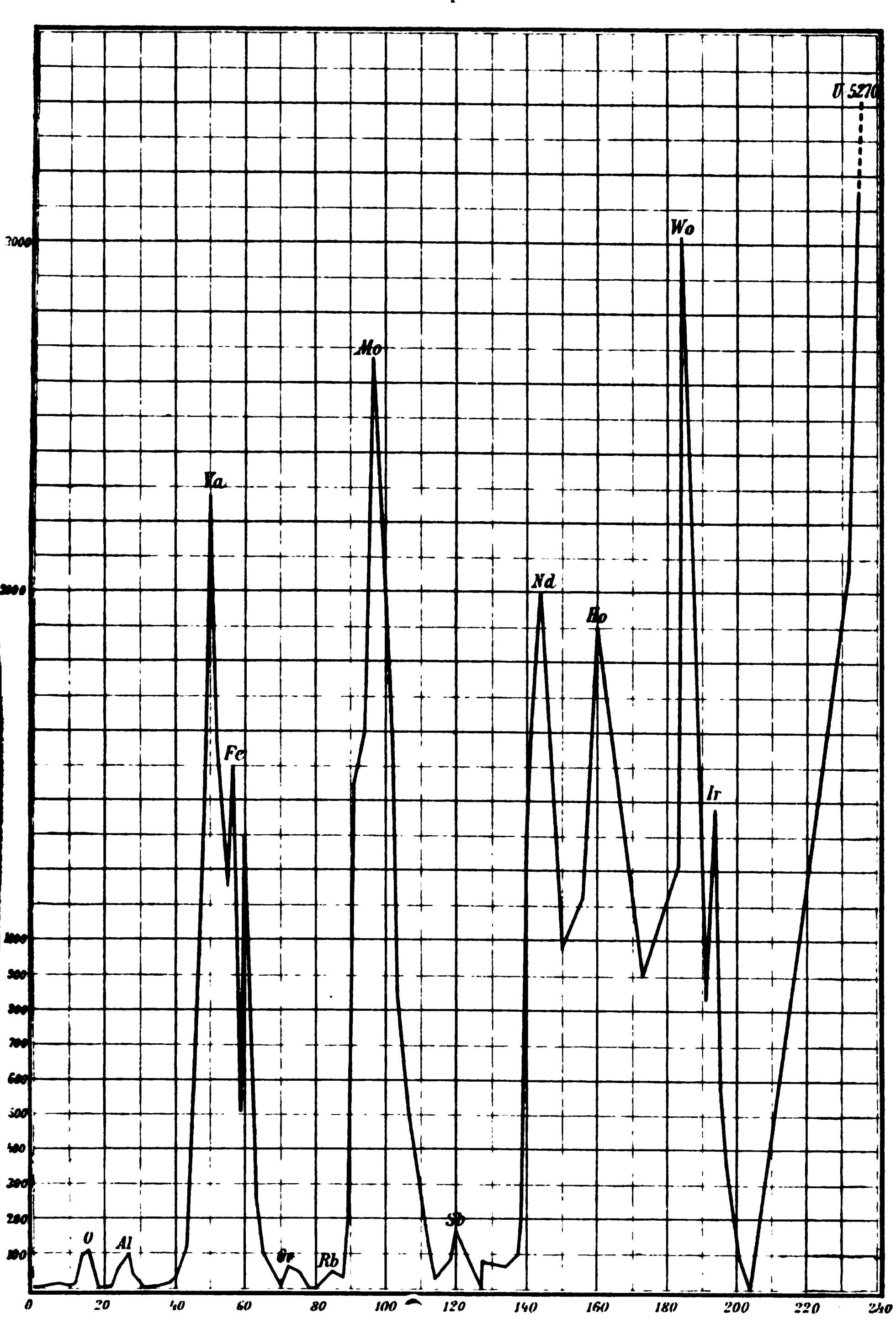
Mit der vorstehenden Mittheilung schließen wir unsere Publicationen über die ultravioletten Funkenspectren der Elemente ab; 74 Elemente haben wir der Messung unterzogen. Vom Terbium war es uns nicht möglich, Proben zu erhalten und dürfte dieses Element, wenn es ein solches ist, gegenwärtig kaum in einem für spectralanalytische Zwecke brauchbaren Zustande existieren. Auch auf eine Untersuchung der neuen Gase Argon, Helium etc. mussten wir verzichten, da dieselben nicht in solchen Quantitäten erhältlich sind, wie sie zur Untersuchung unter normalem Druck erforderlich wären. Da es der Zweck unserer Untersuchung war, eine rasche spectrale Analyse vorgelegter Proben mit Hilfe der bekannten Wellenlängen der Elemente ausführen zu können und da diese Gase in der Natur nur in geringer Menge vorkommen, so dürfte dieser Mangel in der Praxis nicht von großem Belange sein.

Da wir im Laufe der Arbeit mit verschiedenen Gittern und erst von der IX. Mittheilung ab mit einem großen Rowland'schen Gitter gearbeitet haben, so mussten wir, um die Messungen und ihre Genauigkeit einheitlich zu gestalten, alle vorangegangenen Elemente einer Neumessung unterziehen. Ebenso war es erforderlich, einzelne spätere Elemente, namentlich solche aus der Gruppe der seltenen Erden, von denen wir reineres Material erhielten, nochmals zu messen. Alle diese nun nach einer ganz einheitlichen Methode gewonnenen Resultate werden demnächst in einer gesonderten Publication erscheinen; daselbst werden auch die starken Linien von der Intensität 3 oder höher aller Elemente in eine Tabelle nach Wellenlängen geordnet zusammengefasst, so dass dadurch in kürzester Zeit die Identificierung einer Linie, respective eines Elementes möglich wird.

Wir wollen hier nochmals auf den bei Identificierungen so wichtigen Umstand aufmerksam machen, dass die Wellenlänge einer Linie im Funken je nach der herrschenden Dampfdichte verschieden ausfällt. Diese von den speciellen Versuchsbedingungen abhängigen Linienverschiebungen überschreiten im Funkenspectrum sehr häufig die Grenze der Messfehler und können in besonders ungünstigen Fällen über ein Zehntel einer Angström'schen Einheit, in vereinzelten Fällen sogar mehrere

Zehntel betragen. Im allgemeinen gelten dafür folgende Regeln: Die Verschiebungen der Funkenlinien (gegenüber den Linien im Bogen) sind immer nach der Seite der größeren Wellenlängen gerichtet; sie treten stark auf bei Elementen mit wenigen und starken Linien (den Alkali- und Erdalkalimetallen), dagegen schwach, d. h. in einem Betrage von unter 4 bis 5 Hunderteln AE bei Elementen mit vielen und scharfen Linien (den Elementen der Eisengruppe, Platingruppe und den seltenen Erden). Diese Verschiebungen erstrecken sich, wie schon länger bekannt, nicht auf alle Linien eines Elementes, wodurch es zum großen Vortheile für die astronomischen Messungen möglich wird, dieselben von den nach dem Doppler'schen Principe vor sich gehenden zu unterscheiden. Die Abhängigkeit von der Dampfdichte bringt es mit sich, dass Linien, welche im Spectrum des reinen Elementes eine starke Verschiebung zeigen, wenn sie als Verunreinigung eines anderen Elementes auftreten, nur schwach oder gar nicht verschoben sind. Umgekehrte Linien sind im allgemeinen unverschoben. Daher kann es kommen, dass eine solche Linie, wenn sie als Verunreinigung nicht umgekehrt auftritt, eine größere Wellenlänge hat, als die viel stärkere Umkehrung.

Dass die verschiedenen Elemente je nach ihrer Stellung im natürlichen System verschieden charakterisierte Spectren zeigen, ist längst bekannt. Aus unseren Messungen folgt auch eine gewisse Gesetzmäßigkeit zwischen der Zahl der Linien und dem Atomgewichte des Elementes. Ordnet man die letzteren nach Atomgewichten, so zeigen die Linienzahlen periodische Zu- und Abnahme mit im allgemeinen steigender Tendenz gegen die hohen Atomgewichte. In der beistehenden Figur sind letztere als Abscissen, die Linienzahlen als Ordinaten aufgetragen. Dass für die Gruppe der seltenen Erden die Linienzahlen hinter dem nach dem Verlaufe der Curve zu erwartenden Werte zurückbleiben, kommt wohl daher, dass zur Aufnahme dieser Spectren nur Verbindungen der Elemente und auch die nur in geringer Menge zur Verfügung standen, während Va, Mo, Wo, U, welche die übrigen Maxima der Curve bilden, mit Hilfe metallischer Elektroden aufgenommen wurden. Die Curve zeigt in der Gruppe der seltenen Erden auch noch die Unregel-


U 5270
Wo
Mo
Ta
Nd
Ho
Fe
Ir
O
Al
Cr
Rb
Sb
3000
2000
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240

mäßigkeit, dass ein tiefes Minimum fehlt, was auf die Existenz bisher unbekannter Körper in dieser Gruppe hinweist. Möglicherweise wird dieses Minimum durch das von Demarcay[1] in jüngster Zeit entdeckte Europium gebildet. Die Elemente Thulium, Radium und Polonium sind in die Curve nicht aufgenommen.

In der folgenden Tabelle des natürlichen Systems sind neben den chemischen Symbolen die Atomgewichte und darunter die Linienzahlen angegeben. Im allgemeinen kann man sagen, dass der Charakter der Spectren jener Elemente, die eine Verticalreihe bilden, ein ähnlicher ist. Die Elemente der Mitte der Tabelle sind alle durch zahlreiche, scharfe Linien ausgezeichnet, die auch, wenn die Elemente als Verunreinigung nur in geringer Menge vorhanden sind, leicht erscheinen. Die Elemente der sechs letzten Reihen sind durch wenige, aber starke und leicht umkehrbare Linien charakterisiert. Aus Verbindungen erhält man die Linien nur schwer. Die ersten beiden Verticalreihen sind gleichfalls durch besonders starke, aber auch in Verbindungen leicht auftretende Linien charakterisiert. Auch die Horizontalreihen der Tabelle zeigen ein gewisses allgemeines Verhalten: das rechte Ende derselben enthält die Elemente, deren Linien sich gegen das Ultraviolett zu anhäufen, während die Elemente der linken Hälfte die Hauptmasse ihrer Linien noch im äußersten sichtbaren Theil haben.

Die Linienzahlen der nachstehenden Tabelle, die auch der obigen Curve zugrunde liegen, sind zum Theil nicht die in unseren früheren Mittheilungen angegebenen, sondern beziehen sich bei jenen Elementen, wo Neumessungen stattgefunden haben, auf die letzteren.

Es hat sich im Laufe der Untersuchungen wiederholte Gelegenheit ergeben, Prüfungen unserer Messgenauigkeit vornehmen zu können, und wir wollen im folgenden dieselbe ziffernmäßig zum Ausdrucke bringen, was umsoweniger überflüssig sein dürfte, als Kayser[2] Bedenken gegen die Brauch-

---

[1] Demarcay, C. R., Bd. 132, Juni 1901.

[2] Kayser, Handbuch der Spectroskopie, Bd. 1.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | H 1<br>0 | | | | | | | | | | | | |
| | | | | Li 7·03<br>9 | Be 9·1<br>10 | B 11<br>3 | C 12·00<br>13 | N 14·04<br>89 | O 16·00<br>104 | Fl 19·<br>0 | | | | | | |
| | | | | Na 23·05<br>8 | Mg 24·36<br>46 | Al 27·1<br>105 | Si 28·4<br>44 | P 31·0<br>0 | S 32·06<br>0 | Cl 35 45<br>11 | | | | | | |
| K 39·15<br>27 | Ca 40<br>47 | Sc 44·1<br>131 | Ti 48·1<br>1337 | Va 51·2<br>2265 | Cr 52·1<br>1572 | Mn 55·0<br>1152 | Fe 56·0<br>1517 | Co 59<br>1295 | Ni 58·7<br>503 | Cu 63·6<br>259 | Zn 65·4<br>108 | Ga 70<br>16 | Ge 72<br>62 | As 75<br>44 | Se 79·1<br>0 | Br 79·96<br>0 |
| Rb 85·4<br>57 | Sr 87·6<br>40 | Y 89<br>194 | Zr 90·6<br>1440 | Nb 94<br>1606 | Mo 96·0<br>2674 | | Ru 101·7<br>1575 | Rh 103·0<br>855 | Pd 106<br>517 | Ag 107·93<br>372 | Cd 112<br>113 | In 114<br>30 | Sn 118·5<br>87 | Sb 120<br>160 | Te 127<br>79 | I 126·85<br>0 |
| Cs 133<br>63 | Ba 137·4<br>101 | La 138<br>215 | Ce 140<br>1300 | Pr 140<br>1544 | Nd 144<br>2007 | Sa 150<br>976 | | Gd 156<br>1150 | Ho 160<br>1905 | | | | | | | |
| | | | Er 166<br>1560 | | | | | | | | | | | | | |
| | | Yb 173<br>897 | | Ta 183<br>1213 | Wo 184<br>3022 | | Os 191<br>838 | Ir 193·0<br>1380 | Pt 194·8<br>580 | Au 197·2<br>352 | Hg 200·3<br>94 | Tl 204·1<br>16 | Pb 206·9<br>74 | Bi 208·5<br>100 | | |
| | | | Th 232<br>2070 | | U 239 5<br>5270 | | | | | | | | | | | |

barkeit unserer Methode der objectiven Ausmessung der Photogramme geäußert hat. Herr Kayser ist im Irrthum, wenn er glaubt, es lasse diese Methode nur eine Genauigkeit von 0·1 bis 0·2 AE zu, und es werde deshalb die Güte der mit Rowland'schen Gittern aufgenommenen Spectrogramme nicht ausgenützt. Wir begnügten uns damals, wie wir ausdrücklich sagten, mit der bezeichneten Genauigkeit, weil wir sie für unsere Zwecke für hinreichend hielten. Als sich dieselbe später doch als unzureichend erwies, giengen wir, wie bei allen Messungen der letzten Mittheilungen, zu der zehnfachen Genauigkeit über. Dass eine solche von 0·01 bis 0·02 AE sich nach unserer Methode bei einmaliger Messung im ersten Spectrum erreichen lässt, zeigen sämmtliche Proben, die wir anzustellen Gelegenheit hatten und deren Resultate im folgenden kurz mitgetheilt werden sollen. Zur Beurtheilung der Zahlenangaben sei bemerkt, dass sie an Funkenspectren gewonnen sind. Es ist bekannt, dass Funkenlinien nie die Schärfe und Definition haben wie Bogenlinien, wodurch natürlich die Genauigkeit der Ablesung zu Ungunsten der Funkenlinien beeinflusst ist. Um zunächst ein Bild der reinen Ablesefehler unabhängig von den Fehlern der Aufnahme und der Platte zu erhalten, haben wir eine Platte (Samarium) nach mehreren Wochen nochmals gemessen. Jede Linie wurde dabei, was sich auch auf alle folgenden bezieht, nur ein einzigesmal abgelesen. Die Differenzen der beiderseitigen Ablesungen geben ein Maß der Genauigkeit derselben. Bei den gemessenen 103 Linien, unter denen sich übrigens auch viele als verwaschen bezeichnete befinden, ergab sich eine mittlere Differenz von 0·013 AE. Die Differenzen betrugen in

| | | | |
|---|---|---|---|
| 28 | Fällen | 0·00 | AE, |
| 32 | » | 0·01 | » |
| 30 | » | 0·02 | » |
| 10 | » | 0·03 | » |
| 2 | » | 0·04 | » |
| 1 | » | 0·05 | » |
| 0 | » | >0·05 | » |

Etwas größer wird natürlich die mittlere Differenz, wenn sich die Ablesungen auf verschiedene Platten beziehen. In dieser Hinsicht mögen die folgenden Angaben genügen. Bei 13 Mn-Linien, welche sowohl im Ni, als im Co als Verunreinigung auftreten, betrug diese mittlere Differenz $\Delta = 0 \cdot 017$ AE. Bei 50 Eisenlinien, die als Verunreinigung im Ni, Co und Cr auftraten, war $\Delta = 0 \cdot 011$ AE. Wenn ein Element in einem anderen als Verunreinigung auftritt, so sind im allgemeinen die Differenzen zwischen den beiderseitigen Linien größer, da, wie früher schon zu erwähnen Gelegenheit war, infolge der Intensitätsunterschiede Verschiebungen auftreten und man so die unverschobenen Linien der Verunreinigung mit den mehr oder minder stark verschobenen des Elementes vergleicht. Da bei den sehr linienreichen Elementen diese Verschiebungen in der Regel nur einige Hundertel AE betragen und auch nur bei den stärkeren Linien auftreten, so fällt dieser Umstand nicht sehr stark, aber jedenfalls zu unseren Ungunsten ins Gewicht. So ergibt eine Vergleichung von 235 Fe-Linien, die als Verunreinigung in Cr, Ni und Co auftreten, mit den Linien unseres Eisenspectrums eine mittlere Differenz $\Delta = 0 \cdot 018$ AE, also etwas größer, als der Differenz der Verunreinigungen untereinander entspricht.

Die vielen gemeinsamen Linien im Samarium und Gadolinium geben gleichfalls eine gute Controle. Die mittlere Differenz von 703 in beiden Elementen gemessenen Linien, von denen sich viele wieder als unscharf bezeichnet finden, war $\Delta = 0 \cdot 017$. Die Vertheilung der Differenzen war die folgende:

| | | | |
|---|---|---|---|
| In 124 | Fällen | 0·00 | AE, |
| 233 | » | 0·01 | » |
| 163 | » | 0·02 | » |
| 123 | » | 0·03 | » |
| 39 | » | 0·04 | » |
| 15 | » | 0·05 | » |
| 4 | » | 0·06 | » |
| 2 | » | 0·07 | » |

Auch in der Platingruppe ergab sich durch die wechselweise Verunreinigung der Elemente Gelegenheit, Genauigkeitsproben anzustellen. Bei 54 Platinlinien, welche als Verunreinigung im Iridium und Palladium auftraten, ergab sich als mittlere Differenz mit den Linien der Platinaufnahme $\Delta = 0\cdot016$ AE. 53 Iridiumlinien als Verunreinigung in Platin und Rhodium gaben untereinander $\Delta = 0\cdot017$ AE und gegen die Zahlen von Kayser[1] (Bogenspectren) $\Delta = 0\cdot015$ AE. Die einzelnen Differenzen gegen die Kayser'schen Zahlen waren die folgenden:

| In | 9 Fällen | 0·00 AE, |
|---|---|---|
| | 18 » | 0·01 » |
| | 19 » | 0·02 » |
| | 4 » | 0·03 » |
| | 3 » | 0·04 » |
| | 0 » | > 0·01 » |

Bei 15 Rutheniumlinien, die wir in Iridium als Verunreinigung gemessen haben und die auch Rowland angibt, beträgt die mittlere Differenz zwischen unseren und Rowland's Messungen 0·011 AE, während die gleichen Linien in Rowland's und Kayser's Messungen, also in beiden Fällen im Bogenspectrum, eine mittlere Differenz $\Delta = 0\cdot010$ AE ergeben.

Eine Vergleichung von 79 Platinlinien unserer Messungen mit den Zahlen Rowland's gibt $\Delta = 0\cdot015$ AE. Eine gelegentliche Messung des Platinbogens ergab für 20 mit Rowland gemeinsamen Linien $\Delta = 0\cdot015$ AE, während die mittlere Differenz Rowland—Kayser bei diesen Linien $\Delta = 0\cdot008$ AE beträgt. Wenn man aus unseren Messungen dieser Linien[2] des Platinbogens und des Platinfunkens das Mittel bildet, so dass also jede Linie zweimal gemessen erscheint, so ergibt sich als mittlere Differenz gegen Rowland $\Delta = 0\cdot0084$ AE, während die Differenz Kayser—Rowland $\Delta = 0\cdot0080$ beträgt. (Dabei sind Kayser's Zahlen das Mittel aus mindestens vier

[1] Kayser, Berl. Akad. (1897).

[2] Die Messung erforderte 20 Minuten.

Ablesungen und seine Aufnahmen mit einem größeren Gitter hergestellt.)

Aus all' den vorstehenden Angaben folgt, dass zwischen je zwei Einzelmessungen derselben Linie in unserem Funkenspectrum sich eine mittlere Differenz von 0·015 AE ergibt. Dabei wollen wir nochmals bemerken, dass alle unsere Messungen im ersten Spectrum eines Gitters mit 20.000 Linien auf den Zoll und 15 Fuß Krümmungsradius ausgeführt sind. Bei Verwendung des Spectrums zweiter Ordnung würden wir ungefähr auf die doppelte Genauigkeit kommen, wovon wir uns auch durch gelegentliche Messungen von Eisenlinien im zweiten Spectrum überzeugten, bei denen die mittlere Differenz 0·009 AE betrug. Gleichfalls ungefähr auf die doppelte Genauigkeit käme man durch zweimalige Messungen im ersten Spectrum, wie aus den früher schon angeführten Zahlen hervorgeht.

Um einen Vergleich zwischen unserer Methode und der Ausmessung mit Hilfe des Comparators zu ermöglichen, wollen wir noch unsere Genauigkeitsangaben mit den auf die letztere Methode bezüglichen Angaben von Kayser und Hasselberg vergleichen. Kayser gibt für eine Reihe von Rutheniumlinien, die wie alle Linien der Platingruppe zu den schärfsten gehören, die Einzelmessungen, woraus sich eine mittlere Differenz $\Delta = 0\cdot006-0\cdot007$ AE ergibt. Da das von ihm benützte Gitter die $1^1/_2$fache Dispersion des unserigen hat und seine Messungen in den Spectren verschiedener Ordnung ausgeführt wurden, so müsste er, falls sich die gegebenen Zahlen etwa auf das zweite Spectrum beziehen (eine Angabe hierüber konnten wir nicht finden), die dreifache Dispersion und damit die dreifache Genauigkeit der Einzelmessung bei gleicher Güte der Methoden erhalten. Das stimmt auch sehr nahe mit den beiderseitigen Angaben über die Werte der mittleren Differenzen. Ist unsere Voraussetzung richtig, dass seine Zahlen sich auf das Spectrum zweiter Ordnung beziehen, so würde daraus folgen, dass unsere Methode der Comparatormethode an Genauigkeit mindestens gleichkommt.

Ein Vergleich mit den Zahlen Hasselberg's führt gleichfalls zu einem für uns günstigen Resultat. Für 156 dem Nickel und Cobalt gemeinsamen Linien ergibt sich bei Hasselberg

eine mittlere Differenz $\Delta = 0\cdot023$ AE. Genau dieselbe Differenz ergibt sich für 763 Linien im Chrom. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass diese Linien im dritten Spectrum gemessen sind und die Wellenlänge jeder Linie das Mittel aus drei Ablesungen ist. Da unsere Messungen sich auf einmalige Ablesung im ersten Spectrum beziehen, so musste die Dispersion seines Gitters, die uns unbekannt ist, eine sehr kleine oder unsere Messmethode wesentlich besser sein. Ein Vergleich der Hasselberg'schen Zahlen der Vanadiumlinien mit jenen Rowland's gibt für 431 Linien $\Delta = 0\cdot020$ AE; hier sind die Hasselberg'schen Zahlen das Mittel aus je sechs Messungen im dritten Spectrum; dennoch ist die mittlere Differenz größer als bei uns.

Nach den vorstehenden Angaben halten wir es für erwiesen, dass unsere objective Methode der Ausmessung der Comparatormethode an Genauigkeit wesentlich gleich kommt. Dagegen bietet sie dieser gegenüber eine Reihe nicht zu unterschätzender Vortheile. Von diesen heben wir besonders hervor die außerordentliche Schnelligkeit der Messung, die Möglichkeit, einen größeren Theil des Spectrums (bei unserer Anordnung 200 AE) gleichzeitig zu übersehen, das Vorhandensein der Linien der ganzen Länge nach im Gesichtsfelde, wodurch eine etwaige Duplicität derselben an den Enden leicht erkannt wird, die directe Ablesung der Wellenlängen mit Vermeidung jeder Rechnung, die Möglichkeit, eine beliebige Linie in ihrer Wellenlänge in allerkürzester Zeit zu controlieren, und endlich die viel sicherere Schätzung der Intensitäten bei dem großen Gesichtsfelde. Als bester Beweis für die Brauchbarkeit der Methode mag dienen, dass es uns möglich war, die (zum Theil noch nicht publicierte) Messung sämmtlicher Elemente mit der vorstehenden Genauigkeit in $1^1/_2$ Jahren auszuführen. Diese Messungen umfassen circa 50.000 Linien, wobei natürlich die zahlreichen, als Verunreinigungen mitgemessenen nicht gezählt sind.

Es ist uns schließlich eine angenehme Pflicht, jenen Herren, welche uns durch Überlassung kostbarer, sonst nicht erhältlicher Präparate in den Stand gesetzt haben, unsere Untersuchung möglichst zu vervollständigen, hier nochmals unseren verbindlichsten Dank auszusprechen, insbesondere den Herren P. T. Cleve in Upsala, P. Curie in Paris, L. Haitinger in Wien, A. Langlet in Gothenburg, H. Moissan in Paris, W. Muthmann in München, L. F. Nilson in Stockholm und C. Winkler in Freiberg.

# Die Anwendung der Beugungserscheinungen auf astronomische Messungen

von

Dr. **Carl Hillebrand,**

*Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.*

(Mit 3 Textfiguren.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juni 1901.)**

Die Aufgabe, den scheinbaren Durchmesser einer Lichtquelle zu finden, deren Kleinheit eine directe mikrometrische Bestimmung unmöglich macht, gewann in der Astronomie zunächst durch die Frage nach den scheinbaren Durchmessern der Fixsterne actuelle Bedeutung, insbesonders nachdem es sich herausgestellt hatte, dass keinerlei Steigerung der Leistungsfähigkeit der optischen Hilfsmittel eine Lösung auf diesem Wege herbeiführen konnte.

Der erste Gedanke, der sich darbot, auf indirectem Wege eine solche zu finden, war der, die Resultate der photometrischen Untersuchungen dafür zu verwerten. Nimmt man an, dass die Leuchtkraft der Fixsterne untereinander nicht wesentlich abweicht, so geben die photometrischen Daten in der That das Mittel, relative Werte der scheinbaren Durchmesser zu finden, und es wird eine absolute Bestimmung möglich, wenn man unter derselben Voraussetzung als Vergleichsobject einen Fixstern von bekanntem scheinbaren Durchmesser benützt, wie er uns in der Sonne zur Verfügung steht. Die ersten diesbezüglichen Versuche — allerdings mit unzulänglichen Mitteln — rühren von Herschel und Wollaston her. Dieselbe Idee spricht auch Doppler aus in seiner Schrift: »Beiträge zur Fixsternkunde«, 1846, macht aber darin außerdem noch den Vorschlag, durch mikroskopische Untersuchung von Daguerrotypaufnahmen der Fixsterne Durchmesser zu finden, wozu die

äußerst feine Structur des Quecksilberniederschlages die Möglichkeit zu bieten scheint.

Auf den gleichen Gedanken der Benützung photometrischer Messungen basieren die Untersuchungen von Stampfer: »Über den scheinbaren Durchmesser der Fixsterne«, 1853 (Bd. V der Denkschriften der kaiserl. Akad. der Wissensch. in Wien), die sich auf hellere Fixsterne, außerdem aber auf einige Doppelsterne beziehen, durch deren Wahl ein besonderer Zweck verfolgt wurde. Kennt man nämlich die Parallaxe und die Bahn und damit auch die Maße des Systems, so würde man auch auf einem anderen Wege zu einer Durchmesserbestimmung gelangen, wenn die Dichte bekannt wäre. Stampfer führt nun diese Bestimmung durch unter der Voraussetzung, dass die Dichte der Fixsterne gleich der der Sonne wäre und findet Durchmesser, die sämmtlich mit den photometrischen recht gut übereinstimmen. Diese Übereinstimmung könnte den in beiden Methoden vorkommenden willkürlichen Voraussetzungen und damit auch den errechneten Durchmessern einen gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit verleihen, wenn ein Zusammenhang zwischen Dichte und Lichtintensität völlig ausgeschlossen wäre.

Einen anderen Vorschlag macht Gruithuisen, den er in einer Mittheilung: »Versuche zur Erforschung des scheinbaren Durchmessers der Fixsterne« (Astronom. Jahrbuch für physische und naturhistorische Himmelsforschung, München 1840) nur ganz allgemein andeutet und der auf die Beobachtung des Scintillierens der Fixsterne hinausläuft. Da die Art dieses Phänomens offenbar von dem scheinbaren Durchmesser beeinflusst wird, so würde man durch Ermittelung der »Flimmerungszahlen« einen Schluss auf die relativen scheinbaren Durchmesser ziehen können; für die thatsächliche Beobachtung würde sich am besten das Verhalten beim Verschwinden hinter undurchsichtigen Lamellen u. dergl. eignen. Die Durchführung dieses Gedankens scheint übrigens über einige Vorversuche nicht hinausgekommen zu sein.

Auch Chacornac hat sich im Jahre 1864 mit dieser Frage beschäftigt, jedoch handelte es sich ihm — soweit der knappe Bericht (»Note on the apparent diameter of Sirius«, Monthly

Notices, vol. XXV) es erkennen lässt — hauptsächlich darum, das störende Beugungsbild wegzuschaffen, um reelle messbare Dimensionen zu finden. Er benützte ein Fernrohr, das mit einem Ocular-Doppelbildmikrometer versehen war, das der Hauptsache nach aus einem Prisma aus einer doppelbrechenden Substanz bestand; das eine Strahlenbündel lässt man nun ein polarisierendes Medium passieren, durch dessen Drehung die Intensität des Bildes beliebig verringert werden kann. Nun ist das Beugungsbild eines leuchtenden Punktes im Fernrohr eine Scheibe mit einer Maximalhelligkeit im Centrum, umgeben von Ringen, deren Intensitätsmaxima weit unter dem der Scheibe liegen. Eine Verringerung der Intensität muss daher — soweit es sich nicht um reelle Dimensionen handelt — von einer Contraction des Bildes begleitet sein, und Chacornac beobachtete an Sirius und den beiden Componenten von $\gamma$ Virginis, dass die Distanz der beiden Bildcentren beim Contact ihrer Peripherien sich beständig bis zum Verschwinden des einen Bildes verringerte, die bei einem reellen scheinbaren Durchmesser schon vor demselben constant werden müsste, eine Erscheinung, die auch als Gegenprobe an Mars, Uranus, Neptun und den Jupitersatelliten beobachtet wurde.

Die einzige jetzt bekannte Methode jedoch, die strengen Anforderungen entspricht und die anderseits auch schon mit Erfolg angewendet wurde, ist die Beobachtung gewisser, von der Lichtquelle verursachter Beugungserscheinungen. Sie wurde angeregt durch eine Bemerkung Fizeau's aus dem Jahre 1868 gelegentlich eines Referates über die Verleihung des Bordin'schen Preises (Compt. rend., LXVI, p. 932), des Inhaltes, dass eine nothwendige Beziehung zwischen den Dimensionen der Interferenzstreifen und der der Lichtquelle bestehen muss und dass es vielleicht möglich sein wird, mittels zweier Schlitze in der Objectivblende eines größeren Fernrohres Interferenzstreifen zu erzeugen, aus deren Beobachtung neue Daten über die scheinbaren Durchmesser der Himmelskörper gewonnen werden können.

Aufgegriffen wurde diese Bemerkung im Jahre 1873 von Stephan in Marseille, der schon jenes Moment im Beugungsphänomen verwertete, das auch jetzt noch als das geeignetste

Mittel für solche Bestimmungen gilt (siehe Compt. rend., LXXVI, p. 1008 und LXXVIII, p. 1008). Blendet man nämlich das Objectiv bis auf zwei parallele Spaltöffnungen ab und stellt auf eine unendlich entfernte punktförmige Lichtquelle ein, so sind die dunklen Linien der Frauenhofer'schen Beugungserscheinung zweiter Classe um den Winkelabstand $\frac{103 \cdot 1}{l}$ voneinander entfernt, wenn $l$ die Spaltdistanz in Millimetern bedeutet (die Wellenlänge wird dabei mit 0·0005 *mm* angenommen, was dem physiologisch wirksamsten Theile des Spectrums entspricht). Stephan bemerkt nun weiter, dass, wenn die Lichtquelle nicht mehr punktförmig ist, sondern einen scheinbaren Durchmesser besitzt und wenn derselbe gleich $\frac{103 \cdot 1}{l}$ ist, dann dieses Beugungsphänomen verschwinde — was in dieser Weise streng eigentlich nur für rechtwinklige Lichtquellen gilt. Stephan führt nun diese Idee auch aus, aber mit einem festen Spaltsystem: da es ihm nur um einen Nachweis von Fixsterndurchmessern zu thun war und bei der zu erwartenden Kleinheit derselben nur die größtmögliche Distanz der Spalten Aussicht auf Erfolg haben konnte, so blendete er das ganze Objectiv mit Ausnahme zweier biconvexer Spalte an den Enden eines Objectivdurchmessers ab und untersuchte die helleren Fixsterne auf ihre Fähigkeit, bei dieser Distanz noch eine Beugungserscheinung hervorbringen zu können. Es zeigte sich thatsächlich überall das Beugungsphänomen. Anfangs glaubte Stephan allerdings, dass Sirius eine Ausnahme davon mache, was sich aber später nicht bestätigte und durch den tiefen Stand Sirius' während der ersten Beobachtungen hinlänglich erklärt wurde.

Die Beobachtungen wurden an dem Refractor von 80 *cm* Öffnung in Marseille angestellt; die Entfernung der Spaltmitten betrug 65 *cm*. Da dem Verschwinden des Beugungsphänomens bei dieser Distanz ein scheinbarer Durchmesser von 0″16 entsprechen würde, da ferner nicht einmal ein geringes Undeutlicherwerden wahrnehmbar war, so schloss Stephan daraus, dass die scheinbaren Fixsterndurchmesser beträchtlich kleiner als diese Größe sein müssten.

Die ersten erfolgreichen Versuchsreihen — allerdings an anderen Objecten — wurden indes erst im Jahre 1890 von Michelson ausgeführt. In seiner Abhandlung: »On the application of interference methods to astronomical measurements« (London: Philosophical Magazine, 1890) finden sich zunächst die mathematischen Grundlagen der Diffractionsmethode für verschieden geformte Lichtquellen und die Resultate einer Reihe von Vorversuchen, angestellt an bekannten irdischen Lichtquellen. Der veränderten Bestimmung gemäß sind die Spaltöffnungen gegeneinander beweglich. Michelson wendete das Verfahren auf die Jupitersatelliten an, und zwar an dem zwölfzölligen Refractor der Lick-Sternwarte (Nature, vol. XLV, p. 160). Die Resultate waren sowohl unter sich, als auch mit den directen Messungen in sehr guter Übereinstimmung.

In der oben erwähnten Abhandlung macht Michelson einen bemerkenswerten Vorschlag, eine Änderung des Beugungsapparates betreffend, die darnach angethan ist, den Bereich der Anwendbarkeit dieser Methode außerordentlich zu erweitern. Da die Distanz der Spalten, bei welcher das Beugungsphänomen verschwindet, dem scheinbaren Durchmesser der Lichtquelle umgekehrt proportional ist, so bestimmt der Objectivdurchmesser als das Maximum der Spaltdistanz eine Grenze, unterhalb welche der Durchmesser der Lichtquelle nicht sinken darf, wenn er auf diesem Wege noch nachweisbar sein soll. Nun schlägt Michelson vor, die Spalten durch ein Spiegelsystem zu ersetzen, und zwar derart, dass die zwei Spalten selbst ersetzt sind durch zwei schmale Spiegel außerhalb des Objectivs, von welchen die Lichtstrahlen durch ein anderes Spiegelpaar gegen das Objectiv reflectiert werden. Dadurch ist die Anwendbarkeit durch keine untere Grenze mehr beschränkt und die Möglichkeit, bis zu jeder beliebigen Kleinheit der Lichtquelle Messungen vornehmen zu können, kann nur mehr durch praktische Momente begrenzt werden. Es wird im folgenden gezeigt werden, dass diese Modification noch einen anderen, die Sicherheit der Beobachtung wesentlich erhöhenden Vortheil mit sich bringt.

In neuester Zeit hat sich M. Hamy in Paris mit diesem Gegenstande eingehender beschäftigt (Bulletins astron., vol. X,

p. 489; vol. XI, p. 48; vol. XVI, p. 257; Compt. rend., t. CXXVII, p. 851). Bisher wurden in der Theorie der Beugungserscheinungen zweiter Classe die Intensitätsänderungen der ersten Classe nicht berücksichtigt, d. h. es wurde die Spaltbreite gegen die Spaltdistanz als verschwindend klein betrachtet. Thatsächlich wird nun bei der geringen Lichtintensität der zu messenden Himmelskörper und der daraus sich ergebenden Nothwendigkeit breiterer Spaltöffnungen dieses Verhältnis nicht immer zutreffen. Hamy hat nun in der letzten Abhandlung (Bull. astr., v. XVI) theoretisch jene Correction ermittelt, die man an die Resultate nach dem bisherigen Verfahren anzubringen hat, wenn das Verhältnis Spaltbreite : Spaltdistanz merklich zu werden beginnt.

Hamy hat 1898 die Jupitersatelliten und Vesta gemessen, und zwar mit sehr befriedigendem Erfolge, trotz der primitiven Mittel: Hamy wendete nicht bewegliche Spalte an, sondern blendete das Objectiv des Équatoréal coudé der Pariser Sternwarte nacheinander mit einer Serie von Schirmen ab, die mit Spaltenpaaren von wachsender Distanz versehen waren.

Es soll im folgenden diese Erscheinung für solche Formen von Lichtquellen untersucht werden, wie sie sich bei der Anwendung auf astronomische Messungen darbieten.

### 1. Durchmesserbestimmung mittels des Spaltsystems.

Von einer unendlich entfernten punktförmigen Lichtquelle falle ein Strahlenbündel auf einen ebenen Schirm, in welchem zwei parallele Spaltöffnungen angebracht sind, und zwar so, dass die Einfallsebene senkrecht auf der Spaltrichtung steht; es sei ferner $\alpha$ der Winkel zwischen dem einfallenden Lichtstrahl und der Normale der Schirmebene, $b$ sei die Spaltbreite, $\Delta$ die Distanz der Spaltmitten und $\lambda$ die Wellenlänge des ausgesendeten Lichtes, so ist die resultierende Intensität in der Austrittsrichtung $\beta$ gegeben durch

$$i = \varkappa . a . \frac{\sin^2\left(\pi b \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)}{\left(\pi b \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)^2} \cos^2\left(\pi \Delta \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right),$$

wo $a$ die Intensität der Lichtquelle und $\varkappa$ eine Constante bedeutet; $\alpha$ und $\beta$ sind als kleine Größen vorausgesetzt, deren zweite Potenzen vernachlässigt werden können. Der Ausdruck für $i$ bleibt offenbar ungeändert, wenn die Lichtquelle in der Spaltrichtung eine endliche Ausdehnung besitzt, nur bedeutet dann $a$ die Lichtmenge der ganzen streifenförmigen Lichtquelle.

Hat aber die Lichtquelle nach jeder Richtung einen endlichen scheinbaren Durchmesser, so sei dieselbe zerlegt gedacht in unendlich schmale, zur Spaltrichtung parallele Streifen, deren Lage durch $\alpha$ bestimmt erscheint. Die Lichtmenge in einem solchen Streifen ist eine Function von $\alpha$ und die davon herrührende Intensität in der Austrittsrichtung $\beta$ wird gegeben sein durch einen Ausdruck von der Form

$$i = \varkappa f(\alpha) \frac{\sin^2\left(\pi b \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)}{\left(\pi b \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)^2} \cos^2\left(\pi \Delta \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right) d\alpha.$$

Die Function $f(\alpha)$, welche die Lichtmenge des Streifens $\alpha$ vorstellt, wird bestimmt sein durch die Intensitätsvertheilung auf der Lichtquelle und durch die dieselbe begrenzende Curve. Von dieser Function $f(\alpha)$ soll nun vorausgesetzt werden, dass sie eine gerade ist.

Die resultierende Intensität in der Richtung $\beta$ wird, wenn $2\rho$ der angulare Durchmesser der Lichtquelle senkrecht zur Spaltrichtung ist, gegeben sein durch

$$J = \varkappa \int_{-\rho}^{+\rho} f(\alpha) \cdot \frac{\sin^2\left(\pi b \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)}{\left(\pi b \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)^2} \cos^2\left(\pi \Delta \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right) d\alpha.$$

Da $f(\alpha)$ immer wesentlich positiv sein muss, so wird man auch setzen können

$$J = \varkappa \cdot \frac{\sin^2\left(\pi b \frac{\alpha'-\beta}{\lambda}\right)}{\left(\pi b \frac{\alpha'-\beta}{2}\right)^2} \int_{-\rho}^{+\rho} f(\alpha) \cos^2\left(\pi \Delta \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right) d\alpha,$$

wo $\alpha'$ zwischen den Integrationsgrenzen liegt. Man hat weiter

$$J = \frac{\varkappa}{2} \cdot \frac{\sin^2\left(\pi b \frac{\alpha' - \beta}{\lambda}\right)}{\left(\pi b \frac{\alpha' - \beta}{2}\right)^2} \left\{ \int_{-\rho}^{+\rho} f(\alpha)\, d\alpha + \cos\left(2\pi\Delta \frac{\beta}{\lambda}\right) \int_{-\rho}^{+\rho} f(\alpha) \cos\left(2\pi\Delta \frac{\alpha}{\lambda}\right) d\alpha \right.$$

$$\left. + \sin\left(2\pi\Delta \frac{\beta}{\lambda}\right) \int_{-\rho}^{+\rho} f(\alpha) \sin\left(2\pi\Delta \frac{\alpha}{\lambda}\right) d\alpha \right\}.$$

Das dritte Integral verschwindet zwischen den Grenzen $-\rho$ und $+\rho$, da das Differential der Voraussetzung gemäß eine ungerade Function ist.

Es ist also

$$J = \varkappa \cdot \frac{\sin^2\left(\pi b \frac{\alpha' - \beta}{\lambda}\right)}{\left(\pi b \frac{\alpha' - \beta}{\lambda}\right)^2} \left\{ \int_0^{\rho} f(\alpha)\, d\alpha + \cos\left(2\pi\Delta \frac{\beta}{\lambda}\right) \int_0^{\rho} f(\alpha) \cos\left(2\pi\Delta \frac{\alpha}{\lambda}\right) d\alpha \right\}.$$

Die Ermittelung der Maxima und Minima der zweiten Classe, um die es sich hier handelt, gestaltet sich sehr einfach, wenn man voraussetzt, dass die Spaltdistanz beträchtlich größer ist als die Spaltbreite. In diesem Falle wird sich der von $b$ abhängige Factor nur um sehr geringe Beträge ändern, wenn man sich auf die Betrachtung der dem Hauptmaximum zunächst liegenden Interferenzstreifen beschränkt. Setzt man mit sehr großer Annäherung diesen Factor einer Constanten gleich, so ist

$$J = \mathrm{K} \int_0^{\rho} f(\alpha)\, d\alpha + \mathrm{K} \cos\left(2\pi\Delta \frac{\beta}{\lambda}\right) \int_0^{\rho} f(\alpha) \cos\left(2\pi\Delta \frac{\alpha}{\lambda}\right) d\alpha.$$

Die Intensität eines Maximums ist

$$J_1 = \mathrm{K} \int_0^{\rho} f(\alpha)\, d\alpha + \mathrm{K} \int_0^{\rho} f(\alpha) \cos\left(2\pi\Delta \frac{\alpha}{\lambda}\right) d\alpha,$$

die Intensität eines Minimums

$$J_2 = \mathrm{K} \int_0^{\rho} f(\alpha)\, d\alpha - \mathrm{K} \int_0^{\rho} f(\alpha) \cos\left(2\pi\Delta \frac{\alpha}{\lambda}\right) d\alpha.$$

Bezeichnet man als Grad der Sichtbarkeit des Phänomens $V = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2}$, so wird

$$V = \frac{\int_0^{\rho} f(\alpha) \cos\left(2\pi\Delta \frac{\alpha}{\lambda}\right) d\alpha}{\int_0^{\rho} f(\alpha) d\alpha}.$$

Das Integral im Zähler ist eine Function von $\rho$ und $\Delta$. Setzt man dieselbe gleich Null, so wird dadurch ein ganz bestimmter Zusammenhang zwischen $\rho$ und $\Delta$ statuiert werden. Variiert man daher die Spaltdistanz so lange, bis dieses Beugungsphänomen verschwindet, so kann man aus der zugehörigen Distanz $\Delta$ den scheinbaren Durchmesser der Lichtquelle ermitteln.

Dass solche Nullstellen existieren müssen, folgt daraus, dass es bei einer gleichmäßig hellen rechteckigen Lichtquelle unmittelbar ersichtlich ist, dass das Phänomen verschwindet, wenn die zur Spaltrichtung senkrechte Seite gleich der Distanz zweier aufeinander folgender Minima ist, und weiter daraus, dass jede beliebige andere Lichtquelle zwischen zwei derartigen eingeschlossen werden kann.

Liegen die Spaltöffnungen in zwei verschiedenen Ebenen, deren Durchschnittslinie zu denselben parallel ist, so bleiben die obigen Relationen unverändert, wenn man $\alpha$ und $\beta$ auf die winkelhalbierende Ebene bezieht und $\Delta$ und $b$ die Projectionen der entsprechenden Größen auf die darauf senkrechte Ebene bedeutet. Ist $2\omega$ der Winkel der beiden Ebenen, so hat man statt $\Delta$ einzuführen $\Delta \sin\omega$, wo $\Delta$ die Summe der Distanzen der Spaltmitten von der Durchschnittslinie bezeichnet. (Ein derartiger Schirm, bei welchem die $\Delta$ constant und $\omega$ variabel war, wurde im Jahre 1895 in München verwendet, siehe Schwarzschild: »Über Messung von Doppelsternen durch Interferenzen«, Astr. Nachr., Bd. 139, S. 353.)

### 2. Durchmesserbestimmung mittels des Spiegelsystems.

Es seien $OA$ und $OA'$ zwei spiegelnde Ebenen, parallel zu ihnen sind die beiden schmalen Spiegel $ST$ und $S'T'$ angebracht, an welchen die einfallenden Strahlen reflectiert und gebeugt werden. $WW'$ sei die Wellenebene des einfallenden Lichtbündels, $PR$ und $P'R'$ zwei Strahlen, welche die schmalen

Spiegel an symmetrisch gelegenen Punkten treffen und die mit der den Winkel $AOA'$ halbierenden Geraden den Winkel $\alpha$ einschließen; die gebeugten reflectierten Strahlen $RQ$ und $R'Q'$ treten so aus, dass sie nach der zweiten Reflexion in $Q$, respective $Q'$ mit derselben Geraden den Winkel $\beta$ bilden, dem die Wellenebene $W_1 W_1'$ entspricht.

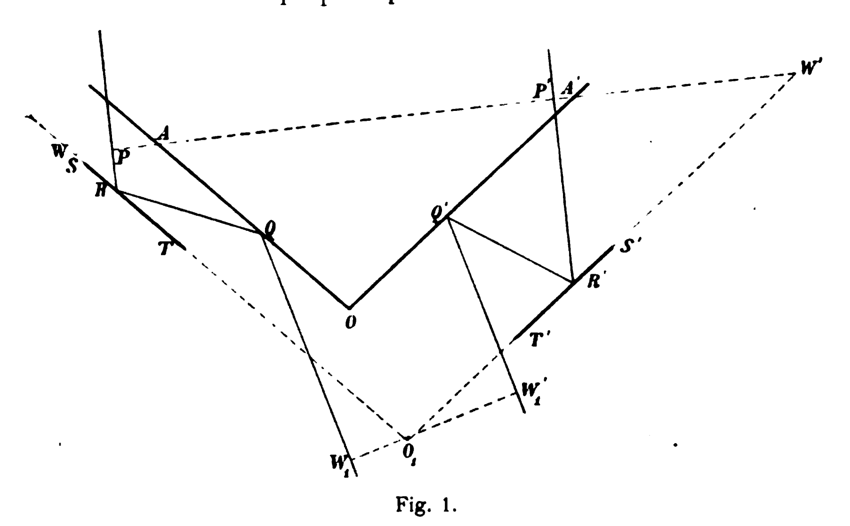



Fig. 1.

Setzt man die Spiegelbreite $ST = S'T' = b$, ferner $WS = a$, $W'S' = a'$, $O_1 T = \Delta$, $O_1 T' = \Delta'$, $\sphericalangle AOA' = 2\omega$, bezeichnet die Distanz des ersten parallelen Spiegelpaares mit $d$, die des zweiten mit $d'$, ferner $SR = S'R' = x$, so sind die Wege

$$PRQW_1 = s = (a+x)\cos(\omega-\alpha) + \frac{2d}{\sin(\omega-\beta)} + \\ +[\Delta + b - x - 2d\cot(\omega-\beta)]\cos(\omega-\beta)$$

$$P'R'Q'W_1' = s' = (a'+x)\cos(\omega+\alpha) + \frac{2d'}{\sin(\omega+\beta)} + \\ +[\Delta' + b - x - 2d'\cot(\omega+\beta)]\cos(\omega+\beta).$$

Setzt man $s = c_0 + cx$, $s' = c_0' + c'x$, so ist

$$c_0 = a\cos(\omega-\alpha) + 2d\sin(\omega-\beta) + (\Delta+b)\cos(\omega-\beta)$$
$$c = \cos(\omega-\alpha) - \cos(\omega-\beta)$$

$$c_0' = a' \cos(\omega+\alpha) + 2d' \sin(\omega+\beta) + (\Delta'+b)\cos(\omega+\beta)$$
$$c' = \cos(\omega+\alpha) - \cos(\omega+\beta).$$

Die dem Beugungswinkel $\beta$ entsprechende Elongation wird gegeben sein durch

$$\int_0^b \left[h \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{c_0 + cx}{\lambda}\right) + h' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{c_0'+c'x}{\lambda}\right)\right] dx.$$

Setzt man wieder $\alpha$ und $\beta$ so klein voraus, dass nur erste Potenzen zu berücksichtigen sind, so wird zunächst $h' = h$ gesetzt werden können, und die Durchführung der Integration gibt für die resultierende Amplitude $A$ die Relation

$$A^2 = \left(\frac{h\lambda}{\pi}\right)^2 \left\{\left[\frac{1}{c} \sin\left(\frac{\pi bc}{\lambda}\right) + \frac{1}{c'} \sin\left(\frac{\pi bc'}{\lambda}\right)\right]^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{4}{cc'} \sin\left(\frac{\pi bc}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{\pi bc'}{\lambda}\right) \sin^2 \frac{\pi}{\lambda}\left(c_0 - c_0' + \frac{c-c'}{2} b\right)\right\}.$$

Nach der Voraussetzung über $\alpha$ und $\beta$ ist aber

$$c = (\alpha-\beta)\sin\omega \qquad c' = -(\alpha-\beta)\sin\omega.$$

Setzt man demnach in obigen Ausdruck $c' = -c$, so wird

$$A^2 = \left(\frac{2h\lambda}{\pi c}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi bc}{\lambda}\right) \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}(c_0 - c_0' + cb),$$

daher die der Richtung $\beta$ entsprechende Intensität

$$i = \varkappa \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi bc}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi bc}{\lambda}\right)^2} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}(c_0 - c_0' + cb).$$

Man findet nun mit Rücksicht auf die Relation $\frac{\Delta+b+a}{\Delta'+b+a'} = \frac{\cos(\omega+\alpha)}{\cos(\omega-\alpha)}$

$$c_0 - c_0' = -(\Delta+b)c + (\Delta'+b)c' + 2d\sin(\omega-\beta) - 2d'\sin(\omega+\beta)$$

und weiter

$$c_0 - c_0' + cb = -\alpha(\Delta+\Delta'+b)\sin\omega +$$
$$+ \beta[(\Delta+\Delta'+b)\sin\omega - 2(d+d')\cos\omega] + 2(d-d')\sin\omega.$$

Die hier auftretenden Größen haben eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Bezeichnet man mit $p$ die Projection der Distanz der schmalen Spiegel auf die zur winkelhalbierenden Geraden normale Ebene, so ist

$$(\Delta+\Delta'+b)\sin\omega = p.$$

Bezeichnet man ferner die Projection der Distanz der Spiegelbilder der äußeren Spiegel auf dieselbe Ebene mit $q$, so ist

$$(\Delta+\Delta'+b)\sin\omega - 2(d+d')\cos\omega = q.$$

Setzt man $2(d-d')\sin\omega = r$, ferner die Projection der Spiegelbreite auf diese Ebene $b\sin\omega = s$, so ist

$$i = \varkappa \frac{\sin^2\left(\pi s \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)}{\left(\pi s \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)^2} \cos^2\left(\pi . \frac{q\beta - p\alpha + r}{\lambda}\right).$$

Vernachlässigt man wieder den von der Spiegelbreite herrührenden Gang der Intensität, so ist

$$i = \frac{1}{2} i_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{q\beta - p\alpha + r}{\lambda}\right)\right].$$

Die Distanz der Nullstellen ist $\frac{\lambda}{q}$; das Phänomen ist demnach dasselbe, das man erhalten würde, wenn statt der Spiegelbilder von $ST$ und $S'T'$ Spaltöffnungen vorhanden wären, welche direct die Beugungserscheinung hervorrufen würden.

Ist die Lichtquelle ausgedehnt, so ist auf gleiche Weise, wie oben

$$J = J_0 \int_0^p f(\alpha)\, d\alpha + J_0 \cos\left(2\pi \frac{q\beta + r}{\lambda}\right) \int_0^p f(\alpha) \cos\left(2\pi \frac{p\alpha}{\lambda}\right) d\alpha,$$

und es ist die Sichtbarkeit des Phänomens

$$V = \frac{\int_0^p f(\alpha) \cos\left(2\pi \frac{p\alpha}{\lambda}\right) d\alpha}{\int_0^p f(\alpha)\, d\alpha}.$$

Hier tritt nun an Stelle der Spaltdistanz die Entfernung der äußeren Spiegel $p$ bezüglich der Objectivebene, das heißt: das Verschwinden und Wiedererscheinen der Interferenzstreifen hängt nur von $p$ ab, ist demnach ganz unabhängig von der Objectivöffnung.

Durch diese Anordnung kann man also das Verfahren auf Lichtquellen von beliebig kleinem Durchmesser ausdehnen, ohne durch die Dimensionen des Objectivs beschränkt zu sein. Man hat aber zugleich einen weiteren Vortheil erreicht.

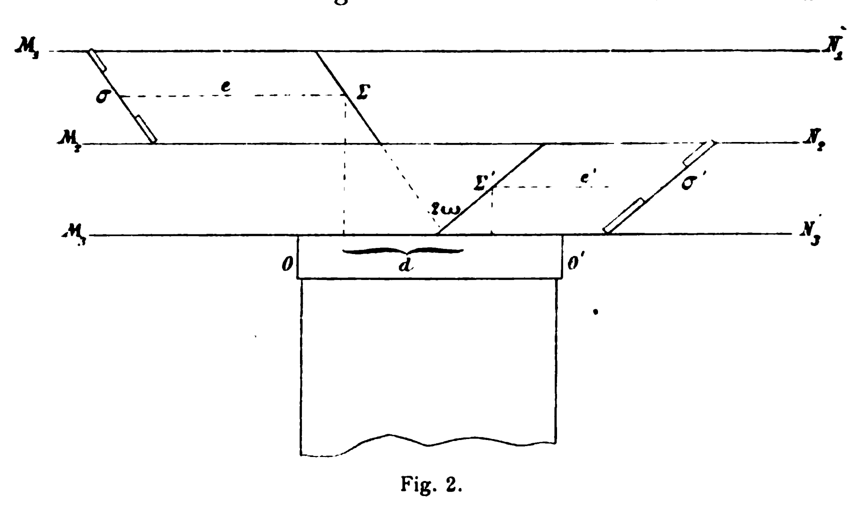



Fig. 2.

Während bei dem Spaltsystem bei Verminderung der Ausdehnung der Lichtquelle und der dadurch nothwendigen Vergrößerung der Spaltdistanz ein Schmälerwerden der Interferenzstreifen erfolgt, die Beobachtung demnach erschwert wird, so kann bei Anwendung des Spiegelsystems die Breite der Streifen bei jeder Distanz der schmalen Spiegel durch die Stellung der inneren Spiegel beliebig variiert, daher auch constant erhalten werden.

Die Anordnung des Spiegelsystems sei so getroffen, wie in vorstehender Figur ersichtlich ist. Es seien $M_1N_1$, $M_2N_2$ und $M_3N_3$ die Führungen der Spiegel $\sigma$, $\sigma'$, $\Sigma$, $\Sigma'$; $OO'$ das Fernrohrobjectiv und $e$, $e'$, $d$ die Distanzen der Spiegelmitten; dann ist $p = d+e+e'$ und $q = d+(e+e')\cos 2\omega$; stehen die beiden spiegelnden Ebenen aufeinander senkrecht, so ist $q = d$;

die Breite der Interferenzstreifen ist daher für jede Entfernung der Spiegel $\sigma$ und $\sigma'$ dieselbe.

### 3. Kreisförmige, gleichmäßig helle Lichtquelle.

Ist die Lichtquelle gleichmäßig hell, so ist $f(\alpha)$ der Länge jener Sehne proportional, die durch den Punkt $\alpha$ geht und zur Spaltrichtung parallel ist. Im Falle einer kreisförmigen Begrenzung ist daher $f(\alpha) = \sqrt{\rho^2-\alpha^2}$ zu setzen, wo $\rho$ der scheinbare Halbmesser der Lichtquelle ist.

Es handelt sich demnach um das Verschwinden des Integrales

$$Z = \int_0^\rho \sqrt{\rho^2-\alpha^2}\,.\cos\left(\frac{2\pi\Delta\alpha}{\lambda}\right) d\alpha.$$

Setzt man $\frac{\alpha}{\rho} = \xi$, $\frac{2\pi\Delta\rho}{\lambda} = n$, so hat man daher jene Werte für $n$ zu ermitteln, für welche

$$Z = \int_0^1 \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi = 0$$

wird.

Setzt man weiter $\xi = \cos\vartheta$, so wird

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta \cos(n\cos\vartheta)\,d\vartheta,$$

und man sieht, dass $Z$ bis auf einen außerhalb des Integralzeichens stehenden Factor eine Bessel'sche Function ist. Nach der Bessel'schen Bezeichnung ist

$$J_n^{(1)} = \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\vartheta \cos(n\cos\vartheta)\,d\vartheta,$$

so dass also $Z = \frac{\pi}{2n} J_n^{(1)}$.

Tafeln für die Functionen $J_n^{(0)}$ und $J_n^{(1)}$ finden sich in Bessel's Abhandlung: »Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht«, Abhandl. der königl. Akad. der Wissensch. zu Berlin, 1824; ferner umfangreichere in Hansen's »Ermittelung der

absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung«, Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha 1843. Daselbst sind auch Hilfsgrößen für die Interpolation angegeben. (Das Argument in diesen Tafeln ist die Hälfte des Argumentes in den ersteren. Die Hansen'schen Tafeln, aber mit dem ursprünglichen Bessel'schen Argument, sind abgedruckt in E. Lommel's: »Studien über die Bessel'schen Functionen«, Leipzig 1868.)

Aus den Hansen'schen Tafeln erhält man für die ersten sechs Werte $n$, welche $Z$ den Wert Null geben:

$$n_1 = 3\cdot831705$$
$$n_2 = 7\cdot015587$$
$$n_3 = 10\cdot173472$$
$$n_4 = 13\cdot323690$$
$$n_5 = 16\cdot470631$$
$$n_6 = 19\cdot615861$$

.
.
.

Ist demnach $\Delta_x$ die Distanz der Spalte, respective Spiegel beim $x$. Verschwinden des Beugungsphänomens, so ist der scheinbare Durchmesser $2\rho = \frac{n_x . \lambda}{\pi \Delta_x}$.

Setzt man, um $2\rho$ gleich in Bogensecunden zu erhalten, $\nu_x = \frac{n_x}{\pi . \sin 1''}$ und wählt die Einheit so, dass $\lambda$ in Tausendelmillimetern, $\Delta$ in Centimetern auszudrücken ist, so erhält man

| | |
|---|---|
| $\nu_1 = 25\cdot1575$ | $\log \nu_1 = 1\cdot400667$ |
| $\nu_2 = 46\cdot0616$ | $\log \nu_2 = 1\cdot663339$ |
| $\nu_3 = 66\cdot7950$ | $\log \nu_3 = 1\cdot824744$ |
| $\nu_4 = 87\cdot4782$ | $\log \nu_4 = 1\cdot941900$ |
| $\nu_5 = 108\cdot1389$ | $\log \nu_5 = 2\cdot033985$ |
| $\nu_6 = 128\cdot7900$ | $\log \nu_6 = 2\cdot109882$ |

Man hat daher in Bogensecunden $2\rho'' = \nu_x . \frac{\lambda^{(\mu)}}{\Delta^{(cm)}}$.

Nimmt man, um eine ungefähre Vorstellung von der Beziehung zwischen dem scheinbaren Durchmesser der Lichtquelle und den Verschwindungsdistanzen zu erhalten, für $\lambda$ einen Wert aus dem physiologisch wirksamsten Theile des Spectrums, etwa $\lambda = 0\cdot 53$, so wird

$$2\rho'' = \frac{13\cdot 33}{\Delta_1} = \frac{24\cdot 41}{\Delta_2} = \frac{37\cdot 36}{\Delta_3} = \frac{46\cdot 36}{\Delta_4} = \frac{57\cdot 32}{\Delta_5} = \frac{68\cdot 26}{\Delta_6}$$

### 4. Elliptische, gleichmäßig helle Lichtquelle.

Ist $2a$ die scheinbare große Axe der Lichtquelle, $\varepsilon$ die Excentricität und $\varphi$ der Winkel, den die große Axe mit jener Richtung einschließt, nach welcher die Dimension der Lichtquelle gemessen werden soll, so ist die Function $f(\alpha)$ proportional dem Ausdrucke

$$\frac{2a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{a^2(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)}},$$

der die Länge der zur Spaltrichtung parallelen Sehne vorstellt. Die gemessene Ausdehnung der Lichtquelle ist der Abstand der beiden zur Spaltrichtung parallelen Tangenten. Sei derselbe mit $2\alpha_0$ bezeichnet, so ist $\alpha_0 = a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$, und es kann

$$f(\alpha) = c.\frac{2a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\alpha_0}\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}$$

gesetzt werden.

Man hat also in dem Integral, das der kreisförmigen Lichtquelle entspricht, $\alpha_0$ an Stelle von $\rho$ zu setzen.

Ist daher $\nu_x$ einer der oben angegebenen Nullwerte und $\Delta_x$ die zugehörige Spaltdistanz, so ist $2\alpha_0 = \nu_x \cdot \frac{\lambda}{\Delta_x}$.

Um nun die Lage und Gestalt der Ellipse zu ermitteln, hat man in drei verschiedenen Positionswinkeln derartige Messungen vorzunehmen. Sind $\alpha_0'$, $\alpha_0''$, $\alpha_0'''$ die denselben entsprechenden Werte für $\alpha_0$, so hat man

$$\alpha_0'^2 = a^2(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1)$$
$$\alpha_0''^2 = a^2(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi_2)$$
$$\alpha_0'''^2 = a^2(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi_3),$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die zugehörigen Winkel mit der großen Axe bedeuten. Eliminiert man $a^2$ und $\varepsilon^2$ und setzt

$$\alpha_0''^2 - \alpha_0'''^2 = g_1$$
$$\alpha_0'''^2 - \alpha_0'^2 = g_2$$
$$\alpha_0'^2 - \alpha_0''^2 = g_3$$

so erhält man die Relation

$$g_1 \sin^2 \varphi_1 + g_2 \sin^2 \varphi_2 + g_3 \sin^2 \varphi_3 = 0.$$

Ist $\psi_0$ der Positionswinkel der großen Axe, sind ferner $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ die Positionswinkel jener Richtungen, nach denen gemessen wurde, also $\varphi_1 = \psi_1 - \psi_0$, $\varphi_2 = \psi_2 - \psi_0$, $\varphi_3 = \psi_3 - \psi_0$, so gibt die Auflösung dieser Gleichung nach $\psi_0$, wenn man von der Relation $g_1 + g_2 + g_3 = 0$ Gebrauch macht:

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{g_1 \sin 2\psi_1 + g_2 \sin 2\psi_2 + g_3 \sin 2\psi_3 + \sqrt{-[g_1 g_2 \sin^2(\psi_1-\psi_2) + g_2 g_3 \sin^2(\psi_2-\psi_3) + g_3 g_1 \sin^2(\psi_3-\psi_1)]}}{g_1 \cos 2\psi_1 + g_2 \cos 2\psi_2 + g_3 \cos 2\psi_3}.$$

Kennt man $\psi_0$ und damit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, so erhält man

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha_0^{(m)2} - \alpha_0^{(n)2}}{\alpha_0^{(m)2} \sin^2 \varphi_n - \alpha_0^{(n)2} \sin^2 \varphi_m}$$
$$a^2 = \frac{\alpha_0^{(m)2}}{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi_m}.$$

Bei einer beliebigen Zahl derartiger Messungen ergeben sich Verbesserungen der so gefundenen Werte aus Gleichungen von der Form

$$\delta\alpha_0^{(m)} = 2\frac{\alpha_0^{(m)}}{a}\delta a - 2\varepsilon\frac{a^2}{\alpha_0^{(m)}}\sin^2(\psi_m-\psi_0)\delta\varepsilon +$$

$$+\frac{a^2}{\alpha_0^{(m)}}\varepsilon\sin^2 2(\psi_m-\psi_0)\delta\psi_0.$$

### 5. Zwei kreisförmige Lichtquellen.

Es seien $2\rho_1$ und $2\rho_2$ die scheinbaren Durchmesser der beiden Lichtquellen und $2\sigma$ die Distanz ihrer Mittelpunkte. Die Spaltrichtung stehe ferner auf der Verbindungslinie der Centren senkrecht, und der äußere Durchschnittspunkt einer Peripherie mit dieser Verbindungslinie sei der Anfangspunkt der Zählung der Coordinate $\alpha$. Jede Lichtquelle sei gleichmäßig hell, und zwar seien die Intensitäten gegeben durch $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$. Dann ist die resultierende Intensität in der Austrittsrichtung $\beta$ proportional dem Ausdrucke

$$J = \varkappa_1\int_0^{2\rho_1}\sqrt{\rho_1^2-(\alpha-\rho_1)^2}\left[1+\cos\left(2\pi\Delta\frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)\right]d\alpha +$$

$$+\varkappa_2\int_{2\sigma+\rho_1-\rho_2}^{2\sigma+\rho_1+\rho_2}\sqrt{\rho_2^2-(\alpha-2\sigma-\rho_1)^2}\left[1+\cos\left(2\pi\Delta\frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)\right]d\alpha.$$

Führt man im ersten Integral als Integrationsvariable $w=\alpha-\rho_1$, im zweiten $w=\alpha-2\sigma-\rho_1$ ein, so ist

$$J = \varkappa_1\int_{-\rho_1}^{+\rho_1}\sqrt{\rho_1^2-w^2}\left[1+\cos\left(2\pi\Delta\frac{w+\rho_1-\beta}{\lambda}\right)\right]dw +$$

$$+\varkappa_2\int_{-\rho_2}^{+\rho_2}\sqrt{\rho_2^2-w^2}\left[1+\cos\left(2\pi\Delta\frac{w+2\sigma+\rho_1-\beta}{\lambda}\right)\right]dw =$$

$$= (\varkappa_1\rho_1^2+\varkappa_2\rho_2^2)\frac{\pi}{2} +$$

$$+\varkappa_1\cos\left(2\pi\Delta\frac{\rho_1-\beta}{\lambda}\right)\int_{-\rho_1}^{+\rho_1}\sqrt{\rho_1^2-w^2}\,.\cos\left(2\pi\Delta\frac{w}{\lambda}\right)dw +$$

$$+\varkappa_2\cos\left(2\pi\Delta\frac{2\sigma+\rho_1-\beta)}{\lambda}\right)\int_{-\rho_2}^{+\rho_2}\sqrt{\rho_2^2-w^2}\,.\cos\left(2\pi\Delta\frac{w}{\lambda}\right)dw.$$

Die Sichtbarkeit der Beugungserscheinung soll nun für den speciellen Fall bestimmt werden, dass $\rho_2 = \rho_1 = \rho$ ist. Dann wird, wenn man $\frac{w}{\rho} = \xi$ setzt:

$$J = (\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{\rho^2\pi}{2} + \rho^2\left\{\left[\varkappa_1 + \varkappa_2 \cos\left(2\pi\Delta\frac{2\sigma}{\lambda}\right)\right]\cos\left(2\pi\Delta\frac{\rho-\beta}{\lambda}\right) - \right.$$

$$\left. -\varkappa_2 \sin\left(2\pi\Delta\frac{2\sigma}{\lambda}\right)\sin\left(2\pi\Delta\frac{\rho-\beta}{\lambda}\right)\right\}.$$

$$\cdot\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\xi^2}.\cos\left(\frac{2\pi\Delta\rho\xi}{\lambda}\right)d\xi.$$

Setzt man

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 \cos\left(2\pi\Delta\frac{2\sigma}{\lambda}\right) = m\cos M$$

$$\varkappa_1 \sin\left(2\pi\Delta\frac{2\sigma}{\lambda}\right) = m\sin M,$$

so ist

$$J = (\varkappa_1 + \varkappa_2)\frac{\rho^2\pi}{2} +$$

$$+\rho^2 m\cos\left(M + 2\pi\Delta\frac{\rho-\beta}{2}\right)\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\xi^2}\cos\left(\frac{2\pi\Delta\rho\xi}{\lambda}\right)d\xi.$$

Die Sichtbarkeit ist proportional der Differenz der beiden extremen Werte von $J$, daher proportional der Größe

$$V = m\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\xi^2}\cos\left(\frac{2\pi\Delta\rho\xi}{\lambda}\right)d\xi,$$

wo $m^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + 2\varkappa_1\varkappa_2\cos\left(2\pi\Delta\frac{2\sigma}{\lambda}\right)$. Außer den Nullwerten des bestimmten Integrales ergeben sich daher für $V$ noch Minima durch $m$. Für den besonderen Fall $\varkappa_2 = \varkappa_1$ erhält man als weitere Nullwerte

$$\Delta' = \frac{1}{2}\lambda.\frac{1}{2\sigma},\ \frac{3}{2}\lambda.\frac{1}{2\sigma},\ldots\ \frac{2l+1}{2}\lambda.\frac{1}{2\sigma},\ldots,$$

so dass man aus den Distanzen $\Delta'$ die scheinbare Entfernung $2\sigma$ der beiden Lichtquellen ermitteln kann.

Das bestimmte Integral verschwindet für $\Delta_x = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{n_x}{2\rho}$, wo $n_x$ einer der oben angegebenen Werte ist. Es ergibt sich für das Verhältnis der ersten Nullwerte von $\Delta$ und $\Delta'$: $\frac{\Delta_1}{\Delta'_1} =$ $= 2 \cdot 439 . \frac{\sigma}{\rho}$.

Ist der scheinbare Durchmesser der Lichtquellen sehr klein gegenüber ihrer Entfernung, so werden eine große Zahl von Nullstellen $\Delta'$ dem Auftreten des ersten $\Delta$ vorangehen. In diesem Falle ist aber die Veränderlichkeit von $m$ um vieles größer als die des bestimmten Integrales, und man kann letzteres für die ersten Werte $\Delta'$ als constant betrachten. Dann aber machen diese Werte $\Delta'$ auch für den Fall $x_2 \neq x_1$ $V$ zu einem Minimum, da sie $m$ zu einem solchen machen. Darauf gründet sich die Verwendbarkeit dieser Methode auch für Doppelsternmessungen.

## 6. Vorhandensein einer Phase bei einer Kugel.

Es soll nun der Einfluss einer Phase auf die hier behandelte Methode der Durchmesserbestimmung ermittelt werden, wobei aber eine etwaige Abplattung vorläufig vernachlässigt werden soll. In diesem Falle wird die Behandlung der Aufgabe keine Änderung erfahren, wenn die Messung in der zur Ebene des Phasenwinkels normalen Richtung vorgenommen wird, da dann zu $f(\alpha) = \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$ nur der Factor $1 + \cos\psi$ hinzutritt, wo $\psi$ den Phasenwinkel bedeutet. Misst man aber nach einer beliebigen anderen Richtung, so sind die bisherigen Ergebnisse schon deshalb nicht mehr anzuwenden, weil $f(\alpha)$ aufhört, eine gerade Function zu sein.

Es soll nun, um den Maximaleinfluss einer bestimmten Phase kennen zu lernen, vorausgesetzt werden, dass die Messung nach der zur Ebene des Phasenwinkels parallelen Richtung geschieht. Zählt man den Phasenwinkel von der negativen Axe der $\alpha$ an, so ist von $-\rho\cos\psi$ bis 0 $f(\alpha)$ proportional der Größe $\frac{1}{\cos\psi}\sqrt{\rho^2\cos^2\psi - \alpha^2}$, von 0 bis $+\rho$ hin-

gegen proportional der Größe $\sqrt{\rho^2-\alpha^2}$. Die Gesammtintensität in der Austrittsrichtung $\beta$ ist demnach

$$J = \frac{1}{\cos\psi}\int_{-\rho\cos\psi}^{0} \sqrt{\rho^2\cos^2\psi-\alpha^2}\left(1+\cos 2\pi\Delta\frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)d\alpha+$$
$$+\int_{0}^{+\rho}\sqrt{\rho^2-\alpha^2}\left(1+\cos 2\pi\Delta\frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)d\alpha.$$

Setzt man im ersten Integral $\frac{\alpha}{\rho\cos\psi}=\xi$, im zweiten $\frac{\alpha}{\rho}=\xi$, so ist

$$J = \rho^2(\cos\psi+1)\int_0^{+1}\sqrt{1-\xi^2}\,d\xi+$$
$$+\cos\left(2\pi\Delta\frac{\beta}{\lambda}\right)\rho^2\left\{\cos\psi\int_0^1\sqrt{1-\xi^2}\cos(n\cos\psi.\xi)\,d\xi+\right.$$
$$\left.+\int_0^1\sqrt{1-\xi^2}\cos(n\xi)\,d\xi\right\}$$
$$+\sin\left(2\pi\Delta\frac{\beta}{\lambda}\right)\rho^2\left\{\cos\psi\int_0^1\sqrt{1-\xi^2}\sin(n\cos\psi.\xi)\,d\xi+\right.$$
$$\left.+\int_0^1\sqrt{1-\xi^2}\sin(n\xi)\,d\xi\right\}$$
$$= A+B\cos\left(2\pi\Delta\frac{\beta}{\lambda}\right)+C\sin\left(2\pi\Delta\frac{\beta}{\lambda}\right).$$

Es kann demnach von einem Verschwinden des Phänomens streng genommen nicht mehr die Rede sein, sondern nur von einem Minimum der Differenz der Intensitätsextreme. Diese Differenz ist aber offenbar $2\sqrt{B^2+C^2}$; es handelt sich also um jene Werte von $n$, welche $B^2+C^2$ zu einem Minimum machen.

Nun soll weiter die Voraussetzung gemacht werden, dass der beobachtete Himmelskörper sich nicht allzuweit von der Opposition befindet, dass also $\psi$ als kleiner Winkel angenommen werden kann. Man erhält unter dieser Voraussetzung bis auf Größen vierter Ordnung in $\psi$:

$$B=\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\xi^2}\cos(n\xi)d\xi-\frac{1}{2}\psi^2\int_0^{+1}\sqrt{1-\xi^2}\cos n\xi d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\psi^2.n\int_0^{+1}\xi\sqrt{1-\xi^2}\sin n\xi d\xi$$

$$C=-\frac{1}{2}\psi^2\int_0^1\sqrt{1-\xi^2}\sin n\xi d\xi-\frac{1}{2}\psi^2 n\int_0^1\xi\sqrt{1-\xi^2}\cos n\xi d\xi,$$

wobei der Ausdruck für $C$ unter Berücksichtigung der Identität $\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\xi^2}\sin n\xi d\xi=0$ folgt.

Gemäß der gemachten Vernachlässigungen kann $C$ ganz unterdrückt werden. $B$ kann auch in der Form geschrieben werden

$$B=\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\xi^2}\cos n\xi d\xi-\frac{1}{2}\psi^2\frac{d}{dn}\left(n\int_0^1\sqrt{1-\xi^2}\cos n\xi d\xi\right)$$

oder nach der Bessel'schen Bezeichnungsweise

$$2B=\frac{2\pi}{n}J_{(n)}^{(1)}-\frac{\pi}{2}\psi^2\frac{dJ_{(n)}^{(1)}}{dn}.$$

Nach bekannten Eigenschaften der Bessel'schen Functionen ist

$$\frac{dJ_{(n)}^{(1)}}{dn}=\frac{1}{2}J_{(n)}^{(0)}-\frac{1}{2}J_{(n)}^{(2)}=$$

$$=\frac{1}{2}J_{(n)}^{(0)}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}J_{(n)}^{(1)}-J_{(n)}^{(0)}\right)=J_{(n)}^{(0)}-\frac{1}{n}J_{(n)}^{(1)}.$$

Soll daher $B=0$ sein, so erhält man für $n$ die Gleichung:

$$J_{(n)}^{(1)}=\left(\frac{\psi}{2}\right)^2[nJ_{(n)}^{(0)}-J_{(n)}^{(1)}].$$

Nun kann man offenbar in die rechte Seite der Gleichung für $n$ die oben ermittelten Werte einführen, welche $B=0$ für den Fall $\psi=0$ machen, ohne einen Fehler zu begehen, der die vierte Ordnung in $\psi$ übersteigen würde. Für diese Werte ist aber $J_{(n)}^{(1)}=0$. Bezeichnet man daher die Nullwerte von $B$ für

den Phasenwinkel $\psi$ mit $n'$, die früher für $\psi = 0$ ermittelten mit $n$, so erhält man bis auf Größen vierter Ordnung in $\psi$ die $n'$ aus der Gleichung

$$J^{(1)}(n') = \left(\frac{\psi}{2}\right)^2 n \,.\, J^{(0)}(n).$$

Auf diese Weise sind aus den Hansen'schen Tafeln Werte für die $n'$ interpoliert worden, welche den oben angegebenen sechs Verschwindungsstellen entsprechen, und zwar für die ersten zehn Grade bezüglich des Phasenwinkels. Dabei ist zu bemerken, dass nur jene Stellen mitgenommen wurden, die durch Größen vierter Ordnung nicht mehr beeinflusst werden, und dass bereits dieselben Einheiten vorausgesetzt sind, wie bei den oben angegebenen Größen $\nu$.

| $\psi =$ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | 10° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu_1$ | 25·158 | 25·160 | 25·166 | 25·175 | 25·188 | 25·206 | 25·227 | 25·252 | 25·280 | 25·313 | 25·350 |
| $\nu_2$ | 46·062 | 46·065 | 46·076 | 46·093 | 46·118 | 46·150 | 46·188 | 46·234 | 46·287 | 46·347 | 46·414 |
| $\nu_3$ | 66 795 | 66·800 | 66·815 | 66·841 | 66·877 | 66·923 | 66·978 | 67·045 | 67·121 | 67·209 | 67·305 |
| $\nu_4$ | 87·478 | 87·485 | 87·505 | 87·538 | 87·585 | 87·645 | 87·718 | 87·805 | 87·906 | 88·020 | 88·148 |
| $\nu_5$ | 108·139 | 108·148 | 108·173 | 108·214 | 108·272 | 108·346 | 108·437 | 108·544 | 108·669 | 108·810 | 108·969 |
| $\nu_6$ | 128·790 | 128·800 | 128·829 | 128·878 | 128·947 | 129·035 | 129·144 | 129·272 | 129·421 | 129·589 | 129·778 |

Der allgemeine Fall, dass nach einer beliebigen Richtung gemessen wird, kann auf den hier behandelten zurückgeführt werden. Es sei in nachstehender Figur die $X$-Axe parallel zur Richtung, nach der die Messung vorgenommen wird, und $\varphi$ der Winkel des größten Durchmessers mit der $X$-Axe. Der Terminator gehört wieder einer Ellipse an, deren große Axe $2\rho$ und deren Excentricität $\sin\psi$ ist. Bezeichnet man die beiden

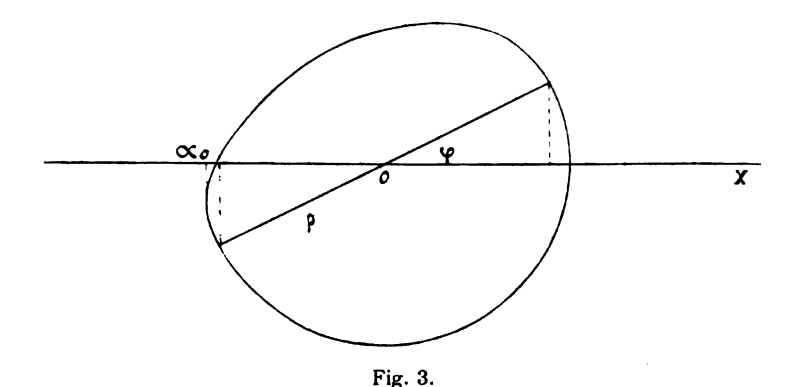



Fig. 3.

der Ellipse angehörigen Ordinaten, die einem bestimmten $\alpha$ entsprechen, mit $y'_e$ und $y''_e$, die Kreisordinate mit $y$, so ist, abgesehen von einem constanten Factor,

$$\text{von } -\alpha_0 \text{ bis } -\rho\cos\varphi: \quad f(\alpha) = y'_e - y''_e$$

$$\text{von } -\rho\cos\varphi \text{ bis } +\rho\cos\varphi: \quad f(\alpha) = y'_e + y$$

$$\text{von } +\rho\cos\varphi \text{ bis } +\rho \quad : \quad f(\alpha) = 2y.$$

Nun ist

$$y_e = \frac{\rho^2}{\alpha_0}\left[\sin^2\psi . \sin\varphi\cos\varphi . \frac{\alpha}{\alpha_0} + \cos\psi\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}\right],$$

wo $\alpha_0 = \rho\sqrt{1-\sin^2\psi . \sin^2\varphi}$ ist.

Bezeichnet man mit $B$ wieder den Factor von $\cos\left(2\pi\Delta\frac{\beta}{\lambda}\right)$, so ist daher

$$B = \frac{2\rho^2 \cos\psi}{\alpha_0} \int_{-\alpha_0}^{-\rho\cos\varphi} \sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\alpha\right) d\alpha +$$

$$+ \frac{\rho^2}{\alpha_0^2} \sin^2\psi \sin\varphi \cos\varphi \int_{-\rho\cos\varphi}^{+\rho\cos\varphi} \alpha \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\alpha\right) d\alpha$$

$$+ \frac{\rho^2 \cos\psi}{\alpha_0} \int_{-\rho\cos\varphi}^{+\rho\cos\varphi} \sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\alpha\right) d\alpha +$$

$$+\rho \int_{-\rho\cos\varphi}^{+\rho\cos\varphi} \sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\alpha\right) d\alpha +$$

$$+2\rho \int_{+\rho\cos\varphi}^{+\rho} \sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\alpha\right) d\alpha.$$

Das zweite Integral ist offenbar Null, demnach wird

$$B = \frac{\rho^2 \cos\psi}{\alpha_0} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\alpha\right) d\alpha +$$

$$+\rho \int_{-\rho}^{+\rho} \sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda}\alpha\right) d\alpha.$$

Setzt man im ersten Integral $\frac{\alpha}{\alpha_0} = \xi$, im zweiten $\frac{\alpha}{\rho} = \xi$, so ist

$$B = \rho^2 \cos\psi \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos(n\sqrt{1-\sin^2\psi \sin^2\varphi}\,.\,\xi)\, d\xi +$$

$$+\rho^2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos(n\xi)\, d\xi.$$

Vernachlässigt man wieder Größen vierter Ordnung in $\psi$, so erhält man

$$\frac{1}{\rho^2} B = \left(2 - \frac{\psi^2}{2}\cos^2\varphi\right) \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos(n\xi)\, d\xi -$$

$$- \frac{\psi^2}{2} \sin^2\varphi \frac{d}{dn} \left[ n\,.\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos(n\xi)\, d\xi \right].$$

Man erhält daraus als Bedingung des Verschwindens von $B$, wenn man wieder die Bessel'schen Bezeichnungen einführt:

$$J_{(n)}^{(1)} = \left(\frac{\psi}{2}\right)^2 [n \sin^2\varphi J_{(n)}^{(0)} - J_{(n)}^{(1)}],$$

oder, bis auf Größen vierter Ordnung in $\psi$

$$J^{(1)}_{(n')} = \left(\frac{\psi}{2}\sin\varphi\right)^2 . nJ^{(0)}_{(n)}.$$

Man erhält also auch für den allgemeinen Fall aus obiger Tafel die Werte für $\nu$, aber mit dem Argument $\psi \sin\varphi$.

**7. Vorhandensein einer Phase bei einem Rotationsellipsoid.**

Die Werte von $n$, für welche $BdB+CdC$ verschwindet, werden in bestimmter Weise von der Abplattung und der Phase abhängen. Bezeichnet man wieder mit $\psi$ den Phasenwinkel und mit $\varepsilon$ die Excentricität der Meridianellipse, so kann man sich diesen Zusammenhang in die Form gebracht denken

$$n = n_0 + n_1\psi^2 + n_1'\varepsilon^2 + n_2\psi^4 + n_2'\varepsilon^2\psi^2 + n_2''\varepsilon^4 + \dots$$

Da, wie aus Art. 4 hervorgeht, $n = n_0$ ist, wenn keine Phase vorhanden ist, so müssen sämmtliche Coefficienten der von $\psi$ freien Glieder Null sein; es wird daher

$$n = n_0 + \psi^2[n_1 + n_2\psi^2 + n_2'\varepsilon^2 + \dots].$$

Macht man nun die im allgemeinen berechtigte Annahme, dass $\varepsilon$ von derselben Ordnung wie $\psi$ ist, so ist innerhalb der bisher festgesetzten Genauigkeitsgrenzen der Wert von $n$ unabhängig von der Abplattung, und die Ermittlung der Dimension der Lichtquelle nach irgendeiner Richtung kann unmittelbar so vorgenommen werden, wie im vorigen Artikel angegeben wurde.

Anders verhält es sich natürlich mit der Interpretation der gefundenen Dimensionen, d. h. mit der Darstellung der begrenzenden Curven aus denselben.

Es wird sich nun in erster Linie darum handeln, die Gleichungen des Planetenumrisses und des Terminators aufzustellen. Bessel gibt in seiner Abhandlung: »Über die scheinbare Figur einer unvollständig erleuchteten Planetenscheibe« (Astron. Nachr., Nr. 277 und 278 und »Astronomische Untersuchungen von F. W. Bessel«, Königsberg 1841, Bd. I, S. 239) darüber folgende Darstellung.

Bezüglich einer Fundamentalebene, die zur Äquatorebene des Planeten parallel liegt, sei die geocentrische Länge und Breite des Planetenmittelpunktes $\lambda$ und $\beta$, seine heliocentrische Länge und Breite $\lambda'$ und $\beta'$. Bestimmt man weiter die Größen $\Delta, \Delta', \beta_1, \beta_1'$, so dass

$$\frac{1}{\Delta}\cos\beta_1 = \cos\beta \qquad \frac{1}{\Delta'}\cos\beta_1' = \cos\beta'$$

$$\frac{1}{\Delta}\sin\beta_1 = \frac{a}{b}\sin\beta \qquad \frac{1}{\Delta'}\sin\beta_1' = \frac{a}{b}\sin\beta',$$

wo $2a$ und $2b$ die große und kleine Axe der Meridianellipse bedeuten, ferner $d$ und $w$ aus

$$\cos d = \sin\beta_1\sin\beta_1' + \cos\beta_1\cos\beta_1'\cos(\lambda'-\lambda)$$

$$\sin d\cos w = \cos\beta_1\sin\beta_1' - \sin\beta_1\cos\beta_1'\cos(\lambda'-\lambda)$$

$$\sin d\sin w = \cos\beta_1'\sin(\lambda'-\lambda),$$

so sieht man unmittelbar, dass sich $d$ von dem Phasenwinkel $\psi$ und $w$ von dem Winkel, der durch die Ebene: Sonne—Erde—Planet und Erde—Planetenaxe gebildet wird, nur um Größen von der Ordnung der Abplattung unterscheiden.

Bezeichnet man die scheinbare Entfernung eines Punktes vom Planetenmittelpunkte mit $s$, den Positionswinkel von der scheinbaren Richtung der Planetenaxe an gezählt mit $90-t$ und setzt $s\cos t = u$, $s\sin t = v$, so ist die Gleichung des Planetenumrisses

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\beta)} = 1$$

und die Gleichung des Terminators

$$\frac{1}{a^2}\left(u\cos w - \frac{v\sin w}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}}\right)^2 + \\ + \frac{1}{a^2\cos^2 d}\left(u\sin w + \frac{v\cos w}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}}\right)^2 = 1,$$

wenn $\varepsilon$ die Excentricität der Meridianellipse ist.

In der genannten Untersuchung wird gezeigt, dass die Frage, ob ein Punkt des Terminators auf der sichtbaren oder unsichtbaren Hälfte der Planetenoberfläche liegt, durch das Vorzeichen von

$$\operatorname{tg} d\left(u \sin w + \frac{v \cos w}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \beta}}\right)$$

entschieden wird. Die Endpunkte des sichtbaren Theiles des Terminators werden daher gegeben sein durch

$$u \sin w + \frac{v \cos w}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \beta}} = 0$$

und der Winkel $t_0$ des dieselben verbindenden Durchmessers mit der Axe der $u$ durch

$$\operatorname{tg} t_0 = -\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \beta} . \operatorname{tg} w.$$

Bezeichnet man den Positionswinkel der Sonne mit $\vartheta_0$, so wird

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{-\cos \beta \sin \beta' + \sin \beta \cos \beta' \cos (\lambda' - \lambda)}{\cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda)}$$

und

$$\sin d . \Delta w = \sin w \left[ -\frac{\cos \beta}{\cos \beta_1} \Delta \beta' + \cos d \Delta \beta \right] .$$

Nun ergeben die Definitionsgleichungen von $\beta_1$ und $\beta_1'$

$$\cos \beta_1 = \cos \beta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos \beta \sin \beta^2$$

$$\cos \beta_1' = \cos \beta' - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos \beta' \sin \beta'^2$$

$$\sin \beta_1 = \sin \beta + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin \beta \cos^2 \beta$$

$$\sin \beta_1' = \sin \beta' + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin \beta' \cos^2 \beta',$$

daher

$$\beta_1 - \beta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \sin 2\beta \qquad \beta_1' - \beta_1 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \sin 2\beta'.$$

Substituiert man diese Werte für $\Delta\beta$ und $\Delta\beta'$, sowie den obigen Ausdruck für $\cos d$, so ergibt sich, wenn man $\vartheta = 90 - w$ setzt,

$$\vartheta - \vartheta_0 = +\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \sin 2w \cos^2\beta.$$

Setzt man $t_0 - 90 = t_1$, so folgt aus $\frac{\operatorname{tg} t_1}{\operatorname{tg}\vartheta} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\beta$

$$t_1 - \vartheta = +\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \cos^2\beta \sin 2w;$$

demnach $t_1 - \vartheta_0 = \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\beta \sin 2w$ und das ist die Abweichung des zum Terminator senkrechten größten Kreises von dem durch die Sonne gehenden, der bekannte Ausdruck für den Winkel zwischen dem Radius und der Normalen bei der Excentricität $\varepsilon \cos\beta$, wenn Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden.

Es ist nun noch die Lage und Gestalt der Terminatorellipse zu ermitteln. Ist $2a'$ und $\eta$ große Axe und Excentricität einer Ellipse und $\omega$ der Winkel der großen Axe mit der $u$-Axe, so ist ihre Gleichung

$$Au^2 + Bv^2 - 2Cuv = 1,$$

wo

$$A = \frac{1-\eta^2\cos^2\omega}{a'^2(1-\eta^2)} \qquad B = \frac{1-\eta^2\sin^2\omega}{a'^2(1-\eta^2)} \qquad C = \frac{\eta^2 \sin\omega \cos w}{a'^2(1-\eta\cdot)}.$$

Aus der Gleichung des Terminators ergibt sich, dass

$$A = \frac{1}{a^2}(1 + \sin^2 w \operatorname{tg}^2 d)$$

$$B = \frac{1}{a^2(1-\varepsilon^2\cos^2\beta)}(1 + \cos^2 w \operatorname{tg}^2 d)$$

$$C = \frac{1}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta}} \sin w \cos w \operatorname{tg}^2 d.$$

Aus den drei ersten Gleichungen erhält man zur Bestimmung der Lage der Ellipse

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2C}{B-A}.$$

Führt man darin die obigen Werte aus der Terminatorgleichung ein, so erhält man

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{\sin 2w \operatorname{tg}^2 d \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2\beta}}{\cos 2w \operatorname{tg}^2 d\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\beta\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\frac{\cos^2\beta}{\cos^2 d}(1+2\sin^2 d)}.$$

Betrachtet man wieder $\varepsilon$ und $d$ als kleine Größen erster Ordnung und begnügt man sich bei der Bestimmung von $\omega$ mit Größen nullter Ordnung, so wird

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{\sin 2w \sin^2 d}{\cos 2w \sin^2 d + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\beta}.$$

Zur Bestimmung der Excentricität $\eta$ erhält man

$$\eta^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(B-A)^2+4C^2}}{AB-C^2}\{\sqrt{(B-A)^2+4C^2}+A+B\}.$$

Nun ist $\sqrt{(B-A)^2+4C^2}$ eine Größe zweiter Ordnung, $A+B$ und $AB-C^2$ nullter Ordnung, daher $\eta^2$ zweiter Ordnung. Vernachlässigt man höhere Ordnungen, so wird

$$\eta^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{A+B}{AB-C^2}\sqrt{(B-A)^2+4C^2}.$$

Substituiert man wieder für $A$, $B$ und $C$, so erhält man unter consequenter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung

$$\eta^2 = \sqrt{\operatorname{tg}^4 d+\varepsilon^4\cos^4\beta+2\operatorname{tg}^2 d\,.\,\varepsilon^2\cos^2\beta\cos 2w}.$$

Ebenso ergibt sich für $a'$:

$$a'^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{B+A}{AB-C^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{AB-C^2}\sqrt{(B-A)^2+4C^2}.$$

und nach Substitution bis auf Größen zweiter Ordnung inclusive:

$$a'^2 = a^2\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 d-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\beta\right)+$$
$$+\frac{1}{2}a^2\cos^2 d\sqrt{\operatorname{tg}^4 d+\varepsilon^4\cos^4\beta+2\varepsilon^2\cos^2\beta\operatorname{tg}^2 d\cos 2w}$$

oder

$$a' = a\left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 d - \frac{1}{4}\varepsilon^2\cos^2\beta + \frac{1}{4}\eta^2\right).$$

Diese Relationen geben nun die Mittel in die Hand, den Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Messungen und den Größen, die sich auf den scheinbaren Planetenumriss beziehen, darzustellen.

Die Größe, die bei der vorliegenden Methode gemessen wird, ist der Abstand der beiden zur Spaltrichtung parallelen Tangenten an die begrenzenden Curven. Nun ist der Abstand einer Tangente an eine Ellipse vom Mittelpunkte derselben $a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\chi}$, wenn $\chi$ der Winkel der Tangente mit der großen Axe bedeutet. Ist demnach $\chi$ der Winkel der Spaltrichtung mit der $u$-Axe, so wird die gemessene Distanz $P = p+p'$ sein, wo

$$p = a\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\beta\cos^2\chi} = a\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\beta\cos^2\chi\right)$$

$$p' = a'\sqrt{1-\eta^2\cos^2(\omega-\chi)} = a'\left(1 - \frac{1}{2}\eta^2\cos^2(\omega-\chi)\right)$$

oder

$$= a\left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 d - \frac{1}{4}\varepsilon^2\cos^2\beta + \frac{1}{4}\eta^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left[1 - \frac{\eta^2}{4} - \frac{\eta^2}{4}\cos 2\omega\cos 2\chi - \frac{\eta^2}{4}\sin 2\omega\sin 2\chi\right]$$

$$= a\left[1 + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 d - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\cos^2\beta - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2\cos 2\omega\cos 2\chi - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2\sin 2\omega\sin 2\chi\right].$$

Wie aus den obigen Werten für $\operatorname{tg} 2\omega$ und $\eta^2$ hervorgeht, ist zunächst

$$\left(\frac{\eta}{2}\right)^2\cos 2\omega = \frac{1}{8}\cdot\frac{A^2-B^2}{AB-C^2} = -\frac{1}{4}(\operatorname{tg}^2 d\cos 2w + \varepsilon^2\cos^2\beta)$$

$$\left(\frac{\eta}{2}\right)\sin 2\omega = \frac{1}{8}\cdot\frac{2C(A+B)}{AB-C^2} = +\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 d\sin 2w.$$

Es ergibt sich dann

$$p' = a \left\{ 1 + \frac{1}{4} [\mathrm{tg}^2 d - 2\varepsilon^2 \cos^2\beta \sin^2\chi + \mathrm{tg}^2 d \cos 2(w+\chi)] \right\}$$

und endlich

$$P = a \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2\beta + \frac{1}{2} \mathrm{tg}^2 d \cos^2(w+\chi) \right\}.$$

In letzterem Ausdrucke kann man $d$ und $w$ durch $\psi$ und $w_0$ ersetzen, wo $w_0$ so von $\beta$, $\beta'$ und $\lambda'-\lambda$ abhängt, wie $w$ von $\beta_1$, $\beta_1'$ und $\lambda_1'-\lambda_1$, ohne einen Fehler von der Ordnung $\varepsilon^2$ zu begehen, und erhält schließlich für die gemessene Distanz

$$P = a\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos^2\beta + \frac{1}{2} \mathrm{tg}^2 \psi \cos^2(w_0+\chi)\right].$$

## 8. Berücksichtigung des Verhältnisses der Spaltbreite zur Spaltdistanz.

Es war unter der Voraussetzung, dass die Breite der Spalte sehr klein ist gegenüber ihrer Distanz, der Factor

$$\frac{\sin^2\left(\pi b \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)}{\left(\pi b \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)^2}$$

als constant betrachtet worden, wenigstens für den Bereich der ersten Maxima und Minima der zweiten Classe. Es soll nun diese Voraussetzung fallen gelassen und untersucht werden, welche Änderungen an den bisherigen Resultaten anzubringen sind, wenn auf die Veränderlichkeit dieses Factors Rücksicht genommen wird. Es hat diese Erweiterung insoferne eine Bedeutung, als sich in praxi die Nothwendigkeit herausstellen kann, die Spaltbreite zu Gunsten der Lichtstärke zu vergrößern, anderseits beim Spiegelsystem die Distanz der Spiegelbilder zu Gunsten der Deutlichkeit des Phänomens zu verringern, so zwar, dass $\frac{b}{\Delta}$ einen Wert annimmt, der die gemachte Vernachlässigung nicht mehr statthaft erscheinen lässt. Immerhin soll

aber noch vorausgesetzt werden, dass höhere als zweite Potenzen von $\frac{b}{\Delta}$ vernachlässigt werden können.

Setzt man, wie oben, $\frac{2\pi\Delta\rho}{\pi} = n$, $\frac{\alpha}{\rho} = \xi$, ferner $\frac{b}{\Delta} = \varepsilon$ und $\frac{\beta}{\rho} = \tau$, so hat man

$$J = \varkappa \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \, \frac{\sin^2\left(n\varepsilon\,\frac{\tau-\xi}{2}\right)}{\left(n\varepsilon\,\frac{\tau-\xi}{2}\right)^2} \, [1 + \cos n(\tau-\xi)]\, d\xi,$$

wenn Abweichungen von der Kreisform unberücksichtigt gelassen werden.

Setzt man bis auf Größen zweiter Ordnung inclusive

$$\frac{\sin^2\left(n\varepsilon\,\frac{\tau-\xi}{2}\right)}{\left(n\varepsilon\,\frac{\tau-\xi}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{3}\left(n\varepsilon\,\frac{\tau-\xi}{2}\right)^2,$$

so wird

$$J = \varkappa \int_{-1}^{+1} [\sqrt{1-\xi^2} + \cos n\tau \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi]\, d\xi$$

$$- \varkappa \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^2 \left\{ \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2}(\tau^2+\xi^2)\, d\xi + \right.$$

$$+ \cos n\tau \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi (\tau^2+\xi^2)\, d\xi$$

$$\left. - 2\tau \sin n\tau \int_{-1}^{+1} \xi \sqrt{1-\xi^2} \sin n\xi\, d\xi \right\},$$

wobei schon jene Integrale weggelassen sind, die zwischen den Grenzen $-1$ und $+1$ verschwinden. Berücksichtigt man, dass $\int_{-1}^{+1} \xi^2 \sqrt{1-\xi^2}\, d\xi = \frac{\pi}{8}$ ist, und setzt $\varkappa = 1$, so wird weiter

$$J = \frac{\pi}{2} + \cos n\tau \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi - \frac{1}{3} \left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^2 \cdot$$
$$\cdot \left\{ \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4} + \tau^2\right) + \cos n\tau \int_{-1}^{+1} (\tau^2+\xi^2) \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi \right.$$
$$\left. -2\tau \sin n\tau \int_{-1}^{+1} \xi \sqrt{1-\xi^2} \sin n\xi d\xi \right\}.$$

Das erste Maximum tritt wie früher für $\tau = 0$ ein. Das erste Minimum war früher für $\tau = \frac{\pi}{n}$ eingetreten; nun wird sich der Wert von $\tau$ für das Minimum von $J$ in der jetzt vorliegenden Form von $\frac{\pi}{n}$ um Größen von der Ordnung $\varepsilon^2$ unterscheiden. In den von $\varepsilon^2$ abhängigen Gliedern kann man demnach für $\tau$ unmittelbar $\frac{\pi}{n}$ setzen; aber auch in dem Gliede nullter Ordnung kommt $\tau$ nur in $\cos n\tau$ vor, und diese Größe wird sich von $-1$ um Größen von der Ordnung $\varepsilon^4$ unterscheiden. Man hat daher

$$J_{(\max)} = \frac{\pi}{2} + \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi -$$
$$- \frac{1}{3}\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} + \int_{-1}^{+1} \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi \right\}$$

$$J_{(\min)} = \frac{\pi}{2} - \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi -$$
$$- \frac{1}{3}\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^2 \left\{ \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{n^2}\right) - \frac{\pi^2}{n^2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi \right.$$
$$\left. - \int_{-1}^{+1} \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi \right\}.$$

Für das Verschwinden des Beugungsphänomens muss $J_{(\max)} = J_{(\min)}$ werden, woraus die Bedingungsgleichung folgt:

$$V = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^2 \left\{ - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi^2}{n^2} + \frac{\pi^2}{n^2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi + \right.$$
$$\left. + 2 \int_{-1}^{+1} \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi \right\}.$$

Um daraus $n$ zu bestimmen, kann man offenbar innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenzen rechts vom Gleichheitszeichen für $n$ die früheren Nullwerte einführen. Es wird also

$$V = -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{n\varepsilon}{2}\right)^2\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi^2}{n^2}-2\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}\cos n\xi d\xi\right\}$$

gesetzt werden können, oder, nach der Bessel'schen Bezeichnungsweise

$$V = -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\pi^2-6\pi J_{(n)}^{(2)}\right).$$

Nun ist $J_{(n)}^{(2)} = \frac{2}{n} J_{(n)}^{(1)} - J_{(n)}^{(0)} = -J_{(n)}^{(0)}$, demnach

$$V = -\varepsilon^2\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{12}+J_{(n)}^{(0)}\right).$$

Um die an die früheren Nullwerte anzubringende Correction zu finden, hat man

$$J_{(n)}^{(1)} = \frac{n}{\pi}V, \quad \frac{dJ_{(n)}^{(1)}}{dn} = \frac{1}{\pi}V+\frac{n}{\pi}\cdot\frac{dV}{dn} = J_{(n)}^{(0)}-\frac{1}{n}J_{(n)}^{(1)}$$

oder mit Rücksicht auf die hier in Betracht kommenden Werte der $n$: $\frac{n}{\pi}\cdot\frac{dV}{dn} = J_{(n)}^{(0)}$, demnach $dn = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{dV}{J_{(n)}^{(0)}}$ oder

$$dn = -\varepsilon^2\frac{n}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{12J_{(n)}^{(0)}}\right) = c\varepsilon^2.$$

Ermittelt man darnach die Werte der $c$ für die ersten sechs Nullwerte $n$, so erhält man

$$c_1 = +\ 0\cdot 99826$$
$$c_2 = -\ 6\cdot 56046$$
$$c_3 = +\ 5\cdot 83384$$
$$c_4 = -15\cdot 87714$$
$$c_5 = +13\cdot 12045$$
$$c_6 = -27\cdot 30350$$

Drückt man diese Größen $c$ in denselben Einheiten aus, wie die obigen $\nu$ und bezeichnet dieselben dann mit $\gamma$, so dass also

$$2\rho'' = (\nu_x + \gamma_x \varepsilon^2) \frac{\lambda^{(\mu)}}{\Delta^{(cm)}},$$

so ist

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= + \quad 6\cdot5542 & \log\gamma_1 &= 0\cdot816517 \\
\gamma_2 &= - \quad 43\cdot0734 & \log\gamma_2 &= 1_n 634209 \\
\gamma_3 &= + \quad 38\cdot3028 & \log\gamma_3 &= 1\cdot583230 \\
\gamma_4 &= -104\cdot2431 & \log\gamma_4 &= 2_n 018047 \\
\gamma_5 &= + \quad 86\cdot1438 & \log\gamma_5 &= 1\cdot935224 \\
\gamma_6 &= -179\cdot2640 & \log\gamma_6 &= 2_n 253493
\end{aligned}$$

Eine etwas andere Form nimmt diese Correction bei Anwendung des oben beschriebenen Spiegelsystems an, da die Coefficienten von $\alpha$ und $\beta$ in der Cosinusfunction nicht mehr identisch sind. Es ist unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen

$$J = x\int_{-p}^{+p} f(\alpha) \frac{\sin^2\left(\pi s \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)}{\left(\pi s \frac{\alpha-\beta}{\lambda}\right)^2} \cos^2\left(\pi \frac{q\beta - p\alpha + r}{\lambda}\right) d\alpha.$$

Die Ausführung dieses Integrals gibt auf dieselbe Weise wie früher als Bedingung des Verschwindens der Beugungserscheinung

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{ -\frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon'^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} + 2\left(\frac{\varepsilon n}{2}\right)^2 \int_{-1}^{+1} \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \cos n\xi d\xi \right\},$$

wobei $\varepsilon = \frac{s}{p}$, $\varepsilon' = \frac{s}{q}$ ist und $n = \frac{2\pi p\rho}{\lambda}$.

Setzt man $\frac{p}{q} = m$, so erhält man

$$dn = -\frac{n}{4} \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\pi^2}{12 J_{(n)}^{(0)}} m^2\right)$$

$$= -\frac{n}{4} \varepsilon^2 (1 + g m^2).$$

Dabei ist:

$$g_1 = -2\cdot04210 \qquad \log g_1 = 0_n310077$$
$$g_2 = +2\cdot74050 \qquad \log g_2 = 0\cdot437830$$
$$g_3 = -3\cdot29375 \qquad \log g_3 = 0_n517691$$
$$g_4 = +3\cdot76658 \qquad \log g_4 = 0\cdot575948$$
$$g_5 = -4\cdot18639 \qquad \log g_5 = 0_n621840$$
$$g_6 = +4\cdot56764 \qquad \log g_6 = 0\cdot659692$$

---

# Über das Gleichgewicht eines elastischen Kreiscylinders

von

Dr. **Fritz Hasenöhrl.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1901.)

Die Differentialgleichungen des elastischen Gleichgewichts sind für den Fall, dass die Grenzbedingungen auf der Oberfläche eines Kreiscylinders vorgeschrieben sind, in vollkommener Allgemeinheit von Herrn Jaerisch[1] integriert worden. Herr Jaerisch zerlegt die elastische Verschiebung in Componenten nach den Richtungen der Cylindercoordinaten und gewinnt aus den entsprechend transformierten Differentialgleichungen eine Lösung des Problemes, welche in gewissen Punkten eine Analogie mit den von Lamé[2] angegebenen Integralen für die elastische Kugelschale hat.[3]

In vorliegender Arbeit habe ich versucht, eine Lösung des Problems anzugeben, welche sich in gewissem Sinne zu der von Herrn Jaerisch ebenso verhält, wie bei der Kugel die Lösung von Lord Kelvin[4] zu der Lamé'schen.

Wir werden uns hier auf die Behandlung des unendlichen Cylinders beschränken, d. h. die Grenzbedingungen nur auf dem Mantel erfüllen. Bei einem endlichen Cylinder hätte man unter Benützung der von Boussinesq[5] und Ceruti[6] für den

---

[1] Jaerisch, Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg, I, S. 167, 1886.

[2] Lamé, Liouville J. XIX, 1854; Leçons sur les coordonnées curvilignes.

[3] Über die Unterschiede beider Methoden siehe Jaerisch, ebenda S. 155.

[4] Treatise on natural philosophy von Lord Kelvin and Tait, II, S. 286.

[5] Boussinesq, Applications des Potentiels directes, inverses, logarithmiques. Paris 1885.

[6] Ceruti, Reale Accademia dei Lincei, 1882.

von einer unendlichen Ebene begrenzten Körper angegebenen Integrale analog zu verfahren, wie man es bei dem entsprechenden Problem der Potentialtheorie thut.

Die Differentialgleichungen des elastischen Gleichgewichtes lauten, wenn man die Volumskräfte eliminiert hat:

$$
\begin{aligned}
\mu\nabla^2 u+(\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial x} &= 0 \\
\mu\nabla^2 v+(\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial y} &= 0 \\
\mu\nabla^2 w+(\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Hierin sind $u$, $v$, $w$ die Componenten der Verschiebung parallel den Axen des rechtwinkeligen Coordinatensystems, $\lambda$ und $\mu$ die Lamé'schen Elasticitätsconstanten und

$$
\sigma = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (2)
$$

die räumliche Dilatation.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Theile. Im ersten integrieren wir die Gleichungen (1) unter der Voraussetzung, dass $u$, $v$, $w$ an der Oberfläche des Cylinders gegeben sind. Im zweiten Theile wollen wir annehmen, dass die Spannungscomponenten:

$$
\begin{aligned}
T_x &= \frac{x}{a}\left(\lambda\sigma+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{y}{a}\cdot\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
T_y &= \frac{y}{a}\left(\lambda\sigma+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{x}{a}\cdot\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
T_z &= \frac{x}{a}\cdot\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{y}{a}\cdot\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

an der Oberfläche, also für $r=\sqrt{x^2+y^2}=a$ gegeben sind, wo $a$ der Radius des Cylinders ist. (Die Cylinderachse soll mit der $Z$-Achse identisch sein.)

## I.

Es sollen die Verschiebungen an der Oberfläche des Cylinders vorgeschriebene Werte $u_0$, $v_0$, $w_0$ annehmen.

Wir bezeichnen mit $F, G, H$ drei im Inneren des Cylinders harmonische Functionen, die also in diesem Raume mit ihren Ableitungen endlich und stetig sind und der Laplace'schen Differentialgleichung genügen.

Wir setzen nun:

$$
\begin{aligned}
u &= F + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}(U - \sigma x) \\
v &= G + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}(V - \sigma y) \\
w &= H + \frac{\lambda+\mu}{2\mu}(W - \sigma z),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

wobei $\sigma$ wieder die räumliche Dilatation bedeutet und $U, V, W$ drei innerhalb des Cylinders harmonische Functionen sind, die an der Oberfläche respective dieselben Werte annehmen, wie $\sigma x$, $\sigma y$ und $\sigma z$.

Dann sind die Gleichungen (1) offenbar identisch erfüllt. Damit auch Gleichung (2) erfüllt sei, muss

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(1 + \frac{3(\lambda+\mu)}{2\mu}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \\
+ \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - l\frac{\partial \sigma}{\partial l}\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

sein, wobei wir zur Kürze setzten:

$$
x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} = l\frac{\partial}{\partial l}\cdot
$$

Können wir $\sigma$ aus der Gleichung (5) bestimmen, so ist unser Problem gelöst, d. h. auf das betreffende lösbare Problem der Potentialtheorie zurückgeführt.[1] Denn bestimmen wir nach den Regeln der Potentialtheorie $F, G, H$ so, dass sie an der Oberfläche dieselben Werte wie $u_0$, $v_0$, $w_0$ annehmen, so sind die Grenzbedingungen erfüllt, da ja dort $(U - \sigma x)$, $(V - \sigma y)$,

[1] Natürlich gilt dies nicht nur für den Cylinder, sondern auch für jeden beliebigen Körper. Für die Kugel z. B. ist die Bestimmung von $\sigma$ aus Gleichung (5) äußerst einfach, und es werden dann die Gleichungen (4) mit dem von Lord Kelvin angegebenen Resultate identisch.

$(W - \sigma z)$ verschwinden. Wir können also $F, G, H$ als bekannt voraussetzen; desgleichen

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \Theta,$$

wie wir der Kürze wegen setzen wollen. $\Theta$ ist natürlich, ebenso wie alle anderen in (5) auftretenden Functionen, harmonisch. Wir können daher $\Theta$ durch eine Summe (eventuell ein Integral) über Glieder von der Form

$$A_{\nu n} \frac{\sin}{\cos} \nu z \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r) \qquad (6)^{1}$$

darstellen, worin $r, \varphi, z$ die Cylindercoordinaten eines Punktes sind; $J_n$ die Cylinderfunction $n^{\text{ter}}$ Ordnung (erster Art) ist, wobei wir $n$ als ganze, positive Zahl voraussetzen können; endlich $\nu$ und $A_{\nu n}$ beliebige Constanten sind und $\sqrt{-1} = i$ gesetzt ist.

Ist $f(x, y, z)$ eine beliebige Function, so wollen wir unter $\overline{f(x, y, z)}$ die harmonische Function verstehen, die an der Oberfläche des Cylinders dieselben Werte annimmt, wie $f(xyz)$. (Es wäre also in dieser Bezeichnungsweise $U = \overline{\sigma x}$; $V = \overline{\sigma y}$; $W = \overline{\sigma z}$.)

Da auch $\sigma$ eine harmonische Function ist, so können wir es ebenfalls durch eine Anzahl Glieder von der Form (6) darstellen (die man nach Analogie mit den Kugelfunctionen räumliche Cylinderfunctionen nennen könnte). Den Repräsentanten derselben bezeichnen wir mit $C$, setzen also

$$C = \frac{\sin}{\cos} \nu z \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r).$$

Ferner führen wir die Function

$$C_1 = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{-\cos}{\sin} \nu z \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r)$$

ein. Es ist

$$C = \frac{\partial C_1}{\partial z}.$$

[1] Siehe etwa: Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, II, S. 185.

Dann ist, wenn wir für den Augenblick $\sigma = C$ setzen:

$$W = \overline{z.C} = \overline{z\frac{\partial C_1}{\partial z}} = l\frac{\partial C_1}{\partial l} - \overline{\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) C_1}$$

$$= l\frac{\partial C_1}{\partial l} - \overline{r\frac{\partial C_1}{\partial r}}$$

($l\frac{\partial C_1}{\partial l}$ ist ja ohnehin harmonisch, wenn $C_1$ diese Eigenschaft besitzt). Ferner ist:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial C_1}{\partial z} + l\frac{\partial}{\partial l}\frac{\partial C_1}{\partial z} - \overline{r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial C_1}{\partial z}}$$

$$= C + l\frac{\partial C}{\partial l} - \overline{r\frac{\partial C}{\partial r}}.$$

Somit wird der von $C$ zu

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} - l\frac{\partial \sigma}{\partial l} \tag{7}$$

in (5) gelieferte Beitrag gleich

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{xC} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{yC} + C - \overline{r\frac{\partial C}{\partial r}}. \tag{8}$$

Nun ergibt sich leicht, wenn $a$ wieder den Cylinderradius bedeutet:

$$\overline{xC} = \frac{a}{2} J_n(\nu i a) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \nu z \left\{ \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n-1)\varphi \frac{J_{n-1}(\nu i r)}{J_{n-1}(\nu i a)} + \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n+1)\varphi \frac{J_{n+1}(\nu i r)}{J_{n+1}(\nu i a)} \right\}$$

$$\overline{yC} = \frac{a}{2} J_n(\nu i a) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \nu z \left\{ \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} (n-1)\varphi \frac{J_{n-1}(\nu i r)}{J_{n-1}(\nu i a)} - \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} (n+1)\varphi \frac{J_{n+1}(\nu i r)}{J_{n+1}(\nu i a)} \right\}$$

und daraus

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{xC} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{yC} = \frac{i\nu a}{2} J_n(\nu i a)\left(\frac{1}{J_{n+1}(\nu i a)} - \frac{1}{J_{n-1}(\nu i a)}\right) \cdot C,$$

wobei die bekannten Relationen

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)\,[1]$$

benützt sind.

Desgleichen ergibt sich:

$$r\frac{\overline{\partial C}}{\partial r} = \frac{via}{2} \cdot \frac{J_{n-1}(via) - J_{n+1}(via)}{J_n(via)} \cdot C,$$

wobei die Relation

$$2\frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

benützt ist.

Also hat der Ausdruck (8) den Wert:

$$C.\left\{1 + \frac{iva}{2} J_n(iva)\left(\frac{1}{J_{n+1}(iva)} - \frac{1}{J_{n-1}(iva)}\right) - \frac{iva}{2} \cdot \frac{J_{n-1}(iva) - J_{n+1}(iva)}{J_n(iva)}\right\} = C.B_{\nu n},$$

wie wir zur Kürze setzen wollen.

Jedem Summanden von der Form (6) im Ausdrucke für $\Theta$ entspricht also für $\sigma$ ebenfalls ein Summand

$$C.D_{\nu n},$$

wobei sich die Constante $D_{\nu n}$ durch Einsetzen in Gleichung (5) ergibt:

$$D_{\nu n}\left(1 + \frac{3(\lambda+\mu)}{2\mu}\right) = A_{\nu n} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \cdot D_{\nu n} . B_{\nu n},$$

also

$$D_{\nu n} = \frac{A_{\nu n}}{1 + \frac{3(\lambda+\mu)}{2\mu} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu} B_{\nu n}}.$$

Wir können also $\sigma$ bilden; setzen wir seinen Wert in (4) ein, so erhalten wir die vollständige Lösung des Problemes.

---

[1] Heine, l. c. I, S. 243.

II.

Wenn an der Oberfläche des Cylinders statt der Verschiebungen die Werte der von außen wirkenden Spannungen gegeben sind, so könnten wir wieder von den Integralen (4) ausgehen, die Werte für die Spannungen bilden und dann durch Gleichsetzen derselben mit den vorgeschriebenen Spannungswerten die Functionen $F$, $G$, $H$ zu bestimmen trachten. Für diesen Zweck sind jedoch die folgenden Integrale der Differentialgleichungen (1) geeigneter:

$$\begin{aligned} u &= F - \frac{\varkappa}{\nu^2} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ v &= G - \frac{\varkappa}{\nu^2} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \\ w &= H - \frac{\varkappa}{\nu^2} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \end{aligned} \tag{10}$$

worin wieder $F$, $G$, $H$ drei harmonische Functionen sind und

$$\Theta = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

ist. Zur Kürze ist

$$\varkappa = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}$$

gesetzt. $\nu^2$ ist wieder eine beliebige Constante. Es muss aber vorausgesetzt werden, dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\nu^2 . F$$

und ferner dieselbe Relation für $G$ und $H$, daher auch für $\Theta$ gilt. Es hat dies die Bedeutung, dass alle hier auftretenden Functionen $z$ blos in einem Factor von der Form

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \nu z$$

enthalten. Die Verification von (10) ist leicht durchgeführt. Es ist ja nach der früheren Bezeichnungsweise:

$$r\frac{\partial}{\partial r} = l\frac{\partial}{\partial l} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

also

$$\nabla^2\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) = -\nabla^2\left(z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) = -2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

$$= 2\nu^2\frac{\partial\Theta}{\partial x},$$

also wird

$$\nabla^2 u = -2\varkappa\frac{\partial\Theta}{\partial x}.$$

Setzen wir also

$$\sigma = (1-\varkappa)\Theta = \frac{2\mu}{\lambda+3\mu}\Theta,$$

so sind die Gleichungen (1) und, wie man sich leicht überzeugt, auch die Gleichung (2) identisch erfüllt.

Setzen wir diese Werte (10) von $u, v, w$ in die Gleichungen (3) ein, so erhalten wir nach einigen Transformationen für die Spannungscomponenten:

$$\frac{a}{\mu}T_x = \frac{2\lambda}{\lambda+3\mu}\cdot x\Theta + r\frac{\partial F}{\partial r} + x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial x}$$
$$-\frac{2\varkappa}{\nu^2}\left(a^2\nu^2\frac{\partial\Theta}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)$$

$$\frac{a}{\mu}T_y = \frac{2\lambda}{\lambda+3\mu}\cdot y\Theta + r\frac{\partial G}{\partial r} + x\frac{\partial F}{\partial y} + y\frac{\partial G}{\partial y}$$
$$-\frac{2\varkappa}{\nu^2}\left(a^2\nu^2\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)$$

$$\frac{a}{\mu}T_z = r\frac{\partial H}{\partial r} + x\frac{\partial F}{\partial z} + y\frac{\partial G}{\partial z}$$
$$-\frac{\varkappa}{\nu^2}\left(2a^2\nu^2\frac{\partial\Theta}{\partial z} - 2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial z} - r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right).$$

Es ist jedoch bequemer, anstatt $T_x$ und $T_y$ die Größen:

$$R = \frac{x}{a}T_x + \frac{y}{a}T_y$$

$$\Phi = \frac{x}{a}T_y - \frac{y}{a}T_x$$

einzuführen; wir erhalten dann:

$$\frac{a^2}{\mu}\cdot R = a^2(3\varkappa+1)\Theta - 2a^2\frac{\partial H}{\partial z} + 2\left(y\frac{\partial F}{\partial \varphi} - x\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)$$

$$-2\varkappa\left(a^2+\frac{1}{\nu^2}\right)r\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{2\varkappa}{\nu^2}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial^2\Theta}{\partial \varphi^2} - \frac{4\varkappa}{\nu^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{a^2}{\mu}\cdot \Phi = a^2\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) + 2\left(x\frac{\partial F}{\partial \varphi} + y\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right) - 2\varkappa\left(a^2+\frac{1}{\nu^2}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$$

$$+\frac{2\varkappa}{\nu^2}\frac{\partial^3\Theta}{\partial \varphi^3} + \frac{4\varkappa}{\nu^2}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}.$$

Natürlich können wir uns die Grenzbedingungen auch so gegeben denken, dass $R$, $\Phi$, $T_z$ an der Oberfläche vorgeschriebene Werte haben.

Für $r$ ist nach vollzogener Differentiation der Wert $a$ einzusetzen.

Wir setzen nun:

$$F = \mathfrak{A}_n \cdot {\sin \atop \cos} \nu z {\sin \atop \cos} n\varphi J_n(\nu i r)$$

$$G = \mathfrak{B}_n \cdot {\sin \atop \cos} \nu z {\cos \atop -\sin} n\varphi J_n(\nu i r)$$

$$H = -\frac{1}{\nu}\mathfrak{C}_{n-1} {\cos \atop -\sin} \nu z {\sin \atop \cos} (n-1)\varphi J_{n-1}(\nu i r)$$

$$-\frac{1}{\nu}\mathfrak{C}_{n+1} {\cos \atop -\sin} \nu z {\sin \atop \cos} (n+1)\varphi J_{n+1}(\nu i r),$$

worin $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_{n-1}$, $\mathfrak{C}_{n+1}$ Constante sind.

Setzen wir diese Werte in die vorigen Gleichungen ein, so erhalten wir nach einer etwas mühsamen Rechnung:

$$\frac{a^2}{\mu} R = \mathfrak{D}_{n-1} {\sin \atop \cos} \nu z {\sin \atop \cos} (n-1)\varphi + \mathfrak{D}_{n+1} {\sin \atop \cos} \nu z {\sin \atop \cos} (n+1)\varphi$$

$$\frac{a^2}{\mu} \Phi = \mathfrak{E}_{n-1} {\sin \atop \cos} \nu z {\cos \atop -\sin} (n-1)\varphi + \mathfrak{E}_{n+1} {\sin \atop \cos} \nu z {\cos \atop -\sin} (n+1)\varphi$$

$$\frac{a}{\mu} T_z = \mathfrak{F}_{n-1} {\cos \atop -\sin} \nu z {\sin \atop \cos} (n-1)\varphi + \mathfrak{F}_{n+1} {\cos \atop -\sin} \nu z {\sin \atop \cos} (n+1)\varphi.$$

Hierin haben die Constanten $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ die folgenden Werte:

$$\mathfrak{D}_{n-1} = (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{B}_n)\alpha_n + \mathfrak{C}_{n-1} . \delta_{n-1}$$
$$\mathfrak{D}_{n+1} = (\mathfrak{A}_n + \mathfrak{B}_n)\alpha'_n + \mathfrak{C}_{n+1} . \delta_{n+1}$$
$$\mathfrak{E}_{n-1} = (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{B}_n)\beta_n + \mathfrak{C}_{n-1} . \varepsilon_{n-1}$$
$$\mathfrak{E}_{n+1} = (\mathfrak{A}_n + \mathfrak{B}_n)\beta'_n + \mathfrak{C}_{n+1} . \varepsilon_{n+1}$$
$$\mathfrak{F}_{n-1} = (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{B}_n)\gamma_n + \mathfrak{C}_{n-1} . \zeta_{n-1}$$
$$\mathfrak{F}_{n+1} = (\mathfrak{A}_n + \mathfrak{B}_n)\gamma'_n + \mathfrak{C}_{n+1} . \zeta_{n+1},$$

wobei die Constanten $\alpha, \alpha' \ldots \zeta'$ zur Kürze für die folgenden Ausdrücke eingesetzt sind:

$$\alpha_n = \frac{\nu i}{2}\left[a^2(3\varkappa+1) + \frac{4\varkappa(n-1)^2}{\nu^2}\right] J_{n-1} - n a J_n$$
$$- \varkappa\nu i\left[a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{(n-1)^2}{\nu^2}\right] . a \frac{\partial J_{n-1}}{\partial a}$$

$$\alpha'_n = -\frac{\nu i}{2}\left[a^2(3\varkappa+1) + \frac{4\varkappa(n+1)^2}{\nu^2}\right] J_{n+1} + n a J_n$$
$$+ \varkappa\nu i\left[a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{(n+1)^2}{\nu^2}\right] . a \frac{\partial J_{n+1}}{\partial a}$$

$$\beta_n = -\left[\frac{a^2\nu i}{2} + (n-1)\varkappa\nu i\left(a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{(n-1)^2}{\nu^2}\right)\right] J_{n-1} + n a J_n$$
$$+ \frac{2\varkappa i}{\nu}(n-1) a \frac{\partial J_{n-1}}{\partial a}$$

$$\beta'_n = -\left[\frac{a^2\nu i}{2} - (n+1)\varkappa\nu i\left(a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{(n+1)^2}{\nu^2}\right)\right] J_{n+1} + n a J_n$$
$$- \frac{2\varkappa i}{\nu}(n+1) a \frac{\partial J_{n+1}}{\partial a}$$

$$\gamma_n = -\varkappa\nu^2 i\left[a^2 + \frac{(n-1)^2}{\nu^2}\right] J_{n-1} + \frac{\nu a}{2} J_n + \frac{\varkappa i}{2} a \frac{\partial J_{n-1}}{\partial a}$$

$$\gamma'_n = \varkappa\nu^2 i\left[a^2 + \frac{(n+1)^2}{\nu^2}\right] J_{n+1} + \frac{\nu a}{2} J_n - \frac{\varkappa i}{2} a \frac{\partial J_{n+1}}{\partial a}$$

$$\delta_n = \left[a^2(3\varkappa-1) + \frac{4\varkappa n^2}{\nu^2}\right] J_n - 2\varkappa\left[a^2 + \frac{1}{\nu^2} + \frac{n^2}{\nu^2}\right] a \frac{\partial J_n}{\partial a}$$

$$\mathfrak{z}_n = -2\varkappa\left[a^2+\frac{1}{\nu^2}+\frac{n^2}{\nu^2}\right]nJ_n+\frac{4\varkappa n}{\nu^2}a\frac{\partial J_n}{\partial a}$$

$$\zeta_n = -2\varkappa\nu\left[a^2+\frac{n^2}{\nu^2}\right]J_n-\frac{1-\varkappa}{\nu}a\frac{\partial J_n}{\partial a}.$$

Das Argument aller aller hier auftretenden Cylinderfunctionen ist $\nu i a$, was zur Kürze in den vorigen Ausdrücken weggelassen wurde.

Es seien nun die Componenten der Spannung an der Oberfläche durch folgende Reihen gegeben:[1]

$$\frac{a^2}{\mu}R = \frac{\sin}{\cos}\nu z\sum_n \mathfrak{L}_n \frac{\sin}{\cos} n\varphi$$

$$\frac{a^2}{\mu}\Phi = \frac{\sin}{\cos}\nu z\sum_n \mathfrak{M}_n \frac{\cos}{-\sin} n\varphi$$

$$\frac{a}{\mu}Z_z = \frac{\cos}{-\sin}\nu z\sum_n \mathfrak{N}_n \frac{\sin}{\cos} n\varphi.$$

Setzen wir dann:

$$F = \frac{\sin}{\cos}\nu z\sum_n \mathfrak{A}_n \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r)$$

$$G = \frac{\sin}{\cos}\nu z\sum_n \mathfrak{B}_n \frac{\cos}{-\sin} n\varphi J_n(\nu i r)$$

$$H = \frac{\cos}{-\sin}\nu z\sum_n \mathfrak{C}_n \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu i r),$$

so bestimmen sich die Constanten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ aus den gegebenen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ nach dem Vorhergehenden durch die Gleichungen:

[1] Im allgemeinen ist über diese Ausdrücke noch bezüglich $\nu$ zu summieren. Da aber dann offenbar in genau derselben Weise über die obigen Ausdrücke für $F$, $G$, $H$ bezüglich $\nu$ zu summieren ist, können wir dies zur Kürze weglassen.

$$\mathfrak{L}_n = (\mathfrak{A}_{n+1} - \mathfrak{B}_{n+1})\alpha_{n+1} + (\mathfrak{A}_{n-1} + \mathfrak{B}_{n-1})\alpha'_{n-1} + \mathfrak{C}_n \delta_n$$
$$\mathfrak{M}_n = (\mathfrak{A}_{n+1} - \mathfrak{B}_{n+1})\beta_{n+1} + (\mathfrak{A}_{n-1} + \mathfrak{B}_{n-1})\beta'_{n-1} + \mathfrak{C}_n \varepsilon_n$$
$$\mathfrak{N}_n = (\mathfrak{A}_{n+1} - \mathfrak{B}_{n+1})\gamma_{n+1} + (\mathfrak{A}_{n-1} + \mathfrak{B}_{n-1})\gamma'_{n-1} + \mathfrak{C}_n \zeta_n$$
$$(n = 0, 1, 2 \ldots),$$

aus denen successive die Größen $\mathfrak{A}_n \mathfrak{B}_n \mathfrak{C}_n$ $(n = 0, 1, 2)$ berechnet werden können. Dadurch sind dann die Functionen $F$, $G$, $H$ bestimmt, und die Gleichungen (10) geben uns die vollständige Lösung des Problems.

Die Determinante der Coefficienten der letzten Gleichungen kann nicht verschwinden. Man kann sich davon durch eine etwas langwierige Rechnung überzeugen, die ich hier nicht mittheilen zu müssen glaube. Der Fall $\nu = o$ ist ausgenommen; derselbe bedeutet aber offenbar ein einfacheres Problem, das sich analog der Methode, welche Lord Keloin bei der Kugel anwendet, behandeln lässt.

Zu beachten ist, dass hier die Argumente aller Cylinderfunctionen imaginär sind. Wollte man den Fall behandeln, dass die Spannungen an der Oberfläche verschwinden, dass also $L_n = M_n = N_n = o$ ist, so hätte man für $F$, $G$, $H$-Functionen von der Form

$$e^{\nu z} \frac{\sin}{\cos} n\varphi J_n(\nu r)$$

einzusetzen. Denn bei reellem Argumente der Cylinderfunctionen lässt sich die erwähnte Determinante zum Verschwinden bringen.

# Über die Diffusion in sich selbst

von

**Karl Stanzel.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1901.)**

I. Unter Diffusion in sich selbst versteht man den speciellen Fall der Diffusion, wobei die beiden diffundierenden Substanzen gleichbeschaffen sind. Man kann sich etwa denken, dass sie voneinander durch ein Merkmal, das auf die Bewegung keinen Einfluss hat, unterschieden werden können.

Wir denken uns den ganzen unendlichen Raum von einem Gas oder einer tropfbaren Flüssigkeit von durchaus gleichartiger und von der Zeit unabhängiger Beschaffenheit erfüllt. In dem Raume sei ein rechtwinkeliges Coordinatensystem festgelegt. Ein einzelnes Molecül wird nun vermöge der Stöße, die es erleidet, eine vielfach gebrochene oder gekrümmte Linie beschreiben, je nachdem wir uns die Beschaffenheit und gegenseitige Einwirkung der Molecüle vorstellen. Ohne dass wir uns darüber genauere Rechenschaft zu geben brauchen, können wir sagen, dass eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür bestehe, dass ein Molecül, das im Zeitpunkte 0 sich im Ursprung befindet, im Zeitpunkte $t$ sich innerhalb eines Abstandes zwischen $r$ und $r+dr$ vom Ursprunge befinde. Dann besteht auch eine Wahrscheinlichkeit, dass dieses Molecül im Zeitpunkte $t$ Coordinaten zwischen $x$ und $x+dx$, $y$ und $y+dy$, $z$ und $z+dz$ besitze, welche Wahrscheinlichkeit

$$F(t, \sqrt{x^2+y^2+z^2}) . dx . dy . dz$$

sein möge. Integriert man diesen Ausdruck nach $y$ von $-\infty$ bis $+\infty$ und dann nach $z$ von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man einen Ausdruck, der die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein Molecül, das zur Zeit 0 sich im Ursprunge befindet, zur Zeit $t$ eine $x$-Coordinate zwischen $x$ und $x+dx$ habe, womit also die Existenz dieser Wahrscheinlichkeit dargethan ist; wir wollen sie mit $f(t, x)dx$ bezeichnen. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Molecül außerdem im Zeitpunkte $t+t_1$ eine $x$-Coordinate habe, die noch um eine Zahl zwischen $x_1$ und $x_1+dx_1$ größer ist als seine $x$-Coordinate zur Zeit $t$, ist dann

$$f(t, x) . dx . f(t_1, x_1) dx_1.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist zwar nicht identisch, aber bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung als gleich zu betrachten mit der Wahrscheinlichkeit, dass ein Molecül, das zur Zeit 0 die $x$-Coordinate 0 hat, zur Zeit $t$ eine $x$-Coordinate zwischen $x$ und $x+dx$ und zur Zeit $t+t_1$ eine solche zwischen $x+x_1$ und $x+x_1+dx_1$ habe. Da aber ein Molecül, welches die erste und dritte dieser eben genannten Bedingungen erfüllt, zur Zeit $t$ jede $x$-Coordinate von $-\infty$ bis $+\infty$ haben kann, so muss, wenn wir $x+x_1 = \xi$ setzen, die Function $f(t, x)$ die Bedingung

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(t, x) . dx . f(t_1, \xi - x) . dx_1 = f(t+t_1, \xi) . dx_1 \quad \ldots (1)$$

für alle Werte von $t$ und $t_1$ von 0 bis $+\infty$ und alle Werte von $\xi = -\infty$ bis $\xi = +\infty$ erfüllen. Aus der Natur des Vorganges ergibt sich weiter, dass sie für zwei entgegengesetzte Werte von $x$ denselben Wert ergeben, dass sie für ein constantes $t$, wenn $x$ von 0 bis $\pm\infty$ sich ändert, abnehmen, für $x = \pm\infty$ Null werden muss, dass sie ferner für ein constantes $x \gtrless 0$, wenn $t = 0$, Null sein, wenn $t$ wächst, erst zunehmen, dann wieder abnehmen und für $t = +\infty$ Null werden muss. Alle diese Bedingungen erfüllt, wie ich durch Probieren fand, die Function

$$f(t, x) = \sqrt{\frac{A}{t\pi}} \cdot e^{-\frac{A}{t} x^2}, \quad \ldots (2)$$

wo $A$ zunächst eine beliebige Constante ist. Wie der Vergleich mit einigen Experimenten, die ich später anführe, zeigt, scheint die Function den thatsächlichen Verhältnissen zu entsprechen; es ist jedoch möglich, dass, wenn wir uns die Beschaffenheit und gegenseitige Einwirkung der Molecüle anders vorstellen, als sie wirklich sind, eine andere Function statt der genannten zu wählen ist, die aber natürlich allen früher aufgezählten Bedingungen genügen muss.

Setzt man anstatt $\sqrt{\frac{A}{t}}\ \frac{1}{\alpha}$, wobei $t$ jetzt constant sein soll, so erhält man die Function, welche die Wahrscheinlichkeit einer Geschwindigkeitscomponente zwischen $x$ und $x+dx$ angibt, und zwar in der Form, wie sie Maxwell ursprünglich schrieb. Da nun

$$\frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\,.\,r^2.e^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}.dr$$

die Wahrscheinlichkeit einer Geschwindigkeit zwischen $r$ und $r+dr$ ist, so braucht man nur wieder statt $\frac{1}{\alpha}\ \sqrt{\frac{A}{t}}$ zu setzen, um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass ein Molecül, das zur Zeit 0 sich im Ursprunge befindet, zur Zeit $t$ in einem Abstande zwischen $r$ und $r+dr$ vom Ursprunge sei.

Der früher mit

$$F(t, \sqrt{x^2+y^2+z^2}).dx.dy.dz$$

oder wenn man $x^2+y^2+z^2 = r^2$, $dx.dy.dz = do$ setzt (wobei die Gestalt des Volumelementes $do$ beliebig ist), mit

$$F(t, r).do$$

bezeichnete Ausdruck, welchen man erhält, wenn man in

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{A}{t}\right)^{\frac{3}{2}}.r^2.e^{-\frac{A}{t}r^2}.dr \qquad \ldots(3)$$

an Stelle der Kugelschale $4r^2\pi.dr$ das Volumelement $do$ setzt, erfüllt übrigens eine der Gleichung (1) ganz analoge Bedingung:

$$\int_{r=0}^{r=+\infty}\int_{\lambda=0}^{\lambda=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} F(t,r).r^2.\sin\lambda.d\lambda.d\varphi.dr.$$

$$.F(t_1,\sqrt{R^2+r^2-2Rr.\cos\lambda}.do = F(t+t_1,R).do,$$

wo $r$ statt $x$, das Volumelement $r^2.\sin\lambda.d\lambda.d\varphi.dr$ statt $dx$, $\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\lambda}$ statt $\xi-x$, $do$ statt $dx_1$ und $R$ statt $\xi$ auftritt. Die Bedeutung dieser Größen ist aus untenstehender Figur 1 ersichtlich, wobei noch $\varphi$ den Winkel der Figur mit einer fixen, durch $R$ gelegten Ebene bedeutet.

II. Wir wollen nun untersuchen, wie viel Molecüle sich aus der einen Hälfte eines geraden Cylinders während einer Zeit $t$ in die andere bewegen.

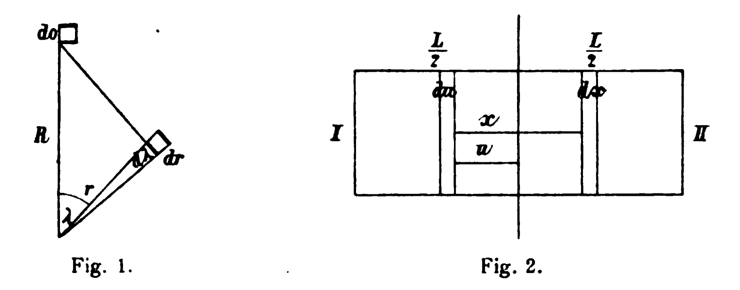



Fig. 1. Fig. 2.

Von den $n.du$ Molecülen, welche sich zur Zeit 0 in der Schicht $du$ (siehe Figur 2) befinden, wobei der Querschnitt des Cylinders $=1$ sein soll, sind zur Zeit $t$ in der Schicht $dx$ $n.du.\sqrt{\frac{A}{t\pi}}.e^{-\frac{A}{t}x^2}.dx$ Molecüle, welche während dieser Zeit weder an die Wand II, noch an die Wand I angestoßen sind. Nun werden sich aber in dieser Schicht auch solche befinden, die ein- oder mehrmals an die Wand II, aber nicht an die Wand I angestoßen sind; für diese ist statt $x$ $L-x+2u$ zu setzen; ferner solche, die erst an die Wand II, dann an die Wand I ein- oder mehrmals angestoßen sind, u. s. f. Um alle Molecüle aus der Schicht $du$ zu erhalten, die sich im Zeitpunkte $t$ in der rechten Hälfte des Cylinders befinden, haben wir den obigen Ausdruck von $x=u$ bis $x=u+L$, dann von $u+2L$ bis $u+3L$, allgemein von $x=u+2i.L$ bis $u+(2i+1)L$ zu integrieren und diese einzelnen Integrale zu addieren;

$i$ bedeutet dabei alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$. Die Summe sei durch

$$n.du.\sqrt{\frac{A}{t\pi}}.\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\int_{x=u+2i.L}^{x=u+(2i+1)L} e^{-\frac{A}{t}x^2}.dx$$

bezeichnet. Integriert man dies nach $u$ von $u=0$ bis $u=\frac{L}{2}$, so erhält man

$$n.\sqrt{\frac{A}{t\pi}}\int_{u=0}^{u=\frac{L}{2}} du.\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\int_{x=u+2iL}^{u+(2i+1)L} e^{-\frac{A}{t}x}.dx \quad \ldots(4)$$

als Anzahl der Molecüle, welche sich während der Zeit $t$ aus der linken in die rechte Hälfte des Cylinders bewegt haben.

III. Bisher hat alles allgemein für Gase und tropfbare Flüssigkeiten gegolten. Wir wollen nun die Bedeutung der Constante $A$ unter der Annahme, dass sich die Molecüle wie stoßende Kugeln verhalten und keine sonstigen Kräfte unter ihnen wirksam sind, ermitteln. Denkt man sich in dem eingangs besprochenen Falle alle Molecüle dieses ideellen Gases mit der $k$fachen Geschwindigkeit bewegt, während alles andere ungeändert bleibt, so wird nach der Zeit $\frac{t}{k}$ derselbe Zustand eingetreten sein, als in dem ursprünglichen Falle nach der Zeit $t$. Die Constante $A$ wird also der mittleren Geschwindigkeit $\bar{c}$ verkehrt proportional sein.

Die Größe $A$ enthält außerdem im Zähler $ns^2$, wo $s$ den Durchmesser eines Molecüls und $n$ die Anzahl aller Molecüle in der Volumseinheit bedeutet. Mag dies auch von vorneherein einleuchtend erscheinen, so dürfte es doch eines ausführlichen Beweises bedürfen.

Wir betrachten einmal jene Molecüle, welche in einem beliebigen Zeitpunkte zwischen $t$ und $t+dt$ innerhalb eines Volumelementes $do$ zum Stoße gelangt sind (Bedingung I) (wir vernachlässigen jetzt die Ausdehnung der Molecüle); ferner jene, welche sich in einer Richtung, die innerhalb $\varphi$ und $\varphi+d\varphi$, $\lambda$ und $\lambda+d\lambda$ (auf ein räumliches Polarcoordinatensystem bezogen) liegt, mit einer Geschwindigkeit zwischen $c$ und $c+dc$

bewegen (Bedingung II); dann jene, welche vom Zeitpunkte des letzten Stoßes ab gerechnet, nach einer Zeit zwischen $t'$ und $t'+dt'$ wieder zum Stoß gelangen (Bedingung III).

Wir denken uns nun jene Molecüle, welche zu dem bestimmten innerhalb $t$ und $t+dt$ gelegenen Zeitpunkte $T$ in einem bestimmten Punkte $P$ innerhalb $do$ zum Stoße gelangt sind, im übrigen die Bedingung II erfüllen und nach der Zeit $t'$, von $T$ ab gerechnet, wieder zum Stoße gelangen. Der Ort aller dieser Molecüle im Zeitpunkte des letzteren Stoßes heiße das Volumelement $do_1$. Alle Molecüle, welche in einem Zeitpunkte innerhalb $t'$ und $t'+dt'$ im Volumelement $do_1$ zum Stoße gelangen, mögen die Bedingung IV erfüllen.

Es lässt sich nun leicht einsehen, dass die Anzahl der Molecüle, welche die Bedingungen I, II und III erfüllen, sich von der Anzahl derer, welche die Bedingungen I und IV erfüllen, nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung unterscheidet.

Wir denken uns jetzt nebst dem eingangs besprochenen Falle, welcher mit (1) bezeichnet werden soll, einen Fall (2); dabei soll $s^{(2)} = \alpha . s^{(1)}$ sein, dagegen $m^{(2)} = m^{(1)}$, $h^{(2)} = h^{(1)}$ und $n^{(2)} = n^{(1)}$. (Die Bezeichnung ist nach Boltzmann's Gastheorie I gewählt.) Die mittleren Geschwindigkeiten sind also wegen $m^{(1)} . h^{(1)} = m^{(2)} . h^{(2)}$ gleich. Setzen wir in den Bedingungen I bis IV überall statt $t$ $\frac{t}{\alpha^2}$, statt $t+dt$ $\frac{t+dt}{\alpha^2}$, statt $do$ $\frac{do}{\alpha^6}$ und statt $do_1$ $\frac{do_1}{\alpha^6}$, so gelangen wir zu den Bedingungen I′, II′, III′, IV′.

Wir wählen nun aus beiden Fällen je ein Molecül, welches die Bedingung II, beziehungsweise II′ erfüllt. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Molecül (1) nach einer Zeit zwischen $t$ und $t+dt$ anstoße, ist nach den Gleichungen (6) und (8) des Anhanges so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass das Molecül (2) nach einer Zeit zwischen $\frac{t}{\alpha^2}$ und $\frac{t+dt}{\alpha^2}$ anstoße. Die beiden Molecüle erfüllen jetzt Bedingungen von der Art I, beziehungsweise I′. Die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Stoße eine Geschwindigkeit innerhalb $c_1$ und $c_1+dc_1$ und eine

Bewegungsrichtung innerhalb $\varphi_1$ und $\varphi_1+d\varphi_1$, $\lambda_1$ und $\lambda_1+d\lambda_1$ zu erhalten, ist für beide, da von der Größe der Molecüle unabhängig, dieselbe. Die Molecüle erfüllen nun auch Bedingungen von der Art II, beziehungsweise II′. Die Wahrscheinlichkeiten, dass beide nun wieder Bedingungen von der Art III, beziehungsweise III′ erfüllen, sind nach (6) und (8) wieder gleich. Daher sind auch die Wahrscheinlichkeiten, Bedingungen von der Art IV, beziehungsweise IV′ zu erfüllen, gleich. Wir können nun diese wieder als Bedingungen von der Art I, beziehungsweise I′ auffassen und so weiter schließen. Wir können also sagen: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Molecül (1) innerhalb der Zeitelemente $t_1, t_1+dt_1$; $t_2, t_2+dt_2$;...$t_n, t_n+dt_n$ innerhalb der Volumelemente $do_1, do_2, \ldots do_n$ eines Systems anstoße, ist so groß, wie die Wahrscheinlichkeit, dass das Molecül (2) innerhalb der Zeitelemente $\frac{t_1}{\alpha^2}, \frac{t_1+dt_1}{\alpha^2}$; $\frac{t_2}{\alpha^2}, \frac{t_2+dt_2}{\alpha^2}$; ... $\frac{t_n}{\alpha^2}, \frac{t_n+dt_n}{\alpha^2}$ innerhalb der Volumelemente $\frac{do_1}{\alpha^6}, \frac{do_2}{\alpha^6} \ldots \frac{do_n}{\alpha^6}$ eines ähnlichen Systems anstoße, dessen lineare Ausdehnungen zu den entsprechenden des ersteren sich wie $1:\alpha^2$ verhalten. Endlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Molecül (1) in einem Zeitpunkte $T_1$ nach dem letzten in Betracht gezogenen Stoße sich in einem Volumelemente $do_{n+1}$ befinde, so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass das Molecül (2) im Zeitpunkte $\frac{T_1}{\alpha^2}$ sich in einem Volumelemente $\frac{do_{n+1}}{\alpha^6}$ befinde, welches sich zu $do_{n+1}$ so verhält wie $do_1, do_2 \ldots do_n$ zu $\frac{do_1}{\alpha^6}, \frac{do_2}{\alpha^6} \ldots \frac{do_n}{\alpha^6}$. Aus dem Ganzen folgt: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Molecül (1) nach einer Zeit $t$ sich um eine Strecke zwischen $r$ und $r+dr$ vom Ausgangspunkte entfernt, ist ebenso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass das Molecül (2) sich nach der Zeit $\frac{t}{\alpha^2}$ um eine Strecke zwischen $\frac{r}{\alpha^2}$ und $\frac{r+dr}{\alpha^2}$ entfernt. Da also der Ausdruck

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{A}{t}\right)^{\frac{3}{2}} . r^2 . e^{-\frac{A}{t}r^2} . dr$$

ungeändert bleiben soll, wenn statt $r$ $\frac{r}{\alpha^2}$, statt $dr$ $\frac{dr}{\alpha^2}$, statt $t$ $\frac{t}{\alpha^2}$ und in $A$, das ja eine Function von $s$ ist, statt $s$ $\alpha s$ gesetzt wird, so muss $A$ eine Function von der Art sein, dass

$$f(\alpha x) = \alpha^2 . f(x);$$

d. h. es muss $A$ proportional dem Quadrate von $s$ sein. Nehmen wir nun einen Fall (2') an, wo $n^{(2)} = \beta . n^{(1)}$, dagegen $s^{(2)} = s^{(1)}$, $h^{(2)} = h^{(1)}$ und $m^{(2)} = m^{(1)}$ ist, so lässt sich auf demselben Wege zeigen, dass $A$ proportional $n$ ist. Wir können also für $A$ setzen

$$A = \frac{Kns^2}{\bar{c}},$$

wo $K$ für alle Gase dieselbe Constante ist. Darnach ist $A$ direct proportional dem Druck, der Quadratwurzel aus dem Moleculargewicht und dem Quadrate des Durchmessers und verkehrt proportional der $^3/_2$ten Potenz der absoluten Temperatur.

IV. v. Obermayer[1] hat nun Stickoxydul und Kohlensäure, zwei Gase von fast gleichem Moleculargewichte, diffundieren lassen; $L$ war 86·62 *cm*. Bei Versuch (56) war bei 80 Minuten Diffusionszeit, 747·8 *mm* Druck und 10·8° C. der Bruchtheil

| $N_2O$ | $CO_2$ |
|---|---|
| 0·71719 | 0·28609 |
| 0·28359 | 0·71567 |

in der oberen und unteren Hälfte. Bei Versuch (57) war bei 2 Stunden Diffusionszeit, 748·7 *mm* Druck und 10·1° C.

| $N_2O$ | $CO_2$ |
|---|---|
| 0·66018 | 0·34620 |
| 0·34471 | 0·65722. |

Bei Versuch (58) war bei 80 Minuten Diffusionszeit, 754·9 *mm* Druck und 61·5° C.

| $N_2O$ | $CO_2$ |
|---|---|
| 0·66974 | 0·33298 |
| 0·33518 | 0·67016. |

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 81, II, 1880, S. 1122.

Bei Versuch (59) war bei 80 Minuten Diffusionszeit, 754·7 *mm* Druck und 61·5° C.

| $N_2O$ | $CO_2$ |
|---|---|
| 0·66796 | 0·33340 |
| 0·33345 | 0·67160 |

Man kann annehmen, dass diese Beispiele von Diffusion sich angenähert wie solche einer Diffusion in sich selbst verhalten. Aus den Mittelwerten der Angaben des Versuches (56) 0·28370 und 0·71630 fand ich $Kns^2$ für diese beiden Gase, wenn man *cm, gr,* sec als Einheiten wählt, = 93070. Für Versuch (57) fand ich hieraus durch Rechnung 0·3408 und 0·6592 gegenüber den Mittelwerten aus den Versuchszahlen 0·34338 und 0·65662, für die Versuche (58) und (59) 0·3184 und 0·6816 gegenüber 0·33194 und 0·66806.

In derselben Abhandlung von Obermayer finden sich auch die Ergebnisse von Diffusionsversuchen mit Sauerstoff und Stickstoff. Obwohl hier die Moleculargewichte nicht mehr gleich sind, so stimmen dennoch die Versuchsresultate gut mit denen überein, die man erhält, wenn man die Formel (4) anwendet; wahrscheinlich wird hier der aus der Verschiedenheit der Moleculargewichte sich ergebende Unterschied durch einen anderen aufgehoben. Im folgenden gebe ich die Resultate an.

| Versuchs-nummer | Diffusionszeit in Minuten | Druck | Temperatur | Ergebnis des Versuches | Ergebnis der Rechnung |
|---|---|---|---|---|---|
| 68 | 60 | 740·0 | 13·0° C. | 0·34002 | — |
| 70 | 80 | 734·0 | 14·3 | 0·38419 | 0·3834 |
| 71 | 40 | 736·7 | 61·5 | 0·32118 | 0·3153 |
| 82 | 60 | 745·3 | 61·5 | 0·38255 | 0·3739 |

Ich berechnete aus der Angabe des ersten dieser Versuche die übrigen. Es zeigt sich bei allen diesen Versuchen, dass, wenn der Temperaturunterschied, wie bei Versuch (56) und (58), sowie bei (63) und (71), (68) und (82), bedeutend ist, die Angaben des Versuches bei höherer Temperatur größer sind,

als die durch Rechnung aus den Angaben des Versuches bei der niedrigeren Temperatur berechneten Zahlen; sind dagegen die Temperaturunterschiede, wie bei Versuch (56) und (57), sowie bei Versuch (68) und (70) unbedeutend, so ist auch der bezeichnete Unterschied in den Ergebnissen unmerklicher. Nimmt man jedoch an, dass der Durchmesser eines Molecüls bei steigender Temperatur abnimmt, so lassen sich die Unterschiede aufheben; die Größe $A$ wird dann kleiner und die Diffusion geht somit rascher vor sich. Stefan meint,[1] die Verkleinerung des Durchmessers bei steigender Temperatur sei eine scheinbare, indem bei höherer kinetischer Energie sich die Molecüle bis zu kleineren Entfernungen nähern, der Durchmesser also kleiner erscheine. Doch scheint dies bei der Diffusion von keinem Einflusse zu sein, indem es nicht darauf ankommt, wie weit sich die Molecüle nähern, sondern nur darauf, wie viel Molecüle innerhalb der Wirkungssphäre gelangen; je mehr dies geschieht, desto langsamer geht die Diffusion vor sich. Dagegen kann man vielleicht annehmen, dass die Wirkungssphären bei steigender Temperatur kleiner werden, dadurch, dass die Anziehungskräfte zwischen den Atomen eines Molecüls so beschaffen sind, dass sich die Atome bei höherer Temperatur nähern. Diese Annahme würde sich mit den Beobachtungen, die Bädeker[2] über die Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Temperatur gemacht hat, in Übereinstimmung bringen lassen. Derselbe fand nämlich, dass sich aus der Clausius-Mossoti'schen Formel, wenn man sie mit den Versuchen, die er an einer Anzahl von Gasen anstellte, in Übereinstimmung bringen will, ein kleineres leitendes Volumen ergibt. Schließlich kann die Abweichung theilweise auch auf der Wirkung der Cohäsionskräfte beruhen.

Wenn wir nämlich Cohäsionskräfte annehmen, so werden auch Molecüle, welche ohne solche an einem bestimmten Molecüle ohne Stoß vorübergegangen wären, in die Wirkungssphäre dieses Molecüls gelangen und einen Stoß erfahren; der Durchmesser erscheint also größer. Wird nun die kinetische

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 65, 2. Abth., S. 339, 1872.

[2] Zeitschrift für physik. Chemie, 36. Bd., 3. Heft, S. 334, 1901.

Energie der Molecüle größer, so werden weniger Molecüle in die Wirkungssphäre hineingezogen, der Durchmesser erscheint also bei höherer Temperatur kleiner, wenn beidemal Cohäsionskräfte angenommen werden.

Unter der Annahme, dass sich die Molecüle thatsächlich bei steigender Temperatur zusammenziehen, würden sich Contractionen des Volumens eines Molecüls pro 1° C., berechnet aus den Versuchsangaben v. Obermayers und Bädekers, ergeben, die in der nachfolgenden Tabelle enthalten sind.

| Gasart | Contraction pro 1° C. in Procenten | Temperaturintervall | |
|---|---|---|---|
| Stickoxydul $N_2O$ .........<br>Kohlensäure $CO_2$ ......... | 0·2722 | 10·8— 61·5° | Aus der Diffusion |
| Sauerstoff O .............<br>Stickstoff N .............. | aus V. (71) 0·1113<br>aus V. (82) 0·1365 | 13·0— 61·5 | Aus der Diffusion |
| Schweflige Säure $SO_2$....... | 0·2442 | 10·0— 60·0 | Aus der Dielektricitäts-constante |
| Ammoniak $NH_3$............ | 0·3478 | 18·4— 62·1 | Aus der Dielektricitäts-constante |
| Methylalkohol $CH_3OH$...... | 0·3329 | 93·2—149·5 | Aus der Dielektricitäts-constante |
| Äthylalkohol $C_2H_5OH$ ...... | 0·3565 | 112·4—144·8 | Aus der Dielektricitäts-constante |

V. Wir denken uns jetzt statt eines einfachen ideellen Gases ein ideelles Gasgemisch. Jedem Bestandtheile kommt bei bestimmter Temperatur und bestimmtem Drucke ein bestimmtes $A$ zu. Wir können nun so wie in III einen Fall (2) untersuchen, wo die Durchmesser sämmtlicher Molecülgattungen $s_1^{(2)}, s_2^{(2)} \ldots \alpha$mal so groß sind wie die entsprechenden Durchmesser $s_1^{(1)}, s_2^{(1)} \ldots$ im Falle (1). Nur ist statt $n_c \ldots n_{c_1} + \nu_{c_{1(2)}} + \nu_{c_{1(3)}} + \ldots$ zu setzen. Dabei bedeutet z. B.

$$\nu_{c_{1(2)}} = n_2 \left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{hm_2}} \cdot \left[e^{-hm_2c^2} + \frac{2m_2hc+1}{c\sqrt{hm_2}} \int_0^{c\sqrt{hm_2}} e^{-x^2}.dx\right] \ldots (5)$$

(Boltzmann, Gastheorie, I, S. 66) die mittlere Stoßzahl eines Molecüls der ersten Gattung von einer Geschwindigkeit zwischen

$c$ und $c+dc$ mit den Molecülen der zweiten Gattung in der Zeiteinheit. Es ergibt sich, dass z. B. für den Bestandtheil 1 $A_1$ eine Function $f(s_1, s_2 \ldots)$ sein muss, so zwar, dass

$$f(\alpha s_1, \alpha s_2, \ldots) = \alpha^2 . f(s_1, s_2 \ldots).$$

Desgleichen können wir einen Fall (2′) untersuchen, wo die Anzahlen $n_1^{(2)}, n_2^{(2)} \ldots \beta$mal so groß sind, als $n_1^{(1)}, n_2^{(1)} \ldots$. Darnach muss $A$ eine Function $F(n_1, n_2 \ldots)$ sein, so dass

$$F(\beta n_1, \beta n_2 \ldots) = \beta . F(n_1, n_2 \ldots).$$

Aus all dem folgt, dass $A_1$ die Form

$$\frac{1}{\bar{c}_1} [n_1 (a_{11} s_1^2 + a_{12} s_1 s_2 + a_{13} s_1 s_3 + \ldots + a_{22} s_2^2 + a_{23} s_2 s_3 + \ldots) \\ + n_2 (b_{11} s_1^2 + b_{12} s_1 s_2 + b_{13} s_1 s_3 + \ldots) + \ldots]$$

haben muss. Setzt man $n_2 = n_3 = \ldots = 0$, so muss $A_1$ in

$$\frac{Kns^2}{\bar{c}_1}$$

übergehen; also muss

$$a_{11} = K \quad \text{und} \quad a_{12} = a_{13} = \ldots = 0$$

sein. Setzt man $n_3 = n_4 = \ldots = 0$, so muss $A_1$ die Form

$$\frac{1}{\bar{c}_1} [n_1 K s_1^2 + n_2 (b_{11} s_1^2 + b_{12} s_1 s_2 + b_{22} s_2^2)]$$

annehmen, da es von $s_3, s_4 \ldots$ unabhängig sein muss. Die übrigen Coefficienten $b$ müssen sämmtlich Null sein. Ebenso lässt sich zeigen, dass außer $c_{11}, c_{13}, c_{33}, d_{11}, d_{14}, d_{44} \ldots$ sämmtliche übrigen Coefficienten $c, d \ldots$ Null sein müssen. Die Coefficienten $b$ sind Functionen von $\frac{m_1}{m_2}$, die Coefficienten $c$ Functionen von $\frac{m_1}{m_3}$ u. s. f.

VI. Wir nehmen nun speciell an, dass die Molecüle aller Gattungen gleiche Massen haben. Zunächst seien nur zwei Bestandtheile vorhanden. Setzt man $s_1 = s_2$, so muss der Zähler von $A_1$ in $K(n_1+n_2)s_1^2$ übergehen, also muss

$$K = b_{11} + b_{12} + b_{22}.$$

Wir untersuchen nun den ideellen Fall, dass ein Molecül von unendlich kleinem Durchmesser sich unter lauter Molecülen vom Durchmesser $s_2$ bewege, während die Masse des ersteren und der letzteren gleich sind, setzen also $n_1 = 0$, $s_1 = 0$. Der Fall lässt sich dem Falle, wo das betrachtete Molecül auch den Durchmesser $s_2$ hat, ebenso gegenüberstellen, wie in III der Fall (2) dem Falle (1). Nur ist statt Gleichung (6) die Gleichung (5) maßgebend und statt $\alpha^2$ ist überall $\frac{1}{4}$ zu setzen. Es ergibt sich, dass $b_{22} = \frac{K}{4}$ ist.

Ebenso folgt, wenn wir $n_1 = 0$ und $s_2 = 0$ setzen, $b_{11} = \frac{K}{4}$; $b_{12}$ ist also $= \frac{K}{2}$.

Sind mehr Bestandtheile von gleichem Moleculargewichte vorhanden, so erhält man

$$A_1 = \frac{K}{\bar{c}_1}\left[n_1 s_1^2 + n_2\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)^2 + n_3\left(\frac{s_1+s_3}{2}\right)^2 + \ldots\right].$$

---

## Anhang.

Im folgenden seien unter den Molecülen nur solche verstanden, deren Geschwindigkeiten zwischen $c$ und $c+dc$ liegen. Ihre mittlere Stoßzahl in der Zeiteinheit ist

$$n_c = n s^2 . \sqrt{\frac{\pi}{hm}}\left[e^{-hmc^2} + \frac{2mhc+1}{c\sqrt{hm}} \int_0^{c\sqrt{hm}} e^{-x^2} . dx\right] \ldots (6)$$

(Boltzmann, Gastheorie, I, S. 67). Von diesen Molecülen wird nach einer sehr kleinen Zeit $\tau$ der Bruchtheil $n_c . \tau$ einen Stoß erfahren haben, also wird der Bruchtheil $1 - n_c . \tau$ keinen Stoß erfahren haben. Nach der Zeit $2\tau$ werden es $(1 - n_c . \tau)^2$, nach der Zeit $t$ $(1 - n_c . \tau)^{\frac{t}{\tau}}$ sein. Der Grenzwert dieses Ausdruckes für $\lim \tau = 0$ ist aber

$$e^{-t . n_c} = e^{-\frac{\sigma}{c} . n_c}, \qquad \ldots (7)$$

wo $\sigma$ die während der Zeit $t$ zurückgelegte Wegstrecke bedeutet. Dieser Ausdruck stellt die Wahrscheinlichkeit vor, dass

ein Molecül sich während einer Zeit $t$ fortbewege, ohne anzustoßen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molecül eine Zeit zwischen $t$ und $t+dt$, von einem bestimmten Zeitpunkte ab gerechnet, bis zum nächstfolgenden Stoß brauche, ist

$$e^{-t.n_c}.n_c.dt = e^{-\frac{\sigma}{c}.n_c}.n_c.\frac{d\sigma}{c}. \qquad \ldots (8)$$

Das Mittel der dabei zurückgelegten Wege ist $\frac{c}{n_c}$.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle einige mit den vorstehenden eng verwandte Begriffe zu erläutern. Die Wahrscheinlichkeit, vor einem Zeitpunkte eine Strecke zwischen $\sigma$ und $\sigma+d\sigma$ und nach demselben eine Strecke zwischen $\sigma'$ und $\sigma'+d\sigma'$ vom nächstvorhergehenden, beziehungsweise bis zum nächstfolgenden Stoße zurückzulegen, ist

$$e^{-\frac{\sigma}{c}.n_c}.\frac{n_c}{c}.d\sigma.e^{-\frac{\sigma'}{c}.n_c}.\frac{n_c}{c}.d\sigma' = e^{-\frac{n_c}{c}(\sigma+\sigma')}.\frac{n_c^2}{c^2}.d\sigma.d\sigma'. \ldots (9)$$

Sie ist bis auf unendlich Kleines höherer Ordnung gleich der Wahrscheinlichkeit, von dem diesem Zeitpunkte vorhergehenden Stoße bis zu diesem Zeitpunkte eine Strecke zwischen $\sigma$ und $\sigma+d\sigma$, und von diesem Stoße bis zum nächstfolgenden eine Strecke zwischen $\sigma+\sigma'$ und $\sigma+\sigma'+d\sigma'$ zurückzulegen. Integriert man, wenn $l = \sigma+\sigma'$ und $dl = d\sigma'$ gesetzt wird, obigen Ausdruck nach $\sigma$ von $\sigma = 0$ bis $\sigma = l$, so erhält man

$$\int_{\sigma=0}^{\sigma=l} e^{-\frac{\sigma}{c}.l}.\frac{n_c^2}{c^2}.l.dl = e^{-l.\frac{n_c}{c}}.l.dl.\frac{n_c^2}{c^2} \qquad \ldots (10)$$

als Wahrscheinlichkeit, in einem Zeitpunkte ein Molecül anzutreffen, welches eben eine Strecke zwischen $l$ und $l+dl$ vom vorhergehenden bis zum nächstfolgenden Stoße zurückzulegen im Begriffe ist. Das Mittel dieser Wege ist $2\frac{c}{n_c}$.

Bezeichnet $\varphi(l).dl$ die Wahrscheinlichkeit eines Weges zwischen $l$ und $l+dl$ von den Wegen, die von den früher bezeichneten Molecülen während der Zeiteinheit zurückgelegt werden, so ist

$$\frac{l \, . \, n_c \, . \, \varphi(l) \, . \, dl}{c}$$

die vorhergenannte Wahrscheinlichkeit (10), so dass

$$\frac{n_c}{c} \, . \, l \, . \, \varphi(l) \, . \, dl = \frac{n_c^2}{c^2} \, . \, l \, . \, e^{-l \frac{n_c}{c}} \, . \, dl$$

und

$$\varphi(l) \, . \, dl = \frac{n_c}{c} \, . \, e^{-l \, . \frac{n_c}{c}} \, . \, dl. \qquad \ldots (11)$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist also gleich der Wahrscheinlichkeit (8).

# Empirische Untersuchung über den Verlauf der zahlentheoretischen Function $\sigma(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \mu(x)$ im Intervalle von 150000 bis 500000

von

**Dr. R. Daublebsky v. Sterneck,**
*Privatdocent in Wien.*

(Mit 1 Tafel.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Juni 1901.)**

Die folgende Arbeit schließt sich als unmittelbare Fortsetzung an die von mir im Jahre 1897 veröffentlichte Abhandlung[1] an, in welcher der Verlauf der Function $\sigma(n)$[2] im Intervalle von 0 bis 150000 untersucht wurde. In dem genannten Intervalle hat sich das Gesetz

$$|\sigma(n)| < \sqrt{n},$$

dessen allgemeiner Beweis bisher noch immer nicht erbracht werden konnte, als strenge richtig erwiesen, ja es konnte sogar, von einigen Stellen in der Umgebung von $n = 200$ abgesehen, das Gesetz

$$|\sigma(n)| < \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

in dem untersuchten Intervalle als allgemein giltig nachgewiesen werden.

Um nun das empirische Materiale möglichst umfassend zu gestalten, habe ich mich entschlossen, das Verhalten der

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 106, Abth. IIa, S. 835.

[2] Die Function $\mu(n)$, durch deren Summierung $\sigma(n)$ entsteht, ist gleich 0, wenn $n$ durch das Quadrat irgendeiner Primzahl theilbar ist, sonst gleich $(-1)^{\nu}$, wenn $\nu$ verschiedene Primzahlen in $n$ aufgehen.

Function $\sigma(n)$ bis zur Grenze 500000 zu untersuchen, und hat mir die hohe kaiserliche Akademie der Wissenschaften für diesen Zweck eine Subvention zur Entlohnung eines Rechners bewilligt.

Die Resultate dieser Untersuchung sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben, allerdings nur auszugsweise, indem nur jeder 50. Functionswert $\sigma(n)$ in die Tabelle aufgenommen wurde; die Benützung derselben wird dadurch allerdings etwas erschwert, da man, um einen bestimmten Functionswert $\sigma(n)$ mit Hilfe der Tabelle zu finden, die Werte $\mu(n)$ für die zwischen $n$ und dem nächstgelegenen Vielfachen von 50 liegenden Argumente sämmtlich erst berechnen muss; es konnte aber wegen des ungeheuren Umfanges der Tabelle an einen vollständigen Abdruck derselben nicht gedacht werden.

Bei der Herstellung[1] der Werte $\mu(n)$, beziehungsweise $\sigma(n)$ wurde vollständig nach der bereits früher verwendeten Methode verfahren und kann in dieser Hinsicht auf die Einleitung zu der genannten, das Intervall von 0 bis 150000 betreffenden Arbeit verwiesen werden. Die ganze Tabelle wurde wieder unabhängig in zwei Exemplaren hergestellt, durch deren Vergleichung die entstandenen Fehler richtiggestellt werden konnten. Immerhin blieben aber auch nach Vergleichung der beiden Exemplare einige Fehler in der Tabelle zurück, welche, wie sich zeigte, in Druckfehlern im Chernac'schen »Cribrum arithmeticum« ihre Ursache hatten, und zu deren Behebung sehr umfangreiche Controlrechnungen erforderlich waren, über welche hier einige Bemerkungen gestattet seien.

Vor allem wurden nach der Formel

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(n)+\sigma\left(\frac{n}{2}\right)+\ldots+\sigma\left(\frac{n}{g}\right) \\ \quad +\mu(1)\left[\frac{n}{1}\right]+\mu(2)\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\mu(g)\left[\frac{n}{g}\right] \\ \quad -g\sigma(g) \end{array}\right\} = 1,$$

[1] Bei der Durchführung der Arbeit leistete mir Herr Josef Allmayer, der mir auch beim I. Theile derselben behilflich gewesen war, wieder ausgezeichnete Dienste. Seinem ausdauernden Fleiße habe ich es vor allem zu danken, dass die ungeheure Rechenarbeit überhaupt bewältigt werden konnte.

in welcher $g = [\sqrt{n}\,]$ gesetzt ist, folgende Functionswerte ermittelt:

$$\begin{aligned}
\sigma(200000) &= -\ \ 1\\
\sigma(220000) &= -\ 30\\
\sigma(240000) &= -\ 24\\
\sigma(250000) &= -\ 39\\
\sigma(280000) &= +\ 48\\
\sigma(300000) &= +220\\
\sigma(400000) &= +\ \ 9\\
\sigma(440000) &= -\ \ 6\\
\sigma(480000) &= +\ 45\\
\sigma(500000) &= -\ \ 6.
\end{aligned}$$

Um ferner zu constatieren, ob $\sigma(n)$ an einer bestimmten Stelle gerade oder ungerade ist, wurde die Formel verwendet

$$\sigma(n) \equiv \sum_{k=1}^{k=g} \mu^2(k) \left[\frac{n}{k^2}\right] \qquad (\text{mod. } 2).$$

Zeigte sich nun Modulo 2 ein Widerspruch zwischen der Tabelle der Werte $\sigma(n)$ und dem nach dieser Formel erhaltenen Resultate, so konnte die Stelle, an welcher sich der unrichtige Wert $\mu(n)$ befinden musste, durch wiederholte Anwendung der eben genannten Formel in immer engere Grenzen eingeschlossen werden, was endlich zur Auffindung der betreffenden Stelle führen musste. Auf diese Weise constatierte ich die beiden folgenden unrichtigen Zerlegungen in Chernac's Cribrum:

$$\begin{aligned}
469273 &= 7.7.61.157, \quad \text{nicht } = 7.61.157,\\
494543 &= 7.31.43.53, \quad \text{nicht } = 7.31.53.53.
\end{aligned}$$

Endlich machte ich zum Zwecke von Controlrechnungen noch von folgender Bemerkung Gebrauch: Ist $n$ durch keine 3. Potenz (außer 1) theilbar, so besteht offenbar die Beziehung

$$\mu(n) \equiv \psi_0(n) \quad (\text{mod. } 3),$$

wobei $\psi_0(n)$ die Anzahl der Theiler von $n$ bedeutet; denn besteht $n$ aus $\alpha$ verschiedenen Primfactoren, so ist $\mu(n) = (-1)^\alpha$ und $\psi_0(n) = 2^\alpha$, also $\mu(n) \equiv \psi_0(n)$ (mod. 3); hat aber $n$

mindestens einen quadratischen Primfactor, so ist $\mu(n) = 0$ und $\psi_0(n) \equiv 0$ (mod. 3). Es besteht also die Beziehung:

$$\sigma(n) \equiv \Sigma\psi_0(k) \quad (\text{mod. } 3),$$

wobei $k$ alle Zahlen des Intervalls $1 \ldots n$ zu durchlaufen hat, welche durch keine 3. Potenz (außer 1) theilbar sind.

Bedeutet nun $i$ irgendeine ganze Zahl, so ist

$$\sigma\left(\frac{n}{i^3}\right) \equiv \Sigma\psi_0(k) \quad (\text{mod. } 3),$$

wobei $k$ alle Zahlen des Intervalls $1 \ldots \frac{n}{i^3}$ zu durchlaufen hat, welche durch keine dritte Potenz theilbar sind; es ist nun aber offenbar

$$\psi_0(k) \equiv \psi_0(i^3 k) \quad (\text{mod. } 3)$$

und daher

$$\sigma\left(\frac{n}{i^3}\right) \equiv \Sigma\psi_0(i^3 k) \quad (\text{mod. } 3),$$

wobei jetzt $i^3 k$ alle Zahlen des Intervalls $1 \ldots n$ zu durchlaufen hat, welche genau durch die dritte Potenz $i^3$ theilbar sind.

Hieraus folgt durch Summierung über $i$:

$$\sigma(n) + \sigma\left(\frac{n}{2^3}\right) + \sigma\left(\frac{n}{3^3}\right) + \sigma\left(\frac{n}{4^3}\right) + \ldots \equiv \sum_{k=1}^{k=n} \psi_0(k) \quad (\text{mod. } 3).$$

Für die rechte Seite haben wir aber die bekannten Umformungen:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi_0(k) = \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{n}{k}\right] = 2\sum_{k=1}^{k=g} \left[\frac{n}{k}\right] - g^2,$$

wobei $g = [\sqrt{n}\,]$ ist.

Es ist nun nicht allzu umständlich, den Wert der rechten Seite zu berechnen, und man erhält somit eine Congruenz Modulo 3, welche $\sigma(n)$ mit den Functionswerten

$$\sigma\left(\frac{n}{2^3}\right),\ \sigma\left(\frac{n}{3^3}\right), \ldots$$

in Beziehung setzt. Eine solche Congruenz mod. 3 für $\sigma(n)$ genügt aber in den meisten Fällen als Controle, da es sich ja immer nur um einzelne fragliche Einheiten handelt.

Nach Durchführung aller dieser Controlrechnungen stellte sich die vollständige Richtigkeit der in der Tabelle enthaltenen Werte $\sigma(n)$ bis zur Zahl $n = 440000$ heraus. Die Probe für 480000 ergab jedoch eine Abweichung von $+4$ Einheiten von der Tabelle. Es schien mir nicht lohnend zu sein, an die sehr mühsame Eruierung der dieser Abweichung zugrunde liegenden Druckfehler des »Cribrum arithmeticum« zu schreiten, sondern ich begnügte mich damit, die Functionswerte zwischen 440000 und 480000 sämmtlich um 2 Einheiten zu vergrößern, so dass also die jetzt in der Tabelle stehenden Functionswerte dieses Intervalles eventuell einer Correction von $\pm 2$ Einheiten zu ihrer Richtigstellung bedürfen, was auch an der betreffenden Stelle der Tabelle durch eine Anmerkung ersichtlich gemacht wurde. Die Functionswerte für die Argumente von 480000 bis 500000 sind dann wieder vollständig richtig, da bei 480000 vom richtigen Functionswert ausgegangen wurde.

Was nun die extremen Werte der Function $\sigma(n)$ im Intervalle von 150000 bis 500000 betrifft, so zeigt sich, dass diese dem absoluten Betrage nach die entsprechenden Werte $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ nicht erreichen, so dass das Gesetz

$$|\sigma(n)| < \frac{1}{2}\sqrt{n}$$

(von der erwähnten Ausnahme in der Umgebung der Stelle $n = 200$ abgesehen) in der ersten Hälfte der ersten Million strenge richtig ist. Es seien hier wieder die auffallendsten Maxima und Minima[1] der Function $\sigma(n)$ in ihrem Verhältnisse zu $\sqrt{n}$ besonders angeführt:

$$\frac{\sigma(169730)}{\sqrt{169730}} = +\frac{121}{\sqrt{169730}} = +0\cdot 29,$$

$$\frac{\sigma(230399)}{\sqrt{230399}} = -\frac{154}{\sqrt{230399}} = -0\cdot 32,$$

---

[1] In der gekürzten Tabelle finden sich diese einzelnen Werte natürlich nicht vor.

$$\frac{\sigma(300551)}{\sqrt{300551}} = +\frac{240}{\sqrt{300551}} = +0\cdot44,$$

$$\frac{\sigma(355733)}{\sqrt{355733}} = -\frac{260}{\sqrt{355733}} = -0\cdot44,$$

$$\frac{\sigma(463139)}{\sqrt{463139}} = +\frac{242\,(\pm 2)}{\sqrt{463139}} = +0\cdot35.$$

Die fast vollständige Constanz dieser Verhältniszahlen und deren Übereinstimmung mit den im Intervalle von 0 bis 150000 vorgefundenen analogen Werten[1] ist zweifellos eine auffallende und sehr beachtenswerte Erscheinung.

Am Schlusse der Arbeit findet man wieder eine graphische Darstellung des Verlaufes der Function $\sigma(n)$. Es schien vortheilhaft, in diese Tafel das ganze Intervall von 0 bis 500000 aufzunehmen. Natürlich musste auf die Wiedergabe des Details der Curve dabei vollständig verzichtet werden. Zur Herstellung der Curve wurden die sämmtlichen Functionswerte von 50 zu 50 Einheiten verwendet; doch wurden immer 10 aufeinanderfolgende derartige Functionswerte durch einen einzigen Punkt der Curve repräsentiert, und zwar, damit möglichst alle Schwankungen zur Geltung kommen, durch den extremsten Wert (dem absoluten Betrage nach größten mit dem betreffenden Zeichen), der sich unter den bezüglichen 10 Functionswerten vorfand.[2] Durch dieses Verfahren dürfte die Curve ein ziemlich richtiges Bild von dem Verlaufe der Function $\sigma(n)$ geben Zum Vergleiche wurde die Curve $\pm\frac{1}{2}\sqrt{n}$ eingezeichnet.[3]

---

[1] A. a. O., S. 837 und 838.

[2] Es stellt daher z. B. der Ordinatenwert an der Stelle 432000 nicht etwa den Functionswert $\sigma(432000)$, sondern den extremsten der Functionswerte $\sigma$ für die Argumente 431550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 432000 dar.

[3] In der Tabelle der Werte $\sigma(n)$ von 0 bis 150.000 hat sich nachträglich eine kleine Unrichtigkeit herausgestellt, die ich hiemit corrigiere. Die in der Tabelle stehenden Functionswerte für die Argumente:

106.550, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67

sind durch die folgenden richtigen Werte zu ersetzen:

– 27, –27, –27, –26, –27, –28, –28, –29, –28, –29, –29, –30, –29, –28, –28, –27, –28, –27

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150000 | — 50 | 152000 | — 60 | 154000 | — 95 | 156000 | — 59 |
| 050 | — 47 | 050 | — 65 | 050 | — 93 | 050 | — 65 |
| 100 | — 47 | 100 | — 74 | 100 | — 96 | 100 | — 61 |
| 150 | — 52 | 150 | — 76 | 150 | — 99 | 150 | — 59 |
| 200 | — 55 | 200 | — 74 | 200 | — 96 | 200 | — 54 |
| 250 | — 62 | 250 | — 78 | 250 | —103 | 250 | — 55 |
| 300 | — 59 | 300 | — 78 | 300 | —100 | 300 | — 60 |
| 350 | — 69 | 350 | — 75 | 350 | —100 | 350 | — 56 |
| 400 | — 66 | 400 | — 80 | 400 | — 95 | 400 | — 54 |
| 450 | — 66 | 450 | — 87 | 450 | — 93 | 450 | — 52 |
| 500 | — 51 | 500 | — 83 | 500 | — 87 | 500 | — 50 |
| 550 | — 48 | 550 | — 78 | 550 | — 84 | 550 | — 44 |
| 600 | — 51 | 600 | — 74 | 600 | — 87 | 600 | — 39 |
| 650 | — 47 | 650 | — 81 | 650 | — 87 | 650 | — 37 |
| 700 | — 39 | 700 | — 83 | 700 | — 88 | 700 | — 41 |
| 750 | — 41 | 750 | — 85 | 750 | — 81 | 750 | — 43 |
| 800 | — 40 | 800 | — 88 | 800 | — 86 | 800 | — 49 |
| 850 | — 40 | 850 | — 97 | 850 | — 90 | 850 | — 54 |
| 900 | — 40 | 900 | — 95 | 900 | — 91 | 900 | — 57 |
| 950 | — 39 | 950 | — 98 | 950 | — 89 | 950 | — 52 |
| 151000 | — 39 | 153000 | — 98 | 155000 | — 85 | 157000 | — 54 |
| 050 | — 37 | 050 | — 91 | 050 | — 83 | 050 | — 55 |
| 100 | — 32 | 100 | — 96 | 100 | — 80 | 100 | — 53 |
| 150 | — 23 | 150 | —100 | 150 | — 68 | 150 | — 53 |
| 200 | — 28 | 200 | — 90 | 200 | — 64 | 200 | — 52 |
| 250 | — 28 | 250 | — 90 | 250 | — 70 | 250 | — 59 |
| 300 | — 22 | 300 | — 93 | 300 | — 75 | 300 | — 66 |
| 350 | — 26 | 350 | — 99 | 350 | — 75 | 350 | — 69 |
| 400 | — 24 | 400 | — 96 | 400 | — 70 | 400 | — 58 |
| 450 | — 28 | 450 | —100 | 450 | — 75 | 450 | — 67 |
| 500 | — 35 | 500 | —102 | 500 | — 55 | 500 | — 80 |
| 550 | — 37 | 550 | — 99 | 550 | — 65 | 550 | — 79 |
| 600 | — 40 | 600 | — 94 | 600 | — 68 | 600 | — 74 |
| 650 | — 41 | 650 | —101 | 650 | — 63 | 650 | — 74 |
| 700 | — 48 | 700 | — 93 | 700 | — 67 | 700 | — 70 |
| 750 | — 53 | 750 | — 99 | 750 | — 62 | 750 | — 64 |
| 800 | — 49 | 800 | —100 | 800 | — 62 | 800 | — 58 |
| 850 | — 56 | 850 | — 96 | 850 | — 72 | 850 | — 56 |
| 900 | — 57 | 900 | — 96 | 900 | — 82 | 900 | — 64 |
| 950 | — 62 | 950 | —100 | 950 | — 72 | 956 | — 68 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 158000 | — 68 | 160000 | — 67 | 162000 | — 43 | 164000 | + 11 |
| 050 | — 75 | 050 | — 65 | 050 | — 33 | 050 | + 23 |
| 100 | — 73 | 100 | — 66 | 100 | — 32 | 100 | + 18 |
| 150 | — 70 | 150 | — 58 | 150 | — 19 | 150 | + 19 |
| 200 | — 72 | 200 | — 58 | 200 | — 7 | 200 | + 19 |
| 250 | — 76 | 250 | — 60 | 250 | — 3 | 250 | + 9 |
| 300 | — 68 | 300 | — 50 | 300 | — 12 | 300 | + 11 |
| 350 | — 69 | 350 | — 45 | 350 | — 2 | 350 | + 17 |
| 400 | — 75 | 400 | — 49 | 400 | + 2 | 400 | + 14 |
| 450 | — 79 | 450 | — 46 | 450 | — 2 | 450 | + 8 |
| 500 | — 70 | 500 | — 39 | 500 | — 8 | 500 | + 13 |
| 550 | — 74 | 550 | — 35 | 550 | — 12 | 550 | + 14 |
| 600 | — 80 | 600 | — 39 | 600 | — 8 | 600 | + 17 |
| 650 | — 79 | 650 | — 48 | 650 | — 15 | 650 | + 15 |
| 700 | — 69 | 700 | — 57 | 700 | — 18 | 700 | + 17 |
| 750 | — 68 | 750 | — 56 | 750 | — 21 | 750 | + 17 |
| 800 | — 68 | 800 | — 59 | 800 | — 29 | 800 | + 19 |
| 850 | — 67 | 850 | — 58 | 850 | — 28 | 850 | + 23 |
| 900 | — 65 | 900 | — 55 | 900 | — 32 | 900 | + 23 |
| 950 | — 64 | 950 | — 55 | 950 | — 30 | 950 | + 31 |
| 159000 | — 62 | 161000 | — 55 | 163000 | — 29 | 165000 | + 37 |
| 050 | — 63 | 050 | — 58 | 050 | — 27 | 050 | + 40 |
| 100 | — 65 | 100 | — 57 | 100 | — 16 | 100 | + 43 |
| 150 | — 57 | 150 | — 55 | 150 | — 2 | 150 | + 49 |
| 200 | — 59 | 200 | — 51 | 200 | — 11 | 200 | + 54 |
| 250 | — 66 | 250 | — 53 | 250 | — 9 | 250 | + 54 |
| 300 | — 57 | 300 | — 54 | 300 | + 1 | 300 | + 51 |
| 350 | — 55 | 350 | — 58 | 350 | + 6 | 350 | + 55 |
| 400 | — 47 | 400 | — 49 | 400 | + 8 | 400 | + 48 |
| 450 | — 52 | 450 | — 48 | 450 | + 4 | 450 | + 56 |
| 500 | — 51 | 500 | — 39 | 500 | + 5 | 500 | + 51 |
| 550 | — 55 | 550 | — 37 | 550 | + 15 | 550 | + 39 |
| 600 | — 64 | 600 | — 41 | 600 | + 18 | 600 | + 38 |
| 650 | — 61 | 650 | — 38 | 650 | + 2 | 650 | + 45 |
| 700 | — 67 | 700 | — 33 | 700 | — 1 | 700 | + 46 |
| 750 | — 67 | 750 | — 39 | 750 | + 8 | 750 | + 43 |
| 800 | — 72 | 800 | — 44 | 800 | + 4 | 800 | + 50 |
| 850 | — 71 | 850 | — 39 | 850 | + 3 | 850 | + 49 |
| 900 | — 74 | 900 | — 35 | 900 | + 3 | 900 | + 46 |
| 950 | — 79 | 950 | — 36 | 950 | + 16 | 950 | + 43 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 166000 | + 44 | 168000 | + 59 | 170000 | + 98 | 172000 | + 87 |
| 050 | + 40 | 050 | + 67 | 050 | + 95 | 050 | + 85 |
| 100 | + 40 | 100 | + 68 | 100 | +100 | 100 | + 72 |
| 150 | + 48 | 150 | + 80 | 150 | + 97 | 150 | + 78 |
| 200 | + 41 | 200 | + 76 | 200 | +100 | 200 | + 84 |
| 250 | + 45 | 250 | + 76 | 250 | + 97 | 250 | + 84 |
| 300 | + 36 | 300 | + 74 | 300 | + 90 | 300 | + 86 |
| 350 | + 38 | 350 | + 70 | 350 | + 92 | 350 | + 82 |
| 400 | + 29 | 400 | + 78 | 400 | + 87 | 400 | + 83 |
| 450 | + 33 | 450 | + 84 | 450 | + 88 | 450 | + 82 |
| 500 | + 39 | 500 | + 79 | 500 | + 90 | 500 | + 87 |
| 550 | + 46 | 550 | + 77 | 550 | + 90 | 550 | + 84 |
| 600 | + 42 | 600 | + 81 | 600 | + 88 | 600 | + 79 |
| 650 | + 35 | 650 | + 90 | 650 | + 86 | 650 | + 81 |
| 700 | + 32 | 700 | + 95 | 700 | + 89 | 700 | + 85 |
| 750 | + 35 | 750 | + 94 | 750 | + 87 | 750 | + 89 |
| 800 | + 35 | 800 | + 99 | 800 | +101 | 800 | + 90 |
| 850 | + 33 | 850 | +110 | 850 | + 91 | 850 | + 88 |
| 900 | + 37 | 900 | +103 | 900 | + 97 | 900 | + 84 |
| 950 | + 36 | 950 | +111 | 950 | +102 | 950 | + 78 |
| 167000 | + 42 | 169000 | +114 | 171000 | +101 | 173000 | + 79 |
| 050 | + 27 | 050 | +116 | 050 | + 98 | 050 | + 80 |
| 100 | + 22 | 100 | +112 | 100 | + 94 | 100 | + 88 |
| 150 | + 27 | 150 | +119 | 150 | +100 | 150 | + 85 |
| 200 | + 32 | 200 | +118 | 200 | +102 | 200 | + 84 |
| 250 | + 36 | 250 | +111 | 250 | +103 | 250 | + 86 |
| 300 | + 37 | 300 | +116 | 300 | +104 | 300 | + 80 |
| 350 | + 36 | 350 | +107 | 350 | +115 | 350 | + 76 |
| 400 | + 43 | 400 | +108 | 400 | +116 | 400 | + 90 |
| 450 | + 42 | 450 | +112 | 450 | +115 | 450 | + 98 |
| 500 | + 33 | 500 | +109 | 500 | +114 | 500 | + 93 |
| 550 | + 37 | 550 | +115 | 550 | +105 | 550 | + 90 |
| 600 | + 37 | 600 | +118 | 600 | +103 | 600 | + 89 |
| 650 | + 29 | 650 | +119 | 650 | +103 | 650 | + 93 |
| 700 | + 31 | 700 | +113 | 700 | + 96 | 700 | + 96 |
| 750 | + 34 | 750 | +121 | 750 | + 85 | 750 | + 91 |
| 800 | + 34 | 800 | +107 | 800 | + 85 | 800 | + 88 |
| 850 | + 52 | 850 | +100 | 850 | + 95 | 850 | + 87 |
| 900 | + 46 | 900 | + 97 | 900 | + 83 | 900 | + 84 |
| 950 | + 58 | 950 | + 92 | 950 | + 80 | 950 | + 81 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 174000 | + 86 | 176000 | + 96 | 178000 | + 67 | 180000 | + 39 |
| 050 | + 84 | 050 | +101 | 050 | + 69 | 050 | + 47 |
| 100 | + 78 | 100 | + 96 | 100 | + 77 | 100 | + 40 |
| 150 | + 70 | 150 | + 99 | 150 | + 88 | 150 | + 52 |
| 200 | + 65 | 200 | + 91 | 200 | + 89 | 200 | + 62 |
| 250 | + 73 | 250 | + 80 | 250 | + 94 | 250 | + 66 |
| 300 | + 75 | 300 | + 83 | 300 | + 92 | 300 | + 60 |
| 350 | + 72 | 350 | + 67 | 350 | + 90 | 350 | + 65 |
| 400 | + 74 | 400 | + 70 | 400 | + 86 | 400 | + 63 |
| 450 | + 77 | 450 | + 64 | 450 | + 82 | 450 | + 67 |
| 500 | + 76 | 500 | + 56 | 500 | + 89 | 500 | + 78 |
| 550 | + 75 | 550 | + 49 | 550 | + 88 | 550 | + 70 |
| 600 | + 82 | 600 | + 43 | 600 | + 80 | 600 | + 69 |
| 650 | + 83 | 650 | + 44 | 650 | + 78 | 650 | + 68 |
| 700 | + 85 | 700 | + 44 | 700 | + 81 | 700 | + 62 |
| 750 | + 80 | 750 | + 43 | 750 | + 84 | 750 | + 63 |
| 800 | + 80 | 800 | + 43 | 800 | + 84 | 800 | + 71 |
| 850 | + 82 | 850 | + 47 | 850 | + 75 | 850 | + 66 |
| 900 | + 82 | 900 | + 44 | 900 | + 80 | 900 | + 71 |
| 950 | + 74 | 950 | + 39 | 950 | + 73 | 950 | + 70 |
| 175000 | + 72 | 177000 | + 41 | 179000 | + 77 | 181000 | + 71 |
| 050 | + 76 | 050 | + 47 | 050 | + 80 | 050 | + 71 |
| 100 | + 78 | 100 | + 51 | 100 | + 79 | 100 | + 71 |
| 150 | + 82 | 150 | + 51 | 150 | + 73 | 150 | + 76 |
| 200 | + 90 | 200 | + 51 | 200 | + 81 | 200 | + 74 |
| 250 | + 90 | 250 | + 55 | 250 | + 78 | 250 | + 71 |
| 300 | +103 | 300 | + 56 | 300 | + 72 | 300 | + 74 |
| 350 | +105 | 350 | + 61 | 350 | + 83 | 350 | + 72 |
| 400 | +109 | 400 | + 53 | 400 | + 83 | 400 | + 76 |
| 450 | +102 | 450 | + 51 | 450 | + 76 | 450 | + 73 |
| 500 | +105 | 500 | + 48 | 500 | + 72 | 500 | + 75 |
| 550 | +113 | 550 | + 53 | 550 | + 68 | 550 | + 69 |
| 600 | +118 | 600 | + 53 | 600 | + 62 | 600 | + 70 |
| 650 | +117 | 650 | + 66 | 650 | + 62 | 650 | + 61 |
| 700 | +108 | 700 | + 65 | 700 | + 55 | 700 | + 64 |
| 750 | +104 | 750 | + 75 | 750 | + 50 | 750 | + 61 |
| 800 | +106 | 800 | + 68 | 800 | + 52 | 800 | + 53 |
| 850 | +112 | 850 | + 75 | 850 | + 43 | 850 | + 58 |
| 900 | +105 | 900 | + 76 | 900 | + 40 | 900 | + 57 |
| 950 | +104 | 950 | + 73 | 950 | + 40 | 950 | + 51 |

| *n* | σ(*n*) | *n* | σ(*n*) | *n* | σ(*n*) | *n* | σ(*n*) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 182000 | + 55 | 184000 | + 29 | 186000 | + 30 | 188000 | + 31 |
| 050 | + 54 | 050 | + 24 | 050 | + 22 | 050 | + 32 |
| 100 | + 55 | 100 | + 25 | 100 | + 28 | 100 | + 43 |
| 150 | + 44 | 150 | + 23 | 150 | + 27 | 150 | + 43 |
| 200 | + 44 | 200 | + 22 | 200 | + 21 | 200 | + 45 |
| 250 | + 40 | 250 | + 31 | 250 | + 23 | 250 | + 50 |
| 300 | + 52 | 300 | + 20 | 300 | + 30 | 300 | + 47 |
| 350 | + 55 | 350 | + 19 | 350 | + 25 | 350 | + 46 |
| 400 | + 54 | 400 | + 33 | 400 | + 32 | 400 | + 34 |
| 450 | + 50 | 450 | + 42 | 450 | + 37 | 450 | + 28 |
| 500 | + 52 | 500 | + 43 | 500 | + 40 | 500 | + 34 |
| 550 | + 40 | 550 | + 42 | 550 | + 53 | 550 | + 39 |
| 600 | + 36 | 600 | + 38 | 600 | + 51 | 600 | + 44 |
| 650 | + 34 | 650 | + 43 | 650 | + 55 | 650 | + 44 |
| 700 | + 30 | 700 | + 49 | 700 | + 51 | 700 | + 37 |
| 750 | + 36 | 750 | + 52 | 750 | + 37 | 750 | + 40 |
| 800 | + 52 | 800 | + 61 | 800 | + 39 | 800 | + 44 |
| 850 | + 61 | 850 | + 55 | 850 | + 44 | 850 | + 39 |
| 900 | + 57 | 900 | + 55 | 900 | + 49 | 900 | + 37 |
| 950 | + 66 | 950 | + 55 | 950 | + 50 | 950 | + 36 |
| 183000 | + 65 | 185000 | + 59 | 187000 | + 53 | 189000 | + 37 |
| 050 | + 59 | 050 | + 58 | 050 | + 53 | 050 | + 39 |
| 100 | + 56 | 100 | + 54 | 100 | + 52 | 100 | + 55 |
| 150 | + 67 | 150 | + 55 | 150 | + 46 | 150 | + 56 |
| 200 | + 71 | 200 | + 55 | 200 | + 39 | 200 | + 49 |
| 250 | + 64 | 250 | + 47 | 250 | + 41 | 250 | + 51 |
| 300 | + 58 | 300 | + 54 | 300 | + 40 | 300 | + 55 |
| 350 | + 46 | 350 | + 48 | 350 | + 30 | 350 | + 54 |
| 400 | + 41 | 400 | + 45 | 400 | + 21 | 400 | + 55 |
| 450 | + 40 | 450 | + 47 | 450 | + 22 | 450 | + 53 |
| 500 | + 35 | 500 | + 39 | 500 | + 20 | 500 | + 46 |
| 550 | + 33 | 550 | + 40 | 550 | + 20 | 550 | + 46 |
| 600 | + 23 | 600 | + 45 | 600 | + 13 | 600 | + 45 |
| 650 | + 36 | 650 | + 37 | 650 | + 18 | 650 | + 43 |
| 700 | + 30 | 700 | + 31 | 700 | + 11 | 700 | + 39 |
| 750 | + 40 | 750 | + 30 | 750 | + 16 | 750 | + 34 |
| 800 | + 34 | 800 | + 26 | 800 | + 15 | 800 | + 38 |
| 850 | + 31 | 850 | + 21 | 850 | + 30 | 850 | + 31 |
| 900 | + 33 | 900 | + 23 | 900 | + 33 | 900 | + 28 |
| 950 | + 36 | 950 | + 25 | 950 | + 30 | 950 | + 25 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 190000 | + 28 | 192000 | + 89 | 194000 | + 19 | 196000 | — 5 |
| 050 | + 34 | 050 | + 87 | 050 | + 18 | 050 | — 10 |
| 100 | + 33 | 100 | + 73 | 100 | + 17 | 100 | — 6 |
| 150 | + 28 | 150 | + 70 | 150 | + 7 | 150 | — 3 |
| 200 | + 40 | 200 | + 70 | 200 | + 2 | 200 | — 11 |
| 250 | + 42 | 250 | + 58 | 250 | + 7 | 250 | — 5 |
| 300 | + 45 | 300 | + 55 | 300 | + 2 | 300 | — 1 |
| 350 | + 42 | 350 | + 48 | 350 | + 15 | 350 | — 1 |
| 400 | + 39 | 400 | + 49 | 400 | + 17 | 400 | + 10 |
| 450 | + 45 | 450 | + 54 | 450 | + 18 | 450 | + 12 |
| 500 | + 60 | 500 | + 54 | 500 | + 16 | 500 | + 9 |
| 550 | + 62 | 550 | + 55 | 550 | + 15 | 550 | + 3 |
| 600 | + 56 | 600 | + 51 | 600 | + 13 | 600 | + 3 |
| 650 | + 58 | 650 | + 48 | 650 | + 15 | 650 | + 4 |
| 700 | + 62 | 700 | + 53 | 700 | + 15 | 700 | 0 |
| 750 | + 57 | 750 | + 49 | 750 | + 6 | 750 | — 5 |
| 800 | + 52 | 800 | + 47 | 800 | + 11 | 800 | — 1 |
| 850 | + 55 | 850 | + 50 | 850 | + 2 | 850 | + 3 |
| 900 | + 55 | 900 | + 35 | 900 | + 4 | 900 | — 5 |
| 950 | + 62 | 950 | + 38 | 950 | + 4 | 950 | + 3 |
| 191000 | + 69 | 193000 | + 39 | 195000 | — 5 | 197000 | + 8 |
| 050 | + 66 | 050 | + 42 | 050 | — 10 | 050 | + 5 |
| 100 | + 72 | 100 | + 45 | 100 | — 17 | 100 | + 8 |
| 150 | + 70 | 150 | + 37 | 150 | — 19 | 150 | + 9 |
| 200 | + 77 | 200 | + 32 | 200 | — 21 | 200 | + 13 |
| 250 | + 73 | 250 | + 37 | 250 | — 15 | 250 | + 7 |
| 300 | + 77 | 300 | + 24 | 300 | — 19 | 300 | + 5 |
| 350 | + 77 | 350 | + 24 | 350 | — 11 | 350 | + 2 |
| 400 | + 79 | 400 | + 21 | 400 | — 4 | 400 | — 2 |
| 450 | + 89 | 450 | + 19 | 450 | — 6 | 450 | + 3 |
| 500 | + 81 | 500 | + 19 | 500 | — 4 | 500 | + 3 |
| 550 | + 81 | 550 | + 23 | 550 | — 9 | 550 | + 10 |
| 600 | + 88 | 600 | + 18 | 600 | 0 | 600 | + 3 |
| 650 | + 94 | 650 | + 15 | 650 | + 4 | 650 | + 3 |
| 700 | + 88 | 700 | + 24 | 700 | + 7 | 700 | — 4 |
| 750 | + 89 | 750 | + 27 | 750 | — 6 | 750 | — 2 |
| 800 | + 88 | 800 | + 20 | 800 | — 7 | 800 | + 1 |
| 850 | + 86 | 850 | + 19 | 850 | — 7 | 850 | + 4 |
| 900 | + 93 | 900 | + 19 | 900 | — 4 | 900 | + 5 |
| 950 | + 88 | 950 | + 15 | 950 | — 5 | 950 | + 3 |

| *n* | σ(*n*) | *n* | σ(*n*) | *n* | σ(*n*) | *n* | σ(*n*) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 198000 | + 5 | 200000 | — 1 | 202000 | — 10 | 204000 | + 42 |
| 050 | + 6 | 050 | — 9 | 050 | — 2 | 050 | + 44 |
| 100 | — 1 | 100 | — 10 | 100 | — 4 | 100 | + 44 |
| 150 | + 4 | 150 | — 7 | 150 | — 4 | 150 | + 45 |
| 200 | + 1 | 200 | — 11 | 200 | 0 | 200 | + 47 |
| 250 | — 2 | 250 | — 15 | 250 | + 3 | 250 | + 56 |
| 300 | — 3 | 300 | — 18 | 300 | + 4 | 300 | + 61 |
| 350 | — 3 | 350 | — 18 | 350 | 0 | 350 | + 65 |
| 400 | — 2 | 400 | — 18 | 400 | + 6 | 400 | + 58 |
| 450 | — 7 | 450 | — 14 | 450 | + 14 | 450 | + 57 |
| 500 | — 6 | 500 | — 24 | 500 | + 13 | 500 | + 60 |
| 550 | — 4 | 550 | — 17 | 550 | + 10 | 550 | + 56 |
| 600 | — 8 | 600 | — 6 | 600 | + 17 | 600 | + 60 |
| 650 | — 13 | 650 | 0 | 650 | + 17 | 650 | + 69 |
| 700 | — 18 | 700 | 0 | 700 | + 21 | 700 | + 75 |
| 750 | — 15 | 750 | — 1 | 750 | + 15 | 750 | + 78 |
| 800 | — 7 | 800 | + 3 | 800 | + 15 | 800 | + 69 |
| 850 | — 12 | 850 | + 18 | 850 | + 18 | 850 | + 69 |
| 900 | — 16 | 900 | + 15 | 900 | + 15 | 900 | + 69 |
| 950 | — 28 | 950 | + 18 | 950 | + 13 | 950 | + 57 |
| 199000 | — 34 | 201000 | + 20 | 203000 | + 13 | 205000 | + 59 |
| 050 | — 33 | 050 | + 20 | 050 | + 17 | 050 | + 54 |
| 100 | — 20 | 100 | + 21 | 100 | + 21 | 100 | + 48 |
| 150 | — 16 | 150 | + 22 | 150 | + 33 | 150 | + 46 |
| 200 | — 18 | 200 | + 21 | 200 | + 39 | 200 | + 45 |
| 250 | — 9 | 250 | + 19 | 250 | + 34 | 250 | + 46 |
| 300 | — 16 | 300 | + 10 | 300 | + 39 | 300 | + 44 |
| 350 | — 1 | 350 | + 15 | 350 | + 31 | 350 | + 37 |
| 400 | — 2 | 400 | + 25 | 400 | + 21 | 400 | + 38 |
| 450 | — 4 | 450 | + 30 | 450 | + 32 | 450 | + 25 |
| 500 | — 11 | 500 | + 15 | 500 | + 34 | 500 | + 19 |
| 550 | — 6 | 550 | + 12 | 550 | + 45 | 550 | + 17 |
| 600 | — 3 | 600 | + 14 | 600 | + 37 | 600 | + 17 |
| 650 | + 2 | 650 | + 13 | 650 | + 35 | 650 | + 17 |
| 700 | + 12 | 700 | + 12 | 700 | + 35 | 700 | + 20 |
| 750 | + 3 | 750 | + 8 | 750 | + 44 | 750 | + 33 |
| 800 | 0 | 800 | 0 | 800 | + 47 | 800 | + 28 |
| 850 | — 3 | 850 | — 11 | 850 | + 45 | 850 | + 26 |
| 900 | — 8 | 900 | — 8 | 900 | + 45 | 900 | + 28 |
| 950 | — 10 | 950 | — 10 | 950 | + 46 | 950 | + 29 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 206000 | + 23 | 208000 | — 49 | 210000 | — 63 | 212000 | — 63 |
| 050 | + 20 | 050 | — 44 | 050 | — 69 | 050 | — 62 |
| 100 | + 21 | 100 | — 44 | 100 | — 63 | 100 | — 60 |
| 150 | + 21 | 150 | — 48 | 150 | — 77 | 150 | — 63 |
| 200 | + 24 | 200 | — 48 | 200 | — 78 | 200 | — 63 |
| 250 | + 22 | 250 | — 52 | 250 | — 89 | 250 | — 62 |
| 300 | + 10 | 300 | — 54 | 300 | — 91 | 300 | — 63 |
| 350 | + 14 | 350 | — 46 | 350 | — 93 | 350 | — 52 |
| 400 | + 6 | 400 | — 49 | 400 | — 90 | 400 | — 52 |
| 450 | + 4 | 450 | — 49 | 450 | — 86 | 450 | — 52 |
| 500 | + 3 | 500 | — 49 | 500 | — 82 | 500 | — 53 |
| 550 | 0 | 550 | — 55 | 550 | — 72 | 550 | — 45 |
| 600 | — 4 | 600 | — 62 | 600 | — 72 | 600 | — 41 |
| 650 | — 15 | 650 | — 62 | 650 | — 67 | 650 | — 40 |
| 700 | — 7 | 700 | — 71 | 700 | — 56 | 700 | — 41 |
| 750 | — 3 | 750 | — 69 | 750 | — 53 | 750 | — 29 |
| 800 | 0 | 800 | — 62 | 800 | — 50 | 800 | — 28 |
| 850 | — 8 | 850 | — 69 | 850 | — 57 | 850 | — 24 |
| 900 | — 6 | 900 | — 69 | 900 | — 61 | 900 | — 24 |
| 950 | — 14 | 950 | — 66 | 950 | — 73 | 950 | — 23 |
| 207000 | — 7 | 209000 | — 70 | 211000 | — 66 | 213000 | — 28 |
| 050 | — 8 | 050 | — 74 | 050 | — 63 | 050 | — 28 |
| 100 | — 12 | 100 | — 68 | 100 | — 66 | 100 | — 28 |
| 150 | — 12 | 150 | — 62 | 150 | — 62 | 150 | — 29 |
| 200 | — 18 | 200 | — 57 | 200 | — 67 | 200 | — 38 |
| 250 | — 18 | 250 | — 68 | 250 | — 73 | 250 | — 40 |
| 300 | — 25 | 300 | — 79 | 300 | — 71 | 300 | — 34 |
| 350 | — 30 | 350 | — 80 | 350 | — 69 | 350 | — 37 |
| 400 | — 30 | 400 | — 88 | 400 | — 64 | 400 | — 40 |
| 450 | — 29 | 450 | — 80 | 450 | — 62 | 450 | — 28 |
| 500 | — 40 | 500 | — 71 | 500 | — 60 | 500 | — 23 |
| 550 | — 45 | 550 | — 71 | 550 | — 54 | 550 | — 15 |
| 600 | — 53 | 600 | — 71 | 600 | — 60 | 600 | — 11 |
| 650 | — 49 | 650 | — 69 | 650 | — 57 | 650 | — 14 |
| 700 | — 51 | 700 | — 70 | 700 | — 64 | 700 | — 14 |
| 750 | — 46 | 750 | — 62 | 750 | — 59 | 750 | — 13 |
| 800 | — 43 | 800 | — 62 | 800 | — 61 | 800 | — 9 |
| 850 | — 50 | 850 | — 63 | 850 | — 61 | 850 | — 8 |
| 900 | — 53 | 900 | — 60 | 900 | — 68 | 900 | — 2 |
| 950 | — 54 | 950 | — 58 | 950 | — 66 | 950 | — 3 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 214000 | — 8 | 216000 | — 23 | 218000 | — 2 | 220000 | — 30 |
| 050 | — 10 | 050 | — 22 | 050 | — 4 | 050 | — 39 |
| 100 | — 11 | 100 | — 29 | 100 | — 10 | 100 | — 31 |
| 150 | — 7 | 150 | — 35 | 150 | — 19 | 150 | — 19 |
| 200 | + 1 | 200 | — 31 | 200 | — 18 | 200 | — 30 |
| 250 | + 2 | 250 | — 37 | 250 | — 15 | 250 | — 35 |
| 300 | 0 | 300 | — 33 | 300 | — 3 | 300 | — 37 |
| 350 | + 2 | 350 | — 31 | 350 | + 3 | 350 | — 37 |
| 400 | — 4 | 400 | — 36 | 400 | 0 | 400 | — 39 |
| 450 | + 6 | 450 | — 32 | 450 | — 9 | 450 | — 42 |
| 500 | + 8 | 500 | — 30 | 500 | — 13 | 500 | — 44 |
| 550 | + 7 | 550 | — 22 | 550 | — 13 | 550 | — 42 |
| 600 | + 2 | 600 | — 15 | 600 | — 5 | 600 | — 41 |
| 650 | + 11 | 650 | — 20 | 650 | — 4 | 650 | — 41 |
| 700 | + 11 | 700 | — 19 | 700 | — 6 | 700 | — 42 |
| 750 | + 5 | 750 | — 17 | 750 | — 6 | 750 | — 43 |
| 800 | + 2 | 800 | — 23 | 800 | + 6 | 800 | — 44 |
| 850 | — 4 | 850 | — 24 | 850 | + 8 | 850 | — 49 |
| 900 | — 6 | 900 | — 18 | 900 | + 8 | 900 | — 56 |
| 950 | — 7 | 950 | — 21 | 950 | + 13 | 950 | — 57 |
| 215000 | — 9 | 217000 | — 21 | 219000 | + 4 | 221000 | — 52 |
| 050 | — 9 | 050 | — 22 | 050 | + 2 | 050 | — 46 |
| 100 | — 4 | 100 | — 15 | 100 | — 4 | 100 | — 54 |
| 150 | — 9 | 150 | — 11 | 150 | — 2 | 150 | — 46 |
| 200 | — 23 | 200 | — 10 | 200 | + 1 | 200 | — 45 |
| 250 | — 30 | 250 | — 17 | 250 | 0 | 250 | — 50 |
| 300 | — 29 | 300 | — 12 | 300 | — 2 | 300 | — 46 |
| 350 | — 29 | 350 | — 27 | 350 | — 2 | 350 | — 49 |
| 400 | — 34 | 400 | — 37 | 400 | — 8 | 400 | — 47 |
| 450 | — 28 | 450 | — 31 | 450 | — 8 | 450 | — 55 |
| 500 | — 31 | 500 | — 34 | 500 | — 7 | 500 | — 56 |
| 550 | — 30 | 550 | — 32 | 550 | — 19 | 550 | — 64 |
| 600 | — 24 | 600 | — 32 | 600 | — 22 | 600 | — 72 |
| 650 | — 14 | 650 | — 21 | 650 | — 27 | 650 | — 64 |
| 700 | — 13 | 700 | — 27 | 700 | — 27 | 700 | — 69 |
| 750 | — 9 | 750 | — 27 | 750 | — 22 | 750 | — 87 |
| 800 | — 10 | 800 | — 31 | 800 | — 22 | 800 | — 79 |
| 850 | — 9 | 850 | — 26 | 850 | — 25 | 850 | — 69 |
| 900 | — 6 | 900 | — 13 | 900 | — 22 | 900 | — 64 |
| 950 | — 16 | 950 | — 9 | 950 | — 29 | 950 | — 55 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 222000 | — 63 | 224000 | — 78 | 226000 | — 85 | 228000 | — 50 |
| 050 | — 73 | 050 | — 81 | 050 | — 81 | 050 | — 49 |
| 100 | — 70 | 100 | — 81 | 100 | — 73 | 100 | — 49 |
| 150 | — 74 | 150 | — 76 | 150 | — 75 | 150 | — 47 |
| 200 | — 80 | 200 | — 77 | 200 | — 77 | 200 | — 46 |
| 250 | — 76 | 250 | — 81 | 250 | — 72 | 250 | — 46 |
| 300 | — 73 | 300 | — 75 | 300 | — 66 | 300 | — 53 |
| 350 | — 90 | 350 | — 73 | 350 | — 56 | 350 | — 42 |
| 400 | — 87 | 400 | — 70 | 400 | — 63 | 400 | — 42 |
| 450 | — 87 | 450 | — 73 | 450 | — 60 | 450 | — 41 |
| 500 | — 86 | 500 | — 72 | 500 | — 63 | 500 | — 43 |
| 550 | — 78 | 550 | — 75 | 550 | — 62 | 550 | — 51 |
| 600 | — 74 | 600 | — 65 | 600 | — 53 | 600 | — 60 |
| 650 | — 78 | 650 | — 66 | 650 | — 57 | 650 | — 66 |
| 700 | — 70 | 700 | — 56 | 700 | — 54 | 700 | — 63 |
| 750 | — 71 | 750 | — 63 | 750 | — 50 | 750 | — 65 |
| 800 | — 72 | 800 | — 64 | 800 | — 58 | 800 | — 63 |
| 850 | — 80 | 850 | — 59 | 850 | — 59 | 850 | — 67 |
| 900 | — 76 | 900 | — 61 | 900 | — 58 | 900 | — 66 |
| 950 | — 78 | 950 | — 68 | 950 | — 57 | 950 | — 69 |
| 223000 | — 74 | 225000 | — 65 | 227000 | — 58 | 229000 | — 71 |
| 050 | — 78 | 050 | — 65 | 050 | — 48 | 050 | — 78 |
| 100 | — 80 | 100 | — 63 | 100 | — 52 | 100 | — 86 |
| 150 | — 83 | 150 | — 58 | 150 | — 52 | 150 | — 85 |
| 200 | — 76 | 200 | — 61 | 200 | — 57 | 200 | — 92 |
| 250 | — 82 | 250 | — 68 | 250 | — 57 | 250 | —100 |
| 300 | — 84 | 300 | — 69 | 300 | — 63 | 300 | — 95 |
| 350 | — 90 | 350 | — 67 | 350 | — 60 | 350 | — 88 |
| 400 | — 86 | 400 | — 74 | 400 | — 59 | 400 | — 96 |
| 450 | — 92 | 450 | — 84 | 450 | — 54 | 450 | —103 |
| 500 | — 90 | 500 | — 89 | 500 | — 50 | 500 | —101 |
| 550 | — 83 | 550 | — 86 | 550 | — 55 | 550 | —101 |
| 600 | — 82 | 600 | — 83 | 600 | — 58 | 600 | —101 |
| 650 | — 90 | 650 | — 91 | 650 | — 63 | 650 | —109 |
| 700 | — 89 | 700 | — 84 | 700 | — 64 | 700 | —107 |
| 750 | — 82 | 750 | — 86 | 750 | — 64 | 750 | —116 |
| 800 | — 81 | 800 | — 86 | 800 | — 61 | 800 | —123 |
| 850 | — 88 | 850 | — 84 | 850 | — 58 | 850 | —126 |
| 900 | — 82 | 900 | — 81 | 900 | — 58 | 900 | —123 |
| 950 | — 85 | 950 | — 87 | 950 | — 50 | 950 | —123 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 230000 | —130 | 232000 | —122 | 234000 | — 67 | 236000 | — 32 |
| 050 | —131 | 050 | —121 | 050 | — 64 | 050 | — 38 |
| 100 | —138 | 100 | —114 | 100 | — 55 | 100 | — 40 |
| 150 | —138 | 150 | —115 | 150 | — 53 | 150 | — 44 |
| 200 | —140 | 200 | —123 | 200 | — 55 | 200 | — 46 |
| 250 | —145 | 250 | —114 | 250 | — 67 | 250 | — 55 |
| 300 | —143 | 300 | —109 | 300 | — 69 | 300 | — 51 |
| 350 | —141 | 350 | —107 | 350 | — 73 | 350 | — 49 |
| 400 | —154 | 400 | —109 | 400 | — 70 | 400 | — 50 |
| 450 | —148 | 450 | —107 | 450 | — 59 | 450 | — 46 |
| 500 | —141 | 500 | —111 | 500 | — 63 | 500 | — 44 |
| 550 | —138 | 550 | —110 | 550 | — 58 | 550 | — 38 |
| 600 | —140 | 600 | —104 | 600 | — 59 | 600 | — 30 |
| 650 | —137 | 650 | —102 | 650 | — 65 | 650 | — 36 |
| 700 | —138 | 700 | —107 | 700 | — 63 | 700 | — 31 |
| 750 | —139 | 750 | — 99 | 750 | — 66 | 750 | — 40 |
| 800 | —144 | 800 | — 94 | 800 | — 64 | 800 | — 41 |
| 850 | —143 | 850 | — 99 | 850 | — 68 | 850 | — 33 |
| 900 | —146 | 900 | — 99 | 900 | — 66 | 900 | — 44 |
| 950 | —141 | 950 | — 96 | 950 | — 70 | 950 | — 37 |
| 231000 | —143 | 233000 | —101 | 235000 | — 78 | 237000 | — 39 |
| 050 | —149 | 050 | — 94 | 050 | — 76 | 050 | — 42 |
| 100 | —142 | 100 | — 84 | 100 | — 74 | 100 | — 47 |
| 150 | —137 | 150 | — 92 | 150 | — 73 | 150 | — 41 |
| 200 | —130 | 200 | — 85 | 200 | — 80 | 200 | — 40 |
| 250 | —122 | 250 | — 79 | 250 | — 72 | 250 | — 39 |
| 300 | —126 | 300 | — 78 | 300 | — 67 | 300 | — 41 |
| 350 | —133 | 350 | — 76 | 350 | — 65 | 350 | — 42 |
| 400 | —128 | 400 | — 75 | 400 | — 71 | 400 | — 46 |
| 450 | —139 | 450 | — 70 | 450 | — 66 | 450 | — 41 |
| 500 | —131 | 500 | — 73 | 500 | — 67 | 500 | — 33 |
| 550 | —121 | 550 | — 69 | 550 | — 59 | 550 | — 34 |
| 600 | —125 | 600 | — 70 | 600 | — 56 | 600 | — 21 |
| 650 | —127 | 650 | — 74 | 650 | — 52 | 650 | — 17 |
| 700 | —130 | 700 | — 79 | 700 | — 50 | 700 | — 24 |
| 750 | —121 | 750 | — 78 | 750 | — 43 | 750 | — 23 |
| 800 | —112 | 800 | — 75 | 800 | — 41 | 800 | — 23 |
| 850 | —113 | 850 | — 78 | 850 | — 41 | 850 | — 16 |
| 900 | —120 | 900 | — 71 | 900 | — 37 | 900 | — 19 |
| 950 | —124 | 950 | — 71 | 950 | — 35 | 950 | — 22 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 238000 | — 21 | 240000 | — 24 | 242000 | — 41 | 244000 | — 4 |
| 050 | — 28 | 050 | — 33 | 050 | — 35 | 050 | — 4 |
| 100 | — 27 | 100 | — 36 | 100 | — 39 | 100 | + 12 |
| 150 | — 22 | 150 | — 30 | 150 | — 40 | 150 | + 10 |
| 200 | — 25 | 200 | — 28 | 200 | — 40 | 200 | + 4 |
| 250 | — 30 | 250 | — 32 | 250 | — 39 | 250 | + 4 |
| 300 | — 27 | 300 | — 30 | 300 | — 37 | 300 | + 6 |
| 350 | — 36 | 350 | — 27 | 350 | — 29 | 350 | + 8 |
| 400 | — 35 | 400 | — 35 | 400 | — 35 | 400 | + 5 |
| 450 | — 39 | 450 | — 29 | 450 | — 40 | 450 | + 9 |
| 500 | — 33 | 500 | — 25 | 500 | — 45 | 500 | — 2 |
| 550 | — 32 | 550 | — 20 | 550 | — 41 | 550 | — 5 |
| 600 | — 30 | 600 | — 13 | 600 | — 42 | 600 | — 9 |
| 650 | — 31 | 650 | — 18 | 650 | — 46 | 650 | — 5 |
| 700 | — 33 | 700 | — 17 | 700 | — 41 | 700 | — 2 |
| 750 | — 41 | 750 | — 26 | 750 | — 33 | 750 | — 11 |
| 800 | — 35 | 800 | — 23 | 800 | — 35 | 800 | — 17 |
| 850 | — 40 | 850 | — 21 | 850 | — 36 | 850 | — 21 |
| 900 | — 33 | 900 | — 35 | 900 | — 31 | 900 | — 25 |
| 950 | — 39 | 950 | — 41 | 950 | — 25 | 950 | — 18 |
| 239000 | — 28 | 241000 | — 44 | 243000 | — 23 | 245000 | — 18 |
| 050 | — 31 | 050 | — 41 | 050 | — 11 | 050 | — 8 |
| 100 | — 30 | 100 | — 47 | 100 | — 7 | 100 | — 13 |
| 150 | — 23 | 150 | — 50 | 150 | — 6 | 150 | — 9 |
| 200 | — 33 | 200 | — 47 | 200 | — 5 | 200 | — 6 |
| 250 | — 24 | 250 | — 42 | 250 | + 5 | 250 | + 2 |
| 300 | — 29 | 300 | — 38 | 300 | + 4 | 300 | — 10 |
| 350 | — 28 | 350 | — 42 | 350 | + 8 | 350 | — 13 |
| 400 | — 33 | 400 | — 44 | 400 | + 12 | 400 | — 10 |
| 450 | — 32 | 450 | — 48 | 450 | + 8 | 450 | — 16 |
| 500 | — 31 | 500 | — 42 | 500 | + 11 | 500 | — 18 |
| 550 | — 28 | 550 | — 45 | 550 | + 1 | 550 | — 19 |
| 600 | — 33 | 600 | — 49 | 600 | — 3 | 600 | — 17 |
| 650 | — 31 | 650 | — 49 | 650 | — 7 | 650 | — 23 |
| 700 | — 21 | 700 | — 50 | 700 | — 1 | 700 | — 22 |
| 750 | — 24 | 750 | — 51 | 750 | — 4 | 750 | — 28 |
| 800 | — 23 | 800 | — 45 | 800 | — 3 | 800 | — 22 |
| 850 | — 14 | 850 | — 38 | 850 | — 3 | 850 | — 15 |
| 900 | — 22 | 900 | — 42 | 900 | 0 | 900 | — 6 |
| 950 | — 27 | 950 | — 41 | 950 | + 3 | 950 | 0 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 246000 | − 8 | 248000 | + 11 | 250000 | − 39 | 252000 | − 22 |
| 050 | − 3 | 050 | + 7 | 050 | − 39 | 050 | − 16 |
| 100 | − 3 | 100 | − 5 | 100 | − 44 | 100 | − 7 |
| 150 | − 8 | 150 | − 4 | 150 | − 41 | 150 | − 13 |
| 200 | + 2 | 200 | − 5 | 200 | − 36 | 200 | − 17 |
| 250 | − 5 | 250 | − 9 | 250 | − 24 | 250 | − 23 |
| 300 | − 6 | 300 | − 12 | 300 | − 17 | 300 | − 16 |
| 350 | − 11 | 350 | − 13 | 350 | − 12 | 350 | − 15 |
| 400 | − 16 | 400 | − 8 | 400 | − 10 | 400 | − 14 |
| 450 | + 1 | 450 | − 16 | 450 | − 10 | 450 | − 27 |
| 500 | + 1 | 500 | − 18 | 500 | − 5 | 500 | − 18 |
| 550 | 0 | 550 | − 22 | 550 | − 2 | 550 | − 20 |
| 600 | + 3 | 600 | − 23 | 600 | + 1 | 600 | − 24 |
| 650 | − 2 | 650 | − 23 | 650 | + 8 | 650 | − 24 |
| 700 | 0 | 700 | − 14 | 700 | + 12 | 700 | − 14 |
| 750 | − 9 | 750 | − 11 | 750 | + 2 | 750 | − 15 |
| 800 | − 18 | 800 | − 20 | 800 | − 1 | 800 | − 20 |
| 850 | − 23 | 850 | − 20 | 850 | + 4 | 850 | − 31 |
| 900 | − 9 | 900 | − 23 | 900 | 0 | 900 | − 36 |
| 950 | − 11 | 950 | − 20 | 950 | + 1 | 950 | − 29 |
| 247000 | − 3 | 249000 | − 19 | 251000 | 0 | 253000 | − 18 |
| 050 | − 3 | 050 | − 11 | 050 | − 4 | 050 | − 15 |
| 100 | − 6 | 100 | − 16 | 100 | − 10 | 100 | − 14 |
| 150 | + 5 | 150 | − 18 | 150 | − 12 | 150 | − 12 |
| 200 | + 16 | 200 | − 13 | 200 | − 17 | 200 | − 10 |
| 250 | + 18 | 250 | − 18 | 250 | − 21 | 250 | − 6 |
| 300 | + 23 | 300 | − 21 | 300 | − 18 | 300 | − 1 |
| 350 | + 23 | 350 | − 18 | 350 | − 10 | 350 | − 6 |
| 400 | + 8 | 400 | − 18 | 400 | − 12 | 400 | − 9 |
| 450 | + 10 | 450 | − 17 | 450 | − 13 | 450 | − 7 |
| 500 | + 21 | 500 | − 22 | 500 | − 18 | 500 | 0 |
| 550 | + 13 | 550 | − 31 | 550 | − 25 | 550 | − 5 |
| 600 | + 9 | 600 | − 30 | 600 | − 20 | 600 | − 2 |
| 650 | + 11 | 650 | − 23 | 650 | − 23 | 650 | − 7 |
| 700 | + 11 | 700 | − 18 | 700 | − 33 | 700 | − 8 |
| 750 | + 10 | 750 | − 24 | 750 | − 29 | 750 | − 11 |
| 800 | + 8 | 800 | − 30 | 800 | − 26 | 800 | − 21 |
| 850 | + 12 | 850 | − 31 | 850 | − 24 | 850 | − 21 |
| 900 | + 11 | 900 | − 35 | 900 | − 22 | 900 | − 18 |
| 950 | + 7 | 950 | − 38 | 950 | − 23 | 950 | − 20 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 254000 | — 24 | 256000 | — 76 | 258000 | — 58 | 260000 | — 9 |
| 050 | — 37 | 050 | — 82 | 050 | — 55 | 050 | — 14 |
| 100 | — 34 | 100 | — 74 | 100 | — 53 | 100 | — 10 |
| 150 | — 36 | 150 | — 75 | 150 | — 61 | 150 | — 2 |
| 200 | — 35 | 200 | — 78 | 200 | — 58 | 200 | — 1 |
| 250 | — 40 | 250 | — 76 | 250 | — 53 | 250 | — 7 |
| 300 | — 37 | 300 | — 79 | 300 | — 44 | 300 | — 3 |
| 350 | — 38 | 350 | — 77 | 350 | — 47 | 350 | — 3 |
| 400 | — 41 | 400 | — 80 | 400 | — 46 | 400 | — 4 |
| 450 | — 44 | 450 | — 72 | 450 | — 42 | 450 | — 5 |
| 500 | — 42 | 500 | — 77 | 500 | — 43 | 500 | — 12 |
| 550 | — 40 | 550 | — 76 | 550 | — 37 | 550 | — 2 |
| 600 | — 32 | 600 | — 75 | 600 | — 35 | 600 | + 5 |
| 650 | — 35 | 650 | — 80 | 650 | — 34 | 650 | + 9 |
| 700 | — 42 | 700 | — 77 | 700 | — 36 | 700 | + 9 |
| 750 | — 46 | 750 | — 70 | 750 | — 41 | 750 | + 7 |
| 800 | — 38 | 800 | — 67 | 800 | — 46 | 800 | + 8 |
| 850 | — 39 | 850 | — 66 | 850 | — 45 | 850 | + 10 |
| 900 | — 42 | 900 | — 60 | 900 | — 40 | 900 | + 13 |
| 950 | — 50 | 950 | — 52 | 950 | — 32 | 950 | + 20 |
| 255000 | — 53 | 257000 | — 48 | 259000 | — 34 | 261000 | + 17 |
| 050 | — 59 | 050 | — 48 | 050 | — 26 | 050 | + 19 |
| 100 | — 62 | 100 | — 50 | 100 | — 15 | 100 | + 16 |
| 150 | — 67 | 150 | — 42 | 150 | — 14 | 150 | + 22 |
| 200 | — 65 | 200 | — 49 | 200 | — 14 | 200 | + 28 |
| 250 | — 73 | 250 | — 46 | 250 | — 21 | 250 | + 28 |
| 300 | — 64 | 300 | — 56 | 300 | — 15 | 300 | + 31 |
| 350 | — 65 | 350 | — 61 | 350 | — 7 | 350 | + 27 |
| 400 | — 66 | 400 | — 55 | 400 | — 7 | 400 | + 34 |
| 450 | — 67 | 450 | — 57 | 450 | — 4 | 450 | + 32 |
| 500 | — 67 | 500 | — 53 | 500 | — 1 | 500 | + 34 |
| 550 | — 76 | 550 | — 55 | 550 | + 1 | 550 | + 27 |
| 600 | — 78 | 600 | — 52 | 600 | + 1 | 600 | + 25 |
| 650 | — 77 | 650 | — 57 | 650 | — 2 | 650 | + 29 |
| 700 | — 73 | 700 | — 56 | 700 | — 6 | 700 | + 30 |
| 750 | — 73 | 750 | — 53 | 750 | + 1 | 750 | + 25 |
| 800 | — 68 | 800 | — 58 | 800 | + 2 | 800 | + 13 |
| 850 | — 74 | 850 | — 57 | 850 | — 2 | 850 | + 18 |
| 900 | — 80 | 900 | — 60 | 900 | + 4 | 900 | + 20 |
| 950 | — 80 | 950 | — 56 | 950 | — 3 | 950 | + 33 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 262000 | + 25 | 264000 | + 15 | 266000 | + 20 | 268000 | — 54 |
| 050 | + 25 | 050 | + 21 | 050 | + 22 | 050 | — 59 |
| 100 | + 27 | 100 | + 27 | 100 | + 6 | 100 | — 57 |
| 150 | + 24 | 150 | + 17 | 150 | + 1 | 150 | — 50 |
| 200 | + 27 | 200 | + 12 | 200 | — 4 | 200 | — 45 |
| 250 | + 25 | 250 | + 17 | 250 | + 2 | 250 | — 50 |
| 300 | + 32 | 300 | + 12 | 300 | — 2 | 300 | — 57 |
| 350 | + 25 | 350 | + 15 | 350 | + 7 | 350 | — 44 |
| 400 | + 16 | 400 | + 10 | 400 | + 3 | 400 | — 34 |
| 450 | + 17 | 450 | + 11 | 450 | — 1 | 450 | — 38 |
| 500 | + 7 | 500 | + 14 | 500 | — 4 | 500 | — 33 |
| 550 | + 10 | 550 | + 15 | 550 | + 7 | 550 | — 32 |
| 600 | + 10 | 600 | + 12 | 600 | + 14 | 600 | — 26 |
| 650 | + 8 | 650 | + 12 | 650 | + 20 | 650 | — 25 |
| 700 | + 3 | 700 | + 16 | 700 | + 16 | 700 | — 15 |
| 750 | — 3 | 750 | + 16 | 750 | + 8 | 750 | — 13 |
| 800 | + 8 | 800 | + 11 | 800 | + 11 | 800 | — 19 |
| 850 | + 16 | 850 | + 6 | 850 | + 9 | 850 | — 28 |
| 900 | + 21 | 900 | + 3 | 900 | + 12 | 900 | — 30 |
| 950 | + 29 | 950 | + 6 | 950 | + 6 | 950 | — 40 |
| 263000 | + 42 | 265000 | — 2 | 267000 | — 7 | 269000 | — 40 |
| 050 | + 45 | 050 | + 6 | 050 | — 1 | 050 | — 35 |
| 100 | + 39 | 100 | + 15 | 100 | + 9 | 100 | — 40 |
| 150 | + 34 | 150 | + 3 | 150 | 0 | 150 | — 44 |
| 200 | + 33 | 200 | 0 | 200 | + 5 | 200 | — 42 |
| 250 | + 32 | 250 | + 6 | 250 | + 2 | 250 | — 50 |
| 300 | + 35 | 300 | + 6 | 300 | — 1 | 300 | — 43 |
| 350 | + 29 | 350 | + 3 | 350 | + 3 | 350 | — 49 |
| 400 | + 33 | 400 | + 1 | 400 | 0 | 400 | — 50 |
| 450 | + 33 | 450 | — 3 | 450 | — 2 | 450 | — 51 |
| 500 | + 30 | 500 | + 3 | 500 | — 6 | 500 | — 45 |
| 550 | + 35 | 550 | + 4 | 550 | — 18 | 550 | — 50 |
| 600 | + 33 | 600 | + 4 | 600 | — 25 | 600 | — 58 |
| 650 | + 32 | 650 | 0 | 650 | — 29 | 650 | — 60 |
| 700 | + 34 | 700 | + 9 | 700 | — 32 | 700 | — 57 |
| 750 | + 32 | 750 | + 5 | 750 | — 36 | 750 | — 59 |
| 800 | + 32 | 800 | + 7 | 800 | — 42 | 800 | — 66 |
| 850 | + 30 | 850 | + 6 | 850 | — 51 | 850 | — 59 |
| 900 | + 34 | 900 | + 7 | 900 | — 64 | 900 | — 55 |
| 950 | + 24 | 950 | + 9 | 950 | — 62 | 950 | — 58 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 270000 | — 50 | 272000 | — 43 | 274000 | + 1 | 276000 | — 10 |
| 050 | — 46 | 050 | — 48 | 050 | — 13 | 050 | — 20 |
| 100 | — 46 | 100 | — 43 | 100 | — 17 | 100 | — 19 |
| 150 | — 58 | 150 | — 37 | 150 | — 17 | 150 | — 13 |
| 200 | — 61 | 200 | — 39 | 200 | — 11 | 200 | — 16 |
| 250 | — 53 | 250 | — 38 | 250 | — 7 | 250 | — 7 |
| 300 | — 47 | 300 | — 41 | 300 | — 3 | 300 | — 6 |
| 350 | — 51 | 350 | — 50 | 350 | — 5 | 350 | — 14 |
| 400 | — 53 | 400 | — 54 | 400 | + 5 | 400 | — 11 |
| 450 | — 51 | 450 | — 52 | 450 | + 9 | 450 | — 21 |
| 500 | — 56 | 500 | — 45 | 500 | + 6 | 500 | — 20 |
| 550 | — 55 | 550 | — 39 | 550 | + 10 | 550 | — 23 |
| 600 | — 55 | 600 | — 41 | 600 | + 10 | 600 | — 22 |
| 650 | — 57 | 650 | — 43 | 650 | + 12 | 650 | — 15 |
| 700 | — 55 | 700 | — 46 | 700 | + 7 | 700 | — 5 |
| 750 | — 58 | 750 | — 41 | 750 | + 17 | 750 | — 11 |
| 800 | — 67 | 800 | — 36 | 800 | + 23 | 800 | — 7 |
| 850 | — 70 | 850 | — 35 | 850 | + 24 | 850 | — 20 |
| 900 | — 58 | 900 | — 37 | 900 | + 25 | 900 | — 17 |
| 950 | — 51 | 950 | — 38 | 950 | + 24 | 950 | — 17 |
| 271000 | — 53 | 273000 | — 40 | 275000 | + 20 | 277000 | — 15 |
| 050 | — 64 | 050 | — 38 | 050 | + 15 | 050 | — 19 |
| 100 | — 68 | 100 | — 42 | 100 | + 7 | 100 | — 16 |
| 150 | — 66 | 150 | — 39 | 150 | + 10 | 150 | — 7 |
| 200 | — 63 | 200 | — 39 | 200 | + 7 | 200 | + 3 |
| 250 | — 56 | 250 | — 34 | 250 | + 3 | 250 | + 5 |
| 300 | — 59 | 300 | — 37 | 300 | + 7 | 300 | + 6 |
| 350 | — 54 | 350 | — 44 | 350 | + 5 | 350 | — 2 |
| 400 | — 52 | 400 | — 39 | 400 | — 4 | 400 | + 2 |
| 450 | — 49 | 450 | — 25 | 450 | + 5 | 450 | — 2 |
| 500 | — 47 | 500 | — 16 | 500 | + 6 | 500 | + 5 |
| 550 | — 49 | 550 | — 23 | 550 | + 3 | 550 | — 2 |
| 600 | — 44 | 600 | — 15 | 600 | + 4 | 600 | — 8 |
| 650 | — 47 | 650 | — 17 | 650 | + 4 | 650 | — 10 |
| 700 | — 39 | 700 | — 18 | 700 | — 3 | 700 | — 8 |
| 750 | — 42 | 750 | — 11 | 750 | 0 | 750 | — 9 |
| 800 | — 41 | 800 | — 7 | 800 | — 11 | 800 | — 8 |
| 850 | — 41 | 850 | — 12 | 850 | — 10 | 850 | — 14 |
| 900 | — 37 | 900 | + 1 | 900 | + 1 | 900 | — 10 |
| 950 | — 42 | 950 | — 1 | 950 | — 6 | 950 | — 3 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 278000 | — 8 | 280000 | + 48 | 282000 | + 48 | 284000 | +110 |
| 050 | — 2 | 050 | + 47 | 050 | + 47 | 050 | +106 |
| 100 | — 13 | 100 | + 46 | 100 | + 41 | 100 | +110 |
| 150 | — 17 | 150 | + 43 | 150 | + 38 | 150 | +106 |
| 200 | — 11 | 200 | + 38 | 200 | + 45 | 200 | +102 |
| 250 | — 15 | 250 | + 38 | 250 | + 42 | 250 | +102 |
| 300 | — 16 | 300 | + 34 | 300 | + 39 | 300 | + 89 |
| 350 | — 9 | 350 | + 32 | 350 | + 39 | 350 | + 93 |
| 400 | — 5 | 400 | + 36 | 400 | + 43 | 400 | + 97 |
| 450 | + 3 | 450 | + 41 | 450 | + 43 | 450 | + 89 |
| 500 | + 6 | 500 | + 47 | 500 | + 50 | 500 | + 90 |
| 550 | + 7 | 550 | + 42 | 550 | + 57 | 550 | + 92 |
| 600 | + 20 | 600 | + 31 | 600 | + 44 | 600 | + 83 |
| 650 | + 9 | 650 | + 27 | 650 | + 59 | 650 | + 80 |
| 700 | + 12 | 700 | + 26 | 700 | + 54 | 700 | + 70 |
| 750 | + 12 | 750 | + 32 | 750 | + 58 | 750 | + 69 |
| 800 | + 17 | 800 | + 33 | 800 | + 57 | 800 | + 64 |
| 850 | + 11 | 850 | + 47 | 850 | + 50 | 850 | + 65 |
| 900 | + 11 | 900 | + 47 | 900 | + 46 | 900 | + 75 |
| 950 | + 5 | 950 | + 43 | 950 | + 46 | 950 | + 75 |
| 279000 | + 14 | 281000 | + 35 | 283000 | + 50 | 285000 | + 74 |
| 050 | + 12 | 050 | + 34 | 050 | + 50 | 050 | + 77 |
| 100 | + 13 | 100 | + 37 | 100 | + 43 | 100 | + 80 |
| 150 | + 15 | 150 | + 44 | 150 | + 39 | 150 | + 75 |
| 200 | + 12 | 200 | + 44 | 200 | + 42 | 200 | + 72 |
| 250 | + 14 | 250 | + 42 | 250 | + 52 | 250 | + 83 |
| 300 | + 19 | 300 | + 46 | 300 | + 57 | 300 | + 78 |
| 350 | + 22 | 350 | + 47 | 350 | + 73 | 350 | + 84 |
| 400 | + 19 | 400 | + 45 | 400 | + 89 | 400 | + 85 |
| 450 | + 22 | 450 | + 45 | 450 | + 96 | 450 | + 87 |
| 500 | + 25 | 500 | + 51 | 500 | + 86 | 500 | + 81 |
| 550 | + 28 | 550 | + 50 | 550 | + 84 | 550 | + 81 |
| 600 | + 26 | 600 | + 50 | 600 | + 88 | 600 | + 78 |
| 650 | + 18 | 650 | + 42 | 650 | + 93 | 650 | + 75 |
| 700 | + 25 | 700 | + 44 | 700 | +101 | 700 | + 79 |
| 750 | + 33 | 750 | + 43 | 750 | +108 | 750 | + 82 |
| 800 | + 37 | 800 | + 44 | 800 | + 95 | 800 | + 84 |
| 850 | + 36 | 850 | + 42 | 850 | + 95 | 850 | + 83 |
| 900 | + 34 | 900 | + 46 | 900 | +101 | 900 | + 80 |
| 950 | + 39 | 950 | + 44 | 950 | +110 | 950 | + 84 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 286000 | + 83 | 288000 | +112 | 290000 | +100 | 292000 | + 97 |
| 050 | + 83 | 050 | +121 | 050 | + 83 | 050 | + 94 |
| 100 | + 73 | 100 | +116 | 100 | + 91 | 100 | + 94 |
| 150 | + 75 | 150 | +118 | 150 | + 87 | 150 | +108 |
| 200 | + 77 | 200 | +110 | 200 | + 86 | 200 | +114 |
| 250 | + 81 | 250 | +105 | 250 | + 89 | 250 | +110 |
| 300 | + 83 | 300 | +106 | 300 | + 99 | 300 | +115 |
| 350 | + 81 | 350 | +105 | 350 | + 94 | 350 | +111 |
| 400 | + 88 | 400 | + 96 | 400 | + 99 | 400 | +114 |
| 450 | + 92 | 450 | + 94 | 450 | + 98 | 450 | +107 |
| 500 | + 90 | 500 | + 94 | 500 | + 91 | 500 | +106 |
| 550 | + 95 | 550 | + 96 | 550 | + 91 | 550 | +103 |
| 600 | + 98 | 600 | + 97 | 600 | + 99 | 600 | +100 |
| 650 | + 91 | 650 | +111 | 650 | + 92 | 650 | +101 |
| 700 | + 88 | 700 | +115 | 700 | + 94 | 700 | + 99 |
| 750 | + 87 | 750 | +119 | 750 | + 96 | 750 | + 99 |
| 800 | + 71 | 800 | +125 | 800 | + 96 | 800 | + 95 |
| 850 | + 72 | 850 | +124 | 850 | + 98 | 850 | + 97 |
| 900 | + 71 | 900 | +131 | 900 | + 91 | 900 | + 91 |
| 950 | + 78 | 950 | +132 | 950 | + 97 | 950 | + 90 |
| 287000 | + 85 | 289000 | +132 | 291000 | + 94 | 293000 | + 88 |
| 050 | + 87 | 050 | +128 | 050 | + 94 | 050 | +101 |
| 100 | + 82 | 100 | +127 | 100 | +104 | 100 | +106 |
| 150 | + 86 | 150 | +119 | 150 | +104 | 150 | + 98 |
| 200 | + 83 | 200 | +112 | 200 | +107 | 200 | + 93 |
| 250 | + 84 | 250 | +107 | 250 | +105 | 250 | + 91 |
| 300 | + 79 | 300 | +105 | 300 | +103 | 300 | + 86 |
| 350 | + 84 | 350 | +107 | 350 | +101 | 350 | + 88 |
| 400 | + 89 | 400 | +108 | 400 | + 99 | 400 | + 94 |
| 450 | + 94 | 450 | +109 | 450 | + 99 | 450 | +100 |
| 500 | + 94 | 500 | +114 | 500 | +100 | 500 | + 95 |
| 550 | + 88 | 550 | +118 | 550 | + 95 | 550 | + 95 |
| 600 | + 88 | 600 | +108 | 600 | + 97 | 600 | +104 |
| 650 | + 95 | 650 | +108 | 650 | +101 | 650 | +107 |
| 700 | + 98 | 700 | +116 | 700 | + 99 | 700 | +116 |
| 750 | + 92 | 750 | +109 | 750 | + 95 | 750 | +115 |
| 800 | +108 | 800 | +109 | 800 | +100 | 800 | +115 |
| 850 | +105 | 850 | +113 | 850 | +100 | 850 | +123 |
| 900 | +103 | 900 | +100 | 900 | + 95 | 900 | +122 |
| 950 | +106 | 950 | +100 | 950 | +103 | 950 | +121 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(u)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 294000 | +126 | 296000 | +149 | 298000 | +191 | 300000 | +220 |
| 050 | +125 | 050 | +138 | 050 | +190 | 050 | +223 |
| 100 | +123 | 100 | +146 | 100 | +186 | 100 | +221 |
| 150 | +124 | 150 | +153 | 150 | +197 | 150 | +223 |
| 200 | +122 | 200 | +160 | 200 | +195 | 200 | +224 |
| 250 | +109 | 250 | +153 | 250 | +198 | 250 | +229 |
| 300 | + 96 | 300 | +141 | 300 | +205 | 300 | +234 |
| 350 | + 94 | 350 | +148 | 350 | +205 | 350 | +228 |
| 400 | + 95 | 400 | +151 | 400 | +203 | 400 | +232 |
| 450 | +105 | 450 | +162 | 450 | +191 | 450 | +233 |
| 500 | +110 | 500 | +155 | 500 | +197 | 500 | +231 |
| 550 | +117 | 550 | +157 | 550 | +198 | 550 | +239 |
| 600 | +132 | 600 | +141 | 600 | +206 | 600 | +229 |
| 650 | +140 | 650 | +142 | 650 | +213 | 650 | +232 |
| 700 | +146 | 700 | +141 | 700 | +205 | 700 | +235 |
| 750 | +145 | 750 | +138 | 750 | +203 | 750 | +229 |
| 800 | +141 | 800 | +142 | 800 | +204 | 800 | +222 |
| 850 | +136 | 850 | +144 | 850 | +202 | 850 | +224 |
| 900 | +138 | 900 | +149 | 900 | +207 | 900 | +221 |
| 950 | +132 | 950 | +149 | 950 | +205 | 950 | +211 |
| 295000 | +140 | 297000 | +146 | 299000 | +220 | 301000 | +198 |
| 050 | +134 | 050 | +151 | 050 | +220 | 050 | +202 |
| 100 | +135 | 100 | +153 | 100 | +222 | 100 | +196 |
| 150 | +143 | 150 | +162 | 150 | +224 | 150 | +202 |
| 200 | +143 | 200 | +164 | 200 | +225 | 200 | +202 |
| 250 | +138 | 250 | +167 | 250 | +229 | 250 | +196 |
| 300 | +139 | 300 | +160 | 300 | +232 | 300 | +194 |
| 350 | +143 | 350 | +174 | 350 | +229 | 350 | +191 |
| 400 | +146 | 400 | +173 | 400 | +228 | 400 | +192 |
| 450 | +150 | 450 | +178 | 450 | +229 | 450 | +192 |
| 500 | +159 | 500 | +187 | 500 | +224 | 500 | +194 |
| 550 | +158 | 550 | +189 | 550 | +230 | 550 | +194 |
| 600 | +157 | 600 | +196 | 600 | +224 | 600 | +192 |
| 650 | +164 | 650 | +192 | 650 | +227 | 650 | +185 |
| 700 | +161 | 700 | +190 | 700 | +224 | 700 | +188 |
| 750 | +167 | 750 | +196 | 750 | +218 | 750 | +186 |
| 800 | +163 | 800 | +203 | 800 | +224 | 800 | +189 |
| 850 | +156 | 850 | +200 | 850 | +223 | 850 | +190 |
| 900 | +149 | 900 | +197 | 900 | +226 | 900 | +180 |
| 950 | +151 | 950 | +198 | 950 | +222 | 950 | +178 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 302000 | +173 | 304000 | +164 | 306000 | +161 | 308000 | +178 |
| 050 | +177 | 050 | +161 | 050 | +157 | 050 | +174 |
| 100 | +178 | 100 | +160 | 100 | +158 | 100 | +174 |
| 150 | +186 | 150 | +164 | 150 | +163 | 150 | +172 |
| 200 | +174 | 200 | +169 | 200 | +169 | 200 | +175 |
| 250 | +171 | 250 | +170 | 250 | +173 | 250 | +172 |
| 300 | +163 | 300 | +160 | 300 | +172 | 300 | +175 |
| 350 | +164 | 350 | +154 | 350 | +168 | 350 | +167 |
| 400 | +175 | 400 | +156 | 400 | +159 | 400 | +173 |
| 450 | +171 | 450 | +161 | 450 | +160 | 450 | +176 |
| 500 | +169 | 500 | +162 | 500 | +163 | 500 | +185 |
| 550 | +167 | 550 | +164 | 550 | +159 | 550 | +176 |
| 600 | +161 | 600 | +171 | 600 | +168 | 600 | +177 |
| 650 | +153 | 650 | +182 | 650 | +169 | 650 | +188 |
| 700 | +156 | 700 | +186 | 700 | +175 | 700 | +192 |
| 750 | +159 | 750 | +177 | 750 | +173 | 750 | +197 |
| 800 | +156 | 800 | +186 | 800 | +170 | 800 | +194 |
| 850 | +165 | 850 | +188 | 850 | +166 | 850 | +183 |
| 900 | +164 | 900 | +185 | 900 | +165 | 900 | +180 |
| 950 | +157 | 950 | +181 | 950 | +162 | 950 | +178 |
| 303000 | +157 | 305000 | +174 | 307000 | +168 | 309000 | +180 |
| 050 | +160 | 050 | +167 | 050 | +172 | 050 | +176 |
| 100 | +160 | 100 | +171 | 100 | +174 | 100 | +171 |
| 150 | +168 | 150 | +169 | 150 | +169 | 150 | +168 |
| 200 | +168 | 200 | +179 | 200 | +164 | 200 | +167 |
| 250 | +182 | 250 | +175 | 250 | +164 | 250 | +171 |
| 300 | +175 | 300 | +181 | 300 | +163 | 300 | +166 |
| 350 | +183 | 350 | +179 | 350 | +164 | 350 | +161 |
| 400 | +184 | 400 | +172 | 400 | +164 | 400 | +160 |
| 450 | +185 | 450 | +171 | 450 | +162 | 450 | +156 |
| 500 | +179 | 500 | +163 | 500 | +169 | 500 | +149 |
| 550 | +179 | 550 | +166 | 550 | +160 | 550 | +154 |
| 600 | +171 | 600 | +159 | 600 | +159 | 600 | +142 |
| 650 | +173 | 650 | +166 | 650 | +156 | 650 | +148 |
| 700 | +169 | 700 | +169 | 700 | +157 | 700 | +147 |
| 750 | +156 | 750 | +164 | 750 | +154 | 750 | +145 |
| 800 | +156 | 800 | +163 | 800 | +166 | 800 | +152 |
| 850 | +164 | 850 | +159 | 850 | +173 | 850 | +151 |
| 900 | +166 | 900 | +160 | 900 | +170 | 900 | +150 |
| 950 | +164 | 950 | +157 | 950 | +172 | 950 | +149 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 310000 | +163 | 312000 | +141 | 314000 | + 90 | 316000 | +140 |
| 050 | +164 | 050 | +148 | 050 | +101 | 050 | +139 |
| 100 | +164 | 100 | +151 | 100 | +103 | 100 | +143 |
| 150 | +151 | 150 | +153 | 150 | +109 | 150 | +132 |
| 200 | +154 | 200 | +149 | 200 | +105 | 200 | +130 |
| 250 | +150 | 250 | +142 | 250 | +105 | 250 | +131 |
| 300 | +141 | 300 | +138 | 300 | +113 | 300 | +126 |
| 350 | +145 | 350 | +134 | 350 | +107 | 350 | +117 |
| 400 | +142 | 400 | +127 | 400 | +116 | 400 | +118 |
| 450 | +145 | 450 | +130 | 450 | +116 | 450 | +118 |
| 500 | +150 | 500 | +141 | 500 | +114 | 500 | +118 |
| 550 | +154 | 550 | +144 | 550 | +121 | 550 | +117 |
| 600 | +152 | 600 | +139 | 600 | +125 | 600 | +116 |
| 650 | +158 | 650 | +131 | 650 | +135 | 650 | +117 |
| 700 | +159 | 700 | +131 | 700 | +136 | 700 | +116 |
| 750 | +155 | 750 | +130 | 750 | +129 | 750 | +120 |
| 800 | +152 | 800 | +124 | 800 | +125 | 800 | +109 |
| 850 | +146 | 850 | +133 | 850 | +131 | 850 | +114 |
| 900 | +144 | 900 | +134 | 900 | +139 | 900 | +112 |
| 950 | +140 | 950 | +132 | 950 | +141 | 950 | +101 |
| 311000 | +139 | 313000 | +129 | 315000 | +148 | 317000 | +105 |
| 050 | +138 | 050 | +125 | 050 | +143 | 050 | +108 |
| 100 | +149 | 100 | +131 | 100 | +145 | 100 | +109 |
| 150 | +155 | 150 | +128 | 150 | +153 | 150 | +115 |
| 200 | +155 | 200 | +132 | 200 | +147 | 200 | +114 |
| 250 | +142 | 250 | +124 | 250 | +147 | 250 | +112 |
| 300 | +142 | 300 | +128 | 300 | +145 | 300 | +109 |
| 350 | +140 | 350 | +118 | 350 | +138 | 350 | +110 |
| 400 | +137 | 400 | +121 | 400 | +135 | 400 | +107 |
| 450 | +137 | 450 | +126 | 450 | +129 | 450 | +101 |
| 500 | +137 | 500 | +130 | 500 | +128 | 500 | +109 |
| 550 | +140 | 550 | +119 | 550 | +125 | 550 | +112 |
| 600 | +139 | 600 | +114 | 600 | +121 | 600 | +111 |
| 650 | +145 | 650 | +111 | 650 | +126 | 650 | +106 |
| 700 | +146 | 700 | +115 | 709 | +121 | 700 | +105 |
| 750 | +149 | 750 | + 99 | 750 | +127 | 750 | +100 |
| 800 | +148 | 800 | +107 | 800 | +130 | 800 | + 92 |
| 850 | +146 | 850 | +104 | 850 | +131 | 850 | + 86 |
| 900 | +149 | 900 | + 94 | 900 | +127 | 900 | + 89 |
| 950 | +147 | 950 | + 94 | 950 | +131 | 950 | + 89 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 318000 | + 83 | 320000 | + 71 | 322000 | + 25 | 324000 | — 12 |
| 050 | + 85 | 050 | + 66 | 050 | + 22 | 050 | — 8 |
| 100 | + 86 | 100 | + 65 | 100 | + 18 | 100 | — 18 |
| 150 | + 89 | 150 | + 58 | 150 | + 19 | 150 | — 22 |
| 200 | + 91 | 200 | + 63 | 200 | + 20 | 200 | — 21 |
| 250 | + 86 | 250 | + 61 | 250 | + 10 | 250 | — 29 |
| 300 | + 75 | 300 | + 54 | 300 | + 9 | 300 | — 30 |
| 350 | + 73 | 350 | + 55 | 350 | + 3 | 350 | — 46 |
| 400 | + 80 | 400 | + 48 | 400 | + 1 | 400 | — 50 |
| 450 | + 81 | 450 | + 52 | 450 | — 4 | 450 | — 53 |
| 500 | + 87 | 500 | + 47 | 500 | 0 | 500 | — 55 |
| 550 | + 85 | 550 | + 41 | 550 | — 10 | 550 | — 60 |
| 600 | + 84 | 600 | + 29 | 600 | — 16 | 600 | — 62 |
| 650 | + 81 | 650 | + 26 | 650 | — 23 | 650 | — 67 |
| 700 | + 76 | 700 | + 6 | 700 | — 17 | 700 | — 75 |
| 750 | + 76 | 750 | + 17 | 750 | — 24 | 750 | — 81 |
| 800 | + 76 | 800 | + 23 | 800 | — 24 | 800 | — 83 |
| 850 | + 74 | 850 | + 30 | 850 | — 19 | 850 | — 79 |
| 900 | + 82 | 900 | + 32 | 900 | — 29 | 900 | — 79 |
| 950 | + 80 | 950 | + 28 | 950 | — 30 | 950 | — 82 |
| 319000 | + 78 | 321000 | + 32 | 323000 | — 36 | 325000 | — 92 |
| 050 | + 81 | 050 | + 27 | 050 | — 28 | 050 | — 98 |
| 100 | + 80 | 100 | + 27 | 100 | — 33 | 100 | — 97 |
| 150 | + 81 | 150 | + 29 | 150 | — 27 | 150 | — 84 |
| 200 | + 85 | 200 | + 31 | 200 | — 18 | 200 | — 88 |
| 250 | + 86 | 250 | + 28 | 250 | — 18 | 250 | — 91 |
| 300 | + 89 | 300 | + 38 | 300 | — 10 | 300 | — 87 |
| 350 | + 99 | 350 | + 29 | 350 | — 8 | 350 | — 89 |
| 400 | +102 | 400 | + 33 | 400 | — 14 | 400 | — 76 |
| 450 | + 90 | 450 | + 29 | 450 | — 17 | 450 | — 70 |
| 500 | + 87 | 500 | + 29 | 500 | — 21 | 500 | — 63 |
| 550 | + 88 | 550 | + 33 | 550 | — 18 | 550 | — 62 |
| 600 | + 84 | 600 | + 30 | 600 | — 19 | 600 | — 53 |
| 650 | + 85 | 650 | + 35 | 650 | — 19 | 650 | — 52 |
| 700 | + 81 | 700 | + 33 | 700 | — 17 | 700 | — 49 |
| 750 | + 82 | 750 | + 29 | 750 | — 16 | 750 | — 48 |
| 800 | + 81 | 800 | + 30 | 800 | — 24 | 800 | — 55 |
| 850 | + 76 | 850 | + 14 | 850 | — 21 | 850 | — 57 |
| 900 | + 83 | 900 | + 17 | 900 | — 22 | 900 | — 61 |
| 950 | + 70 | 950 | + 18 | 950 | — 17 | 950 | — 58 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 326000 | — 56 | 328000 | —100 | 330000 | — 83 | 332000 | —125 |
| 050 | — 56 | 050 | —104 | 050 | — 89 | 050 | —127 |
| 100 | — 68 | 100 | —107 | 100 | — 94 | 100 | —119 |
| 150 | — 73 | 150 | —109 | 150 | — 96 | 150 | —128 |
| 200 | — 79 | 200 | — 99 | 200 | — 90 | 200 | —132 |
| 250 | — 86 | 250 | — 96 | 250 | — 93 | 250 | —129 |
| 300 | — 84 | 300 | — 87 | 300 | —103 | 300 | —127 |
| 350 | — 78 | 350 | — 95 | 350 | —113 | 350 | —129 |
| 400 | — 76 | 400 | — 93 | 400 | —113 | 400 | —135 |
| 450 | — 71 | 450 | — 91 | 450 | —113 | 450 | —138 |
| 500 | — 66 | 500 | — 82 | 500 | —113 | 500 | —138 |
| 550 | — 65 | 550 | — 82 | 550 | —110 | 550 | —127 |
| 600 | — 71 | 600 | — 77 | 600 | —121 | 600 | —128 |
| 650 | — 65 | 650 | — 73 | 650 | —130 | 650 | —124 |
| 700 | — 71 | 700 | — 75 | 700 | —136 | 700 | —120 |
| 750 | — 70 | 750 | — 62 | 750 | —142 | 750 | —111 |
| 800 | — 63 | 800 | — 66 | 800 | —136 | 800 | —104 |
| 850 | — 61 | 850 | — 68 | 850 | —139 | 850 | — 98 |
| 900 | — 60 | 900 | — 70 | 900 | —142 | 900 | —105 |
| 950 | — 65 | 950 | — 73 | 950 | —138 | 950 | —103 |
| 327000 | — 60 | 329000 | — 72 | 331000 | —139 | 333000 | —105 |
| 050 | — 69 | 050 | — 67 | 050 | —131 | 050 | —118 |
| 100 | — 73 | 100 | — 75 | 100 | —122 | 100 | —114 |
| 150 | — 66 | 150 | — 82 | 150 | —116 | 150 | —111 |
| 200 | — 72 | 200 | — 77 | 200 | —117 | 200 | —111 |
| 250 | — 75 | 250 | — 71 | 250 | —123 | 250 | —109 |
| 300 | — 65 | 300 | — 76 | 300 | —134 | 300 | —112 |
| 350 | — 68 | 350 | — 81 | 350 | —132 | 350 | —113 |
| 400 | — 61 | 400 | — 78 | 400 | —137 | 400 | —110 |
| 450 | — 66 | 450 | — 82 | 450 | —128 | 450 | —110 |
| 500 | — 79 | 500 | — 74 | 500 | —129 | 500 | —116 |
| 550 | — 80 | 550 | — 69 | 550 | —139 | 550 | —120 |
| 600 | — 87 | 600 | — 75 | 600 | —144 | 600 | —114 |
| 650 | — 87 | 650 | — 71 | 650 | —142 | 650 | —116 |
| 700 | — 85 | 700 | — 73 | 700 | —141 | 700 | —114 |
| 750 | — 85 | 750 | — 76 | 750 | —133 | 750 | —115 |
| 800 | — 86 | 800 | — 81 | 800 | —128 | 800 | —124 |
| 850 | — 92 | 850 | — 71 | 850 | —126 | 850 | —128 |
| 900 | —101 | 900 | — 79 | 900 | —122 | 900 | —130 |
| 950 | —108 | 950 | — 79 | 950 | —119 | 950 | —129 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 334000 | —134 | 336000 | —145 | 338000 | —195 | 340000 | —160 |
| 050 | —120 | 050 | —148 | 050 | —198 | 050 | —156 |
| 100 | —121 | 100 | —149 | 100 | —187 | 100 | —160 |
| 150 | —124 | 150 | —163 | 150 | —201 | 150 | —164 |
| 200 | —130 | 200 | —162 | 200 | —205 | 200 | —165 |
| 250 | —126 | 250 | —167 | 250 | —214 | 250 | —160 |
| 300 | —129 | 300 | —171 | 300 | —222 | 300 | —167 |
| 350 | —128 | 350 | —170 | 350 | —229 | 350 | —167 |
| 400 | —133 | 400 | —168 | 400 | —225 | 400 | —163 |
| 450 | —133 | 450 | —162 | 450 | —236 | 450 | —169 |
| 500 | —127 | 500 | —168 | 500 | —233 | 500 | —164 |
| 550 | —127 | 550 | —168 | 550 | —234 | 550 | —152 |
| 600 | —126 | 600 | —171 | 600 | —241 | 600 | —153 |
| 650 | —124 | 650 | —172 | 650 | —231 | 650 | —161 |
| 700 | —129 | 700 | —173 | 700 | —225 | 700 | —166 |
| 750 | —127 | 750 | —173 | 750 | —221 | 750 | —160 |
| 800 | —134 | 800 | —186 | 800 | —222 | 800 | —161 |
| 850 | —128 | 850 | —182 | 850 | —220 | 850 | —163 |
| 900 | —119 | 900 | —180 | 900 | —220 | 900 | —164 |
| 950 | —113 | 950 | —172 | 950 | —217 | 950 | —180 |
| 335000 | —112 | 337000 | —174 | 339000 | —212 | 341000 | —183 |
| 050 | —121 | 050 | —177 | 050 | —207 | 050 | —185 |
| 100 | —126 | 100 | —178 | 100 | —205 | 100 | —183 |
| 150 | —138 | 150 | —181 | 150 | —206 | 150 | —178 |
| 200 | —127 | 200 | —180 | 200 | —209 | 200 | —169 |
| 250 | —132 | 250 | —187 | 250 | —210 | 250 | —177 |
| 300 | —134 | 300 | —186 | 300 | —203 | 300 | —175 |
| 350 | —131 | 350 | —191 | 350 | —203 | 350 | —186 |
| 400 | —130 | 400 | —188 | 400 | —195 | 400 | —173 |
| 450 | —137 | 450 | —186 | 450 | —190 | 450 | —174 |
| 500 | —140 | 500 | —181 | 500 | —185 | 500 | —182 |
| 550 | —141 | 550 | —187 | 550 | —178 | 550 | —183 |
| 600 | —143 | 600 | —193 | 600 | —179 | 600 | —188 |
| 650 | —145 | 650 | —197 | 650 | —178 | 650 | —190 |
| 700 | —155 | 700 | —202 | 700 | —171 | 700 | —191 |
| 750 | —154 | 750 | —191 | 750 | —167 | 750 | —196 |
| 800 | —142 | 800 | —184 | 800 | —170 | 800 | —199 |
| 850 | —142 | 850 | —182 | 850 | —169 | 850 | —200 |
| 900 | —154 | 900 | —188 | 900 | —163 | 900 | —194 |
| 950 | —146 | 950 | —192 | 950 | —160 | 950 | —186 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 342000 | —193 | 344000 | —193 | 346000 | —189 | 348000 | —211 |
| 050 | —192 | 050 | —188 | 050 | —188 | 050 | —224 |
| 100 | —188 | 100 | —185 | 100 | —194 | 100 | —228 |
| 150 | —192 | 150 | —190 | 150 | —206 | 150 | —217 |
| 200 | —190 | 200 | —195 | 200 | —202 | 200 | —211 |
| 250 | —191 | 250 | —198 | 250 | —202 | 250 | —211 |
| 300 | —198 | 300 | —204 | 300 | —194 | 300 | —209 |
| 350 | —198 | 350 | —205 | 350 | —203 | 350 | —196 |
| 400 | —207 | 400 | —207 | 400 | —199 | 400 | —201 |
| 450 | —204 | 450 | —200 | 450 | —206 | 450 | —213 |
| 500 | —196 | 500 | —201 | 500 | —212 | 500 | —216 |
| 550 | —193 | 550 | —196 | 550 | —213 | 550 | —208 |
| 600 | —199 | 600 | —191 | 600 | —217 | 600 | —205 |
| 650 | —199 | 650 | —188 | 650 | —221 | 650 | —207 |
| 700 | —205 | 700 | —191 | 700 | —215 | 700 | —209 |
| 750 | —208 | 750 | —189 | 750 | —222 | 750 | —212 |
| 800 | —218 | 800 | —188 | 800 | —226 | 800 | —209 |
| 850 | —209 | 850 | —185 | 850 | —225 | 850 | —207 |
| 900 | —210 | 900 | —184 | 900 | —228 | 900 | —205 |
| 950 | —201 | 950 | —195 | 950 | —224 | 950 | —210 |
| 343000 | —197 | 345000 | —203 | 347000 | —218 | 349000 | —207 |
| 050 | —192 | 050 | —204 | 050 | —223 | 050 | —203 |
| 100 | —193 | 100 | —202 | 100 | —226 | 100 | —201 |
| 150 | —191 | 150 | —205 | 150 | —226 | 150 | —200 |
| 200 | —191 | 200 | —199 | 200 | —232 | 200 | —200 |
| 250 | —197 | 250 | —196 | 250 | —232 | 250 | —196 |
| 300 | —192 | 300 | —199 | 300 | —231 | 300 | —195 |
| 350 | —191 | 350 | —190 | 350 | —223 | 350 | —193 |
| 400 | —190 | 400 | —185 | 400 | —213 | 400 | —207 |
| 450 | —181 | 450 | —184 | 450 | —210 | 450 | —204 |
| 500 | —177 | 500 | —184 | 500 | —198 | 500 | —202 |
| 550 | —178 | 550 | —190 | 550 | —205 | 550 | —197 |
| 600 | —188 | 600 | —195 | 600 | —205 | 600 | —204 |
| 650 | —196 | 650 | —195 | 650 | —208 | 650 | —203 |
| 700 | —200 | 700 | —196 | 700 | —204 | 700 | —206 |
| 750 | —194 | 750 | —191 | 750 | —207 | 750 | —214 |
| 800 | —191 | 800 | —193 | 800 | —203 | 800 | —212 |
| 850 | —194 | 850 | —196 | 850 | —207 | 850 | —222 |
| 900 | —192 | 900 | —191 | 900 | —201 | 900 | —221 |
| 950 | —193 | 950 | —197 | 950 | —201 | 950 | —229 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 350000 | —223 | 352000 | —222 | 354000 | —200 | 356000 | —243 |
| 050 | —219 | 050 | —225 | 050 | —207 | 050 | —243 |
| 100 | —221 | 100 | —229 | 100 | —210 | 100 | —234 |
| 150 | —221 | 150 | —226 | 150 | —210 | 150 | —240 |
| 200 | —221 | 200 | —219 | 200 | —209 | 200 | —242 |
| 250 | —225 | 250 | —220 | 250 | —202 | 250 | —242 |
| 300 | —223 | 300 | —218 | 300 | —209 | 300 | —246 |
| 350 | —226 | 350 | —209 | 350 | —219 | 350 | —245 |
| 400 | —227 | 400 | —225 | 400 | —222 | 400 | —242 |
| 450 | —237 | 450 | —217 | 450 | —224 | 450 | —231 |
| 500 | —236 | 500 | —218 | 500 | —233 | 500 | —237 |
| 550 | —242 | 550 | —220 | 550 | —231 | 550 | —242 |
| 600 | —247 | 600 | —219 | 600 | —231 | 600 | —240 |
| 650 | —247 | 650 | —212 | 650 | —226 | 650 | —236 |
| 700 | —245 | 700 | —200 | 700 | —234 | 700 | —225 |
| 750 | —245 | 750 | —200 | 750 | —233 | 750 | —222 |
| 800 | —249 | 800 | —203 | 800 | —232 | 800 | —211 |
| 850 | —243 | 850 | —205 | 850 | —231 | 850 | —213 |
| 900 | —241 | 900 | —197 | 900 | —228 | 900 | —215 |
| 950 | —231 | 950 | —191 | 950 | —227 | 950 | —220 |
| 351000 | —234 | 353000 | —189 | 355000 | —228 | 357000 | —219 |
| 050 | —234 | 050 | —183 | 050 | —242 | 050 | —217 |
| 100 | —244 | 100 | —186 | 100 | —249 | 100 | —217 |
| 150 | —234 | 150 | —187 | 150 | —251 | 150 | —212 |
| 200 | —229 | 200 | —184 | 200 | —246 | 200 | —212 |
| 250 | —235 | 250 | —188 | 250 | —242 | 250 | —205 |
| 300 | —238 | 300 | —183 | 300 | —246 | 300 | —205 |
| 350 | —242 | 350 | —184 | 350 | —255 | 350 | —204 |
| 400 | —239 | 400 | —181 | 400 | —246 | 400 | —204 |
| 450 | —241 | 450 | —187 | 450 | —250 | 450 | —201 |
| 500 | —243 | 500 | —190 | 500 | —251 | 500 | —200 |
| 550 | —236 | 550 | —200 | 550 | —257 | 550 | —202 |
| 600 | —237 | 600 | —188 | 600 | —253 | 600 | —200 |
| 650 | —226 | 650 | —198 | 650 | —249 | 650 | —197 |
| 700 | —243 | 700 | —201 | 700 | —253 | 700 | —203 |
| 750 | —244 | 750 | —199 | 750 | —256 | 750 | —210 |
| 800 | —241 | 800 | —198 | 800 | —252 | 800 | —217 |
| 850 | —239 | 850 | —192 | 850 | —255 | 850 | —216 |
| 900 | —237 | 900 | —193 | 900 | —248 | 900 | —206 |
| 950 | —231 | 950 | —202 | 950 | —247 | 950 | —202 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 358000 | —208 | 360000 | —166 | 362000 | —182 | 364000 | —128 |
| 050 | —203 | 050 | —168 | 050 | —175 | 050 | —128 |
| 100 | —196 | 100 | —169 | 100 | —174 | 100 | —118 |
| 150 | —198 | 150 | —154 | 150 | —170 | 150 | —123 |
| 200 | —195 | 200 | —162 | 200 | —169 | 200 | —130 |
| 250 | —198 | 250 | —161 | 250 | —169 | 250 | —130 |
| 300 | —204 | 300 | —162 | 300 | —172 | 300 | —130 |
| 350 | —210 | 350 | —166 | 350 | —173 | 350 | —129 |
| 400 | —210 | 400 | —162 | 400 | —177 | 400 | —119 |
| 450 | —220 | 450 | —162 | 450 | —176 | 450 | —120 |
| 500 | —218 | 500 | —161 | 500 | —177 | 500 | —115 |
| 550 | —214 | 550 | —156 | 550 | —171 | 550 | —115 |
| 600 | —213 | 600 | —152 | 600 | —170 | 600 | —119 |
| 650 | —220 | 650 | —145 | 650 | —158 | 650 | —124 |
| 700 | —226 | 700 | —145 | 700 | —159 | 700 | —125 |
| 750 | —232 | 750 | —129 | 750 | —158 | 750 | —116 |
| 800 | —241 | 800 | —125 | 800 | —149 | 800 | —111 |
| 850 | —224 | 850 | —134 | 850 | —141 | 850 | —105 |
| 900 | —224 | 900 | —131 | 900 | —138 | 900 | —105 |
| 950 | —225 | 950 | —138 | 950 | —147 | 950 | —112 |
| 359000 | —228 | 361000 | —145 | 363000 | —153 | 365000 | —110 |
| 050 | —235 | 050 | —148 | 050 | —148 | 050 | —115 |
| 100 | —223 | 100 | —148 | 100 | —149 | 100 | —107 |
| 150 | —219 | 150 | —134 | 150 | —145 | 150 | —108 |
| 200 | —221 | 200 | —130 | 200 | —147 | 200 | —106 |
| 250 | —215 | 250 | —140 | 250 | —135 | 250 | — 97 |
| 300 | —217 | 300 | —137 | 300 | —129 | 300 | — 98 |
| 350 | —213 | 350 | —149 | 350 | —128 | 350 | —105 |
| 400 | —208 | 400 | —150 | 400 | —128 | 400 | — 99 |
| 450 | —205 | 450 | —156 | 450 | —131 | 450 | — 99 |
| 500 | —201 | 500 | —162 | 500 | —131 | 500 | —115 |
| 550 | —198 | 550 | —169 | 550 | —124 | 550 | —125 |
| 600 | —209 | 600 | —171 | 600 | —127 | 600 | —137 |
| 650 | —198 | 650 | —173 | 650 | —131 | 650 | —137 |
| 700 | —198 | 700 | —173 | 700 | —129 | 700 | —140 |
| 750 | —199 | 750 | —172 | 750 | —135 | 750 | —136 |
| 800 | —193 | 800 | —178 | 800 | —132 | 800 | —138 |
| 850 | —189 | 850 | —176 | 850 | —124 | 850 | —144 |
| 900 | —191 | 900 | —172 | 900 | —129 | 900 | —137 |
| 950 | —176 | 950 | —177 | 950 | —126 | 950 | —133 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 366000 | —134 | 368000 | —118 | 370000 | — 92 | 372000 | + 7 |
| 050 | —134 | 050 | —118 | 050 | — 92 | 050 | + 7 |
| 100 | —133 | 100 | —116 | 100 | — 94 | 100 | + 10 |
| 150 | —134 | 150 | —120 | 150 | — 92 | 150 | + 6 |
| 200 | —135 | 200 | —118 | 200 | — 91 | 200 | + 2 |
| 250 | —140 | 250 | —121 | 250 | — 92 | 250 | + 10 |
| 300 | —147 | 300 | —122 | 300 | — 86 | 300 | + 2 |
| 350 | —155 | 350 | —129 | 350 | — 74 | 350 | + 3 |
| 400 | —159 | 400 | —115 | 400 | — 74 | 400 | + 11 |
| 450 | —162 | 450 | —122 | 450 | — 72 | 450 | + 9 |
| 500 | —156 | 500 | —128 | 500 | — 68 | 500 | + 11 |
| 550 | —156 | 550 | —123 | 550 | — 76 | 550 | + 16 |
| 600 | —149 | 600 | —127 | 600 | — 76 | 600 | + 23 |
| 650 | —135 | 650 | —122 | 650 | — 69 | 650 | + 23 |
| 700 | —127 | 700 | —117 | 700 | — 67 | 700 | + 15 |
| 750 | —130 | 750 | —124 | 750 | — 64 | 750 | + 7 |
| 800 | —128 | 800 | —133 | 800 | — 63 | 800 | + 4 |
| 850 | —127 | 850 | —131 | 850 | — 56 | 850 | — 3 |
| 900 | —125 | 900 | —128 | 900 | — 62 | 900 | — 2 |
| 950 | —121 | 950 | —126 | 950 | — 57 | 950 | + 4 |
| 367000 | —122 | 369000 | —122 | 371000 | — 47 | 373000 | + 1 |
| 050 | —121 | 050 | —113 | 050 | — 44 | 050 | + 1 |
| 100 | —119 | 100 | —119 | 100 | — 39 | 100 | + 2 |
| 150 | —125 | 150 | —116 | 150 | — 33 | 150 | + 1 |
| 200 | —110 | 200 | —119 | 200 | — 35 | 200 | — 6 |
| 250 | —118 | 250 | 118 | 250 | — 39 | 250 | — 13 |
| 300 | —122 | 300 | —113 | 300 | — 31 | 300 | — 7 |
| 350 | —122 | 350 | —115 | 350 | — 32 | 350 | — 2 |
| 400 | —115 | 400 | —114 | 400 | — 26 | 400 | — 5 |
| 450 | —114 | 450 | —111 | 450 | — 18 | 450 | + 4 |
| 500 | —121 | 500 | —113 | 500 | — 16 | 500 | + 6 |
| 550 | —125 | 550 | —111 | 550 | — 14 | 550 | + 14 |
| 600 | —120 | 600 | —115 | 600 | — 9 | 600 | + 12 |
| 650 | —121 | 650 | —101 | 650 | — 6 | 650 | + 5 |
| 700 | —124 | 700 | — 95 | 700 | — 2 | 700 | + 9 |
| 750 | —133 | 750 | — 90 | 750 | + 4 | 750 | + 10 |
| 800 | —133 | 800 | — 89 | 800 | + 1 | 800 | + 3 |
| 850 | —128 | 850 | — 87 | 850 | + 10 | 850 | + 6 |
| 900 | —135 | 900 | 86 | 900 | + 9 | 900 | + 8 |
| 950 | —126 | 950 | 88 | 950 | + 11 | 950 | + 15 |

| *n* | σ(*n*) | *n* | σ(*n*) | *n* | σ(*n*) | *n* | σ(*n*) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 374000 | + 11 | 376000 | — 6 | 378000 | + 15 | 380000 | + 25 |
| 050 | + 8 | 050 | 0 | 050 | + 19 | 050 | + 26 |
| 100 | + 5 | 100 | — 9 | 100 | + 21 | 100 | + 24 |
| 150 | + 6 | 150 | — 12 | 150 | + 15 | 150 | + 20 |
| 200 | + 3 | 200 | — 13 | 200 | + 5 | 200 | + 30 |
| 250 | + 8 | 250 | — 18 | 250 | — 2 | 250 | + 28 |
| 300 | + 16 | 300 | — 13 | 300 | 0 | 300 | + 35 |
| 350 | + 21 | 350 | — 13 | 350 | + 10 | 350 | + 23 |
| 400 | + 31 | 400 | — 10 | 400 | + 11 | 400 | + 15 |
| 450 | + 27 | 450 | — 8 | 450 | + 14 | 450 | + 20 |
| 500 | + 34 | 500 | — 7 | 500 | + 14 | 500 | + 17 |
| 550 | + 28 | 550 | — 8 | 550 | + 16 | 550 | + 22 |
| 600 | + 25 | 600 | — 8 | 600 | + 6 | 600 | + 30 |
| 650 | + 23 | 650 | — 8 | 650 | + 9 | 650 | + 28 |
| 700 | + 25 | 700 | — 8 | 700 | + 9 | 700 | + 31 |
| 750 | + 28 | 750 | — 9 | 750 | + 10 | 750 | + 37 |
| 800 | + 25 | 800 | — 10 | 800 | + 6 | 800 | + 35 |
| 850 | + 20 | 850 | — 7 | 850 | + 11 | 850 | + 38 |
| 900 | + 21 | 900 | — 4 | 900 | + 11 | 900 | + 30 |
| 950 | + 19 | 950 | — 8 | 950 | + 12 | 950 | + 31 |
| 375000 | + 12 | 377000 | — 8 | 379000 | + 12 | 381000 | + 20 |
| 050 | + 6 | 050 | — 5 | 050 | + 15 | 050 | + 15 |
| 100 | + 13 | 100 | — 5 | 100 | + 12 | 100 | + 15 |
| 150 | + 8 | 150 | — 9 | 150 | + 12 | 150 | + 22 |
| 200 | + 12 | 200 | - 7 | 200 | + 11 | 200 | + 24 |
| 250 | + 11 | 250 | 0 | 250 | + 18 | 250 | + 20 |
| 300 | + 7 | 300 | — 1 | 300 | + 12 | 300 | + 20 |
| 350 | + 20 | 350 | — 3 | 350 | + 12 | 350 | + 21 |
| 400 | + 16 | 400 | + 6 | 400 | + 23 | 400 | + 11 |
| 450 | + 21 | 450 | + 12 | 450 | + 23 | 450 | + 22 |
| 500 | + 14 | 500 | + 8 | 500 | + 32 | 500 | + 19 |
| 550 | + 13 | 550 | + 1 | 550 | + 30 | 550 | + 11 |
| 600 | + 11 | 600 | + 2 | 600 | + 27 | 600 | + 13 |
| 650 | 0 | 650 | — 4 | 650 | + 23 | 650 | + 13 |
| 700 | — 1 | 700 | + 5 | 700 | + 19 | 700 | + 13 |
| 750 | + 5 | 750 | + 7 | 750 | + 23 | 750 | + 21 |
| 800 | — 2 | 800 | + 6 | 800 | + 22 | 800 | + 19 |
| 850 | + 2 | 850 | + 9 | 850 | + 22 | 850 | + 19 |
| 900 | — 3 | 900 | + 16 | 900 | + 22 | 900 | + 16 |
| 950 | + 3 | 950 | + 15 | 950 | + 27 | 950 | + 17 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 382000 | + 13 | 384000 | − 7 | 386000 | + 11 | 388000 | + 49 |
| 050 | + 11 | 050 | − 16 | 050 | + 11 | 050 | + 52 |
| 100 | + 17 | 100 | − 12 | 100 | + 14 | 100 | + 58 |
| 150 | + 18 | 150 | − 6 | 150 | + 7 | 150 | + 57 |
| 200 | + 26 | 200 | − 5 | 200 | + 5 | 200 | + 50 |
| 250 | + 39 | 250 | − 9 | 250 | + 11 | 250 | + 55 |
| 300 | + 31 | 300 | − 14 | 300 | + 6 | 300 | + 56 |
| 350 | + 32 | 350 | − 11 | 350 | + 8 | 350 | + 53 |
| 400 | + 27 | 400 | − 14 | 400 | + 4 | 400 | + 53 |
| 450 | + 26 | 450 | − 6 | 450 | − 2 | 450 | + 63 |
| 500 | + 34 | 500 | − 9 | 500 | + 6 | 500 | + 61 |
| 550 | + 33 | 550 | − 12 | 550 | − 1 | 550 | + 65 |
| 600 | + 34 | 600 | − 11 | 600 | + 6 | 600 | + 77 |
| 650 | + 25 | 650 | − 6 | 650 | + 1 | 650 | + 79 |
| 700 | + 24 | 700 | − 5 | 700 | − 2 | 700 | + 68 |
| 750 | + 15 | 750 | − 3 | 750 | − 6 | 750 | + 71 |
| 800 | + 16 | 800 | + 2 | 800 | + 7 | 800 | + 75 |
| 850 | + 5 | 850 | − 3 | 850 | + 19 | 850 | + 74 |
| 900 | 0 | 900 | + 6 | 900 | + 23 | 900 | + 73 |
| 950 | + 10 | 950 | − 2 | 950 | + 29 | 950 | + 63 |
| 383000 | + 12 | 385000 | 0 | 387000 | + 24 | 389000 | + 61 |
| 050 | + 16 | 050 | − 1 | 050 | + 30 | 050 | + 56 |
| 100 | + 11 | 100 | − 1 | 100 | + 29 | 100 | + 55 |
| 150 | + 5 | 150 | + 1 | 150 | + 27 | 150 | + 48 |
| 200 | + 3 | 200 | + 3 | 200 | + 35 | 200 | + 49 |
| 250 | + 6 | 250 | + 11 | 250 | + 41 | 250 | + 46 |
| 300 | + 5 | 300 | + 5 | 300 | + 38 | 300 | + 41 |
| 350 | + 3 | 350 | + 10 | 350 | + 38 | 350 | + 46 |
| 400 | + 7 | 400 | + 9 | 400 | + 42 | 400 | + 47 |
| 450 | + 7 | 450 | + 1 | 450 | + 45 | 450 | + 57 |
| 500 | + 4 | 500 | + 7 | 500 | + 41 | 500 | + 63 |
| 550 | + 5 | 550 | + 4 | 550 | + 47 | 550 | + 59 |
| 600 | + 11 | 600 | + 3 | 600 | + 57 | 600 | + 51 |
| 650 | + 5 | 650 | + 5 | 650 | + 58 | 650 | + 58 |
| 700 | 0 | 700 | + 1 | 700 | + 56 | 700 | + 65 |
| 750 | + 2 | 750 | + 5 | 750 | + 52 | 750 | + 60 |
| 800 | − 3 | 800 | + 13 | 800 | + 51 | 800 | + 58 |
| 850 | − 4 | 850 | + 16 | 850 | + 53 | 850 | + 61 |
| 900 | + 3 | 900 | + 14 | 900 | + 65 | 900 | + 64 |
| 950 | + 1 | 950 | + 6 | 950 | + 63 | 950 | + 60 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 390000 | + 58 | 392000 | + 48 | 394000 | — 42 | 396000 | — 20 |
| 050 | + 62 | 050 | + 51 | 050 | — 45 | 050 | — 21 |
| 100 | + 61 | 100 | + 55 | 100 | — 48 | 100 | — 26 |
| 150 | + 61 | 150 | + 54 | 150 | — 44 | 150 | — 16 |
| 200 | + 54 | 200 | + 47 | 200 | — 40 | 200 | — 11 |
| 250 | + 54 | 250 | + 42 | 250 | — 43 | 250 | — 21 |
| 300 | + 58 | 300 | + 23 | 300 | — 47 | 300 | — 19 |
| 350 | + 64 | 350 | + 21 | 350 | — 37 | 350 | — 30 |
| 400 | + 57 | 400 | + 17 | 400 | — 46 | 400 | — 33 |
| 450 | + 48 | 450 | + 12 | 450 | — 35 | 450 | — 24 |
| 500 | + 40 | 500 | + 13 | 500 | — 33 | 500 | — 21 |
| 550 | + 37 | 550 | + 9 | 550 | — 27 | 550 | — 18 |
| 600 | + 41 | 600 | + 13 | 600 | — 26 | 600 | — 21 |
| 650 | + 40 | 650 | + 8 | 650 | — 31 | 650 | — 24 |
| 700 | + 38 | 700 | + 12 | 700 | — 27 | 700 | — 18 |
| 750 | + 37 | 750 | + 4 | 750 | — 35 | 750 | — 18 |
| 800 | + 32 | 800 | + 3 | 800 | — 31 | 800 | — 4 |
| 850 | + 34 | 850 | — 6 | 850 | — 36 | 850 | — 1 |
| 900 | + 31 | 900 | + 4 | 900 | — 36 | 900 | — 1 |
| 950 | + 37 | 950 | + 5 | 950 | — 28 | 950 | + 2 |
| 391000 | + 34 | 393000 | — 5 | 395000 | — 34 | 397000 | + 8 |
| 050 | + 27 | 050 | — 2 | 050 | — 41 | 050 | — 2 |
| 100 | + 30 | 100 | — 7 | 100 | — 44 | 100 | + 2 |
| 150 | + 28 | 150 | — 9 | 150 | — 51 | 150 | + 11 |
| 200 | + 27 | 200 | — 7 | 200 | — 47 | 200 | + 10 |
| 250 | + 24 | 250 | — 9 | 250 | — 45 | 250 | + 13 |
| 300 | + 30 | 300 | — 3 | 300 | — 50 | 300 | + 10 |
| 350 | + 33 | 350 | — 1 | 350 | — 47 | 350 | + 7 |
| 400 | + 25 | 400 | — 4 | 400 | — 38 | 400 | + 12 |
| 450 | + 37 | 450 | — 4 | 450 | — 40 | 450 | + 3 |
| 500 | + 46 | 500 | + 1 | 500 | — 45 | 500 | + 4 |
| 550 | + 52 | 550 | — 7 | 550 | — 42 | 550 | — 2 |
| 600 | + 58 | 600 | — 27 | 600 | — 46 | 600 | — 2 |
| 650 | + 57 | 650 | — 23 | 650 | — 51 | 650 | — 3 |
| 700 | + 56 | 700 | — 30 | 700 | — 41 | 700 | + 7 |
| 750 | + 49 | 750 | — 34 | 750 | — 41 | 750 | + 10 |
| 800 | + 49 | 800 | — 31 | 800 | — 31 | 800 | + 5 |
| 850 | + 45 | 850 | — 22 | 850 | — 20 | 850 | + 5 |
| 900 | + 44 | 900 | — 31 | 900 | — 26 | 900 | + 16 |
| 950 | + 46 | 950 | — 37 | 950 | — 20 | 950 | + 30 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 398000 | + 32 | 400000 | + 9 | 402000 | + 16 | 404000 | + 47 |
| 050 | + 24 | 050 | + 18 | 050 | + 18 | 050 | + 46 |
| 100 | + 29 | 100 | + 14 | 100 | + 12 | 100 | + 49 |
| 150 | + 20 | 150 | + 12 | 150 | + 10 | 150 | + 50 |
| 200 | + 17 | 200 | + 13 | 200 | + 18 | 200 | + 51 |
| 250 | + 14 | 250 | + 5 | 250 | + 24 | 250 | + 54 |
| 300 | + 18 | 300 | + 4 | 300 | + 23 | 300 | + 47 |
| 350 | + 19 | 350 | + 10 | 350 | + 16 | 350 | + 39 |
| 400 | + 24 | 400 | + 10 | 400 | + 6 | 400 | + 36 |
| 450 | + 19 | 450 | + 8 | 450 | + 11 | 450 | + 36 |
| 500 | + 13 | 500 | + 8 | 500 | + 21 | 500 | + 27 |
| 550 | + 17 | 550 | + 9 | 550 | + 20 | 550 | + 23 |
| 600 | + 21 | 600 | + 12 | 600 | + 24 | 600 | + 28 |
| 650 | + 18 | 650 | + 10 | 650 | + 16 | 650 | + 43 |
| 700 | + 12 | 700 | + 5 | 700 | + 24 | 700 | + 49 |
| 750 | + 13 | 750 | + 10 | 750 | + 26 | 750 | + 50 |
| 800 | + 9 | 800 | + 15 | 800 | + 22 | 800 | + 51 |
| 850 | + 12 | 850 | + 16 | 850 | + 21 | 850 | + 56 |
| 900 | + 17 | 900 | + 21 | 900 | + 19 | 900 | + 58 |
| 950 | + 13 | 950 | + 26 | 950 | + 14 | 950 | + 54 |
| 399000 | + 16 | 401000 | + 35 | 403000 | + 29 | 405000 | + 54 |
| 050 | + 22 | 050 | + 34 | 050 | + 34 | 050 | + 54 |
| 100 | + 21 | 100 | + 30 | 100 | + 32 | 100 | + 53 |
| 150 | + 20 | 150 | + 31 | 150 | + 29 | 150 | + 63 |
| 200 | + 13 | 200 | + 35 | 200 | + 33 | 200 | + 60 |
| 250 | + 14 | 250 | + 30 | 250 | + 37 | 250 | + 56 |
| 300 | + 11 | 300 | + 23 | 300 | + 24 | 300 | + 51 |
| 350 | + 19 | 350 | + 26 | 350 | + 24 | 350 | + 51 |
| 400 | + 19 | 400 | + 24 | 400 | + 21 | 400 | + 59 |
| 450 | + 25 | 450 | + 35 | 450 | + 25 | 450 | + 58 |
| 500 | + 31 | 500 | + 30 | 500 | + 30 | 500 | + 60 |
| 550 | + 28 | 550 | + 19 | 550 | + 31 | 550 | + 63 |
| 600 | + 26 | 600 | + 28 | 600 | + 30 | 600 | + 69 |
| 650 | + 24 | 650 | + 19 | 650 | + 36 | 650 | + 66 |
| 700 | + 24 | 700 | + 16 | 700 | + 49 | 700 | + 57 |
| 750 | + 22 | 750 | + 15 | 750 | + 40 | 750 | + 51 |
| 800 | + 22 | 800 | + 19 | 800 | + 49 | 800 | + 49 |
| 850 | + 29 | 850 | + 18 | 850 | + 46 | 850 | + 58 |
| 900 | + 23 | 900 | + 18 | 900 | + 46 | 900 | + 57 |
| 950 | + 19 | 950 | + 15 | 950 | + 51 | 950 | + 56 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 406000 | + 59 | 408000 | + 77 | 410000 | + 83 | 412000 | +115 |
| 050 | + 64 | 050 | + 78 | 050 | + 79 | 050 | +107 |
| 100 | + 64 | 100 | + 76 | 100 | + 84 | 100 | +111 |
| 150 | + 65 | 150 | + 79 | 150 | + 91 | 150 | +107 |
| 200 | + 73 | 200 | + 82 | 200 | + 93 | 200 | +111 |
| 250 | + 73 | 250 | + 79 | 250 | + 90 | 250 | +105 |
| 300 | + 68 | 300 | + 91 | 300 | +102 | 300 | +101 |
| 350 | + 68 | 350 | + 90 | 350 | +109 | 350 | +103 |
| 400 | + 65 | 400 | + 95 | 400 | +107 | 400 | +110 |
| 450 | + 74 | 450 | + 89 | 450 | +117 | 450 | +119 |
| 500 | + 85 | 500 | + 88 | 500 | +111 | 500 | +119 |
| 550 | + 87 | 550 | + 92 | 550 | +112 | 550 | +131 |
| 600 | + 76 | 600 | + 91 | 600 | +113 | 600 | +131 |
| 650 | + 77 | 650 | + 88 | 650 | +122 | 650 | +125 |
| 700 | + 70 | 700 | + 76 | 700 | +124 | 700 | +129 |
| 750 | + 76 | 750 | + 83 | 750 | +117 | 750 | +136 |
| 800 | + 94 | 800 | + 87 | 800 | +112 | 800 | +140 |
| 850 | + 95 | 850 | + 85 | 850 | +118 | 850 | +150 |
| 900 | + 94 | 900 | + 88 | 900 | +125 | 900 | +143 |
| 950 | +101 | 950 | + 81 | 950 | +132 | 950 | +133 |
| 407000 | + 93 | 409000 | + 80 | 411000 | +135 | 413000 | +146 |
| 050 | + 92 | 050 | + 78 | 050 | +127 | 050 | +151 |
| 100 | + 92 | 100 | + 86 | 100 | +127 | 100 | +150 |
| 150 | + 92 | 150 | + 87 | 150 | +125 | 150 | +150 |
| 200 | + 98 | 200 | + 94 | 200 | +128 | 200 | +145 |
| 250 | + 98 | 250 | + 99 | 250 | +123 | 250 | +153 |
| 300 | + 93 | 300 | + 85 | 300 | +127 | 300 | +156 |
| 350 | + 94 | 350 | + 85 | 350 | +133 | 350 | +149 |
| 400 | + 89 | 400 | + 84 | 400 | +129 | 400 | +155 |
| 450 | + 93 | 450 | + 85 | 450 | +124 | 450 | +146 |
| 500 | + 86 | 500 | + 75 | 500 | +119 | 500 | +144 |
| 550 | + 94 | 550 | + 75 | 550 | +125 | 550 | +147 |
| 600 | + 95 | 600 | + 79 | 600 | +125 | 600 | +146 |
| 650 | +100 | 650 | + 80 | 650 | +126 | 650 | +155 |
| 700 | + 94 | 700 | + 83 | 700 | +119 | 700 | +153 |
| 750 | + 89 | 750 | + 78 | 750 | +110 | 750 | +153 |
| 800 | + 88 | 800 | + 79 | 800 | +107 | 800 | +149 |
| 850 | + 90 | 850 | + 89 | 850 | + 98 | 850 | +153 |
| 900 | + 82 | 900 | + 86 | 900 | +105 | 900 | +154 |
| 950 | + 80 | 950 | + 85 | 950 | +112 | 950 | +153 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 414000 | +153 | 416000 | +147 | 418000 | +162 | 420000 | +138 |
| 050 | +146 | 050 | +145 | 050 | +163 | 050 | +135 |
| 100 | +141 | 100 | +147 | 100 | +172 | 100 | +143 |
| 150 | +141 | 150 | +155 | 150 | +175 | 150 | +142 |
| 200 | +145 | 200 | +160 | 200 | +169 | 200 | +145 |
| 250 | +147 | 250 | +155 | 250 | +165 | 250 | +141 |
| 300 | +148 | 300 | +156 | 300 | +153 | 300 | +144 |
| 350 | +156 | 350 | +155 | 350 | +152 | 350 | +144 |
| 400 | +149 | 400 | +157 | 400 | +145 | 400 | +140 |
| 450 | +141 | 450 | +147 | 450 | +142 | 450 | +141 |
| 500 | +146 | 500 | +156 | 500 | +148 | 500 | +143 |
| 550 | +149 | 550 | +151 | 550 | +158 | 550 | +143 |
| 600 | +155 | 600 | +155 | 600 | +169 | 600 | +152 |
| 650 | +157 | 650 | +148 | 650 | +163 | 650 | +167 |
| 700 | +146 | 700 | +152 | 700 | +168 | 700 | +164 |
| 750 | +143 | 750 | +153 | 750 | +168 | 750 | +163 |
| 800 | +132 | 800 | +165 | 800 | +169 | 800 | +160 |
| 850 | +127 | 850 | +170 | 850 | +161 | 850 | +162 |
| 900 | +131 | 900 | +167 | 900 | +161 | 900 | +153 |
| 950 | +137 | 950 | +172 | 950 | +157 | 950 | +152 |
| 415000 | +140 | 417000 | +165 | 419000 | +149 | 421000 | +154 |
| 050 | +145 | 050 | +163 | 050 | +148 | 050 | +149 |
| 100 | +139 | 100 | +168 | 100 | +145 | 100 | +150 |
| 150 | +138 | 150 | +163 | 150 | +146 | 150 | +152 |
| 200 | +136 | 200 | +161 | 200 | +142 | 200 | +152 |
| 250 | +136 | 250 | +158 | 250 | +147 | 250 | +157 |
| 300 | +134 | 300 | +165 | 300 | +144 | 300 | +150 |
| 350 | +138 | 350 | +171 | 350 | +149 | 350 | +144 |
| 400 | +142 | 400 | +173 | 400 | +149 | 400 | +141 |
| 450 | +145 | 450 | +164 | 450 | +149 | 450 | +131 |
| 500 | +141 | 500 | +168 | 500 | +138 | 500 | +131 |
| 550 | +145 | 550 | +167 | 550 | +135 | 550 | +140 |
| 600 | +145 | 600 | +162 | 600 | +127 | 600 | +146 |
| 650 | +146 | 650 | +163 | 650 | +129 | 650 | +152 |
| 700 | +141 | 700 | +162 | 700 | +135 | 700 | +152 |
| 750 | +148 | 750 | +153 | 750 | +131 | 750 | +155 |
| 800 | +150 | 800 | +147 | 800 | +124 | 800 | +153 |
| 850 | +150 | 850 | +150 | 850 | +122 | 850 | +160 |
| 900 | +149 | 900 | +158 | 900 | +128 | 900 | +165 |
| 950 | +157 | 950 | +164 | 950 | +132 | 950 | +166 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 422000 | +167 | 424000 | +131 | 426000 | +121 | 428000 | +119 |
| 050 | +175 | 050 | +132 | 050 | +119 | 050 | +113 |
| 100 | +174 | 100 | +132 | 100 | +120 | 100 | +110 |
| 150 | +172 | 150 | +120 | 150 | +128 | 150 | +116 |
| 200 | +182 | 200 | +118 | 200 | +128 | 200 | +113 |
| 250 | +179 | 250 | +121 | 250 | +134 | 250 | +104 |
| 300 | +172 | 300 | +121 | 300 | +144 | 300 | +114 |
| 350 | +186 | 350 | +116 | 350 | +151 | 350 | +106 |
| 400 | +184 | 400 | +120 | 400 | +149 | 400 | +103 |
| 450 | +190 | 450 | +119 | 450 | +147 | 450 | +110 |
| 500 | +192 | 500 | +118 | 500 | +161 | 500 | +104 |
| 550 | +192 | 550 | +119 | 550 | +161 | 550 | +100 |
| 600 | +180 | 600 | +116 | 600 | +160 | 600 | +100 |
| 650 | +180 | 650 | +114 | 650 | +162 | 650 | +103 |
| 700 | +194 | 700 | +115 | 700 | +165 | 700 | + 98 |
| 750 | +190 | 750 | +113 | 750 | +160 | 750 | +105 |
| 800 | +188 | 800 | +112 | 800 | +157 | 800 | +103 |
| 850 | +187 | 850 | +114 | 850 | +159 | 850 | + 97 |
| 900 | +172 | 900 | +110 | 900 | +142 | 900 | + 84 |
| 950 | +175 | 950 | +115 | 950 | +136 | 950 | + 93 |
| 423000 | +175 | 425000 | +119 | 427000 | +140 | 429000 | + 92 |
| 050 | +167 | 050 | +125 | 050 | +130 | 050 | + 89 |
| 100 | +153 | 100 | +123 | 100 | +131 | 100 | + 95 |
| 150 | +160 | 150 | +128 | 150 | +136 | 150 | + 83 |
| 200 | +167 | 200 | +134 | 200 | +135 | 200 | + 86 |
| 250 | +163 | 250 | +125 | 250 | +134 | 250 | + 77 |
| 300 | +159 | 300 | +127 | 300 | +136 | 300 | + 68 |
| 350 | +163 | 350 | +130 | 350 | +139 | 350 | + 71 |
| 400 | +161 | 400 | +126 | 400 | +131 | 400 | + 67 |
| 450 | +149 | 450 | +129 | 450 | +120 | 450 | + 67 |
| 500 | +145 | 500 | +121 | 500 | +119 | 500 | + 68 |
| 550 | +139 | 550 | +118 | 550 | +111 | 550 | + 67 |
| 600 | +145 | 600 | +122 | 600 | +106 | 600 | + 61 |
| 650 | +147 | 650 | +122 | 650 | +118 | 650 | + 59 |
| 700 | +147 | 700 | +127 | 700 | +121 | 700 | + 57 |
| 750 | +146 | 750 | +129 | 750 | +111 | 750 | + 59 |
| 800 | +141 | 800 | +128 | 800 | +110 | 800 | + 62 |
| 850 | +137 | 850 | +127 | 850 | +119 | 850 | + 66 |
| 900 | +127 | 900 | +120 | 900 | +121 | 900 | + 64 |
| 950 | +127 | 950 | +119 | 950 | +121 | 950 | + 56 |

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 430000 | + 52 | 432000 | + 39 | 434000 | — 17 | 436000 | — 71 |
| 050 | + 40 | 050 | + 37 | 050 | — 16 | 050 | — 70 |
| 100 | + 45 | 100 | + 29 | 100 | — 6 | 100 | — 77 |
| 150 | + 44 | 150 | + 28 | 150 | — 9 | 150 | — 68 |
| 200 | + 39 | 200 | + 20 | 200 | — 12 | 200 | — 65 |
| 250 | + 47 | 250 | + 26 | 250 | — 15 | 250 | — 63 |
| 300 | + 40 | 300 | + 18 | 300 | — 17 | 300 | — 59 |
| 350 | + 43 | 350 | + 16 | 350 | — 13 | 350 | — 64 |
| 400 | + 58 | 400 | + 2 | 400 | — 18 | 400 | — 52 |
| 450 | + 61 | 450 | + 4 | 450 | — 21 | 450 | — 52 |
| 500 | + 72 | 500 | + 10 | 500 | — 28 | 500 | — 53 |
| 550 | + 74 | 550 | + 11 | 550 | — 24 | 550 | — 58 |
| 600 | + 73 | 600 | + 4 | 600 | — 30 | 600 | — 61 |
| 650 | + 71 | 650 | — 1 | 650 | — 26 | 650 | — 53 |
| 700 | + 75 | 700 | — 1 | 700 | — 19 | 700 | — 51 |
| 750 | + 72 | 750 | 0 | 750 | — 15 | 750 | — 64 |
| 800 | + 71 | 800 | + 3 | 800 | — 13 | 800 | — 53 |
| 850 | + 62 | 850 | + 2 | 850 | — 24 | 850 | — 49 |
| 900 | + 61 | 900 | + 11 | 900 | — 24 | 900 | — 49 |
| 950 | + 60 | 950 | + 16 | 950 | — 22 | 950 | — 40 |
| 431000 | + 62 | 433000 | + 10 | 435000 | — 21 | 437000 | — 41 |
| 050 | + 63 | 050 | + 10 | 050 | — 31 | 050 | — 40 |
| 100 | + 66 | 100 | — 4 | 100 | — 19 | 100 | — 44 |
| 150 | + 70 | 150 | 0 | 150 | — 21 | 150 | — 53 |
| 200 | + 60 | 200 | — 14 | 200 | — 27 | 200 | — 51 |
| 250 | + 60 | 250 | — 13 | 250 | — 32 | 250 | — 50 |
| 300 | + 43 | 300 | — 16 | 300 | — 52 | 300 | — 50 |
| 350 | + 33 | 350 | — 16 | 350 | — 50 | 350 | — 47 |
| 400 | + 41 | 400 | — 18 | 400 | — 48 | 400 | — 50 |
| 450 | + 38 | 450 | — 16 | 450 | — 53 | 450 | — 48 |
| 500 | + 45 | 500 | — 17 | 500 | — 50 | 500 | — 44 |
| 550 | + 42 | 550 | — 13 | 550 | — 45 | 550 | — 52 |
| 600 | + 40 | 600 | — 13 | 600 | — 40 | 600 | — 52 |
| 650 | + 41 | 650 | — 11 | 650 | — 45 | 650 | — 56 |
| 700 | + 43 | 700 | — 15 | 700 | — 51 | 700 | — 59 |
| 750 | + 45 | 750 | — 18 | 750 | — 62 | 750 | — 59 |
| 800 | + 43 | 800 | — 23 | 800 | — 64 | 800 | — 54 |
| 850 | + 40 | 850 | — 21 | 850 | — 65 | 850 | — 58 |
| 900 | + 36 | 900 | — 23 | 900 | — 71 | 900 | — 59 |
| 950 | + 40 | 950 | — 20 | 950 | — 73 | 950 | — 51 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 438000 | — 54 | 440000 | — 6 | 442000 | — 3* | 444000 | —51* |
| 050 | — 47 | 050 | +11* | 050 | —12* | 050 | —50* |
| 100 | — 44 | 100 | +16* | 100 | —15* | 100 | —43* |
| 150 | — 41 | 150 | +24* | 150 | —16* | 150 | —47* |
| 200 | — 22 | 200 | +11* | 200 | —19* | 200 | —56* |
| 250 | — 18 | 250 | — 1* | 250 | —24* | 250 | —49* |
| 300 | — 14 | 300 | — 7* | 300 | —29* | 300 | —50* |
| 350 | — 15 | 350 | — 6* | 350 | —30* | 350 | —43* |
| 400 | — 20 | 400 | — 3* | 400 | —29* | 400 | —35* |
| 450 | — 17 | 450 | — 3* | 450 | —23* | 450 | —42* |
| 500 | — 18 | 500 | — 2* | 500 | —22* | 500 | —44* |
| 550 | — 27 | 550 | — 9* | 550 | —25* | 550 | —51* |
| 600 | — 18 | 600 | + 1* | 600 | —27* | 600 | —45* |
| 650 | — 17 | 650 | + 4* | 650 | —22* | 650 | —45* |
| 700 | — 20 | 700 | —10* | 700 | —18* | 700 | —36* |
| 750 | — 12 | 750 | —13* | 750 | —19* | 750 | —31* |
| 800 | — 16 | 800 | —14* | 800 | —26* | 800 | —29* |
| 850 | — 14 | 850 | —13* | 850 | —29* | 850 | —37* |
| 900 | — 19 | 900 | —13* | 900 | —29* | 900 | —49* |
| 950 | — 12 | 950 | —14* | 950 | —21* | 950 | —47* |
| 439000 | — 12 | 441000 | —15* | 443000 | —23* | 445000 | —50* |
| 050 | — 7 | 050 | —23* | 050 | —21* | 050 | —56* |
| 100 | + 4 | 100 | —25* | 100 | —28* | 100 | —59* |
| 150 | — 5 | 150 | —22* | 150 | —26* | 150 | —62* |
| 200 | — 3 | 200 | —21* | 200 | —32* | 200 | —66* |
| 250 | + 3 | 250 | —15* | 250 | —39* | 250 | —56* |
| 300 | + 5 | 300 | —10* | 300 | —47* | 300 | —52* |
| 350 | 0 | 350 | —18* | 350 | —38* | 350 | —51* |
| 400 | + 3 | 400 | —26* | 400 | —36* | 400 | —41* |
| 450 | — 1 | 450 | —24* | 450 | —35* | 450 | —37* |
| 500 | + 2 | 500 | —23* | 500 | —26* | 500 | —42* |
| 550 | + 1 | 550 | —28* | 550 | —29* | 550 | —43* |
| 600 | + 2 | 600 | —33* | 600 | —42* | 600 | —38* |
| 650 | + 4 | 650 | —34* | 650 | —44* | 650 | —41* |
| 700 | — 3 | 700 | —24* | 700 | —48* | 700 | —31* |
| 750 | — 6 | 750 | —25* | 750 | —51* | 750 | —33* |
| 800 | — 10 | 800 | —18* | 800 | —52* | 800 | —40* |
| 850 | — 12 | 850 | —18* | 850 | —56* | 850 | —37* |
| 900 | — 9 | 900 | — 5* | 900 | —62* | 900 | —40* |
| 950 | — 10 | 950 | 0* | 950 | —54* | 950 | —39* |

* Eventuelle Correction $\pm 2$

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 446000 | —37* | 448000 | +33* | 450000 | +50* | 452000 | +11* |
| 050 | —31* | 050 | +31* | 050 | +49* | 050 | +10* |
| 100 | —25* | 100 | +35* | 100 | +47* | 100 | +11* |
| 150 | —23* | 150 | +39* | 150 | +39* | 150 | + 6* |
| 200 | —24* | 200 | +30* | 200 | +37* | 200 | + 6* |
| 250 | —19* | 250 | +24* | 250 | +27* | 250 | + 2* |
| 300 | —27* | 300 | +38* | 300 | +36* | 300 | + 3* |
| 350 | —22* | 350 | +41* | 350 | +35* | 350 | + 3* |
| 400 | —24* | 400 | +42* | 400 | +40* | 400 | +15* |
| 450 | —19* | 450 | +53* | 450 | +47* | 450 | +14* |
| 500 | —17* | 500 | +65* | 500 | +47* | 500 | +16* |
| 550 | —13* | 550 | +68* | 550 | +40* | 550 | +13* |
| 600 | 0* | 600 | +74* | 600 | +39* | 600 | +11* |
| 650 | + 4* | 650 | +75* | 650 | +35* | 650 | +16* |
| 700 | +15* | 700 | +70* | 700 | +37* | 700 | +15* |
| 750 | +11* | 750 | +70* | 750 | +48* | 750 | +24* |
| 800 | + 9* | 800 | +67* | 800 | +44* | 800 | +29* |
| 850 | +10* | 850 | +73* | 850 | +34* | 850 | +28* |
| 900 | +14* | 900 | +71* | 900 | +26* | 900 | +25* |
| 950 | + 7* | 950 | +68* | 950 | +35* | 950 | +22* |
| 447000 | +11* | 449000 | +60* | 451000 | +37* | 453000 | +31* |
| 050 | + 7* | 050 | +64* | 050 | +39* | 050 | +38* |
| 100 | +12* | 100 | +68* | 100 | +36* | 100 | +33* |
| 150 | + 8* | 150 | +65* | 150 | +38* | 150 | +28* |
| 200 | +11* | 200 | +65* | 200 | +42* | 200 | +18* |
| 250 | +13* | 250 | +61* | 250 | +52* | 250 | +21* |
| 300 | +16* | 300 | +60* | 300 | +53* | 300 | +21* |
| 350 | +19* | 350 | +60* | 350 | +39* | 350 | +15* |
| 400 | +21* | 400 | +53* | 400 | +34* | 400 | + 8* |
| 450 | +13* | 450 | +48* | 450 | +40* | 450 | +10* |
| 500 | +15* | 500 | +55* | 500 | +42* | 500 | +18* |
| 550 | +23* | 550 | +55* | 550 | +37* | 550 | +29* |
| 600 | +20* | 600 | +51* | 600 | +38* | 600 | +34* |
| 650 | +26* | 650 | +45* | 650 | +35* | 650 | +34* |
| 700 | +33* | 700 | +40* | 700 | +26* | 700 | +36* |
| 750 | +32* | 750 | +44* | 750 | +25* | 750 | +38* |
| 800 | +30* | 800 | +38* | 800 | +15* | 800 | +33* |
| 850 | +39* | 850 | +42* | 850 | +17* | 850 | +37* |
| 900 | +33* | 900 | +53* | 900 | +21* | 900 | +36* |
| 950 | +31* | 950 | +54* | 950 | +14* | 950 | +31* |

* Eventuelle Correction ± 2.

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 454000 | +32* | 456000 | + 37* | 458000 | +110* | 460000 | +168* |
| 050 | +28* | 050 | + 31* | 050 | +114* | 050 | +182* |
| 100 | +21* | 100 | + 30* | 100 | +111* | 100 | +178* |
| 150 | +21* | 150 | + 37* | 150 | +120* | 150 | +176* |
| 200 | +30* | 200 | + 45* | 200 | +120* | 200 | +179* |
| 250 | +33* | 250 | + 45* | 250 | +118* | 250 | +184* |
| 300 | +37* | 300 | + 51* | 300 | +127* | 300 | +187* |
| 350 | +38* | 350 | + 51* | 350 | +125* | 350 | +189* |
| 400 | +37* | 400 | + 57* | 400 | +129* | 400 | +193* |
| 450 | +39* | 450 | + 58* | 450 | +133* | 450 | +191* |
| 500 | +42* | 500 | + 56* | 500 | +136* | 500 | +200* |
| 550 | +42* | 550 | + 57* | 550 | +133* | 550 | +202* |
| 600 | +48* | 600 | + 56* | 600 | +129* | 600 | +205* |
| 650 | +35* | 650 | + 56* | 650 | +125* | 650 | +191* |
| 700 | +43* | 700 | + 55* | 700 | +124* | 700 | +199* |
| 750 | +39* | 750 | + 59* | 750 | +125* | 750 | +201* |
| 800 | +42* | 800 | + 52* | 800 | +125* | 800 | +208* |
| 850 | +38* | 850 | + 62* | 850 | +130* | 850 | +202* |
| 900 | +35* | 900 | + 60* | 900 | +125* | 900 | +209* |
| 950 | +37* | 950 | + 71* | 950 | +120* | 950 | +209* |
| 455000 | +31* | 457000 | + 69* | 459000 | +120* | 461000 | +202* |
| 050 | +36* | 050 | + 69* | 050 | +120* | 050 | +195* |
| 100 | +45* | 100 | + 64* | 100 | +126* | 100 | +190* |
| 150 | +42* | 150 | + 76* | 150 | +130* | 150 | +196* |
| 200 | +56* | 200 | + 86* | 200 | +135* | 200 | +200* |
| 250 | +51* | 250 | + 84* | 250 | +135* | 250 | +202* |
| 300 | +54* | 300 | + 88* | 300 | +142* | 300 | +200* |
| 350 | +52* | 350 | + 82* | 350 | +135* | 350 | +199* |
| 400 | +55* | 400 | + 77* | 400 | +134* | 400 | +196* |
| 450 | +54* | 450 | + 79* | 450 | +144* | 450 | +191* |
| 500 | +47* | 500 | + 87* | 500 | +143* | 500 | +190* |
| 550 | +41* | 550 | + 81* | 550 | +147* | 550 | +196* |
| 600 | +32* | 600 | + 75* | 600 | +153* | 600 | +198* |
| 650 | +34* | 650 | + 77* | 650 | +147* | 650 | +195* |
| 700 | +36* | 700 | + 78* | 700 | +146* | 700 | +193* |
| 750 | +41* | 750 | + 74* | 750 | +151* | 750 | +202* |
| 800 | +44* | 800 | + 76* | 800 | +150* | 800 | +205* |
| 850 | +45* | 850 | + 87* | 850 | +154* | 850 | +206* |
| 900 | +45* | 900 | + 92* | 900 | +165* | 900 | +208* |
| 950 | +39* | 950 | +100* | 950 | +163* | 950 | +208* |

* Eventuelle Correction ± 2.

| n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) | n | σ(n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 462000 | +211* | 464000 | +216* | 466000 | +187* | 468000 | +145* |
| 050 | +215* | 050 | +218* | 050 | +178* | 050 | +152* |
| 100 | +221* | 100 | +216* | 100 | +164* | 100 | +146* |
| 150 | +213* | 150 | +203* | 150 | +166* | 150 | +146* |
| 200 | +213* | 200 | +210* | 200 | +166* | 200 | +139* |
| 250 | +224* | 250 | +214* | 250 | +165* | 250 | +139* |
| 300 | +219* | 300 | +214* | 300 | +168* | 300 | +135* |
| 350 | +221* | 350 | +217* | 350 | +171* | 350 | +136* |
| 400 | +217* | 400 | +218* | 400 | +171* | 400 | +137* |
| 450 | +214* | 450 | +210* | 450 | +166* | 450 | +140* |
| 500 | +212* | 500 | +213* | 500 | +157* | 500 | +142* |
| 550 | +210* | 550 | +213* | 550 | +162* | 550 | +143* |
| 600 | +204* | 600 | +206* | 600 | +164* | 600 | +139* |
| 650 | +208* | 650 | +208* | 650 | +164* | 650 | +143* |
| 700 | +205* | 700 | +205* | 700 | +171* | 700 | +138* |
| 750 | +210* | 750 | +201* | 750 | +170* | 750 | +130* |
| 800 | +213* | 800 | +205* | 800 | +174* | 800 | +129* |
| 850 | +220* | 850 | +197* | 850 | +171* | 850 | +130* |
| 900 | +218* | 900 | +193* | 900 | +164* | 900 | +121* |
| 950 | +220* | 950 | +196* | 950 | +169* | 950 | +129* |
| 463000 | +227* | 465000 | +186* | 467000 | +175* | 469000 | +129* |
| 050 | +226* | 050 | +188* | 050 | +166* | 050 | +117* |
| 100 | +228* | 100 | +177* | 100 | +170* | 100 | +129* |
| 150 | +240* | 150 | +176* | 150 | +171* | 150 | +125* |
| 200 | +234* | 200 | +166* | 200 | +167* | 200 | +123* |
| 250 | +235* | 250 | +173* | 250 | +171* | 250 | +118* |
| 300 | +238* | 300 | +167* | 300 | +167* | 300 | +119* |
| 350 | +234* | 350 | +164* | 350 | +168* | 350 | +119* |
| 400 | +231* | 400 | +163* | 400 | +167* | 400 | +110* |
| 450 | +228* | 450 | +163* | 450 | +163* | 450 | +105* |
| 500 | +223* | 500 | +164* | 500 | +163* | 500 | +117* |
| 550 | +213* | 550 | +160* | 550 | +164* | 550 | +120* |
| 600 | +215* | 600 | +158* | 600 | +163* | 600 | +116* |
| 650 | +212* | 650 | +166* | 650 | +162* | 650 | +119* |
| 700 | +212* | 700 | +173* | 700 | +163* | 700 | +114* |
| 750 | +211* | 750 | +171* | 750 | +149* | 750 | +119* |
| 800 | +219* | 800 | +176* | 800 | +145* | 800 | +118* |
| 850 | +223* | 850 | +181* | 850 | +151* | 850 | +117* |
| 900 | +220* | 900 | +181* | 900 | +143* | 900 | +115* |
| 950 | +225* | 950 | +182* | 950 | +141* | 950 | +119* |

* Eventuelle Correction ± 2.

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 470000 | +127* | 472000 | + 99* | 474000 | +73* | 476000 | +36* |
| 050 | +135* | 050 | +105* | 050 | +68* | 050 | +30* |
| 100 | +131* | 100 | + 98* | 100 | +64* | 100 | +28* |
| 150 | +132* | 150 | + 92* | 150 | +74* | 150 | +20* |
| 200 | +130* | 200 | + 89* | 200 | +73* | 200 | +29* |
| 250 | +122* | 250 | +101* | 250 | +73* | 250 | +28* |
| 300 | +118* | 300 | +106* | 300 | +74* | 300 | +37* |
| 350 | +120* | 350 | +108* | 350 | +75* | 350 | +49* |
| 400 | +130* | 400 | +104* | 400 | +70* | 400 | +49* |
| 450 | +117* | 450 | +110* | 450 | +75* | 450 | +47* |
| 500 | +125* | 500 | +118* | 500 | +77* | 500 | +42* |
| 550 | +121* | 550 | +116* | 550 | +70* | 550 | +40* |
| 600 | +111* | 600 | +112* | 600 | +72* | 600 | +32* |
| 650 | +113* | 650 | +113* | 650 | +75* | 650 | +35* |
| 700 | +112* | 700 | +112* | 700 | +85* | 700 | +41* |
| 750 | +113* | 750 | +108* | 750 | +88* | 750 | +42* |
| 800 | +110* | 800 | +108* | 800 | +87* | 800 | +40* |
| 850 | +111* | 850 | +102* | 850 | +83* | 850 | +40* |
| 900 | +109* | 900 | +104* | 900 | +77* | 900 | +36* |
| 950 | + 99* | 950 | +104* | 950 | +68* | 950 | +39* |
| 471000 | + 95* | 473000 | +108* | 475000 | +69* | 477000 | +32* |
| 050 | +105* | 050 | +109* | 050 | +74* | 050 | +28* |
| 100 | + 96* | 100 | +103* | 100 | +75* | 100 | +36* |
| 150 | +101* | 150 | +102* | 150 | +70* | 150 | +42* |
| 200 | +104* | 200 | + 97* | 200 | +62* | 200 | +48* |
| 250 | +100* | 250 | +102* | 250 | +59* | 250 | +47* |
| 300 | + 88* | 300 | +101* | 300 | +57* | 300 | +49* |
| 350 | + 97* | 350 | + 90* | 350 | +58* | 350 | +47* |
| 400 | + 93* | 400 | + 80* | 400 | +50* | 400 | +50* |
| 450 | + 90* | 450 | + 85* | 450 | +43* | 450 | +59* |
| 500 | + 86* | 500 | + 82* | 500 | +47* | 500 | +61* |
| 550 | + 82* | 550 | + 78* | 550 | +43* | 550 | +53* |
| 600 | + 86* | 600 | + 77* | 600 | +42* | 600 | +53* |
| 650 | + 88* | 650 | + 78* | 650 | +41* | 650 | +58* |
| 700 | + 86* | 700 | + 77* | 700 | +35* | 700 | +64* |
| 750 | + 86* | 750 | + 82* | 750 | +40* | 750 | +59* |
| 800 | + 90* | 800 | + 87* | 800 | +44* | 800 | +49* |
| 850 | + 92* | 850 | + 88* | 850 | +35* | 850 | +47* |
| 900 | + 95* | 900 | + 82* | 900 | +34* | 900 | +46* |
| 950 | + 95* | 950 | + 74* | 950 | +36* | 950 | +39* |

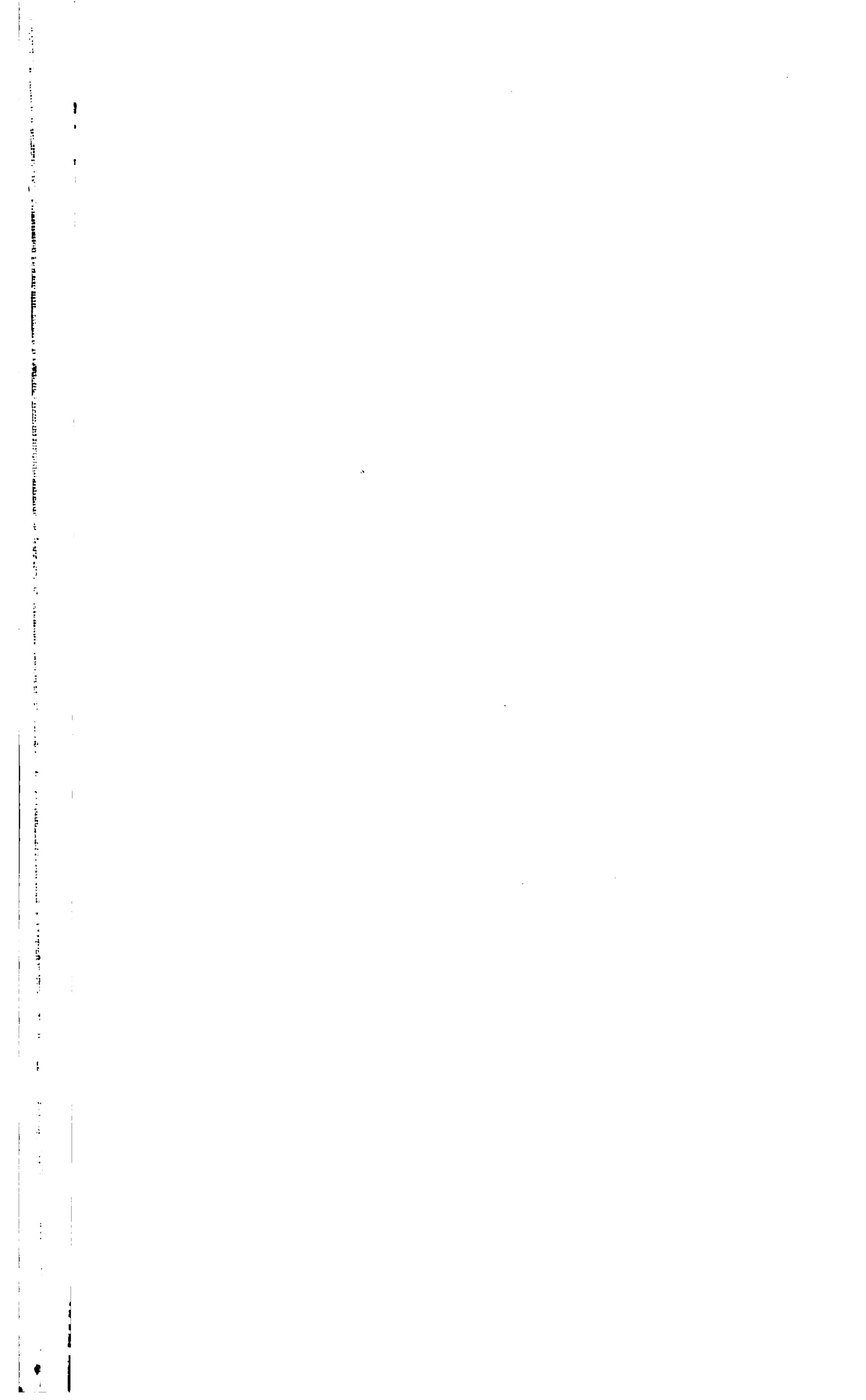
* Eventuelle Correction $\pm$ 2.

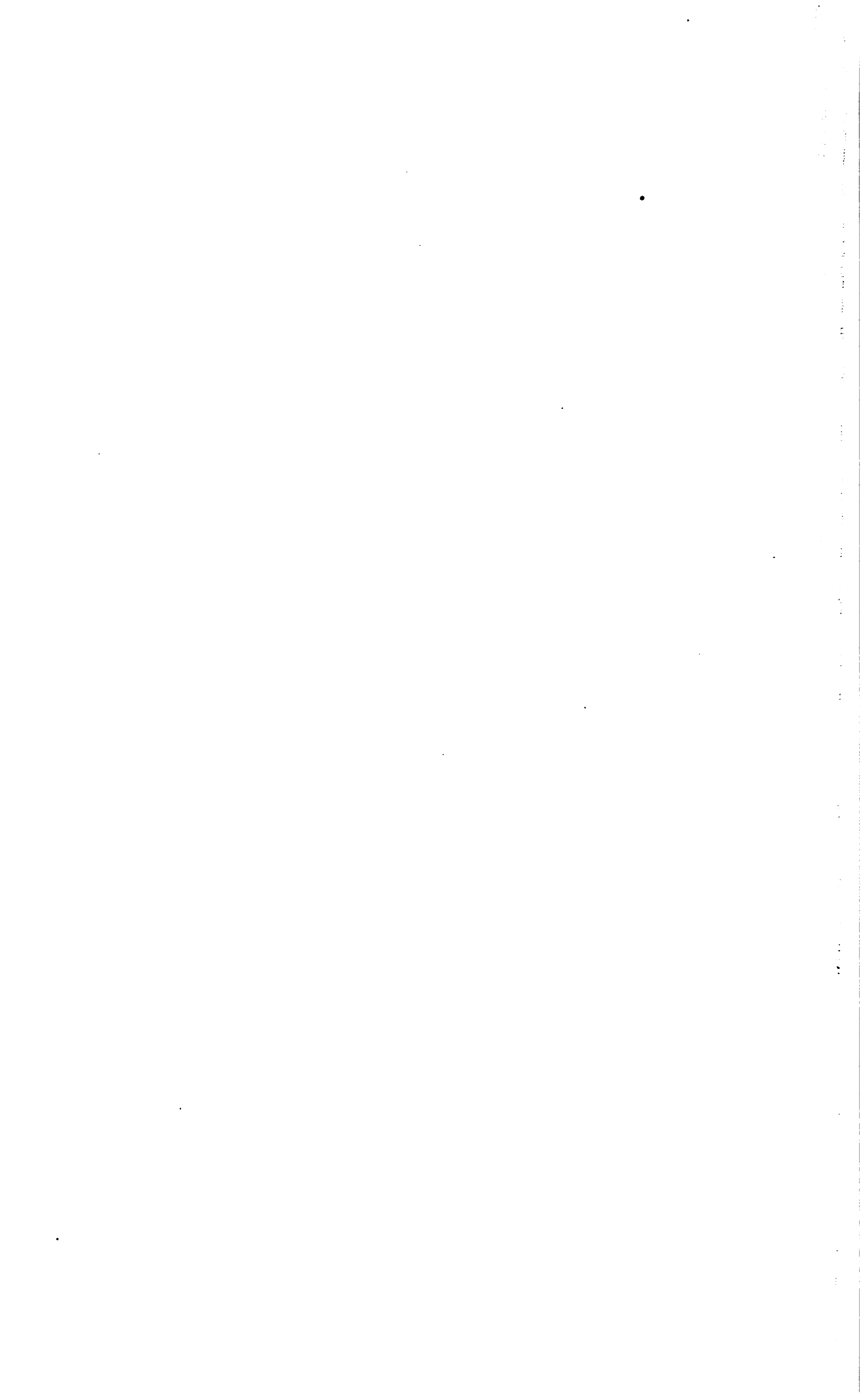
| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 478000 | +31* | 480000 | + 45 | 482000 | + 14 | 484000 | + 23 |
| 050 | +31* | 050 | + 46 | 050 | + 6 | 050 | + 26 |
| 100 | +25* | 100 | + 47 | 100 | + 13 | 100 | + 20 |
| 150 | +28* | 150 | + 42 | 150 | + 12 | 150 | + 22 |
| 200 | +19* | 200 | + 37 | 200 | + 13 | 200 | + 19 |
| 250 | +19* | 250 | + 40 | 250 | + 8 | 250 | + 19 |
| 300 | +20* | 300 | + 49 | 300 | + 18 | 300 | + 21 |
| 350 | +30* | 355 | + 46 | 350 | + 21 | 350 | + 24 |
| 400 | +25* | 400 | + 35 | 400 | + 19 | 400 | + 26 |
| 450 | + 9* | 450 | + 39 | 450 | + 15 | 450 | + 25 |
| 500 | + 7* | 500 | + 37 | 500 | + 15 | 500 | + 17 |
| 550 | +13* | 550 | + 28 | 550 | + 17 | 550 | + 26 |
| 600 | +15* | 600 | + 13 | 600 | + 12 | 600 | + 19 |
| 650 | +14* | 650 | + 14 | 650 | + 17 | 650 | + 7 |
| 700 | +17* | 700 | + 21 | 700 | + 6 | 700 | + 18 |
| 750 | +16* | 750 | + 26 | 750 | — 1 | 750 | + 25 |
| 800 | +19* | 800 | + 26 | 800 | — 1 | 800 | + 24 |
| 850 | + 8* | 850 | + 25 | 850 | — 3 | 850 | + 27 |
| 900 | +13* | 900 | + 20 | 900 | — 7 | 900 | + 32 |
| 950 | +14* | 950 | + 17 | 950 | — 1 | 950 | + 41 |
| 479000 | +15* | 481000 | + 20 | 483000 | — 1 | 485000 | + 43 |
| 050 | +10* | 050 | + 13 | 050 | + 6 | 050 | + 46 |
| 100 | +22* | 100 | + 2 | 100 | + 2 | 100 | + 43 |
| 150 | +25* | 150 | + 3 | 150 | + 5 | 150 | + 46 |
| 200 | +27* | 200 | + 1 | 200 | + 4 | 200 | + 48 |
| 250 | +21* | 250 | + 2 | 250 | — 4 | 250 | + 53 |
| 300 | +22* | 300 | — 2 | 300 | — 1 | 300 | + 65 |
| 350 | +17* | 350 | + 2 | 350 | + 3 | 350 | + 67 |
| 400 | +23* | 400 | — 6 | 400 | + 2 | 400 | + 66 |
| 450 | +29* | 450 | — 7 | 450 | — 2 | 450 | + 57 |
| 500 | +27* | 500 | + 1 | 500 | + 5 | 500 | + 61 |
| 550 | +29* | 550 | + 6 | 550 | + 2 | 550 | + 67 |
| 600 | +27* | 600 | + 3 | 600 | + 1 | 600 | + 63 |
| 650 | +25* | 650 | + 1 | 650 | + 2 | 650 | + 70 |
| 700 | +38* | 700 | + 1 | 700 | + 7 | 700 | + 68 |
| 750 | +43* | 750 | + 8 | 750 | + 8 | 750 | + 70 |
| 800 | +46* | 800 | + 15 | 800 | + 12 | 800 | + 74 |
| 850 | +40* | 850 | + 12 | 850 | + 22 | 850 | + 76 |
| 900 | +42* | 900 | + 6 | 900 | + 23 | 900 | + 77 |
| 950 | +44* | 950 | + 12 | 950 | + 23 | 950 | + 74 |

* Eventuelle Correction $\pm 2$.

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 486000 | + 78 | 488000 | + 10 | 490000 | + 14 | 492000 | — 5 |
| 050 | + 73 | 050 | + 28 | 050 | + 9 | 050 | — 11 |
| 100 | + 68 | 100 | + 29 | 100 | + 18 | 100 | — 13 |
| 150 | + 60 | 150 | + 22 | 150 | + 9 | 150 | — 17 |
| 200 | + 59 | 200 | + 17 | 200 | + 10 | 200 | — 7 |
| 250 | + 52 | 250 | + 10 | 250 | + 2 | 250 | — 9 |
| 300 | + 62 | 300 | + 18 | 300 | + 11 | 300 | — 5 |
| 350 | + 56 | 350 | + 13 | 350 | + 6 | 350 | 0 |
| 400 | + 54 | 400 | + 16 | 400 | + 2 | 400 | + 1 |
| 450 | + 52 | 450 | + 15 | 450 | + 5 | 450 | + 3 |
| 500 | + 48 | 500 | + 12 | 500 | — 2 | 500 | + 3 |
| 550 | + 50 | 550 | + 10 | 550 | 0 | 550 | + 9 |
| 600 | + 40 | 600 | + 13 | 600 | — 5 | 600 | + 12 |
| 650 | + 31 | 650 | + 9 | 650 | — 2 | 650 | + 5 |
| 700 | + 17 | 700 | + 13 | 700 | — 1 | 700 | + 10 |
| 750 | + 13 | 750 | + 8 | 750 | — 4 | 750 | + 13 |
| 800 | + 10 | 800 | + 9 | 800 | — 8 | 800 | + 11 |
| 850 | + 14 | 850 | + 8 | 850 | + 5 | 850 | + 4 |
| 900 | + 27 | 900 | + 2 | 900 | + 9 | 900 | — 1 |
| 950 | + 23 | 950 | + 9 | 950 | + 9 | 950 | — 1 |
| 487000 | + 13 | 489000 | + 15 | 491000 | + 9 | 493000 | — 9 |
| 050 | + 17 | 050 | + 19 | 050 | + 8 | 050 | — 4 |
| 100 | + 13 | 100 | + 21 | 100 | + 14 | 100 | + 4 |
| 150 | + 15 | 150 | + 18 | 150 | + 13 | 150 | — 1 |
| 200 | + 16 | 200 | + 13 | 200 | + 12 | 200 | — 8 |
| 250 | + 17 | 250 | + 12 | 250 | + 7 | 250 | — 9 |
| 300 | + 19 | 300 | + 7 | 300 | + 14 | 300 | — 7 |
| 350 | + 15 | 350 | + 5 | 350 | + 13 | 350 | — 2 |
| 400 | + 6 | 400 | + 5 | 400 | + 10 | 400 | — 4 |
| 450 | + 7 | 450 | + 3 | 450 | + 16 | 450 | + 5 |
| 500 | + 1 | 500 | + 6 | 500 | + 19 | 500 | + 6 |
| 550 | + 6 | 550 | + 15 | 550 | + 12 | 550 | + 16 |
| 600 | + 13 | 600 | + 22 | 600 | + 15 | 600 | + 19 |
| 650 | + 13 | 650 | + 20 | 650 | + 17 | 650 | + 15 |
| 700 | + 9 | 700 | + 17 | 700 | + 11 | 700 | + 17 |
| 750 | + 11 | 750 | + 24 | 750 | + 1 | 750 | + 5 |
| 800 | + 1 | 800 | + 22 | 800 | — 2 | 800 | + 7 |
| 850 | — 5 | 850 | + 12 | 850 | — 6 | 850 | + 10 |
| 900 | — 1 | 900 | + 12 | 900 | — 9 | 900 | + 14 |
| 950 | + 6 | 950 | + 9 | 950 | — 10 | 950 | + 11 |

| $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ | $n$ | $\sigma(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 494000 | + 9 | 496000 | — 55 | 498000 | — 14 | 500000 | — 6 |
| 050 | + 14 | 050 | — 49 | 050 | — 18 | | |
| 100 | + 16 | 100 | — 54 | 100 | — 15 | | |
| 150 | + 12 | 150 | — 45 | 150 | — 12 | | |
| 200 | + 12 | 200 | — 37 | 200 | — 12 | | |
| 250 | + 11 | 250 | — 43 | 250 | — 10 | | |
| 300 | + 2 | 300 | — 47 | 300 | — 5 | | |
| 350 | + 2 | 350 | — 47 | 350 | — 6 | | |
| 400 | — 4 | 400 | — 45 | 400 | — 6 | | |
| 450 | — 11 | 450 | — 38 | 450 | — 13 | | |
| 500 | — 4 | 500 | — 47 | 500 | — 9 | | |
| 550 | — 3 | 550 | — 34 | 550 | — 14 | | |
| 600 | — 9 | 600 | — 29 | 600 | — 14 | | |
| 650 | — 9 | 650 | — 21 | 650 | — 13 | | |
| 700 | — 11 | 700 | — 21 | 700 | — 10 | | |
| 750 | — 17 | 750 | — 19 | 750 | — 14 | | |
| 800 | — 14 | 800 | — 20 | 800 | — 10 | | |
| 850 | — 15 | 850 | — 7 | 850 | — 13 | | |
| 900 | — 13 | 900 | — 10 | 900 | — 5 | | |
| 950 | — 21 | 950 | — 15 | 950 | — 3 | | |
| 495000 | — 22 | 497000 | — 1 | 499000 | — 2 | | |
| 050 | — 23 | 050 | + 2 | 050 | + 3 | | |
| 100 | — 27 | 100 | + 2 | 100 | + 13 | | |
| 150 | — 23 | 150 | + 3 | 150 | + 5 | | |
| 200 | — 22 | 200 | + 7 | 200 | + 12 | | |
| 250 | — 21 | 250 | + 4 | 250 | + 13 | | |
| 300 | — 22 | 300 | — 5 | 300 | + 6 | | |
| 350 | — 32 | 350 | — 11 | 350 | — 6 | | |
| 400 | — 36 | 400 | — 18 | 400 | — 10 | | |
| 450 | — 43 | 450 | — 21 | 450 | — 11 | | |
| 500 | — 49 | 500 | — 24 | 500 | — 14 | | |
| 550 | — 52 | 550 | — 26 | 550 | — 17 | | |
| 600 | — 61 | 600 | — 22 | 600 | — 19 | | |
| 650 | — 62 | 650 | — 25 | 650 | — 17 | | |
| 700 | — 60 | 700 | — 24 | 700 | — 24 | | |
| 750 | — 63 | 750 | — 24 | 750 | — 20 | | |
| 800 | — 69 | 800 | — 22 | 800 | — 23 | | |
| 850 | — 63 | 850 | — 16 | 850 | — 12 | | |
| 900 | — 59 | 900 | — 18 | 900 | — 13 | | |
| 950 | — 60 | 950 | — 10 | 950 | — 15 | | |





# System der Sensitometrie photographischer Platten

(III. Abhandlung)

von

**J. M. Eder** in Wien.

**Aus dem photochemischen Laboratorium der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien.**

**(Mit 8 Textfiguren.)**

**(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1901.)**

In meiner Abhandlung »System der Sensitometrie photographischer Platten«[1] erwähnte ich, dass die sensitometrische Bestimmung der relativen Farbenempfindlichkeit orthochromatischer Platten gegenüber dem »blauen« Spectralbezirk einerseits und der roth-gelb-grünen Zone anderseits mit Hilfe farbiger Lichtfilter einen Rückschluss auf die Art der Farbensensibilisierung gestattet. Solche Bestimmungen sind wohl kein Ersatz für exacte spectrophotometrische Bestimmungen und für die Construction der Schwärzungscurven im Spectrum, wie ich sie genau mittels des Gitterspectrums durchgeführt habe (siehe a. a. O.), wohl aber geben sie eine gute Orientierung über die relative Farbenempfindlichkeit orthochromatischer Platten, welche recht brauchbare Anhaltspunkte zur Bestimmung der erforderlichen Belichtungszeit für photographische Zwecke bietet.

Die Lichtfilter (gelb und blau) wählte ich derartig, dass sie das Spectrum im Blaugrün in zwei Theile zerschneiden, wovon der eine das ganze Roth, Gelb und Grün bis zur Grenze

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 108, Abth. II a., Nov. 1899, und Bd. 109, Dec. 1900.

von Blau enthält, der andere Blau, Violett und Ultraviolett durchlässt. Letzterer Bezirk soll der Eigenempfindlichkeit der Bromsilbergelatine entsprechen, ersterer soll von der Stelle des durchschnittlichen Minimums ansteigend die Hauptwirkung der gesammten Farbensensibilisierung umschließen,[1] und zwar bis circa $\lambda = 500$.

Dieser Anforderung entspricht die von mir a. a. O. verwendete Kaliummonochromatlösung (40 *g* zum Volumen von 1 *l* gelöst), während die (siehe a. a. O.) Kupferoxydammoniaklösung (25 *g* krystallisierter Kupfervitriol, Ammoniak und Wasser bis zum Gesammtvolumen von 1 *l*) einen Spectralbezirk durchlässt, welcher etwas weiter gegen Violett liegt, als der durchschnittlichen Eigenempfindlichkeit der Bromsilbergelatine entspricht, was namentlich bei kurzen Expositionszeiten zur Geltung kommt. Jedenfalls trennt dieses Blaufilter die Zone der Farbensensibilisierungen eher zu viel als zu wenig ab, so dass die Relation der Empfindlichkeit hinter diesem blauen Kupferfilter und gelbem Monochromatfilter in den meisten Fällen eine genügende Charakteristik der Größe der etwa vorhandenen Farbensensibilisierung für Bromsilber gibt.

Dies lässt sich nach der Lichtselection in diesen Lichtfiltern beurtheilen, welche ich mittels quantitativer Spectralanalyse nach Vierordt[2] ausführte. In folgenden Tabellen gibt (im Sinne der Vierordt'schen Nomenclatur) die erste Rubrik die Wellenlänge der beobachteten Spectralregion, die zweite Rubrik die »Lichtstärke« $J'$ an, welche übrig bleibt, wenn Licht

---

[1] Das Minimum liegt nicht immer an derselben Stelle und nicht alle Farbensensibilisierungen weisen ausgesprochene Minima zwischen Eigenempfindlichkeit des Bromsilbers und der Sensibilisierung auf (siehe Eder, Verhalten der Haloidverbindungen des Silbers, Chrysanilinwirkung. Diese Sitzungsberichte, 1884).

[2] Zu meinen Messungen verwendete ich einen Krüss'schen Universalspectralapparat mit symmetrischem Doppelspalt (siehe Traube, Phys.-chem. Methoden, 1893, S. 192; Krüss, Colorimetrie und quantitative Spectralanalyse, 1891; Vierordt, Anwendung des Spectralapparates zur Photometrie der Absorptionsspectren und zur quantitativen chemischen Analyse. Tübingen 1873; Vierordt, die quantitative Spectralanalyse und ihre Anwendung auf Physiologie, Physik, Chemie und Technologie. Tübingen, 1876. — H. W. Vogel, Praktische Spectralanalyse irdischer Stoffe, 1. Aufl. 1877, S. 348).

von der Lichtstärke = 1 durch eine Flüssigkeitsschichte von 1 *cm* Dicke hindurchgeht. Der »Extinctionscoefficient« ($e$) nach Vierordt ist in der dritten Rubrik enthalten: er ist der negative Logarithmus der Lichtstärke ($J'$), d. i. $e = -\log J'$.

## Absorptionsspectrum von Kupferoxydammoniak.

(20 *g* krystallisierter Kupfervitriol in Wasser unter Zusatz von Ammoniak zum Gesammtvolumen = 1 *l* gelöst).

| Spectralbezirk (Wellenlänge) | Lichtstärke $J'$ | Extinctionscoefficient ($e$) |
|---|---|---|
| 508—500 | 0·061 | 1·21468 |
| 500—492 | 0·120 | 0·92082 |
| 492—486 | 0·215 | 0·66757 |
| 486—480 | 0·275 | 0·56067 |
| 480—473 | 0·307 | 0·51287 |
| 473—467 | 0·410 | 0·38722 |
| 467—461 | 0·512 | 0·29073 |
| 461—457 | 0·580 | 0·23658 |
| 457—452 | 0·685 | 0·16431 |
| 452—447 | 0·762 | 0·11805 |
| 447—442 | 0·832 | 0·07988 |
| 442—438 | 0·872 | 0·05949 |
| 438—433 | 0·901 | 0·04528 |
| 433—429 | 0·960 | 0·01773 |

## Absorptionsspectrum von Kaliummonochromat.

(40 *g* Kaliummonochromat in Wasser zum Gesammtvolumen = 1 *l* gelöst).

| Spectralbezirk (Wellenlänge) | Lichtstärke $J'$ | Extinctionscoefficient ($e$) |
|---|---|---|
| 525—520 | 0·932 | 0·03059 |
| 520—516 | 0·842 | 0·07469 |
| 516—512 | 0·740 | 0·13077 |
| 512—508 | 0·624 | 0·20482 |
| 508—504 | 0·520 | 0·28400 |
| 504—500 | 0·430 | 0·36654 |
| 500—496 | 0·347 | 0·45968 |
| 496—492 | 0·200 | 0·69897 |
| 492—489 | 0·120 | 0·92082 |
| 489—486 | 0·040 | 1·39794 |

In Fig. 1 und 2 stellte ich die Absorptionscurve der Chromat- und Kupferfilter graphisch dar; hiebei sind die Wellenlängen des Lichtes als Abscissen, die Extinctions-coefficienten als Ordinaten eingetragen. Fig. 1 zeigt, wie die

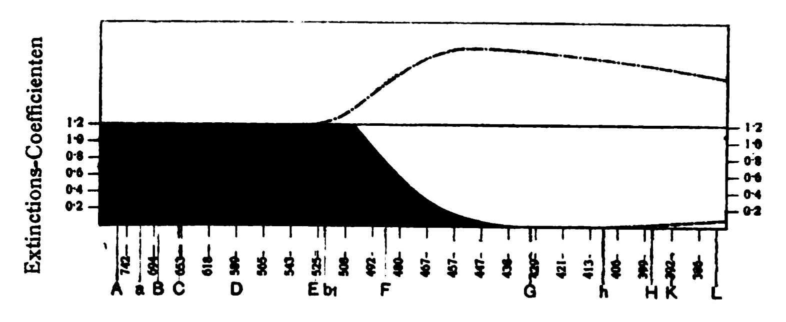



Fig. 1.

Absorptionsspectrum (prismatisches Spectrum) von Kupferoxydammoniak, bezogen auf Wellenlängen und Fraunhofer'sche Linien, sowie auf die Extinctions-coefficienten. — Die gestrichelte Curve stellt schematisch die Empfindlichkeit von Bromsilbergelatine gegen Sonnenlicht im prismatischen Spectrum dar.

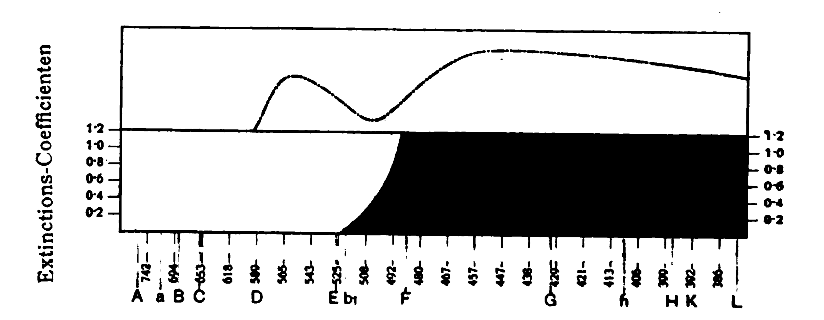



Fig. 2.

Absorptionsspectrum von Kaliummonochromat (analog dargestellt wie in Fig. 1). — Die gestrichelte Curve stellt die photographische Empfindlichkeit von Erythrosin-Bromsilbergelatineplatten gegen das Sonnenspectrum dar.

Lichtdurchlässigkeit des Kupferoxydammoniakfilters im Blau allmählich steigt, um bei $\lambda = 430$ voll durchlässig zu erscheinen. Die darüber angebrachte punktierte Curve stellt schematisch die Schwärzungscurve der gewöhnlichen Bromsilbergelatineplatte im Sonnenspectrum dar. Man

erkennt daran, dass die beiden letzteren Curven einen ähnlichen Verlauf haben, dass jedoch das Hellblau durch das Kupferfilter etwas zu stark gedämpft wird; dies hat zur Folge, dass in diesem Bezirke nicht die ganze Eigenempfindlichkeit des Bromsilbers zur Geltung kommt, was sich unter Berücksichtigung dieser Sachlage vermeiden ließe, wenn man andere intensiv absorbierende blaue Farbstoffe benützen würde, deren Absorptionscurve etwa bei $\lambda = 492$ steil abfällt.

Fig. 2 zeigt die günstigere (weil schroffer abfallende) Absorptionscurve der vierprocentigen Kaliummonochromatlösung und darüber (als punktierte Linie) die schematische Darstellung der Schwärzungscurve einer Erythrosin-Bromsilbergelatineplatte mit ihrem charakteristischen Maximum und Minimum. Den Effect derartig charakterisierter Lichtfilter auf die sensitometrische Bestimmung der relativen Farbenempfindlichkeit orthochromatischer Platten untersuchte ich zuerst bei einer Reihe von orthochromatischen Platten, welche für Gelbgrün mittels Erythrosin, Eosin und ähnlich wirkenden Farbstoffen sensibilisiert waren und fand, dass die besten Handelssorten[1] solcher Platten bei Amylacetatlicht folgendes Verhältnis[2] der Empfindlichkeit hinter einem Filter von reinem Wasser, Kupferoxydammoniak und Kaliummonochromat aufweisen.

Eine Benzinlampe gibt ähnliche Relationen, jedoch weichen die Zahlen für das Empfindlichkeitsverhältnis $\frac{\text{Blau}}{\text{Gelb}}$ um einige Procente von der Relation für Amyllicht ab (circa 3 Procente[?], was noch genauer zu bestimmen ist).

Für die besten bis jetzt erzeugten gelbgrünempfindlichen Platten ist die relative Empfindlichkeit (bei Amyllicht) hinter

---

1 Man kann sich orthochromatische Platten, welche den besten Handelssorten dieser Art an Gelbgrünempfindlichkeit gleichkommen, selbst herstellen, wenn man Bromsilbergelatineplatten in ammoniakalischer Erythrosinlösung badet (siehe Eder, Recepte und Tabellen, V. Auflage, 1900).

2 Der Lichtverlust bei dieser Bestimmung rührt davon her, dass das Blau- und Gelbfilter nicht strenge aneinanderschließen, sondern eine Lücke lassen. Bei direct im Spectralapparate vorgenommenen spectrometrischen Messungen streng aneinanderschließender Strahlengebiete tritt dieser Verlust nicht auf.

$\frac{\text{Blaufilter}}{\text{Gelbfilter}} = \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$, jedoch kommen »gelbgrünempfindliche Platten« in den Handel, welche in der Praxis noch als recht gut verwendbar gelten und die ungünstigere Verhältniszahl für Amyllicht Empfindlichkeit $\frac{\text{Blau}}{\text{Gelb}} = \frac{1}{0\cdot 8}$ bis 1 aufweisen.

**Empfindlichkeitsproben gegen Amyllicht mit Lichtfiltern.**

| | Wasser-filter | Kupfer-oxyd-ammoniak | Kalium-mono-chromat | Relation $\frac{\text{Empfindlichkeit Blau}}{\text{Empfindlichkeit Gelb}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Beste Sorte von Erythrosinplatten | 1 | 0·149 | 0·68 | $\frac{1}{4\cdot 7}$ |
| Handelssorten gelbgrünempfindlicher Platten.... | 1 | 0·46 | 0·34 | $\frac{1}{0\cdot 78}$ |
| Schlechte Eosinplatten......... | 1 | 0·71 | 0·06 | $\frac{1}{0\cdot 08}$ |

Benützt man das elektrische Bogenlicht als Lichtquelle, so ändern sich diese Verhältniszahlen, ebenso bei Proben am Tageslicht. Einen guten Rückschluss für die praktisch vielfach in Anwendung stehende Photographie bei elektrischem Lichte gestattet eine durch Bogenlicht gleichmäßig erhellte weiße Papierfläche. Lässt man das davon reflectierte Licht durch eine kleine Öffnung unter Vorschaltung der Lichtfilter auf das Scheiner-Sensitometer fallen, so kann man ohne Schwierigkeit die relative Gelb- und Blauempfindlichkeit quantitativ bestimmen. Die hiebei resultierenden Verhältniszahlen der $\frac{\text{Blau}}{\text{Gelbgrün}}$-Empfindlichkeit weichen vom Amyllichte stark ab, nähern sich aber mehr jenen für diffuses Tageslicht. Meine Versuche mit Bromsilberplatten ergaben, dass die elektrisch beleuchtete weiße Papierfläche im Blaubezirke (Kupferoxydammoniakfilter) photographisch 3·1mal heller ist (bei gleicher

Gelbgrün-Empfindlichkeit zwischen $D-b_1$) als die Amyllampe. War z. B. die relative Empfindlichkeit $\frac{\text{Blau}}{\text{Gelb}}$ bei Amyllicht $= \frac{1}{5}$, so war sie für dieselbe Plattensorte bei reflectiertem weißem elektrischem Bogenlichte $= \frac{1}{1\cdot 6}$. Diese Zahl gilt für die Sensibilisierungszone im Gelbgrün (Typus Erythrosin); ist die Platte stärker empfindlich für Blaugrün, so differieren die Werte weniger, wenn aber eine dominierende Empfindlichkeit für Gelb oder Orange vorhanden ist, so wächst diese Zahl.

Zur Controle dieser Zahlen ließ ich zahlreiche praktische photographische Aufnahmen im Reproductionsatelier der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt mit derartig vorausberechneten Expositionszeiten vornehmen und es ergaben sich stets correct exponierte Negative. Daraus geht die Nützlichkeit derartiger sensitometrischer Bestimmungen für die Photographie hervor.

---

Die Gesammtempfindlichkeit von orthochromatischen Platten verglichen mit jener von gewöhnlichen Bromsilbergelatineplatten gegen »weißes« Licht (Tageslicht, oder dem damit einigermaßen ähnlichen, aber nicht identischen Bogenlicht) lässt sich nicht ohneweiters aus der sensitometrischen Bestimmung ihrer Gesammtempfindlichkeit bei Kerzenlicht ermitteln. Es erscheint somit nicht praktisch, die sensitometrische Empfindlichkeit von orthochromatischen Platten für Amyl- oder Benzinlicht anzugeben, wenn man die Anzeigen für Expositions-Berechnung bei weißem Lichte (Tageslicht, elektrisches Licht) verwerten will.

Wie die relative Empfindlichkeit gewöhnlicher Bromsilbergelatine- und orthochromatischer Platten gegen Amyllicht einerseits und anderseits gegen weißes Licht schwankt, zeigt folgende Tabelle:

**Relative Empfindlichkeit verschiedener photographischer Platten bei Amyl- und elektrischem Lichte.**

| | Amyllicht (direct wirkend) | Weißes Papier, erhellt von elektrischem Bogenlichte |
|---|---|---|
| Bromsilberplatte ............ | 1 | 1 |
| Erythrosinplatte ............ | 2·3 | 1·27 |
| Handelssorte gelbgrünempfindlicher Platten............. | 1·6 | 0·67 |
| Handelssorte gelbgrünempfindlicher Platten, andere Sorte.. | 1·2 | 0·42 |

Wie man sieht, kann es sogar vorkommen, dass bei Amylicht orthochromatische Platten empfindlicher als gewöhnliche Bromsilbergelatineplatten sind, während bei elektrischem Lichte das Umgekehrte eintritt.

Man erhält jedoch correcte und für die praktische Photographie verwertbare Sensitometerangaben, wenn man die Empfindlichkeit einer gewöhnlichen Bromsilbergelatineplatte (z. B. ich benützte u. a. die Schleußner-, Schattera-, Lumière-, Apolloplatte) mit der Benzin-Normallampe oder Amyllampe im Scheiner-Sensitometer auf Empfindlichkeit (Schwellenwert) misst, diese Platte den photographischen Empfindlichkeitsproben von orthochromatischen Platten mit »weißem« Lichte als Standard zugrunde legt und dann angibt, z. B.: »Die orthochromatische Platte ist bei elektrischem Bogenlichte um 27% oder 1° Scheiner empfindlicher als eine Bromsilberplatte von 10° Scheiner«.

## Neubestimmung der Empfindlichkeitsmaxima für Bromsilbergelatine, Jodsilbercollodion und Chlorsilbergelatine.

Die Bedeutung des Empfindlichkeitsmaximums des Bromsilbers gegen das Spectrum für sensitometrische Versuche

veranlasste mich, die nicht ganz übereinstimmend angegebene Lage dieses Maximums neuerdings zu untersuchen. Hiezu bediente ich mich nicht nur des Gitterspectrographen, sondern auch eines für Violett sehr gut durchlässigen Glasspectrographen Steinheil's mit einem Compoundprisma und nichtachromatischen, dünnen, einfachen Glaslinsen.[1]

Bei diesen Untersuchungen berücksichtigte ich nur jenen Theil des Spectrums, welcher bei der praktischen Photographie mit Glaslinsen, sowohl bei Tages-, als elektrischem Lichte (reflectiertes Licht) zur Geltung kommt.

Der Glasspectograph mit einem guten dreifach verkitteten Glas-Compoundprisma oder mit Wernikeprisma ist genügend durchlässig für Ultraviolett, um Untersuchungen über Wirkung von Lichtfiltern zu photographischen Reproductionszwecken in diesem Strahlengebiete vornehmen zu können. Bei fünffach verkitteten Glasprismen à vision directe, welche Schwerflint enthalten, würde sich dagegen die Lichtabsorption im Violett stark und störend bemerklich machen, was bei vergleichenden Versuchen zu berücksichtigen ist.

Der Gitterspectrograph gibt auf Bromsilbergelatineplatten weiter gegen Ultraviolett eine kräftigere Schwärzung als der Glasspectrograph, aber gegen Grün und Blau zeigt sich die Wirkung bei beiden sehr ähnlich der von gut durchsichtigem Glase. Vergleicht man die im sichtbaren Spectrum liegenden Maximalwirkungen des Sonnenspectrums auf Bromsilbergelatine einerseits beim Gitter-, anderseits beim einfachen Glas-Prismenspectrographen, so ergibt sich, dass die entschieden nachweisbaren Verschiebungen hiebei nicht größer sind, als sie überhaupt nach H. W. Vogel auch bei verschiedenen Sorten von Bromsilberplatten (unabhängig von der Art der Spectrographen) vorkommen können.

Man kann bei Berücksichtigung dieser Thatsachen gute Glasspectrographen für derartige Arbeiten sehr wohl verwenden, und man ist keineswegs ausschließlich auf den Gitter-

---

[1] Näher beschrieben bei: Eder und Valenta, »Die verschiedenen Spectren des Quecksilbers«. Wien, Denkschr. der kais. Akad. der Wissensch., 1894, S. 29.

spectrographen (welchen ich bei meiner I. Abhandlung über Sensitometrie benützt hatte) angewiesen, um exacte Studien über den Verlauf der Sensibilisierung bei photographischen Platten machen zu können, wie in letzterer Zeit mehrfach behauptet wurde.

**Variable Lage des Empfindlichkeitsmaximums verschiedener Sorten von Bromsilbergelatineplatten gegen das Sonnenspectrum, im Gitter- und Glasprismen-Spectrographen.**

| | Maximum der Wirkung im Spectrum | Beiläufiges Band der Hauptwirkung bei kürzerer Belichtung | Erstreckung des Bandes bei längerer Belichtung |
|---|---|---|---|
| Gitterspectrograph (Schleußnerplatte) | von λ 447—445 Mittel 446 | von λ 458—420 | (*B*- über *HK* gegen *L*) von λ 500 oder 476 bis Ende des Sonnenspectrums, starke Wirkung bis weit ins Ultraviolett |
| Glasspectrograph (Schleußnerplatte) | von λ 453—449 Mittel 451 | von λ 460—425 oder bis 400 | von λ 462—400 |
| Glasspectrograph (Deutsche »Apolloplatte«) | Mittel λ = 455 | von λ 468—430, fast ebenso bis λ = 390 | |
| Glasspectrograph (Englische »Imperialplatte«) | von λ 462—455 | von λ 468—440 | von λ 486—425, ziemlich stark bis λ = 400 |

Vorstehende Tabelle gibt die Zusammenstellung der Resultate meiner Untersuchungen über die Lage des Maximums der Empfindlichkeit von Bromsilbergelatine gegen das Sonnenspectrum sowohl im Gitter-, als im Glasspectrographen.

Während bei kurz exponierten Platten und harter Entwickelung das Maximum sich bei diesen Platten in der Sonne (Glasspectrograph) von λ = 451, 455, 458 ergibt, so liegen die Mittel der Maximalwirkungen etwas länger belichteter

(immer noch unterexponierter) Bromsilbergelatineplatten (Sonne) nicht genau an derselben Stelle.

Das Maximumband solcher etwas länger belichteter Platten verläuft im Glasspectrographen (Sonne) bei verschiedenen anderen, als in der Tabelle angegebenen Bromsilbertrockenplatten des Handels durchschnittlich von

$\lambda$ 468 bis $\lambda$ 435, Mitte..... $\lambda = 443$,
oder von $\lambda$ 460 bis $\lambda$ 425, Mitte..... $\lambda = 452$,

was von rascherer Ausbreitung der Wirkung gegen Ultraviolett herrührt. Solche scheinbare Maxima wurden ferner von $\lambda$ 445 bis 540 gefunden. Folgende Zusammenstellung macht dies klarer:

**Wahre und scheinbare Maxima der Wirkung des Sonnenspectrums auf ein und dieselbe Bromsilbergelatine-Sorte.**

| Art des Spectrographen | Wahres Maximum bei kurzer Belichtung | Scheinbares Maximum (Mitte des Bandes) bei längerer Belichtung |
|---|---|---|
| Gitterspectrograph | $\lambda$ 446 | $\lambda$ 436 |
| Glasspectrograph | $\lambda$ 451 (bis 458) | $\lambda$ 443 (bis 454) |

Künstliche Lichtquellen ändern die Lage des Empfindlichkeitsmaximums auf photographischen Platten entsprechend der spectralen Zusammensetzung des ausgesendeten Lichtes, und zwar fand ich bei einer Versuchsreihe mittels des Glasspectrographen folgende Schwankungen:

| | Maximum der Empfindlichkeit |
|---|---|
| Bromsilbergelatine, Sonnenlicht............. | bei $\lambda = 451$ |
| » Auer-Gasglühlicht........ | 454 |
| » Gas-Argandbrenner ...... | 456 |
| » Petroleum-Flachbrenner... | 457 |

Die photographischen Maxima auf Bromsilber treten stets als breite Bänder auf und sie lassen sich demzufolge nicht genau festlegen, jedoch entsprechen die obigen Zahlen gut der thatsächlichen Verschiebung des Maximums des photochemischen Effectes dieser Lichtquellen auf Bromsilbergelatine.[1]

Vielfach werden in der orthochromatischen Photographie Erythrosin-Gelatineplatten verwendet, welche den gebräuchlichen Typus der gelbgrün-empfindlichen Platten abgeben.

Das Sensibilisierungsmaximum auf Erythrosin-Bromsilberplatten liegt in meinem Glasspectrographen für Sonnenlicht bei:

| | Sensibilisierungsmaximum |
|---|---|
| Erythrosin-Bromsilber-Gelatine, kurze Belichtung.................... | von λ 565 bis 560 |
| Mitte des Sensibilisierungsbandes circa | bei λ 562. |

Ein fast ebenso dichtes Band schließt sich beiderseits von

$$\lambda = 570 \text{ bis } 548$$

an, gegen Orange sinkt es mittelstark bis circa $\lambda = 580$, verläuft schwach bis über die Fraunhofer'sche Linie *D* und verliert sich bei $\lambda = 600$, obschon es sich bei sehr langer Belichtung ins Orangeroth schwach erstreckt; in letzterem Falle sind die Stellen des Sensibilisierungsmaximums schon unmäßig überexponiert. Gegen Grün sinkt die Wirkung mit abnehmender Wellenlänge weniger rasch, so dass bei längerer Exposition das Sensibilisierungsband sich unsymmetrisch, d. i. mehr gegen Blaugrün als gegen Gelb erweitert; mittelstarke Wirkung lässt sich bis circa $\lambda = 540$ oder 545 verfolgen. Das Minimum der Wirkung liegt bei λ 502 bis 495.

Im Gitterspectrum ermittelte ich bei meinen Erythrosin-Bromsilberplatten das Sensibilisierungsmaximum (Sonnenlicht) bei circa $\lambda = 558$, also etwas weiter gegen das stärker brechbare Ende, jedoch sind bei diesen breiten Sensibilisierungs-

[1] Das photographirte Spectrum dieser Lichtquellen erfährt an der stärker brechbaren Seite gegen Ultraviolett eine stark merkliche Verkürzung je nach der Lichtart.

bändern im Gitterspectrum die Bestimmungen dieser Maxima keineswegs genau.

Die Bestimmung der relativen Farbenempfindlichkeit photographischer Platten (respective ihrer photographischen Schwärzung, der relativen Belichtungszeit, welche zum Eintritte gleicher Schwärzungen im rothgelben und blauvioletten Spectralbezirk nothwendig ist) wird bei Quarz- oder Glas- oder Gitterspectrographen nicht nur durch die Absorptionserscheinungen beeinflusst, sondern auch durch die verschiedene Dispersion, weil beim prismatischen Spectrum der rothgelbe Bezirk auf eine kleinere Fläche zusammengedrängt ist, als beim Gitterspectrum und demgemäß intensivere photographische Schwärzungen entstehen. So muss man z. B. für Erythrosinplatten im Gelb relativ zu Blau länger belichten, wenn man das Gitterspectrum anstatt des prismatischen Spectrums benützt, selbst wenn man sich von der Violettdämpfung durch Anwendung von Quarzprismen oder Linsen gänzlich unabhängig macht. Für Untersuchungen dieser Art bleibt das Gitterspectrum als Standard vorzuziehen, während man in vielen anderen Fällen mit dem prismatischen Spectrum sein Auslangen vollkommen finden kann.

### Jodsilbercollodion.

Für die angewandte Photographie kommt das Verhalten des Jodsilbercollodions im »nassen Verfahren« mit Silberbad und saurer Eisenvitriol-Entwicklung sehr in Betracht; im Dreifarbendruck benützt man solche Platten ohne Lichtfilter zur Erzeugung jener Theil-Negative, welche den blauvioletten Strahlen entsprechen und die Druckplatte für Chromgelb liefern. Die dominierende Wirkung des Sonnenspectrums auf Jodsilbercollodion beginnt kräftig bei circa $\lambda = 437$ einzusetzen, sowohl beim Gitter-, als Glasspectrographen und geht mit fast gleicher Kraft ins Ultraviolett hinein. Die Mitte der Maximalwirkung liegt bei $\lambda = 425$ bis 420 (Glasspectrograph oder Gitterspectrograph mit farblosen Spiegelglas-Lichtfiltern). Dieses Spectralgebiet (von $\lambda$ 437 bis zum Beginn des Ultraviolett) kommt also bei dem oben genannten photographischen Processe mit Glas-Linsen und -Filtern besonders zur Geltung.

### Chlorsilbergelatine.

Stellt man Gelatineemulsionen mittels Chlorsilber und überschüssigem löslichen Chlorid her, so erhält man Chlorsilbertrockenplatten, welche sich ähnlich wie Bromsilberplatten entwickeln lassen, feinköriger (aber viel unempfindlicher) als letztere sind,[1] und an Farbenempfindlichkeit stark von Brom- und Jodsilber abweichen.

Im Gitterspectrum hat Chlorsilbergelatine das Maximum der Empfindlichkeit (Sonnenlicht) hinter der Fraunhofer'schen Linie *K* zu Beginn des Ultraviolett; vor den Linien *H* ($\lambda = 396$) und *K* ($\lambda = 393$) beginnt die starke Wirkung, steigt rasch an, erreicht bei circa $\lambda = 380$ das Maximum und bleibt auf gleicher Höhe, soweit das Sonnenspectrum kräftig die Atmosphäre passieren kann, d. i. bis circa $\lambda = 320$. Die Mitte des Empfindlichkeitsbandes der Chlorsilbergelatine bei normaler Belichtung liegt unter diesen Verhältnissen circa bei $\lambda = 355$.

Durch farblose Glasprismen wird das Maximum der photographischen Wirkung des Sonnenspectrums vom Ultraviolett gegen die Grenze von Violett und Ultraviolett (gegen die Linien *HK*) gedrängt. Dieser Effect entspricht der absorbierenden Wirkung von Glasmassen, wie sie gewöhnlich in Aplanaten und anderen Objectiven mit gut durchlässigen Gläsern vorkommen; würde ein Objectiv schweres Flintglas enthalten, so würde die Maximalwirkung sogar bis zur Fraunhofer'schen Linie *h* ($\lambda = 410$) gedrängt werden und die Wirkung gegen *HK* schwächer werden.

Fig. 3 zeigt den verschiedenen Verlauf der Empfindlichkeitscurve von Chlorsilbergelatine gegen Sonnenlicht, je nachdem

---

[1] Vergl. Eder-Pizzighelli, Die Photographie mit Chlorsilbergelatine, Wien 1881. Ferner Eder, Ausf. Handbuch der Photographie, Bd. III, 4. Aufl., S. 395. — Derartige Chlorsilbergelatineplatten stellt in sehr guter Qualität A. Herzka in Dresden her. Als Entwickler benützte ich: Lösung I. 60 *g* Kaliumoxalat, $2^1/_2$ *g* Chlorammonium, 1 *g* Bromkalium, 500 $cm^3$ destilliertes Wasser. Lösung II. 16 *g* Eisenvitriol, 8 *g* Citronensäure, 8 *g* Alaun, 500 $cm^3$ destilliertes Wasser. Vor dem Gebrauche werden die Lösungen I und II zu gleichen Theilen gemischt. Siehe auch Eder, »Recepte und Tabellen für Photographie«, V. Aufl., 1900, S. 40.

man sich des Gitter- oder eines gut durchlässigen Glas-Spectrographen bedient.[1]

Ich glaube nach meinen Beobachtungen zu folgendem Satze berechtigt zu sein:

»Zeigt ein optischer Glasapparat gegenüber dem Sonnenspectrum eine so gute Durchlässigkeit für die stärker brechbaren Strahlen, dass die Spectrum-

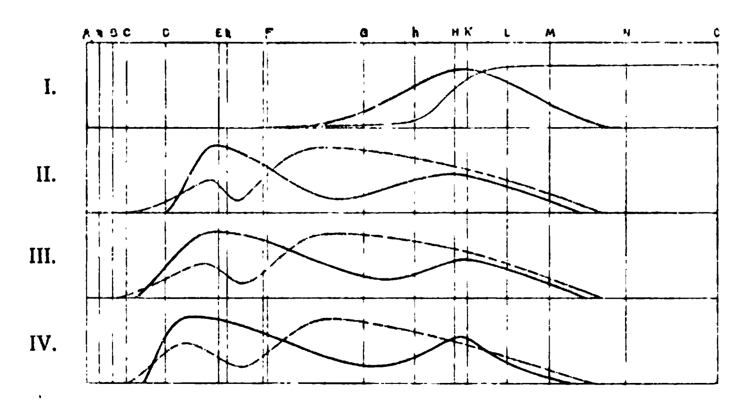



Fig. 3.

I. Wirkung des Sonnenspectrums auf Chlorsilbergelatine (stark gezeichnete Curve: Glasspectrograph; dünn linierte Curve: Concavgitter).
II. Voll ausgezogene Curve: Eosin-Badeplatte auf Bromsilbergelatine; punktierte Curve: Eosin auf Chlorsilbergelatine.
III. Voll ausgezogene Curve: Glycinroth auf Bromsilbergelatine; punktierte Curve: Glycinroth auf Chlorsilbergelatine.
IV. Voll ausgezogene Curve: Rose bengal auf Bromsilbergelatine; punktierte Curve: Rose bengal auf Chlorsilbergelatine.

photographie auf Chlorsilbergelatine eine Maximalwirkung bei den Fraunhofer'schen Linien *HK* an der Grenze des Violett und des Ultraviolett aufweist, so entspricht er bezüglich Lichtdurchlässigkeit des gesammten sichtbaren Spectrums allen Anforderungen für Zwecke der gewöhnlichen Photo-

[1] Über den Effect von Spectrographen mit Schwerflint schrieb ich bereits vor 17 Jahren in meiner Abhandlung »Über das Verhalten der Haloidverbindungen des Silbers gegen das Sonnenspectrum«, diese Sitzungsber., 4. Dec. 1884.

graphie farbiger Objecte, ohne irgendwelche störende Farbendämpfungen mit sich zu bringen.«

Dementsprechend kann man sich auch rasch durch eine Photographie des Sonnenspectrums auf Chlorsilbergelatine ein Urtheil verschaffen, ob die Glasprismen eines Spectrographen für derartige Versuchsreihen genügen oder nicht. Gitter- oder Quarzspectrographen sind selbstverständlich in diesen stark brechbaren Spectralgebieten stets an Helligkeit überlegen, und es sind derartige Vorproben für letztere Apparate überflüssig.

## Variable Sensibilisierungswirkung von Farbstoffen auf Brom- und Chlorsilber.

Für die vorliegenden sensitometrischen Versuche ist eine genaue Kenntnis der Lage der Sensibilisierungsmaxima der für Gelbgrün sensibilisierenden Farbstoffe von Belang. Deshalb untersuchte ich neuerdings die Wirkung gleicher Farbstoffe auf verschiedene photographische Schichten, insbesonders auf Bromsilbergelatine-, Chlorsilbergelatine-Platten[1] und Bromsilbercollodion-Emulsion,[2] und zwar benützte ich Eosin (Tetrabromfluoresceïn), Erythrosin (Tetrajodfluoresceïn) und Rose bengal.

Die durch den betreffenden Farbstoff bewirkten Sensibilisierungsmaxima liegen bei kurzen Belichtungen sowohl bei Brom und Chlorsilbergelatine, als auch bei der Collodionemulsion in der Regel an annähernd derselben Stelle, mitunter sind sie gegeneinander etwas verschoben (um ± 1 bis 6 Angström'sche Einheiten).

Bei ganz kurzen Belichtungen liegt das Sensibilisierungsmaximum von Tetrabromfluoresceïn (Eosin) bei Brom-

---

[1] Von mir zuerst untersucht 1884 (a. a. O., wo sich auch eine gezeichnete Curve der Spectralwirkung auf Chlorsilber+Eosin vorfindet, welche im wesentlichen mit meinen neuerlichen Beobachtungen übereinstimmt, jedoch den Verlauf der Sensibilisierung weniger genau wiedergibt, als die dieser Abhandlung in Fig. 3 beigegebene Curve).

[2] Gewaschene Albert'sche Bromsilbercollodionemulsion, welche, mit dem betreffenden Farbstoffe gefärbt, im Silberbade 1 : 500 gebadet und dann mit alkalischem Glycin-Entwickler hervorgerufen wurde.

silber- und Chlorsilbergelatine fast an derselben Spectralstelle, jedoch erscheint bei mehreren meiner Spectrumphotographien das Eosinmaximum beim Bromsilber ein wenig weiter gegen Gelb liegend, als beim Chlorsilber.[1] Zusatz von Ammoniak zum Farbbade beeinflusst die Farbenempfindlichkeit günstig, ist aber nicht ohne Rückwirkung auf den Verlauf des Sensibilisierungsbandes.

Bei Chlorsilber und Bromsilbergelatine sind die Minima der Empfindlichkeit viel mehr voneinander verschieden, als ihre Maxima, wie folgende Zusammenstellung meiner Messungen zeigt:

| | Glasspectrograph (Sonnenlicht) | |
|---|---|---|
| | Sensibilisierungsmaximum bei | Minimum bei |
| Chlorsilbergelatine mit Eosin und Ammoniak[2] | $\lambda = 540$ | $\lambda = 457$ |
| Bromsilbergelatine mit Eosin und Ammoniak | $\lambda = 541$ | $\lambda = 513$ |
| Bromsilbergelatine mit Eosin ohne Ammoniak | $\lambda = 546—542$ | $\lambda = 525$ |

Während die Sensibilisierungsmaxima so ziemlich (nicht genau) an derselben Stelle im Gelbgrün sich befinden, schwanken die Minima viel mehr, weil bei längerer Belichtung und starker Entwickelung sich das Sensibilisierungsband unsymmetrisch beiderseits verbreitert und anderseits das photographische Band im Blauviolett, welches der photographischen Eigenempfindlichkeit des reinen Bromsilbers (oder Chlorsilbers) entspricht, nach steigender Belichtung sich seinerseits je nach der Belichtungsdauer bald mehr, bald weniger weit gegen Blaugrün ausbreitet; hiebei rückt bald das letztere Band,

[1] Vergl. Acworth, Annal. Physik.

[2] 100 $cm^3$ Wasser, 2 $cm^3$ Eosinlösung (1 : 500), 0·5 $cm^3$ Ammoniak, Badezeit 1 bis 2 Minuten.

bald das erstere Band rascher vor, je nachdem die relative Gelbgrün- oder die Blauempfindlichkeit überwiegt.

Die erwähnte unsymmetrische beiderseitige Ausbreitung des eigentlichen Sensibilisierungsbandes ist auch die Ursache, warum bei längerer Belichtung und Entwickelung die Mitte dieses Bandes nicht mit dem eigentlichen Sensibilisierungsmaximum zusammenfällt, sondern allmählich gegen Blaugrün zu sich verschiebt. Hierin liegt der Grund der Unsicherheit der Bestimmung der Sensibilisierungsmaxima.

Die Empfindlichkeit einer Eosin-Bromsilbergelatineplatte reicht bei circa 100facher Überexposition (d. i. 100mal längere Belichtung, als zur Entstehung eines guten Sensibilisierungsbandes nöthig ist) weit über die Fraunhofer'sche Linie *D* gegen *C*. — Das auf Eosin-Chlorsilbergelatine photographierte Spectrum rückt mit entsprechender photographischer Schwärzung langsamer gegen Roth und schneller gegen Blaugrün vor; es erscheint bei kurz belichteten Platten zuerst nur Gelbgrün (Sonnenspectrum), dann nach circa viermal längerer Belichtung erst ein photographischer Effect im Bezirk zu Beginn von Ultraviolett (*HK*); bei Eosin-Bromsilbergelatine ist es umgekehrt.

Eosin-Bromsilbercollodion mit chemischer Entwickelung[1] gibt ein Sensibilisierungsmaximum bei $\lambda = 542$ bis 550, bei anderen Platten bei 548 bis 549, und zwar erscheint (Glasspectrograph, Sonnenlicht) im Gelbgrün die Wirkung früher als die Blauwirkung. Dagegen gab mir Bromsalzcollodion, gefärbt mit Eosin, gesilbert im starken Silberbade und entwickelt mit sauerer Eisenvitriollösung, wie man dies zu orthochromatischen Gemäldereproductionen verwendet,[2] kein so deutliches Sensibilisierungsmaximum, sondern bei einigermaßen reichlicher Belichtung erstreckt sich das Band der photographischen Wirkung von der Fraunhofer'schen Linie *D* continuierlich bis an die Grenze Ultra-

[1] Bromsilbercollodion, welches mit Eosin gefärbt, dann im Silberbade sensibilisiert, gewaschen und alkalisch entwickelt wird.

[2] Eder's Handbuch, II. Th., d. i. Collodion mit Bromcadmium und Eosin, gesilbert im starken Silberbade und mit 20procentiger Eisenvitriollösung hervorgerufen.

violett bei *HK*, wobei ohne Anwendung irgend eines Dämpfungsfilters die Wirkung allmählich gegen Blauviolett sinkt und kaum ein Minimum der Spectralwirkung irgendwo bemerkbar ist. Wird Chlorsilbercollodion ganz ebenso behandelt, so erhält man ein kräftiges Sensibilisierungsmaximum gleichfalls bei $\lambda = 542$ bis 550, bei anderer Platte bei 548 bis 549; die Wirkung erstreckt sich ins Violett, wobei sie jedoch im Blau durch eine Art Minimum unterbrochen wird. Es ist sehr bemerkenswert, dass im großen und ganzen die dominierende Wirkung der Farbensensibilisierung von Eosin trotz der sehr verschieden präparierten photographischen Schichte nicht stärkere Abweichungen gegen das Spectrum aufweist.

Bei Versuchen mit Rose bengal auf Bromsilber- und Chlorsilbergelatine (Farbbad mit etwas Ammoniak) fand ich die Sensibilisierungsmaxima übereinstimmend an derselben Stelle bei $\lambda = 568$ bis 566, dagegen sind die Minima stark verschieden (für Chlorsilber bei kurzen Belichtungen $\lambda = 469$ bis 468, bei Bromsilber bei $\lambda = 509$), ohne dass diese Minima eine besonders gute Charakteristik abgeben würden. Chlorsilberplatten mit Rose bengal ohne Ammoniak[1] zeigen die Sensibilisierungscurve steiler, prägnanter (mit dem Maximum bei circa 475 bis 471, also etwas verschieden vom Maximum ohne Ammoniak), Minimum bei 486 bis 481. Der Grund der Verschiebung des Minimums dürfte seinen Grund im Sinken der relativen Gelbgrün-Empfindlichkeit und Vorwalten der Violettempfindlichkeit (siehe oben) haben.

Ähnlich verhält sich Glycinroth. Die merkwürdigen Unterschiede in den Sensibilisierungsbändern von Farbstoffen auf Bromsilber- und Chlorsilbergelatine zeigt Fig. 3 (Curven, welche die Wirkung des Sonnenspectrums, Glasspectrograph, auf diese Schichten darstellen).

---

[1] Auch bei Chlorsilbergelatine-Emulsionen wirken schon ganz kleine Mengen von Ammoniak (z. B. 0·1 bis 0·5% im Farbbade) sehr günstig auf Heraustreten des Sensibilisierungsbandes, z. B. Chorsilbergelatine + Rose bengal gibt ohne Ammoniak in meinem Compoundspectrographen das Sensibilisierungsmaximum im Gelb erst bei 5 bis 7mal längerer Belichtung als das Violett bei *HK*; mit Ammoniak kehrt sich das Verhältnis um.

Fluoresceïn erzeugt auf Chlorsilbergelatine ein Sensibilisierungsmaximum ungefähr bei λ 465, bei Bromsilbergelatine aber bei λ 466, d. h. das Maximum ist bei Chlorsilber weiter gegen das weniger brechbare Ende gerückt (nur bei kurzer Belichtung und harter Entwickelung nachweisbar, bei normaler Belichtung und Entwickelung verschwinden diese Unterschiede). Sehr gut sensibilisiert Fluoresceïn das Bromsilbercollodion, wenn man mit einem schwachen Silberbade (1 : 500) sensibilisiert, exponiert, gut wäscht und dann alkalisch (mit Glycin etc.) entwickelt. Die Grünempfindlichkeit ist sehr gut. Monobromfluoresceïn wirkt unter analogen Verhältnissen im Bromsilbercollodion besonders gut;[1] es sensibilisiert sehr kräftig für Grün und das Maximum des Sensibilisierungsbandes liegt zwischen jenem vom Fluoresceïn und Tetrabromfluoresceïn, bei vortrefflicher Gesammtempfindlichkeit der Schichte. Ein Zusatz von Monobromfluoresceïn zu Äthylviolettcollodion[2] verbessert dieses, gibt bei Steigung der Empfindlichkeit gute panchromatische Schichten. Da ich mit Monobromfluoresceïn-Bromsilbercollodion, sowie mit dessen Combination mit Äthylviolett vorzügliche Resultate hinter Grünfilter, respective Rothfilter erhielt, so führte ich dies Verfahren für directe Dreifarben-Autotypie-Aufnahmen ein; die Erfolge waren besser als mit anderen bisher bekannten Methoden.

Da die Eigenempfindlichkeit des Chlorsilbers im Ultraviolett stets weitab vom Sensibilisierungsmaximum liegt, so eignet sich die Chlorsilbergelatineplatte besser zum Studium der typischen Sensibilisatoren, namentlich der als Blausensibilisatoren wirkenden gelben Farbstoffe; ihre Wirkung fließt häufig mit der Bromsilberempfindlichkeit zu sehr zusammen, um in ihrer Eigenart sich präcise erkennen zu lassen.

Vergleicht man die Lage der Maxima und Minima in diesen Curven und wirft die Frage auf, ob derartige orthochromatische Chlorsilbergelatineplatten durch sensitometrische Bestimmung

[1] Auf Bromsilbergelatine bringt Monobromfluoresceïn keinen so guten Effect als Sensibilisator hervor.

[2] Äthylviolett als Sensibilisator für Roth und Gelb eingeführt von E. Valenta, siehe Phot. Corresp., 1901, S. 37.

ihrer Empfindlichkeit hinter blauen und gelben Lichtfiltern sich ebenso entsprechend charakterisieren lassen, wie Bromsilberplatten, so ergibt sich Folgendes:

Wollte man die Größe der Wirksamkeit der Farbensensibilisatoren bei Chlorsilbergelatineplatten durch Vorschalten von farbigen Lichtfiltern vor ein Sensitometer messen, so müsste man das Spectrum durch violette Filter an der Stelle der approximativen Grenze der Eigenempfindlichkeit des Chlorsilbers abfiltrieren und den anderen passenden, weniger brechbaren Theil für sich wirken lassen, um die Methode dem analogen Verfahren für Bromsilber anzupassen. Durch dieses Beispiel sind die Grenzen der allgemeinen Anwendbarkeit derartiger Methoden überhaupt gekennzeichnet. Keinesfalls aber wird die Sensitometrie mit farbigen Lichtfiltern die spectrophotometrische Methode, wie ich sie in meiner Abhandlung über »System der Sensitometrie« beschrieb, ersetzen können, welche sowohl die photographische Einzelwirkung, als auch die Summenwirkung der Spectralbezirke zu messen gestattet.

**Vergleichung der chemischen Helligkeit der Walrathkerze mit der Amylacetatlampe, bezogen auf Bromsilbergelatine.**

In England wird bei verschiedenen photometrischen photographischen Arbeiten noch immer die Walrathkerze benützt und in neuerer Zeit bedient sich Chapman Jones für seinen Plattenprüfer[1] wieder dieser Normalkerze. Da die Beziehungen der chemischen Helligkeit der Walrathkerze zur Amylacetatlampe noch nicht näher bestimmt wurden, so stellte ich eine Reihe von Versuchen hierüber an. Es wurde von mir dieselbe Methode angewendet, welche ich in meiner Abhandlung (»System der Sensitometrie«, II. Abhandlung) beschrieben habe: als lichtempfindliche Schichte wurden Bromsilbergelatineplatten von Schleußner benützt und die chemische Wirkung einer Walrathkerze von 45 *mm* Flammenhöhe bei 1 *m* und 3 *m* Abstand mit der Wirkung einer Hefner'schen Amyllampe verglichen. Die photographischen Platten wurden 5 bis 7 Minuten lang unter völlig gleichen Verhältnissen entwickelt, fixiert und

[1] Photogr. Corresp. 1901, S. 430.

der photographische Schwärzungseffect mittels Hartmann's Mikrophotometer und zum Vergleiche mit Martens' Polarisationsphotometer gemessen.[1]

Aus meinen Versuchen ergab sich die chemische Helligkeit (für Bromsilbergelatine) einer Walrathkerze (45 *mm* Flammenhöhe) im Mittel = 0·93 Hefner-Einheiten.

Nach den Berichten der Lichtmesscommission (Krüss, München 1897, S. 73[2]) wurde die optische Helligkeit der Walrathkerze = 1·129 bis 1·144 Hefner-Einheiten gefunden, d. i. als Mittelwert rund = 1·14 Hefner-Einheiten.

Nennt man nach Schwarzschild[3] »relative Actinität zweier Lichtquellen das Verhältnis ihrer photographischen Helligkeit $s$ (für Bromsilber), dividiert durch das Verhältnis ihrer optischen Helligkeit ($s_1$)«, so ergibt sich die Actinität der Walrathkerze relativ zur Hefner'schen Amyllampe =

$$\frac{\text{Chemische Helligkeit } (s)}{\text{optische Helligkeit } (s_1)} = \frac{0{\cdot}93}{1{\cdot}14} = 0{\cdot}82.$$

Es verhält sich somit die Walrathkerze betreffs relativer Actinität ähnlich wie die Benzinlampe, bei welcher sich nach meinen Vorversuchen die relative Actinität

$$\frac{s}{s_1} = \frac{0{\cdot}0756}{0{\cdot}089} = 0{\cdot}85$$

ergibt.

Nach Kenntnis dieser Zahlen im Sinne der in meinem »Systeme der Sensitometrie« aufgestellten Forderungen ist die Reduction der mit Hilfe einer Walrathkerze ermittelten Sensitometer-Angaben für Bromsilbergelatine auf die stets als primären Standard zu benützende Amyllampe leicht ermöglicht.

---

[1] Martens, siehe Photogr. Corresp., 1901, S. 528.

[2] Krüss H., Bericht über die Arbeiten der Lichtmesscommission des deutschen Vereines von Gas- und Wasser-Fachmännern. München 1897.

[3] Schwarzschild, Über die photographische Vergleichung der Helligkeit verschiedenfarbiger Sterne. Diese Sitzungsber., Wien.

## XX. SITZUNG VOM 17. OCTOBER 1901.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. XXII, Heft VIII (August 1901).

Von dem Leiter der botanischen Forschungsreise nach Brasilien, dem w. M. Herrn Prof. R. v. Wettstein, sind folgende zwei Telegramme eingelaufen:

I. de dato Teneriffa, 8. October: »Teneriffa angekommen; alles wohlauf. Wettstein.«

II. de dato Genua, 16. October: »Eben in Genua eingetroffen, kommen Dienstag oder Freitag nach Wien. Wettstein.«

Das w. M. Herr Hofrath Skraup legt drei im chemischen Institute der Universität Graz ausgeführte Arbeiten vor:

1. »Notiz über Cinchonifin, Cinchotin und Cinchonin«, von Zd. H. Skraup.
2. »Über einige physikalische Eigenschaften von $\alpha$- und $\beta$-$i$-Cinchonin«, von Zd. H. Skraup.
3. »Über die Oxydation von $\alpha$-$i$-Cinchonin«, von Zd. H. Skraup und R. Zwerger.

Herr Prof. Dr. Friedrich Berwerth überreicht eine im Laboratorium der mineralogisch-petrographischen Abtheilung des naturhistorischen Hofmuseums von ihm in Gemeinschaft mit Dr. Jan de Windt ausgeführte Arbeit, betitelt: »Untersuchungen von Grundproben des östlichen Mittelmeeres«. Gesammelt auf der I., III. und IV. Reise von Sr. M. Schiff ,Pola' in den Jahren 1890, 1892 und 1893.

Das w. M. Herr Director E. Weiß erstattet einen vorläufigen Bericht über die Beobachtungen des Laurentiusstromes während der Nächte des 9. bis 12. August.

Das w. M. Herr Hofrath Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Ad. Franke: »Über ein dem Pinakon isomeres Glycol aus Aceton«.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben die folgende Arbeit aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium: »Über Carbonsäureester der Phloroglucine« (II. Abhandlung). von J. Herzig und F. Wenzel.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Berthelot M., Les carbures d'hydrogène 1851—1901. Recherches expérimentales. Tome I—III. Paris, 1901. 8°.

Bigourdan M. G., Annales célestes du dix-septième siècle. Paris, 1901. 4°.

Bourlet Carlo, Cours de Mathématiques à l'usage des élèves-architectes et ingénieurs. Paris, 1900. 8°.

Rabot Ch., Les variations de longueur des glaciers dans les régions arctiques et boréales. Genève et Bale, 1900. 8°.

Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts in Paris: Carte photographique du Ciel. Zone +3, feuilles 118, 136; Zone +5, feuilles 125, 126, 175; Zone +7, feuilles 139, 151, 165, 166, Zone +9, feuilles 118, 135, 139, 155, 179; Zone +22, feuilles 103, 163; Zone +24, feuilles 92, 109, 110, 111, 113, 133.

— Atlas photographique de la Lune, publié par l'Observatoire de Paris, exécuté par M. M. Loewy et M. P. Puisseux. Fascicule 5, planches XXIV—XXIX. Paris, 1900.

Wiesner Julius, Karl Freiherr v. Hügel, Histologe, Geograph und Staatsmann. Gedenkrede. Wien, 1901. 8°.

---

# XXI. SITZUNG VOM 24. OCTOBER 1901.

Erschienen: Denkschriften, Bd. LXXIII (Jubelband zur Feier des 50jährigen Bestandes der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus).

Der Vorsitzende, Herr Prof. E. Sueß, begrüßt den Leiter der von der kaiserlichen Akademie entsendeten Forschungsreise nach Brasilien, w. M. Herrn Director R. v. Wettstein, bei seiner Rückkehr.

Der Secretär-Stellvertreter, Herr Prof. F. Becke, legt einen von dem Stadtrathe der königl. Residenzstadt Prag übersandten Bericht über die Auffindung und Untersuchung der Gebeine Tycho Brahe's in der Marienkirche vor dem Theine in Prag, erstattet vom Architekten J. Herain und Universitätsdocenten Dr. H. Matiejka, vor.

Die Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg zeigt das bevorstehende Fest ihres 50jährigen Bestehens an.

Die Herren Prof. Dr. Josef Seegen in Wien und Prof. Dr. Philipp Forchheimer in Graz sprechen den Dank für ihre Wahl zum inländischen correspondierenden Mitgliede dieser Classe aus.

Das w. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität Prag ausgeführte Arbeit von Dr. Hans Meyer: »Über Arecolin und Arecaïdin«.

Herr Prof. Dr. Hans Rabl, Assistent am histologischen Institute der Wiener Universität, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Über orceinophiles Bindegewebe«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Barata M., A proposito dei »Mistpoeffers« italiani. Rom. 1901. 8°.

General-Commissariat, k. k. österreichisches: Berichte über die Weltausstellung in Paris 1900. Band III bis XII, Wien 1901. 4°.

Schwarz Thiemo, P., Resultate aus den im Jahre 1900 auf der Sternwarte zu Kremsmünster angestellten meteorologischen Beobachtungen. Wels, 1901. 8°.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

---

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

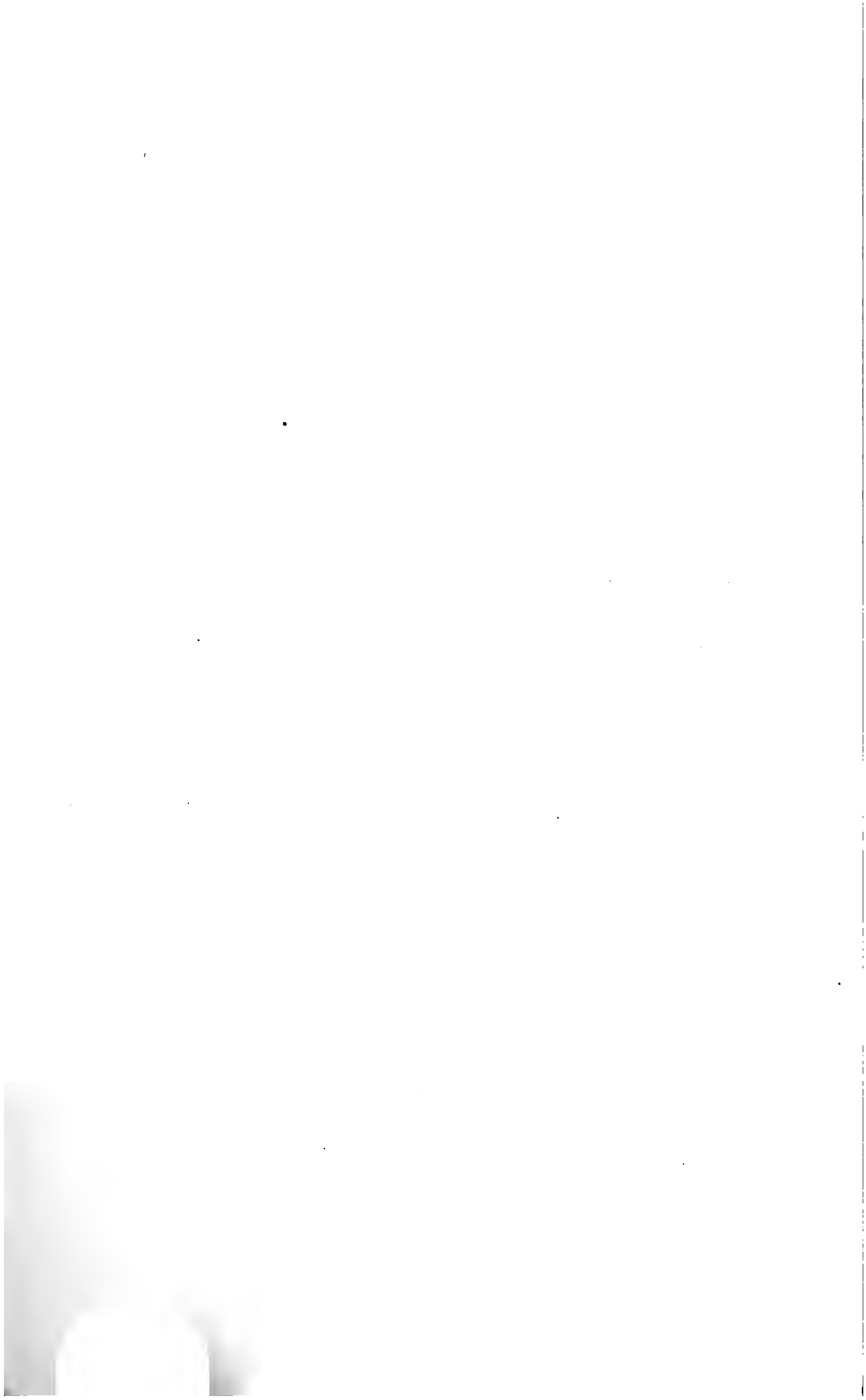
---

CX. BAND. IX. HEFT.

---

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



# XXII. SITZUNG VOM 7. NOVEMBER 1901.

Die ostsibirische Section der kaiserl. russischen geographischen Gesellschaft in Irkutsk zeigt die am 17. (30.) November l. J. stattfindende Feier ihres fünfzigjährigen Bestandes an.

Die Herren Alexander Kowalewski in St. Petersburg, Gustav Retzius in Stockholm und Dr. Karl v. Linde in München sprechen den Dank für ihre Wahl zum ausländischen correspondierenden Mitgliede dieser Classe aus.

Das w. M. Herr Hofrath Zd. H. Skraup in Graz legt zwei im chemischen Institute der Universität Graz ausgeführte Arbeiten vor:

I. »Über den Heptacetylchlormilchzucker«, von Albert Bodart.

II. »Über Heptacetylchlormaltose«, von Richard Foerg.

Herr Prof. Johann Matuschek in Trautenau übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Beiträge zur Kenntnis des Ferriferrocyanides«.

Das w. M. Herr k. und k. Intendant Hofrath F. Steindachner überreicht eine vorläufige Mittheilung von Herrn Custos Friedrich Siebenrock, betitelt: »Beschreibung einer neuen Schildkrötengattung aus der Familie *Chelydidae* von Australien: *Pseudemydura*«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Alleghany Observatory, Miscellaneous scientific papers. New series, No 1, 2, 3.

Comitato per le onoranze a F. Brioschi: Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tomo I. Mailand, 1901. 4°.

Matiegka Heinrich, Dr., Bericht über die Untersuchung der Gebeine Tycho Brahe's. Prag, 1901. 8°.

Neupert Karl, Mechanik des Himmels und der Molecüle. Bamberg, 8°.

Studnička F. J., Dr., Professor, Bericht über die astrologischen Studien des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe. Prag, 1901. 8°.

Universität in Zürich, Akademische Schriften, 1900 bis 1901.

Universidad Nacional de Buenos Aires, Anales de la Universidad, 1901. 8°.

Watzof Spas, Narodna meteorologija. Sophia, 1900. 8°.

## XXIII. SITZUNG VOM 14. NOVEMBER 1901.

Herr Prof. Dr. Otto Drasch in Graz dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Herausgabe seiner Untersuchungen über die Entwicklung des Hühnchens.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Hans Molisch in Prag übersendet eine Arbeit, betitelt: »Über den Goldglanz von *Chromophyton Rosanoffii* Woron.«

Herr Adolf Faidiga, Referent der Erdbeben-Commission der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, übersendet eine Monographie unter dem Titel: »Das Erdbeben von Sinj am 2. Juli 1898«.

Herr Dr. Victor Hammerschlag legt eine im physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Untersuchung vor, betitelt: »Die Lage des Reflexcentrums für den Musculus tensor tympani«.

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Haeckel Ernst, Kunstformen der Natur. Sechste Lieferung. Leipzig und Wien. 4°.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg, Festschrift, 1901.

Universität in Freiburg (Schweiz), Akademische Schriften, 1900—1901.

## XXIV. SITZUNG VOM 21. NOVEMBER 1901.

Der Vorsitzende, Herr Präsident E. Sueß, macht Mittheilung von dem Verluste, welchen diese Classe durch das am 20. November l. J. zu Wien erfolgte Ableben ihres inländischen correspondierenden Mitgliedes, Herrn Hofrathes Prof. Johann Edlen v. Radinger, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das w. M. Herr Prof. K. Rabl in Prag dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Herausgabe seiner Arbeit über die Entwickelungsgeschichte des Gesichtes der Wirbelthiere.

Das w. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit des Herrn Rudolf Götz, betitelt: »Über die Condensation von Diphensäureanhydrid mit Benzol«.

Das w. M. Herr Hofrath A. Lieben überreicht folgende zwei Arbeiten von Herrn G. Billitzer:

I. »Elektrochemische Studien am Acetylen. I. Kathodische Depolarisation.«
II. »Über die saure Natur des Acetylens.«

Herr Dr. C. Hillebrand, Docent an der k. k. Universität in Wien, legt eine Mittheilung vor, betitelt: »Über die gleichzeitige Sichtbarkeit der Sonne und des total verfinsterten Mondes im allgemeinen und speciell bei den zwei Mondesfinsternissen des Jahres 1902«.

Herr Dr. J. Holetschek, Adjunct der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: »Über den Helligkeitseindruck von Sternhaufen«.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

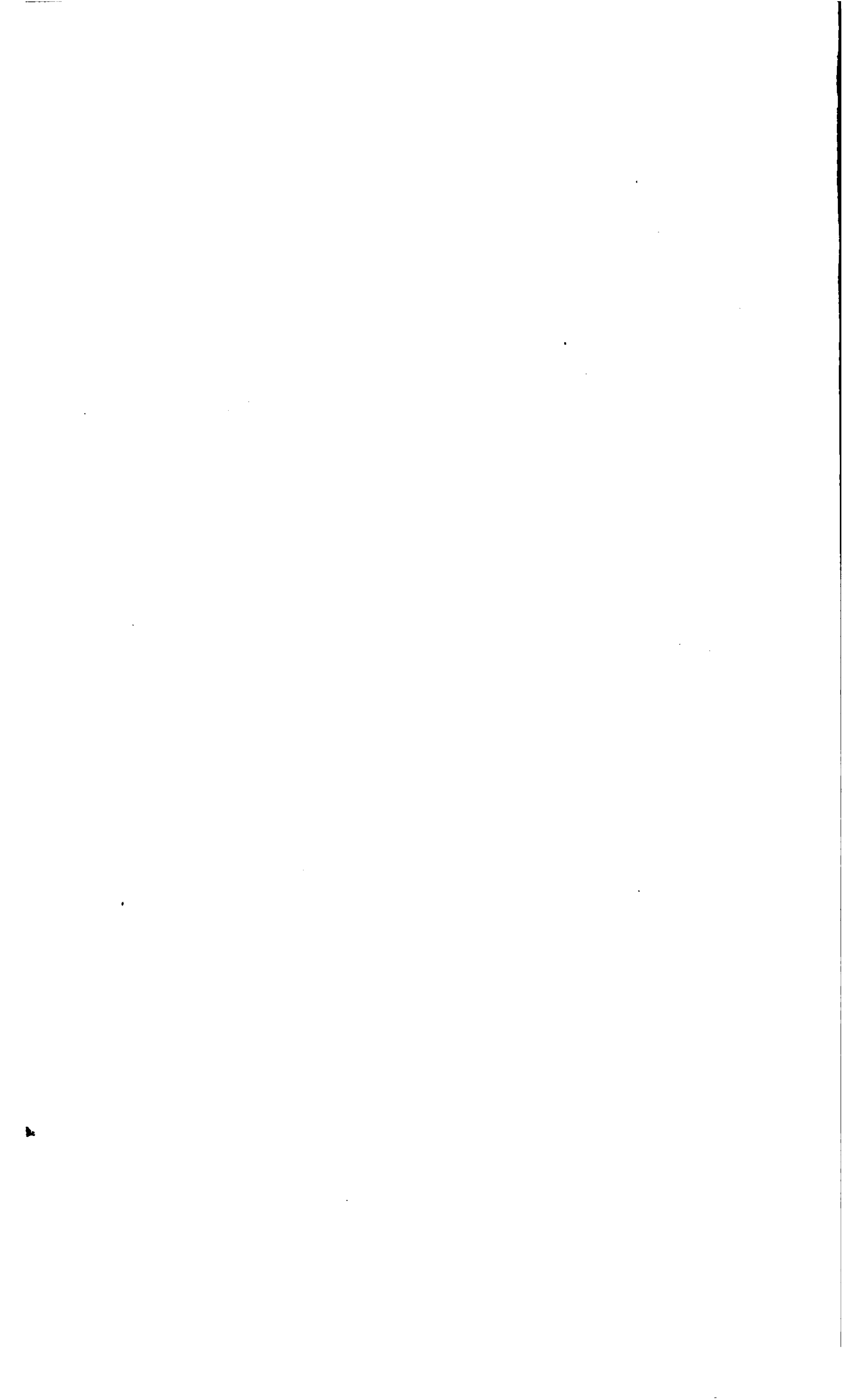
Brühl, Jul. Wilh., Roscoe-Schorlemmer's ausführliches Lehrbuch der Chemie. IX. Band, VII. Theil: Organische Chemie. Braunschweig, 1901. 8°.

Cooke, Theodore, The Flora of the Presidency of Bombay. London, Part I, 1901. 8°.

Meteorologisches Bureau in Sarajevo, Zusammenstellung der in den Jahren 1896, 1897, 1898 in Bosnien und der Hercegovina stattgefundenen Beobachtungen. Wien, 4°.

Verson, E., Sull'armatura delle zampe spurie nella larva del filugello. XIV. Padua, 1901. 8°.

---



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.



# SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

# AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. X. HEFT.

JAHRGANG 1901. — DECEMBER.

## ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

(MIT 5 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1901.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHANDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

# INHALT

des 10. Heftes December 1901 des CX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.



Preis des ganzen Heftes: 5 K — h = 5 Mk. — Pfg.

# SITZUNGSBERICHTE

DER

# KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

## MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CX. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

## XXV. SITZUNG VOM 5. DECEMBER 1901.

**Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 110, Abth. II.a, Heft V und VI (Mai und Juni 1901). — Monatshefte für Chemie, Bd. XXII, Heft IX (November 1901).**

Der Vorsitzende, Herr Prof. E. Sueß, macht Mittheilung von dem Verluste, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 22. November l. J. erfolgte Ableben des ausländischen correspondierenden Mitgliedes der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe, Herrn Dr. Alexander Kowalewski in St. Petersburg, sowie durch das am 30. November l. J. erfolgte Hinscheiden des ausländischen Ehrenmitgliedes der philosophisch-historischen Classe, Herrn Prof. Dr. Friedrich Albrecht Weber in Berlin, erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Das ausländische Ehrenmitglied, Herr Geheimrath Prof. Albert v. Koelliker in Würzburg, übersendet eine vorläufige Mittheilung: »Über einen noch unbekannten Nervenzellenkern im Rückenmark der Vögel«.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

I. »Chemische und spectralanalytische Untersuchungen über den gelben Farbstoff des Endosperms der Cerealienfrüchte«, von Herrn Dr. Ernst Kramer in Laibach.

II. »Über $l$-grediente Verwandtschaften im $R_r$, auf $M_{r-1}$ und auf Curven«, von Herrn S. Kantor.

Herr Eugen Freund in Wien übersendet ein Manuscript, betitelt: »Einer hochlöblichen kaiserlichen Akademie der Wissenschaften gewidmete Denkschrift über das natürliche Flugprincip«.

Herr Dr. Ferdinand Kornfeld in Wien übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Verhütung der Schwindsucht«.

Das w. M. Herr Prof. Dr. R. v. Wettstein erstattete einen vorläufigen Bericht über die Ergebnisse der südbrasilianischen Expedition.

Herr J. Klimont in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: »Über die Zusammensetzung von Oleum cacao«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung des Herrn Prof. G. Jäger vor: »Die Energie der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeitsmolekeln«.

Der Präsident, Herr Prof. E. Sueß, überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. J. Cvijić in Belgrad mit dem Titel: »Die tektonischen Vorgänge in der Rhodopemasse«.

---

# Die Energie der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeitsmolekeln

von

Prof. **G. Jäger.**

**(Vorgelegt in der Sitzung am 6. December 1901.)**

In den folgenden Auseinandersetzungen soll in einfacher Weise ein neuer Beweis des Satzes geliefert werden: Die mittlere kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung der Flüssigkeitsmolekeln und der Molekeln des zugehörigen gesättigten Dampfes ist ein und dieselbe Größe.

Die Clapeyron-Clausius'sche Gleichung, welche man gewöhnlich in der Form:

$$rJ = T(v-v')\frac{dp}{dT} \tag{1}$$

schreibt, gewährt uns die Möglichkeit, eine angenäherte Formel für die Beziehung zwischen Temperatur und Spannung eines gesättigten Dampfes herzustellen. Wir verstehen hier unter $r$ die Verdampfungswärme, $J$ das mechanische Wärmeäquivalent, $p$ den Druck des gesättigten Dampfes, $v$ das specifische Volumen des Dampfes, $v'$ jenes der zugehörigen Flüssigkeit, $T$ die absolute Temperatur. Nehmen wir an, die Zustandsgleichung des Dampfes lasse sich in der Form des Boyle-Charles'schen Gesetzes schreiben:

$$pv = RT, \tag{2}$$

was ja mit großer Annäherung thatsächlich für viele Dämpfe innerhalb nicht zu großer Temperaturgrenzen zutrifft, so können wir in Gleichung (1) den Wert für $v$ aus Gleichung (2) ein-

setzen und erhalten nach Trennung der Variablen, wenn wir gleichzeitig $v'$ gegen $v$ vernachlässigen, was ebenfalls erlaubt ist,

$$\frac{rJ}{RT^2}dT = \frac{dp}{p}.$$

Die partielle Integration ergibt weiters:

$$\frac{-rJ}{RT} + \int \frac{J}{R} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{dr}{dT} dT = lp - lC, \tag{3}$$

wenn wir unter $C$ eine willkürliche Constante verstehen. Nach Regnault lässt sich nun die Verdampfungswärme einer Flüssigkeit in erster Annäherung darstellen durch:

$$r = r_0 - at,$$

wobei $a$ wieder eine Constante bedeutet, $t$ die Temperatur in Celsiusgraden. Da nun:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dT} = -a,$$

so folgt für Gleichung (3)

$$-\frac{rJ}{RT} - \frac{aJ}{R}\int \frac{dT}{T} = lp - lC$$

oder

$$-\frac{rJ}{RT} - \frac{aJ}{R} lT = lp - lC,$$

was wir schließlich noch umformen können in

$$p = \frac{C}{T^{\frac{aJ}{R}}} \cdot e^{-\frac{rJ}{RT}} \tag{4}$$

In dieser Formel trägt zur starken Veränderung der Dampfspannung mit der Temperatur hauptsächlich das Glied $e^{-\frac{rJ}{RT}}$ bei, während der Factor $\frac{C}{T^{\frac{aJ}{R}}}$ nur in geringem Grade den Wert der Spannung des gesättigten Dampfes beeinflusst.

Wir sind nun in der Lage, durch rein mechanische Anschauungen, wie sie zuerst von Stefan[1] entwickelt worden sind, eine ganz ähnliche Formel abzuleiten. Schreiben wir nämlich die hydrostatische Grundgleichung

$$v\,dp = dA,$$

wobei wir unter $A$ die Arbeit verstehen, welche die Kräfte, die auf die Flüssigkeit einwirken, bei deren Bewegung leisten, so können wir in der Integralgleichung

$$\int v\,dp = A \tag{5}$$

unter $A$ die Verdampfungswärme verstehen, multipliciert mit dem mechanischen Wärmeäquivalent, also $A = rJ$ setzen, wenn wir die Masseneinheit Dampf in Flüssigkeit überführen. Dabei soll die Zustandsgleichung gelten

$$p(v-b) = RT,$$

woraus folgt, dass

$$dp = \frac{-RT}{(v-b)^2}\,dv$$

ist. Dies in Gleichung (5) eingesetzt, ergibt

$$\int_v^{v'} v\,dp = -RT\int_v^{v'} \frac{v\,dv}{(v-b)^2} =$$

$$= RT\left[\frac{b}{v-b} - l(v-b)\right]_v^{v'} = rJ, \tag{6}$$

wobei wir das specifische Volumen der Flüssigkeit $v'$, was wir ja in großer Annäherung thun können, wieder als constant angesehen haben. Beachten wir wiederum, dass wir $\frac{b}{v-b}$ gegen $\frac{b}{v'-b}$ vernachlässigen können, dass wir ferner $v-b = \frac{RT}{p}$ setzen können, so lässt sich Gleichung (6) schließlich schreiben:

---

[1] J. Stefan, Wied. Ann., S. 658 ff.

$$lp = -\frac{rJ}{RT} + l\frac{RT}{v'-b} + \frac{b}{v'-b}$$

oder

$$p = \frac{RT}{v'-b} \cdot e^{\frac{b}{v'-b}} \cdot e^{\frac{-rJ}{RT}}.$$

Wir haben also hier abermals dasselbe Glied $e^{\frac{-rJ}{RT}}$, welches den Gang des Druckes des gesättigten Dampfes mit der Temperatur wesentlich darstellt, multipliciert mit dem Factor $\frac{RT}{v'-b} e^{\frac{b}{v'-b}}$, welcher ebenso wie der Factor $\frac{C}{T^{\frac{aJ}{R}}}$ in Gleichung (4) von geringem Einfluss auf die Dampfspannung ist, so dass uns thatsächlich, so weit bei den gemachten Voraussetzungen zu erwarten ist, beide Gleichungen dasselbe Ergebnis liefern.

In meiner Abhandlung zur Theorie der Dampfspannung[1] habe ich auf Grund der Clausius'schen Anschauung »Über die Art der Bewegung, welche man Wärme nennt«, mit Zuhilfenahme des Maxwell'schen Vertheilungsgesetzes der Geschwindigkeit der Molekeln für die Spannung des gesättigten Dampfes folgende Formel abgeleitet:

$$p = C(1+\gamma t)\int_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Das Integral lässt sich durch Reihenentwickelung bestimmen. Und wenn man, was hier mit großer Annäherung erlaubt ist, die Entwickelung auf das erste Glied beschränkt, so erhalten wir:

$$p = \frac{C(1+\gamma t)}{2\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}} e^{-\frac{3a}{mc^2}}. \tag{7}$$

Hier bedeuten $C$ und $\gamma$ Constanten, $a$ ist die Arbeit, welche geleistet werden muss, um eine Molekel aus dem Inneren der

[1] Wiener Berichte, Bd. 99, S. 679 ff.

Flüssigkeit in das Innere des Dampfes überzuführen, $m$ ist die Masse, $c^2$ ist das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit einer Molekel. Bezeichnen wir mit $n$ die Zahl der Molekeln in der Masseneinheit Flüssigkeit, so ist $na$ eine Arbeit, welche der Verdampfungswärme entspricht. Es ist also

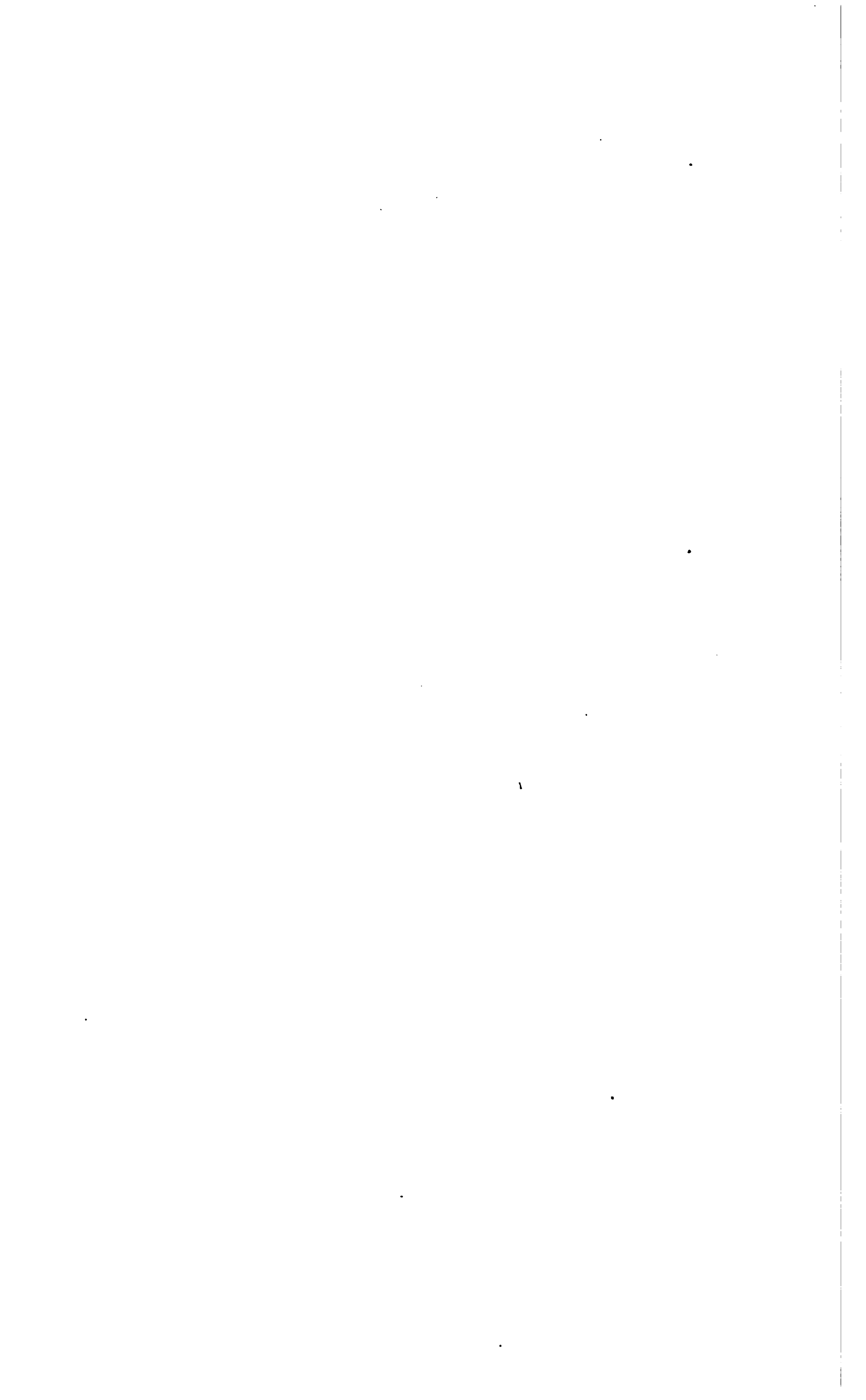
$$na = rJ.$$

Es ist nun weiter

$$\frac{3a}{mc^2} = \frac{na}{\frac{nmc^2}{3}},$$

wobei nach der kinetischen Gastheorie $\frac{nmc^2}{3} = pv = RT$ ist.

Wir erhalten daher auch in der Formel (7) für den Druck des gesättigten Dampfes als wesentlich maßgebend die Größe $e^{-\frac{rJ}{RT}}$, während wiederum der zugehörige Factor $\frac{C(1+\gamma t)}{2\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}$ von geringem Einfluss ist. Es ergibt sich also auch auf diesem Wege dasselbe Resultat, welches die Clapeyron-Clausius'sche Gleichung und die Auffassung des Gleichgewichtszustandes zwischen einer Flüssigkeit und ihrem gesättigten Dampfe als hydrostatisches Problem liefert. In der letzten Gleichung ist aber dabei ein äußerst wichtiges Resultat enthalten, dass nämlich die Vertheilung der Geschwindigkeiten der Molekeln in der Flüssigkeit genau so beschaffen sein muss wie im Dampf. Wir müssen für das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit der Flüssigkeits- und der Dampfmolekeln ein und dieselbe Größe annehmen.



# Über einen neuen Gesichtspunkt in der Theorie des Pfaff'schen Problemes, der Functionengruppen und der Berührungs-transformationen

von

**S. Kantor.**

**(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1901.)**

Analytisch-geometrische Untersuchungen über die Systeme Pfaff'scher Gleichungen haben mich auch zu einer neuen Art geführt, wie man das Problem der Transformation einer Pfaff'schen Form auf eine Normalform angreifen könnte. Wichtiger aber noch ist, dass dieser neue Gesichtspunkt sogar einen besseren Einblick in die von Sophus Lie geschaffene Theorie der Functionengruppen gewährt, als es überhaupt durch seine eigene, an sich so vollendete Theorie geschehen kann. Ich gestatte mir, diese beiden Punkte hier in Kürze darzulegen.

Man kennt die Ausdehnung, welche Riemann's Untersuchung über die quadratischen Differentialformen, die durch Punkttransformationen auf Formen mit constanten Coefficienten, also in letzter Linie auf $\Sigma dx_i^2$ gebracht werden können, ohne dass dazu eine Vermehrung der Variabeln nöthig wäre, weiterhin erlangt hat und Arbeiten von Christoffel, Lipschitz, Henrici, Ricci, Lie haben reiche Beiträge geliefert zu dieser Theorie, welche die Grundprobleme unserer Raumanschauung in sich fasst.

Nun ist es sicher eine durch die natürliche Entwickelung berechtigte Forderung, in ähnlicher Weise wie die symmetrischen bilinearen Differentialformen auch die alternierenden bilinearen Differentialformen zu untersuchen. Hier erweist sich

dann, dass ebenso wie die Transformation von $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ auf die Normalform $\Sigma dx_i^2$ und die Bedingungen hiefür die ganze Theorie unserer gewohnten Maßbestimmung enthalten, die Transformation von $\Sigma a_{ik} dx_i \delta x_k$ auf die Normalform $\Sigma(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i)$ oder in letzter Linie auf $\Sigma(dx_i \delta x_{i+n} - dx_{i+n} \delta x_i)$, $i = 1, \ldots n$ und die Bedingungen hiefür die ganze Theorie des Pfaff'schen Problemes und also in weiterer Folge die ganze Theorie der Differentialgleichungen in sich enthalten. Die Theorie der Berührungstransformationen erscheint dann beinahe als ein Corollar.

I. Die bilineare Covariante. Wir stellen also dem von Riemann angeregten Fundamentalprobleme[1] über die symmetrischen bilinearen Differentialformen das andere Problem an die Seite: »Unter welchen Bedingungen kann die alternierende bilineare Form $\Sigma a_{ik} dx_i \delta x_k$, $a_{ik} = -a_{ki}$ in eine Form mit constanten Coefficienten, also in letzter Linie gemäß den Resultaten der Algebra in die Form

$$\sum_{i=1}^{i=p} (dx_i \delta x_{i+p} - dx_{i+p} \delta x_i)$$

durch Transformation der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ und die zugehörige lineare Transformation der Differentiale $dx$, $\delta x$ verwandelt werden?«

Die Antwort auf diese Frage können wir aus der durch Pfaff, Jacobi, Natani, Clebsch, Darboux und ganz besonders Frobenius zur Vollendung gelangten Theorie des Pfaff'schen Problemes herauslesen.

Denn ein Fundamentaltheorem (cf. v. Weber: »Das Pfaff'sche Problem«, 1900) dieser Theorie sagt aus, dass jede Pfaff'sche Form $\Sigma a_i dx_i$ $(i = 1, \ldots n)$ durch die erwähnten Transformationen auf eine Normalform gebracht werden könne,

$$\left.\begin{array}{r} x_1 dx_{p+1} + \ldots + x_p dx_{2p}, \\ dx_0 + x_1 dx_{p+1} + \ldots + x_p dx_{2p} \end{array}\right. \qquad N)$$

---

[1] »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen« (1854), Riemann, Gauss' Werke, S. 272 und »Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill^ma Accademia Parisiensi propositae... (1861), ibidem, p. 391, nebst den wichtigen Anmerkungen des Herausgebers.

je nachdem die Frobenius'sche Invariante gerade oder ungerade ist und wo $2p$ oder $2p+1$ auch $< n$ sein kann.

Setzen wir voraus, dass die Determinante $R = |a_{ik}|$ nicht verschwindet, so gilt die erste Normalform für $n$ gerade, die zweite für $n$ ungerade.[1]

Durch dieselben Transformationen geht simultan die zur Pfaff'schen Form gehörige bilineare Covariante

$$\sum \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) dx_i \delta x_k \qquad i, k = 1, \ldots n \qquad C)$$

in die bilineare Covariante der Normalform über.

Dieser Übergang ist jedenfalls für die einzelne Pfaff'sche Form, also wenn man nicht den ganzen eingliedrigen Pfaff'schen Modul $m . \Sigma a_i dx_i$ im Auge hat, ein absoluter. Man schließt dieses aus Lipschitz, Cr. J., Bd. LXX, p. 73 und Frobenius, Cr. J., Bd. LXXXII, p. 234.

Stellen wir aber die bilinearen Covarianten der beiden Normalformen $N)$ auf, so finden wir in beiden Fällen

$$(dx_1 \delta x_{p+1} - dx_{p+1} \delta x_1) + \ldots + (dx_p \delta x_{2p} - dx_{2p} \delta x_p). \qquad N_1)$$

Somit schließen wir aus der Theorie der Pfaff'schen Form:

Theorem I. Die bilineare Covariante jeder Pfaff'schen Form ist eine alternierende bilineare Differentialform von der Art jener, die durch Punkttransformationen in Formen mit constanten Coefficienten verwandelt werden können.

Ich werde der Kürze halber solche alternierende Formen als »Euklidische« bezeichnen. Ich setze mir nun die Aufgabe, die Umkehrung zu beweisen, also:

Theorem II. Jede Punkttransformation verwandelt die Normalform $N_1)$ in eine alternierende bilineare Differentialform, welche als bilineare Covariante zu einer Pfaff'schen Form gehören kann.

Wir setzen die Formeln

$$dx'_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} d\xi_l, \qquad \delta x'_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} \delta \xi_l \qquad i, l = 1, \ldots, n \qquad T)$$

[1] Cf. Darboux, Bulletin des sciences math. et astron. 1882.

in *N)* ein und erhalten

$$\sum_i \left( \sum_{l,m} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} d\xi_l \cdot \frac{\partial x_{i+p}}{\partial \xi_m} \delta\xi_m - \sum \frac{\partial x_{i+p}}{\partial \xi_l} d\xi_l \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} \delta\xi_m \right) =$$

$$= \sum_{l,m} \left( \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_{i+p}}{\partial \xi_m} - \frac{\partial x_{i+p}}{\partial \xi_l} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \xi_m} \right) \right) d\xi_l . \delta\xi_m .$$

Diese Form gehört als bilineare Covariante zur Pfaff'schen Form

$$\sum_i \left( \sum_l x_i \frac{\partial x_{i+p}}{\partial \xi_l} \right) d\xi_l \qquad i = 1, \ldots, 2p;\ l = 1, \ldots, 2p. \qquad R)$$

Bemerken wir nun noch, dass, wenn eine und dieselbe Form *C)* zu zwei Pfaff'schen Formen gehört, sich dieselben nur durch ein vollständiges Differential $df$ unterscheiden können; denn ihre Differenz muss eine identisch verschwindende Covariante besitzen; und aber auch alle Pfaff'schen Formen, welche sich nur um ein vollständiges Differential $df$ unterscheiden, haben dieselbe bilineare Covariante.

Ferner hindert nichts, die Transformation *T)* von weniger auf mehr Variabeln durchzuführen, also $i = 1, \ldots, n$; $l = 1, \ldots, m$, $m > n$ zu nehmen. Hiemit erledigen sich die Fälle mit verschwindender Determinante $|a_{ik}|$, denen eigentlich Frobenius seine große Arbeit in Cr. J., Bd. LXXXII gewidmet hat.

Die obige Umkehrung können wir auch so aussprechen:

Theorem III. Jede alternierende bilineare Differentialform, welche durch Punkttransformationen in eine Form mit constanten Coefficienten verwandelt werden kann (also jede »euklidische« Form), ist eine bilineare Covariante.

Dies will sagen, dass aus ihren Coefficienten $a_{ik}$ sich $n$ Functionen $a_1, \ldots, a_n$ finden lassen, die den $n(n-3):2$ Differentialgleichungen

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = a_{ik} \qquad S)$$

genügen. Eliminiert man aus diesen die $a_1, \ldots, a_n$, so findet man die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{li}}{\partial x_k}=0. \tag{D}$$

Diese sind also hinreichend, damit die alternierende Form $\Sigma a_{ik}(dx_i\delta x_k-dx_k\delta x_i)$ in eine Form mit constanten Coefficienten verwandelt werden könne, eine »Euklidische« Form sei.

Aus ihnen die nothwendigen herauszusuchen, ist ein ähnliches Problem mit demjenigen, das Herr Collet in Annales de l'École Normale, 1870 gelöst hat, nämlich aus den hinreichenden Integrabilitätsbedingungen einer Pfaff'schen Form die nothwendigen herauszusuchen.

Man kann übrigens auch hier die Frage stellen, analog dem eigentlichen Collet'schen Probleme,[1] nach den Bedingungen, damit eine alternierende bilineare Differentialform durch Multiplication mit $m$ in eine bilineare Covariante verwandelt werden könne und in weiterer Entwickelung das Problem, die in einem Modul von bilinearen Differentialformen $C$, also

$$m_1 C_1+\ldots+m_r C_r$$

absolut oder relativ enthaltenen Euklidischen Formen (bilinearen Covarianten) zu untersuchen, ein Problem, das dem der Integration eines Systemes Pfaff'scher Formen parallel läuft.

II. Das Pfaff'sche Problem. Die letzten Folgerungen der Nummer I leiten jedenfalls darauf hin, die sämmtlichen Untersuchungen von Christoffel, Lipschitz, Ricci und Lie auf alternierende bilineare Differentialformen auszudehnen und also auf demselben Wege 1. die Äquivalenzbedingungen zweier solcher Formen, 2. das System der Invarianten, Covarianten und Contravarianten (Differentialparameter),[2] 3. die Bedingungen für die Coefficienten einer Euklidischen Form und 4. für die Coefficienten einer Form von einer Classe $h>0$, die also als eine Summe von $n+h$ Quadraten integrabler Pfaff'scher Formen darstellbar ist, zu erforschen.

---

[1] Auch Forsyth's vortreffliches Buch: »Theory of differential equations«, part first, ist zu consultieren.

[2] Von Differentialparametern bilinearer Formen spricht vorübergehend auch Herr Frobenius in Cr. J. Bd. 110.

Ich kann natürlich diese Paralleluntersuchung hier nicht durchführen. Aber das Resultat müsste eben sein, dass während bei den symmetrischen Formen alle Vierersymbole verschwinden müssen (Riemann, l. c.), hier schon die obigen Functionen unter *D)* verschwinden müssen, damit die Form euklidisch sei. Dies ist infolge von Theorem II) zu erwarten. Aber für die sogleich zu machende Anwendung auf das Pfaff'sche Problem genügt es, wenn diese Christoffel'sche Theorie uns liefert, dass die Bedingungen *D)* die hinreichenden sind.

Die Bedingungen *D)* sind aber die vollständigen Integrabilitätsbedingungen für das simultane Bestehen der Gleichungen *S)*, also für die Existenz der covarianten Form $\Delta = \Sigma a_i dx_i$.

Daher hätten wir dann auf dem von Christoffel und Lipschitz betretenen Wege direct bewiesen, dass die Gesammtheit der bilinearen Covarianten mit der Gesammtheit der Euklidischen alternierenden Differentialformen identisch ist oder im Falle wir uns mit jenem »hinreichend« begnügen, dass sie in dieser Gesammtheit enthalten ist. Hiezu ist die folgende ergänzende Schlussfolgerung nothwendig: Wir hätten durch die gewünschte Äquivalenztheorie bewiesen, dass es Punkttransformationen gibt, welche die Form *C)* in die Normalform $N_1)$ überführen. Also verwandeln dieselben Punkttransformationen gemäß einer Bemerkung des Art. I die Form $\Delta = \Sigma a_i dx_i$ in lauter Pfaff'sche Formen, welche dieselbe Form $N_1)$ zu ihrer bilinearen Covariante besitzen. Es ist damit noch nicht sofort bewiesen, dass in dieser Schar von Transpositionen auch stets eine Transformation enthalten sein müsse, welche $\Delta$ gerade in die als *N)* aufgeschriebene Form verwandelt oder, um eine seit Lie geläufige Terminologie zu gebrauchen, dass die Gruppe von Transformationen, welche *C)* in sich selbst verwandelt, in Bezug auf die zu *C)* gehörigen Pfaff'schen Formen transitiv sei. Aber dieser Beweis kann leicht auf folgende Art geführt werden.

Führt die Transformation

$$x_i = \varphi_i(x')$$

die Form $\Sigma a_i dx_i$ in $\Sigma b_i dx_i$ über, so heißt dies, dass die Gleichungen

$$a_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}+a_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k}+\ldots+a_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_k}=b_k \qquad k=1,\ldots n$$

ein Lösungssystem $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ gestatten. Die Integrabilitätsbedingungen werden vollzählig erhalten, indem man diese $n$ Gleichungen differentiiert und die Resultate subtrahiert, so dass $\frac{\partial b_k}{\partial x_l}-\frac{\partial b_l}{\partial x_k}$ entstehen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so sind sie sicherlich auch erfüllt, wenn zu $b_k$ ein Glied $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ addiert wird, also zu $\Delta$ ein Glied $df$. Es gibt also auch für

$$a_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}+a_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x_k}+\ldots+a_n\frac{\partial\psi_n}{\partial x_k}=b_k+\frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad k=1,\ldots n$$

ein Lösungssystem $\psi_1,\ldots,\psi_r$, w. z. b. w.

Die Transformation $x_i=\psi_i(x')$ ist dann diejenige, welche $\Delta$ in die Normalform *N)* verwandelt, und das in Art. I erwähnte Fundamentaltheorem von Pfaff ist direct mittels der Riemann-Christoffel-Lipschitz'schen Theorie der Euklidischen Formen bewiesen.

Noch eine Bemerkung. Für den Bedarf der Pfaff'schen Normalform allein können wir der Christoffel-Lipschitz'schen Äquivalenztheorie auch eine Betrachtung surrogieren, die an die Form *R)* hier oben anknüpft. Wenn wir also imstande sind, die Form $\Delta=\Sigma a_i d\xi_i$ in der Form *R)* zu schreiben, so ist damit nicht nur die Transformierbarkeit bewiesen, sondern gleichzeitig die Transformation gefunden. Die Integration der Differentialgleichungen

$$x_1\frac{\partial x_{p+1}}{\partial\xi_1}+x_2\frac{\partial x_{p+2}}{\partial\xi_1}+\ldots+x_{2p}\frac{\partial x_p}{\partial\xi_1}=a_1(\xi)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1\frac{\partial x_{p+1}}{\partial\xi_{2p}}+x_2\frac{\partial x_{p+2}}{\partial\xi_{2p}}+\ldots+x_{2p}\frac{\partial x_p}{\partial\xi_{2p}}=a_{2p}(\xi)$$

welche die Identität von $\Delta$ und *R)* aussprechen, liefert die Transformationsformeln, wenn sie möglich ist.

III. Die Berührungstransformationen. Sophus Lie hat als Berührungstransformationen solche Transformationen $z=Z$, $x_i=X_i$, $p_i=P_i$ in den $2r+1$ Variabeln $z, x_1,\ldots,x_r$,

$p_1, \ldots, p_r$ oder wie ich es immer mit Hinweglassung der Unterscheidung unter den Buchstaben $x, p$ bezeichnen werde, Transformationen unter den $2p+1$ Variabeln

$$z, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{2p}$$

(also $x_{p+1}, \ldots, x_{2p}$ statt $p_1, \ldots, p_r$ gesetzt) bezeichnet, welche die Form

$$dz - x_1 dx_{p+1} - \ldots - x_p dx_{2p}$$

durch die Einsetzung und Ausrechnung gleich

$$\rho(dz' - x_1' dx_{p+1}' - \ldots - x_p' dx_{2p}')$$

machen.

Hiebei hat man sich $z$ als Function von $x, p$ zu denken, was durch das Bestehen einer Relation $F(z, x, p) = 0$ ausgedrückt werden kann.

Lie hat nie während seiner ganzen Thätigkeit, weder in den Abhandlungen der Math. Ann., noch in dem Buche über die Transformationsgruppen, noch in den sächsischen Berichten von der bilinearen Covariante jener Pfaff'schen Form $p_1 dx_1 + \ldots + p_r dx_r$, die sich als rother Faden durch mehrere seiner Theorien zieht, gesprochen, obzwar zu Beginn seiner Wirksamkeit der Begriff dieser Covariante längst entdeckt war.

Und dennoch gestaltet sich die Theorie der Berührungstransformationen sehr einfach, und viele Entwickelungen von Lie und Adolf Mayer werden überflüssig, wenn man sich der Covarianz der bilinearen Form bedient.

Wir betrachten zunächst diejenige wichtige Classe von Transformationen, welche alle Functionen von $x_1, \ldots, x_{2p}$ wieder in Functionen von $x_1', \ldots, x_{2p}'$ verwandeln. In diesem Falle enthalten sicherlich die $X, P$ das $z$ gar nicht. $\rho$ sei constant, indem der Fall eines functionalen $\rho$ weiter unten behandelt wird.

Durch die Transformation $x_i = X_i$, $i = 1, \ldots, 2p$ muss dann die Form $N)$ genau in sich selbst übergehen, denn wir können einen etwa zugelassenen Factor $\rho$ in die transformierenden Functionen $X_1, \ldots X_{2p}$ aufnehmen, und es muss also die bilineare Covariante $N_1)$ genau in sich selbst übergehen (Frobenius, Cr. J., S. 234). Zu ihrer Verwandlung bedürfen

wir der zur Transformation $x_i = X_i,\ p_i = P_i;\ i = 1,\ldots,p$ oder $x_i = X_i,\ i = 1,\ldots,2p$ gehörigen Differentialtransformation

$$dx_i = \frac{\partial X_i}{\partial x'_1} dx'_1 + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial x'_{2p}} dx'_{2p} \qquad i = 1,\ldots,2p \qquad A)$$

Da es sich aber hier um eine Form $N_1)$, also mit constanten Coefficienten, handelt, so fällt die i. a. noch nöthige Parametertransformation, nämlich die Ausführung von $x_i = X_i$ auf die Coefficienten $a_{ik}$ weg, und wir haben mit jeder Berührungstransformation (der erwähnten Classe) eine lineare Transformation einer bilinearen Form $N_1)$ mittels cogredienter linearer Substitutionen $A)$ verknüpft.

Solche lineare Transformationen treten aber hier nicht das erstemal auf. Sie sind lange vor Lie in der Theorie der Transformation der Abel'schen Functionen zum Vorschein gekommen infolge der von Riemann[1] entdeckten Relation unter den beiden Reihen von Periodenintegralen $\Sigma(A_\mu B_{\mu'} - A_{\mu'} B_\mu) = 0$, und ihre Eigenschaften sind von Hermite,[2] von Clebsch und Gordan,[3] von Heinrich Weber[4] und anderen untersucht worden. In anderem Zusammenhange erscheint ihre Theorie wieder bei Frobenius.[5] Wir setzen zunächst fest:

Theorem IV. Jede lineare Differentialtransformation in $2p$ Variabeln, welche cogredient die bilineare Form

$$(dx_1 \delta x_{p+1} - dx_{p+1} \delta x_1) + \ldots + (dx_p \delta x_{2p} - dx_{2p} \delta x_p)$$

in sich transformiert, bestimmt, wenn sie integrabel ist, also die Form hat

$$dx_i = \frac{\partial X_i}{\partial x'_1} dx'_1 + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial x'_{2p}} dx'_{2p} \qquad i = 1,\ldots,2p$$

$$\delta x_i = \frac{\partial X_i}{\partial x'_1} \delta x'_1 + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial x'_{2p}} \delta x'_{2p} \qquad i = 1,\ldots,2p$$

eine Lie'sche Berührungstransformation.

---

[1] Riemann's »Theorie der Abel'schen Functionen«, Gesammelte Werke, S. 131.

[2] Hermite, C. R., t. XL, Paris, 1855.

[3] Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, 1865.

[4] Ann. di Mat., Serie IIa, Vol. IXo, p. 140.

[5] Frobenius, Cr. J., Bd. LXXXIX und XCV, auch Laguerre, J. de l'École polyt., cah. XLII, p. 215.

Die endliche Transformation leitet sich aus der differentialen sofort als $x_i = X_i$ $(i = 1, \ldots, 2p)$ her.

In der That muss nach einer Bemerkung in Art. I diese Transformation in Verbindung mit der Punkttransformation $x_i = X_i$, der sie zugehört, die sämmtlichen Pfaff'schen Formen der Schar

$$x_1 dx_{p+1} + \ldots + x_p dx_{2p} + df$$

untereinander transformieren. Hier ist $f$ eine willkürliche Function von $x_1, \ldots, x_{2p}$.

Wir können nun die Ergänzung der Transformation, welche Lie immer anbringt, $z' = Az + \Pi$ oder (mit $A = 1$) $dz = dz' + d\Pi(x', p')$ für unsere differentiale Transformation dazu verwenden, um, indem wir $\Pi = f$ machen, die Transformation von

$$dz - (x_1 dx_{2p+1} + \ldots + x_p dx_{2p}$$

genau in sich selbst herzustellen. Unsere differentiale Transformation wird dann

$$dz = dz' + df$$

$$\left.\begin{aligned} dx_i &= \sum \frac{\partial X_i}{\partial x'_k} dx'_k \\ \delta x_i &= \sum \frac{\partial X_i}{\partial x'_k} \delta x'_k \end{aligned}\right\} \quad i = 1, \ldots, 2p$$

woraus die Berührungstransformation $z = Z(z', x', p')$, $x_i = X_i(x, p)$, $p_i = P_i(x, p)$ (in Lie'scher Schreibung diesmal) hergestellt werden kann.

Man sieht nun auch leicht, wie es sich mit der Lie'schen Constanten $A$ verhält (Math. Ann., Bd. VIII: »Begründung etc.«, §. 4), worauf ich nicht einzugehen brauche.

Die Relationen. Für die Matrix $(\alpha_{ik})$, wenn die zugehörige lineare Substitution die alternierende Form

$$\sum_i (x_i y_{i+p} - x_{i+p} y_i) \qquad i = 1, \ldots, p)$$

in sich überführen soll, sind die Relationen von Clebsch und Gordan angegeben worden. Diese Relationen sind

$$\left.\begin{aligned}&\sum_k (\alpha_{i,k}\alpha_{h,k+p}-\alpha_{i,k+p}\alpha_{h,k}) = 0 \quad \text{für } h-i \gtrless p \quad i = 1,\ldots,p\\&\sum_k (\alpha_{i,k}\alpha_{i+p,k+p}-\alpha_{i,k+p}\alpha_{i+p,k}) = 1 \qquad\qquad i = 1,\ldots,p\end{aligned}\right\} G)$$

Identificieren wir nun unsere Substitutionen *A)* mit denen zur Matrix $(\alpha_{ik})$, so haben wir zu setzen, indem wir momentan die Lie'sche Gleichung beibehalten,

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} \text{ oder } \frac{\partial X_i}{\partial p_k} \text{ für } \alpha_{i,k},$$

wenn $i = 1,\ldots,p$ und $k = 1,\ldots,p$ oder $p+1,\ldots,2p$,

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_k} \text{ oder } \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \text{ für } \alpha_{i,k},$$

wenn $i = p+1,\ldots,2p$ und $k = 1,\ldots,p$ oder $p+1,\ldots,2p$,

und die Relationen *G)* gehen sofort über in

$$(X_iX_k) = 0;\ (P_iP_k) = 0;\ (X_iP_k) = 0, \text{ dieses letztere für } i \gtrless k,$$
$$(X_iP_i) = 1,$$

womit das Hauptresultat der eben citierten Lie'schen Abhandlung in den Math. Annalen mit einem Schlage erreicht ist. Es können also die Ableitungen Lie's durch Ersetzung der endlichen Transformationen mittels der differentialen Transformationen[1] höchst einfach zusammengefasst werden. Dasselbe gilt von der Ableitung des Herrn Adolf Mayer in der Abhandlung: »Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen« im selben Annalenbande, S. 304.

Der Lie'sche Fundamentalsatz. Ebensowenig hat Sophus Lie bemerkt, dass sein Fundamentalsatz, den er Math. Ann., Bd. IX, »Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung« §. 3 an die Spitze stellt, nämlich, dass, wenn

[1] Ich muss hervorheben, dass die differentialen Transformationen etwas total Verschiedenes sind gegenüber den infinitesimalen Transformationen Lie's. In der weiteren Durchführung dieses Gesichtspunktes ist man z. B. genöthigt, Differentialtransformationen infinitesimaler Transformationen zu bilden.

$$\sum_{i=1\ldots p} \Phi_i dF_i = \sum_{i=1\ldots p} p_i dx_i \qquad L)$$

sein soll, dieselben Relationen wie vorhin unter den $X, P$ auch unter den $\Phi$, $F$ stattfinden müssen und umgekehrt, eine ganz selbstverständliche Folge der Existenz der bilinearen Covariante ist.

Denn aus $L)$ dürfen wir sofort schließen, dass die bilinearen Covarianten beider Seiten genau gleich sein müssen, also muss

$$\sum_{i=1\ldots p} (dF_i\delta\Phi_i - d\Phi_i\delta F_i) = \sum_{i=1\ldots p} (dx_i\delta p_i - dp_i\delta x_i) \qquad L_1)$$

sein oder in meiner Schreibung

$$\sum_{i=1\ldots p} (dF_i\delta F_{i+p} - dF_{i+p}\delta F_i) = \sum_{i=1\ldots p} (dx_i\delta x_{i+p} - dx_{i+p}\delta x_i)$$

und hieraus folgen gleich den Relationen für die »canonischen Determinanten« der $\Theta$-Lehre sofort

$$(\Phi_i\Phi_h) = 0, \quad (F_iF_h) = 0, \quad (F_i\Phi_i) = 1, \quad (F_i\Phi_h) = 0 \quad \text{für} \quad i \gtrless k.$$

Aber die Herleitung von $L_1)$ aus $L)$ besteht auch zu Recht, wenn die Anzahl der Terme auf den beiden Seiten von $L)$ nicht dieselbe ist. Und hieraus ergibt sich dann sofort ein weiterer Fundamentalsatz von Lie, den er érst in Bd. XI der Math. Ann. gegeben hat.

Was es für diese und die vorhergehende Ableitung bedeutet, wenn $(X_iP_i) = \rho$, respective $(F_i\Phi_i) = \rho$ gesetzt werden, darauf habe ich wohl hier nicht nöthig einzugehen.

Diejenigen Transformationen endlich betreffend, welche in den $X_i$, $P_i$ auch noch die Function $z$ enthalten und welche

$$dz' - \Sigma p'_i dx'_i = dz - \Sigma p_i dx_i$$

machen (das $\rho$ von S. Lie gleich 1 gesetzt), so zeigt die Bildung der bilinearen Covariante von den beiden Seiten dieser Gleichung, dass wieder

$$\Sigma(dx'_i\delta x'_{i+p} - dx'_{i+p}\delta x'_i) = \Sigma(dx_i\delta x_{i+p} - dx_{i+p}\delta x_i)$$

(in meiner Schreibung) sein muss und dass man also hier vor der — in der Algebra allerdings weniger gewohnten — Aufgabe steht, eine bilineare Form in je $2p$ Variabeln durch eine cogrediente Substitution in diesen und jener weiteren, darin nicht vorkommenden Variabeln in sich selbst zu transformieren, nämlich $N_1)$ durch

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial Z}{\partial z} dz' + \frac{\partial Z}{\partial x_1'} dx_1' + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_{2p}'} dx_{2p}' \\ dx_1 &= \frac{\partial X_1}{\partial z} dz' + \frac{\partial X_1}{\partial x_1'} dx_1' + \dots + \frac{\partial X_1}{\partial x_{2p}'} dx_{2p}' \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_{2p} &= \frac{\partial X_{2p}}{\partial z} dz' + \frac{\partial X_{2p}}{\partial x_1'} dx_1' + \dots + \frac{\partial X_{2p}}{\partial x_{2p}'} dx_{2p}'. \end{aligned} \qquad S)$$

Dieser Fall ist nun freilich bei Clebsch und Gordan oder bei Frobenius nicht vorgesehen, aber man beweist mit einer Leichtigkeit, die gar keiner Andeutung bedarf, dass zu den charakteristischen Relationen des Falles $\frac{\partial X_i}{\partial z} = 0$ $(i = 1, \dots, 2p)$ nur noch die Relationen $[ZX_i] = 0$, $i = 1, \dots, p$, $[ZP_i] = P_i$ $(i = p+1, \dots, 2p)$ hinzutreten müssen, während in jenen selbst die runden Klammern durch die (eine partielle Differentiation nach $z$ fordernden) eckigen Klammern ersetzt werden müssen.

Der Fall, wo $\rho$ eine Function von $z, x_1, \dots, x_{2p}$ sein können soll und

$$dZ - \Sigma X_i dX_{i+p} = \rho(dz - \Sigma x_i dx_{i+p}) \qquad M)$$

zu bewirken ist, kann auf den vorigen, wo $\rho = 1$ ist, gestützt werden. Ist $T_\rho$ eine Transformation, welche dem nunmehrigen Probleme genügt und $T_\rho'$ eine zweite, so ist $T_\rho'(T_\rho)^{-1}$ eine Transformation $T_1$, welche dem vorhergehenden Probleme genügt, also $\rho = 1$ bewirkt. Kennen wir eine Transformation $T_\rho$, so können wir alle anderen durch

$$T_\rho' = T_1 . T_\rho$$

berechnen, indem wir $T_1$ ihre ganze unendliche Gruppe durchlaufen lassen.

Eine Transformation $T_\rho$ ist nun

$$Z = \int \rho\, dz, \quad X_1 = \rho_1 x_1, \ldots, \quad X_p = \rho_1 x_p, \quad \text{mit } \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0,$$
$$X_{p+1} = \rho_2 x_1, \ldots, \quad X_{2p} = \rho_2 x_{2p}, \qquad \rho_1 \rho_2 = \rho$$

und wo $\rho_2$ durch die Gleichungen

$$\rho \frac{\partial \rho_2}{\partial x_i}(x_1 x_{p+1} + \ldots + x_p x_{2p}) = \rho_2 \frac{\partial Z}{\partial x_i}$$
$$i = 1, \ldots, 2p$$

nebst $\frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0$ bestimmt werden muss. — Denn es ist

$$dZ = \rho\, dz + \frac{\partial Z}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial Z}{\partial x_{2p}} dx_{2p}$$

$$dX_{i+p} = x_{i+p} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} dz + \rho_2 dx_{i+p} +$$
$$+ x_{i+p} \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + x_{i+p} \frac{\partial \rho_2}{\partial x_{2p}} dx_{2p}$$

und die Einsetzung liefert die Bedingungsgleichungen für $\rho_2$.

Nimmt man aber direct von beiden Seiten der Gleichung *M)* die bilineare Covariante, so erhält man

$$\Sigma(dX_i \delta X_{i+p} - dX_{i+p} \delta X_i) = \rho \Sigma(dx_i \delta x_{i+p} - dx_{i+p} \delta x_i) +$$
$$+ \delta\rho\,.(dz - \Sigma x_i dx_{i+p}) - d\rho\,.(\delta z - \Sigma x_i \delta x_{i+p}),$$

und man stünde vor der Aufgabe, eine alternierende bilineare Form in eine andere alternierende bilineare Form durch (integrable) Scharen linearer Substitutionen überzuführen. Auch hiefür sind von Herrn Frobenius in Cr. J., Bd. LXXXIV Formeln präpariert worden.

Indessen vereinfacht sich auch dieser Fall, wenn man bedenkt, dass es sich in der Theorie der Berührungstransformationen doch nur darum handelt, dass die Differentiale die Gleichung $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$ befriedigen sollen, indem (in unserer Schreibung) $z$ stets als Function von $x_1, \ldots, x_p$ gedacht ist, also kann man in der letzten Gleichung die Factoren von $d\rho$ und $\delta\rho$ als verschwindend annehmen und behält die Aufgabe, die Gleichung

$$\Sigma(dX_i \delta X_{i+p} - dX_{i+p} \delta X_i) = \rho \Sigma(dx_i \delta x_{i+p} - dx_{i+p} \delta x_i)$$

durch cogrediente lineare Substitutionen *S)* für die Differentiale zu erfüllen, wobei aber jetzt wegen der Natur von $\rho$ wesentlich ist, dass nicht einzelne lineare Substitutionen, sondern Scharen von solchen mit den Parametern $z, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{2p}$ zu suchen sind.

IV. Neue Theorie der Functionengruppen. Ich nehme für die Functionengruppen einen von dem Lie'schen noch viel mehr verschiedenen Ausgangspunkt, so dass ich wohl sagen kann, dass die Theorie dadurch auf eine ganz neue Basis gestellt wird. Dieser Gesichtspunkt auch ist es allein, der die weiteste Verallgemeinerung der Theorie in Aussicht stellt. Lie benützt zur Definition einer Functionengruppe die Forderung, dass sie mit irgend zwei ihrer Functionen, $\Phi_1, \Phi_2$, stets auch die Function $X = (\Phi_1, \Phi_2)$, wo dieses das Poisson'sche Symbol gerechnet für $\Phi_1, \Phi_2$ ist, enthalte. Ich gehe dagegen von folgender Betrachtung aus.

Die Differentialquotienten $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ verhalten sich contragredient zu den Differentialen $dx_i$ und da die reciproke Form zur Form

$$\sum_{i=1,\ldots p} (x_i y_{i+p} - x_{i+p} y_i)$$

dieselbe Form hat, also

$$\sum_{i=1,\ldots p} (u_i v_{i+p} - u_{i+p} v_i)$$

ist, so ist als die reciproke Form von $N_1)$ die Form

$$\sum_{i=1,\ldots p} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{i+p}} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{i+p}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} \right)$$

aufzufassen; und dies ist genau das Poisson'sche Symbol, wenn man statt $x_{p+1}, \ldots, x_{2p}$ wieder wie bei Lie setzt $p_1, \ldots, p_r$ $\left(\text{die Differentialquotienten } \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_r}\right)$. Also

Theorem V. Das Poisson'sche Symbol ist die reciproke bilineare Form zur bilinearen Covariante der Pfaff'schen Normalform $dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_r dx_r$.

[Sophus Lie erwähnt weder in den Mathem. Annalen, noch in seinem Buche,[1] noch in den Leipziger Berichten die bilineare Covariante und nun gar nicht im Zusammenhange mit dem Poisson'schen Symbole.]

Es verhalten sich nicht nur die $dx_i$ und die $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ dual, sondern auch die Coefficienten einer Gleichung $\Sigma a_i dx_i$, also einer Pfaff'schen Form und die Coefficienten einer Gleichung $\Sigma A_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ sind contragredient.

Infolge dessen können wir in Bezug auf die Gleichung

$$dx_1\delta x_{p+1}-dx_{p+1}\delta x_1+dx_2\delta x_{p+2}-dx_{p+2}\delta x_2+\ldots+dx_p\delta x_{2p}-\\-dx_{2p}\delta x_p=0 \qquad N_1)$$

und simultan in Bezug auf

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{p+1}}-\frac{\partial F}{\partial x_{p+1}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{p+2}}-\frac{\partial F}{\partial x_{p+2}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\ldots\\ \ldots+\frac{\partial F}{\partial x_p}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{2p}}-\frac{\partial F}{\partial x_{2p}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_p}=0 \qquad P_1)$$

nicht nur ein System von Differentialen $dx_1:\ldots:dx_{2p}$ oder ein System von Differentialquotienten $\frac{\partial F}{\partial x_1}:\ldots:\frac{\partial F}{\partial x_{2p}}$ in eine Pfaff'sche Form

$$f_1\delta x_{p+1}-f_{p+1}\delta x_1+\ldots+f_p\delta x_{2p}-f_{2p}\delta x_p$$

oder in eine Differentialgleichung

$$G_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_{p+1}}-G_{p+1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\ldots+G_p\frac{\partial\Phi}{\partial x_{2p}}-G_{2p}\frac{\partial\Phi}{\partial x_p}$$

(wenn $dx_1:\ldots:dx_{2p}=f_1:f_2:\ldots:f_{2p}$ oder $\frac{\partial F}{\partial x_1}:\ldots:\frac{\partial F}{\partial x_{2p}}=$ $=G_1:\ldots:G_{2p}$) umsetzen, transformieren oder correlativ verwandeln oder wie immer wir es nennen wollen, sondern wir können auch jede Pfaff'sche Form $\Sigma a_i dx_i$ umsetzen in eine Differentialgleichung

[1] Theorie der Transformationsgruppen, II. Abschnitt.

$$a_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x_{p+1}} - a_{p+1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \ldots + a_p \frac{\partial\Phi}{\partial x_{2p}} - a_{2p} \frac{\partial\Phi}{\partial x_p} \qquad H_1)$$

und jede homogene lineare partielle Differentialgleichung umsetzen in eine Pfaff'sche Form

$$A_1 \delta x_{p+1} - A_{p+1} \delta x_1 + \ldots + A_p \delta x_{2p} - A_{2p} \delta x_p .$$

Für die Theorie der Functionengruppen bedürfen wir einzig und allein dieses letzteren Transformationsvorganges.

Ich gehe von einem vollständigen Systeme homogener linearer partieller Differentialgleichungen (vollständig im Sinne von Jacobi-Clebsch)

$$\begin{array}{c} A_{10} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \ldots + A_{2p,1} \frac{\partial\Phi}{\partial x_{2p}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1r} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \ldots + A_{2p,r} \frac{\partial\Phi}{\partial x_{2p}} = 0 \end{array} \qquad A_s)$$

aus und setze jede der $r$ Basisgleichungen in Bezug auf die Form $N_1)$ in ihre reciproke Form um. So entsteht ein System von $r$ Pfaff'schen Gleichungen, und zwar genau:

$$\begin{array}{c} A_{p+1,1} \delta x_1 + A_{p+2,1} \delta x_2 + \ldots - A_{1,1} \delta x_{p+1} - \ldots - A_{p,1} \delta x_{2p} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{p+1,r} \delta x_1 + A_{p+2,r} \delta x_2 + \ldots - A_{1,r} \delta x_{p+1} - \ldots - A_{p,r} \delta x_{2p} = 0 \end{array} \qquad B_s)$$

Zu diesem Systeme mögen auch alle linearen Combinationen der $r$ Gleichungen gerechnet werden. Dann sind diese, wie leicht zu erkennen, das Umsetzungsresultat der linearen Combinationen von $A_s)$ nach der Gleichung $N_1)$, so dass $B_s)$ als das reciproke System zu $A_s)$ bezeichnet werden kann.

Nach den classischen Arbeiten von Boole (cf. Frobenius, Cr. J., Bd. 82, »Über das Pfaff'sche Problem, §. 13) ordnet sich jedem Systeme (oder Modul) Pfaff'scher Formen ein adjungiertes System linearer partieller Differentialgleichungen zu, dessen Gliederzahl zunächst $2p-r$ ist. Dieses System sei auf eine Basis $B_1, \ldots, B_{2p-r}$ bezogen,

$$\begin{array}{c} B_{11}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1}+\ldots+B_{2p,1}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_{2p}}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{1,2p-r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1}+\ldots+B_{2p,2p-r}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_{2p}}=0 \end{array} \qquad B'_s)$$

und nun will ich der Kürze wegen die beiden Systeme linearer partieller Differentialgleichungen $A_s)$ und $B'_s)$ als reciproke Systeme bezüglich der bilinearen Differentialform $N_1)$ bezeichnen.

Im allgemeinen werden nicht beide Systeme vollständig sein; wird von einem vollständigen Systeme $A_s)$ ausgegangen, so ist das reciproke i. a. unvollständig.

Jene vollständigen Systeme $A_s)$ also, deren reciproke Systeme bezüglich $N_1)$ wieder vollständige Systeme sind, nehmen in Bezug auf $N_1)$ eine ganz besondere Stellung ein.

Das System $A_s)$ besitzt $2p-r$ unabhängige Integrale, und das System $B_s)$ besitzt in diesem letzten Falle gerade $r$ unabhängige Integrale; seien diese $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2p-r}$ und $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$. Dann können wir auch die Functionensysteme, die bestimmt sind durch je

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_{2p-r}$$
$$\Psi_1, \ldots, \Psi_r,$$

als reciprok bezüglich der Form $N_1)$ bezeichnen. Jede Function von $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2p-r}$ gehört zum ersten, jede Function von $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ zum zweiten Systeme. Jedes solche Functionensystem wird durch ein bestimmtes vollständiges System linearer partieller Differentialgleichungen $A_s)$ oder $B'_s)$ vertreten, dessen Integraläquivalent es bildet, und wir definieren daher geradezu:

Definition. Als zwei reciproke Functionengruppen (bezüglich $N_1$) werden $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2p-r}$ und $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ dann bezeichnet, wenn die beiden sie vertretenden vollständigen Systeme homogener linearer partieller Differentialgleichungen zwei in Bezug auf die Form

$$\sum_{i=1,\ldots p} (dx_i\,\delta x_{i+p} - dx_{i+p}\,\delta x_i)$$

reciproke Systeme (nach der obigen Erklärung) sind.

Um die vollständige Identität dieser Functionengruppen mit den von Sophus Lie definierten festzusetzen, verbleibt noch die Nothwendigkeit, das folgende Theorem zu beweisen:

Theorem VI. Sind $A_s)$ und $B'_s)$ zwei reciproke vollständige Systeme von $r$ und $2p-r$ Gliedern, so ist, wenn $\Phi_\alpha, \Phi_\beta$ zwei Integrale von $A_s)$ und $\Psi_\alpha, \Psi_\beta$ zwei Integrale von $B'_s)$ sind, stets auch

$$(\Phi_\alpha, \Phi_\beta) = \sum \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_{p+i}} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_{p+i}} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_i} \right)$$

ein Integral von $A_s)$ und

$$(\Psi_\alpha, \Psi_\beta) = \sum \left( \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial x_{p+i}} - \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_{p+i}} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial x_i} \right)$$

ein Integral von $B'_s)$.

Die hier zugrunde liegende Idee, stets Pfaff'sche Systeme und Systeme partieller Differentialgleichungen gleichzeitig zu betrachten,[1] führt mit Leichtigkeit zum Beweis.

Die directe Umsetzung von $B'_s)$ nach $N_1)$ muss nämlich das zum Systeme $A_s)$ adjungierte System Pfaff'scher Gleichungen liefern, und da $A_s)$ vollständig integrabel ist, ist es auch dieses, und als seine Basis können wir gerade die Differentiale von $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2p-r}$ verwenden:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{2p}} dx_{2p} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial \Phi_{2p-r}}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi_{2p-r}}{\partial x_{2p}} dx_{2p} = 0 \end{aligned} \qquad A'_s)$$

Werden diese Formen nach $P_1)$ umgesetzt, so entstehen die Gleichungen [conf. $H_1)$]

---

[1] Im Texte werden gleichzeitig reciproke Paare von Formensystemen [bezüglich $N_1)$ oder $P_1)$] und adjungierte oder wie in Anlehnung an die Geometrie gesagt werden könnte, duale Paare von Formensystemen in Betracht gezogen. Der in den geometrischen Autoren der Neuzeit kundige Leser wird sich einer Arbeit Reye's erinnern, wo gleichzeitig reciproke Paare von Flächensystemen (bezüglich einer Correlation im Gesammtraume aller Flächen derselben Ordnung, z. B. 2) und conjugierte oder sich stützende Paare von Flächensystemen in Betracht gezogen werden (Cr. J., Bd. LXXXII). Gerade dieser Hinweis führt seinerseits zu neuen Verallgemeinerungen.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \Psi}{\partial x_{p+1}} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{p+1}}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_p}\frac{\partial \Psi}{\partial x_{2p}} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{2p}}\frac{\partial \Psi}{\partial x_p} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad B'_s)$$

$$\frac{\partial \Phi_{2p-r}}{\partial x_1}\frac{\partial \Psi}{\partial x_{p+1}} - \frac{\partial \Phi_{2p-r}}{\partial x_{p+1}}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Phi_{2p-r}}{\partial x_p}\frac{\partial \Psi}{\partial x_{2p}} - \frac{\partial \Phi_{2p-r}}{\partial x_{2p}}\frac{\partial \Psi}{\partial x_p} = 0$$

welche eine Basis des Systemes $B'_s)$ bilden müssen.[1]

Das System $B'_s)$ ist gemäß Voraussetzung im Theoreme vollständig, also folgt aus dem Donkin'schen (oder Jacobi'schen) Theoreme, dass auch die Gleichung

$$\frac{\partial X_{\alpha,\beta}}{\partial x_1}\frac{\partial \Psi}{\partial x_{p+1}} - \frac{\partial X_{\alpha,\beta}}{\partial x_{p+1}}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial X_{\alpha,\beta}}{\partial x_p}\frac{\partial \Psi}{\partial x_{2p}} - \frac{\partial X_{\alpha,\beta}}{\partial x_{2p}}\frac{\partial \Psi}{\partial x_p} = 0 \qquad X)$$

im Systeme $B'_s)$ enthalten sein muss, sofern

$$X_{\alpha,\beta} = (\Phi_\alpha, \Phi_\beta),$$

also ist die Pfaff'sche Gleichung, welche reciprok zu $X)$ ist,

$$\frac{\partial X_{\alpha,\beta}}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial X_{\alpha,\beta}}{\partial x_{2p}} dx_{2p} = 0$$

im Systeme $A'_s)$ enthalten, was bedeutet, dass $X_{\alpha,\beta}$ ein Integral von $A_s)$ ist, also eine Function der Gruppe $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2p-r}$. In gleicher Weise kommt der Beweis für die $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ zustande.

Die Verallgemeinerung der Theorie von der speciellen Form $N_1)$ auf eine allgemeine bilineare Differentialform ist bei dieser Grundlegung ganz natürlich.

[1] Sei explicite bemerkt: Sind zwei Systeme Pfaff'scher Formen und Differentialgleichungen einander reciprok nach $N_1)$, so sind auch ihre adjungierten Systeme Differentialgleichungen und Pfaff'scher Formen einander reciprok nach $N_1)$ oder im allgemeineren Falle nach der adjungierten bilinearen Form.

# Theorie der vollständigen Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen

von

**S. Kantor.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juli 1901.)

Δοκεῖ γὰρ πλεῖον ἢ ἥμισυ παντὸς εἶναι ἡ ἀρχή.

Arist. Eth. I. 7.

In der Entwickelung der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bisher, namentlich in betreff der mehr formalen als functionentheoretischen Kapitel der Theorie, die Analogie mit den algebraischen Gleichungen maßgebend gewesen. In dieser Arbeit soll zum erstenmale dagegen die Analogie mit den linearen partiellen Differentialgleichungen zur Richtschnur genommen und verfolgt werden.

Das Symbol $(AB)$, das, von Jacobi vorläufig, von Clebsch dann mehr systematisch in die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen eingeführt, in der Mechanik und neuerdings wieder in Sophus Lie's Gruppentheorie wichtige Anwendung findet, ist eigentlich eine Resultante der Differentialgleichungen

$$A(f) = 0 \quad \text{und} \quad B(f) = 0.$$

An die hiemit gesetzte Analogie mit der Resultante zweier linearer Differentialgleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer Unabhängigen, wie sie von Herrn v. Escherich aufgestellt und untersucht[1] wurde, lässt sich eine durchaus nicht

[1] G. v. Escherich, Über die gemeinsamen particulären Integrale zweier linearer Differentialgleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, 1882.

oberflächliche Analogie mit allen Punkten der Theorie der linearen und sogar der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen knüpfen, soweit dieselben von formaler und nicht functionentheoretischer Natur sind. Die Theorie, die mir daraus entstanden ist, werde ich im folgenden in ganz genetischer Weise vorführen. Man mag über den Nutzen oder die Gefahr einer um ihrer selbst willen betriebenen Analogie in der Mathematik oder anderen exacten Wissenschaften uneins sein; wo aber die Analogie sich bis zu einer solchen Übereinstimmung durchsetzen lässt, wie hier die zwischen linearen partiellen Differentialgleichungen erster und linearen gewöhnlichen $n^{\text{ter}}$ Ordnung, ist ohne Rücksicht auf praktische Resultate an der Berechtigung einer solchen Durchführung nicht zu zweifeln. Jeder Mathematiker wird eine wahre Freude empfinden, wenn er in der Gegenüberstellung ihm bekannter Lehren über partielle Gleichungen und neuer Lehren über gewöhnliche Gleichungen in Wahrheit zwei Spiegelbilder erkennt. Und aber die Art. XXVIII bis XXXII führen zu Resultaten, wie man sie sich praktischer nicht wünschen kann.

I. Das vollständige System. Als ein $r$-gliederiges vollständiges System von nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen definiere ich ein System von $r$ Gleichungen in $n$ Variabeln, die gerade $n-r$ gemeinsame, functional unabhängige Integrale besitzen. Seien

$$\mathrm{A}_i(f) = \sum_k A_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} - A_{i0} f \quad (i = 1,\ldots,r;\, k = 1,\ldots,n)^1 \qquad 1)$$

die Gleichungen und

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) = \alpha_i, \quad i = 1,\ldots, n-r+1, \qquad 2)$$

die Integrale, an deren Stelle auch die willkürlichen Functionen $\Pi_i(\alpha_1,\ldots\alpha_{n-r})$ nur dann treten können, wenn alle $A_{i0}$ verschwinden.

[1] Man kann sogar vollständige Systeme von Gleichungen $\mathrm{A}_i$ untersuchen, wo außerdem ein von $f$ ganz freies Glied $-A_0$ vorhanden ist. Nur muss man auf die functionalen Eigenschaften der Integrale, wie sie Jacobi für homogene gegeben, verzichten oder sie stark umändern.

Dem analog werde ich nun ein System von $r$ linearen Differentialgleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$A_i(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^k u}{\partial x_k} - d_i = 0, \quad i = 1, \ldots r, k = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

wo die $a_{ik}$, $d_i$ Functionen von $x$ sind, die in einem abgrenzbaren Bereiche als eindeutig und besonders als differentiierbar angesehen werden, als vollständig bezeichnen, wenn es gerade $n-r+2$ den $r$ Gleichungen gemeinsame Integrale

$$u_1(x), \ldots, u_{n-r+2}(x) \tag{4}$$

gibt, welche linear unabhängig sind und auch die Gleichungen 3) es sind. Hiebei heißt lineare Unabhängigkeit für Integrale $u$, dass keine lineare Gleichung mit constanten, für Gleichungen $A(u)$, dass keine lineare Abhängigkeit mit von $x$ abhängigen Coefficienten unter ihnen bestehe.

Im Falle aber, wo alle $d_i = 0$ sind und überhaupt nur solche, also homogene lineare Gleichungen in Betracht kommen, kann das System selbst als homogen bezeichnet werden und ein solches heißt vollständig, wenn $n-r+1$ gemeinsame Integrale vorhanden sind.

Wir werden übrigens auch alle Differentialgleichungen, welche durch lineare Combination mittels Functionen von $x$ aus den $r$ Gleichungen 3) entstehen, als einem Systeme oder Modul 3) angehörig bezeichnen und nennen dann die $r$ Gleichungen eine Basis des Systems oder Moduls.[1] Es ist klar, dass die Integrale 4) allen diesen unbegrenzt unendlich vielfach unendlich vielen Gleichungen genügen und im Falle des homogenen Systems ($d_i = 0$) auch ebenso alle Integrale $c_1 u_1(x) + \ldots + c_{n-r+1} u_{n-r+1}(x)$. Als Basis können wir irgend $r$ unabhängige Gleichungen des Moduls ansehen. Da durch $n-r+2$, respective $n-r+1$ Integrale $n-r+2$, respective $n-r+1$ Bedingungen der Form

$$a_0 u_i^{(n)} + \ldots + a_n u_i - d_i = 0$$

[1] Dedekind und Weber: Cr. J. Bd. XCII, p. 195; Dedekind, Zahlentheorie; Frobenius, Cr. J., Bd. LXXXVI: Theorie der linearen Formen mit ganzzahligen Coefficienten.

für die $n+2$ oder $n+1$ Coefficienten der nicht homogenen oder homogenen Gleichung entstehen, so lassen sich alle Gleichungen dieses Moduls[1] sicher aus nicht mehr als $r$ Gleichungen linear combinieren und, sind die $u_i$ unabhängig, auch nicht aus weniger. Der Modul heißt $r$-gliederig.

Sollen $r+1$ Gleichungen $n-r+1$ unabhängige Integrale gemeinsam haben, so genügen diese auch den Gleichungen $(n-r+1)^{ter}$ Ordnung, welche sich aus jenen linear combinieren lassen, und diese Gleichungen müssen also bis auf einen Factor übereinstimmen. Hieraus folgt, dass die $(r+1)$. gegebene Gleichung durch die anderen linear darstellbar ist.

In einem $r$-gliederigen vollständigen Modul sind stets Gleichungen $(n-1)^{ter}$, $(n-2)^{ter}, \ldots, (n-r+1)^{ter}$ Ordnung vorhanden.

»Die Gleichungen nicht höherer als $(n-i)^{ter}$ Ordnung, die im vollständigen Modul vorhanden sind, bilden für sich ein vollständiges System«. Es gilt aber nicht, dass, wenn man irgend eine Anzahl von Gleichungen aus dem Systeme 3) nimmt und diese zu einem vollständigen Systeme ergänzt, diese ebenfalls in 3) enthalten sein müsste.

II. Das Analogon zum Symbole $(AB)$. Aus der Basis des Systemes 1) lassen sich außer durch lineare Combination Gleichungen 1. Ordnung, welche dieselben Integrale 4) gestatten, auch noch dadurch herstellen, dass man die Operation $(A_i A_k - A_k A_i)(f)$ ausführt, welche für $A_1$, $A_2$ ist:

$$\sum_i (A_1(A_{2i}) - A_2(A_{1i})) \frac{\partial f}{\partial x_i} - (A_1(A_{20}) - A_2(A_{10}))f.$$

Von der Definition in Art. I ausgehend, schließen wir, dass diese Gleichungen $(A_i A_k) = 0$ nothwendig im Module 3) enthalten sind.

Ich stelle nun dem Symbole $(AB)$ hier bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen ein anderes Symbol gegenüber,

---

[1] Die Bezeichnung: »vollständiger Modul« ist nun in perfecter Übereinstimmung mit der gleichen Bezeichnung, die ich für die Algebra in »Theorie der Elementartheiler höherer Stufen«, Monatshefte für Mathem. und Physik, 1900, benützte.

das bisher nicht beachtet ist und aber den Kernpunkt dieser Arbeit bildet, nämlich $(A_1, A_2)_x$, wo

$$(A_1, A_2)_x = a_{20}\frac{dA_1(u)}{dx} - a_{10}\frac{dA_2(u)}{dx} =$$

$$= \sum_i [a_{20}(a'_{1,n-i} + a_{1,n-i+1}) - a_{10}(a'_{2,n-1} + a_{2,n-i+1})] .$$

$$. u^{(i)} - (a_{20} d'_1 - a_{10} d'_2) . \qquad 5)$$

Dies gibt eine Differentialgleichung $(A_1, A_2)_x = 0$, welcher die Integrale 4) auch genügen, die also dem Systeme 3) angehören muss, da sie $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist.

Wird für irgend zwei Gleichungen $\Sigma a_i A_i$ und $\Sigma b_i A_i$ das Symbol gebildet, so entsteht

$$\left.\begin{aligned} (\Sigma a_i A_i, \Sigma b_i A_i)_x &= (\Sigma a_{i0} b_i)\left(\sum a_h \frac{dA_h}{dx} - \sum \frac{da_h}{dx} A_h\right) - \\ &- (\Sigma a_{i0} a_i)\left(\sum b_h \frac{dA_h}{dx} - \sum \frac{db_h}{dx} A_h\right) = \\ = \sum\sum a_i b_k (A_i, A_k)_x &- \sum\sum a_{i0}\left(b_i \frac{da_k}{dx} - a_i \frac{db_k}{dx}\right) A_k \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

und alle so entstehenden Differentialgleichungen drücken sich ebenso wie die einzelnen $(A_i, A_k)_x$ durch die $A_1(u), \ldots, A_r(u)$ aus.

Von jeder im Modul 3) enthaltenen Gleichung $(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung $B(u)$ sind auch die Differentialquotienten

$$\frac{dB}{dx}, \frac{d^2B}{dx^2}, \ldots, \frac{d^iB}{dx^i}$$

im Modul enthalten. Sie entstehen auch durch Bildung des Symbols für zwei Gleichungen verschiedener Ordnung.[1]

---

[1] Bildet man

$$\frac{d(a_{20}A_1 - a_{10}A_2)}{dx} = \frac{da_{20}}{dx}A_1 - \frac{da_{10}}{dx}A_2 + a_{20}\frac{dA_1}{dx} - a_{10}\frac{dA_2}{dx},$$

so sieht man, dass sich dies aus $A_1$, $A_2$ und $(A_1, A_2)_x$ linear zusammensetzen lässt.

III. Andere Definition des vollständigen Systemes.

Wir gehen hiebei von dem folgenden wichtigen Theoreme aus:

Theorem. $\alpha$. Wenn $(A, B)_x$ sich linear durch $A, B$ ausdrücken lässt, so haben $A$ und $B$ mindestens $n-1$ unabhängige Integrale gemeinsam.

Denn ist

$$b_0 \frac{dA}{dx} - a_0 \frac{dB}{dx} = c_1 A + c_2 B,$$

so ist

$$\frac{d(b_0 A - a_0 B)}{dx} = c_1 A + c_2 B + \frac{db_0}{dx} . A - \frac{da_0}{dx} . B = \gamma_1 A + \gamma_2 B$$

und aus den Gleichungen

$$C = c_1 A + c_2 B,$$
$$\frac{dC}{dx} = \gamma_1 A + \gamma_2 B$$

können $A$ und $B$ in der Form

$$p_0 \frac{dC}{dx} + p_1 C$$

berechnet werden, sie haben also alle Integrale von $C = 0$ unter ihren Integralen.

$\beta$. Wenn $(A, B)_x$ und $(A, C)_x$ sich durch $A, B, C$ ausdrücken lassen, so haben $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ mindestens $n-2$ unabhängige Integrale gemeinsam.

Wir bilden einen Ausdruck $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$Y_{n-2} = h_1(b_0 A - a_0 B) + h_2(c_0 A - a_0 C)$$

und hieraus für $\frac{dY}{dx}$ einen Ausdruck $\alpha A + \beta B + \gamma C$ wegen Voraussetzung. Dann ist nach Art. II $(Y, A)_x = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C$, also auch $\frac{dA}{dx} = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C$. Demnach folgt aus

$$\left(\frac{dY}{dx}, A\right)_x = \alpha_3 A + \beta_3 B + \gamma_3 C$$

für $\frac{d^2 Y}{dx^2}$ eine lineare Combination von $A, B, C$.

Aus den Gleichungen

$$Y = \zeta_1 A + \zeta_2 B + \zeta_3 C,$$

$$\frac{dY}{dx} = \eta_1 A + \eta_2 B + \eta_3 C,$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = \theta_1 A + \theta_2 B + \theta_3 C$$

berechnet man $A$, $B$, $C$ jede in der Form

$$p_0 \frac{d^2 Y}{dx^2} + p_1 \frac{dY}{dx} + p_2 Y,$$

also besitzen alle drei Gleichungen die Integrale von $Y_{n-2} = 0$ unter ihren Integralen.

γ. Wenn $(A_1, A_2)_x, \ldots, (A_1, A_r)_x$ sich linear durch $A_1, \ldots, A_r$ darstellen lassen, so haben $A_1 = 0, \ldots, A_r = 0$, falls sie nicht homogen sind, mindestens $n-r+2$, und falls sie homogen sind, mindestens $n-r+1$ unabhängige Integrale gemeinsam.

Man kann einen linearen Ausdruck $(n-r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bilden

$$Y_{n-r+1} = h_1(a_{20} A_1 - a_{10} A_2) + \ldots + h_{r-1}(a_{r0} A_1 - a_{10} A_r)$$

hieraus $(Y, A)_r$ nach Art. II als eine Combination von $A_1, \ldots, A_r$, aber auch durch Differentiation

$$\frac{dY}{dx} = h_1(A_1, A_2)_x + \ldots + h_{r-1}(A_1, A_r)_x + \text{lin. Comb.}\,(A_1, \ldots, A_r)$$

also gleich einer linearen Combination $A_1, \ldots A_r$, daher aus $(Y, A)_x$ folgt, dass auch $\frac{dA}{dx}$ eine solche ist und hiemit wiederum aus $\left(\frac{dY}{dx}, A\right)$, welches nach Voraussetzung aus der letzten Gleichung als lin. Comb. $(A_1, \ldots, A_r)$ entsteht, auch $\frac{d^2 Y}{dx^2}$ eine solche lineare Combination und so bis zu $\frac{d^{r-1} Y}{dx^{r-1}}$. Aus den Gleichungen

$$Y = \alpha_{01}A_1 + \ldots + \alpha_{0r}A_r,$$
$$\frac{dY}{dx} = \alpha_{11}A_1 + \ldots + \alpha_{1r}A_r,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^{r-1}Y}{dx^{r-1}} = \alpha_{r-1,1}A_1 + \ldots + \alpha_{r-1,r}A_r$$

berechnet man $A_1, \ldots A_r$ als lineare Combinationen von $Y, \ldots, \frac{d^{r-1}Y}{dx^{r-1}}$, also jede in der Form

$$p_0 \frac{d^{r-1}Y}{dx^{r-1}} + \ldots + p_{r-1}Y \qquad 7)$$

und es besitzen also alle Gleichungen die Integrale von $Y = 0$ zu Integralen. Deren sind aber, wenn $Y$ nicht homogen ist, $n-r+2$, und wenn es homogen ist, $n-r+1$ unabhängige.

Wir können nunmehr so definieren:

Ein System von $r$ linear unabhängigen linearen Differentialgleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung (homogen oder nicht) ist ein vollständiges, wenn die aus irgend zwei Gleichungen $A_i = 0$, $A_k = 0$ gebildete Gleichung $(A_i, A_k)_x$ sich linear durch die sämmtlichen gegebenen Gleichungen ausdrücken lässt.[1]

Nach Art. II gilt dies dann auch für irgend zwei Gleichungen $\Sigma a_i A_i$, $\Sigma b_i A_i$ des ganzen Moduls.

Damit $A_1, \ldots A_r$ ein vollständiges System bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass $(A_1, A_2)_x, \ldots, (A_1, A_r)_x$ sich durch $A_1, \ldots A_r$ linear ausdrücken lassen.

Statt dieser $r-1$ Symbole können noch in vielfältiger Weise andere linear unabhängige $r-1$ Symbole $(A_i, A_k)_x$ gesetzt werden.

IV. Der Fall $r = 1$. Hier tritt ein Unterschied gegenüber den partiellen Differentialgleichungen ein. Haben zwei Gleichungen $A(u) = 0$, $B(u) = 0$ alle Integrale gemeinsam, so

[1] Dies ist das Analogon zur Definition, die von Clebsch in Cr. J. Bd. LXV, an den Ausgangspunkt gestellt worden ist. Es gibt auch noch andere schematisch gebildete Differentialformen von $A_i$, $A_k$, welche im Systeme enthalten sind.

können sie sich nur durch einen Factor unterscheiden. Es müssen also nur

$$\frac{1}{a_0} . A(n) = \frac{1}{b_0} . B(n),$$

daher

$$\left(\frac{1}{a_0} A, \frac{1}{b_0} B\right)_x = 0$$

sein. Es ist

$$\left(\frac{1}{a_0} A, \frac{1}{b_0} B\right)_x = \frac{1}{a_0 b_0} (A,B)_x + \frac{B}{b_0^2} \frac{db_0}{dx} - \frac{A}{a_2} \frac{da_0}{dx},$$

also

$$(A, B)_x = \frac{A}{a_0}\left(a_0 \frac{db_0}{dx} - b_0 \frac{da_0}{dx}\right) = \frac{B}{b_0}\left(a_0 \frac{db_0}{dx} - b_0 \frac{da_0}{dx}\right), \tag{8}$$

d. h. stimmen alle Integrale überein, so muss $(A, B)_x = f.B$ sein, wo aber $f$ eine ganz bestimmte, aus $a_0, b_0$ gebildete Function von $x$ ist.

Bei den partiellen Differentialgleichungen sind bekanntlich für $(A, B) = 0$ alle Integrale von $A = 0$ oder $B = 0$ auch Integrale von $B = 0$ oder $A = 0$. Hier findet dies nicht statt. Ist $(A, B)_x = 0$, so folgt wegen $b_0 \frac{dA}{dx} - a_0 \frac{dB}{dx} = 0$ nur, dass die Integrale $u_1, \ldots u_n$ von $B = 0$ auch $\frac{dA}{dx} = 0$, also $A$ gleich Constanten $C_1, \ldots, C_m$ machen. Dann sind aber diejenigen Functionen, welche durch die Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} u_1, \ldots, u_m \\ C_1, \ldots, C_m \end{vmatrix}$$

dargestellt sind, Integrale von $A = 0$. Denn aus $A(u_1) = C_1$, $A(u_2) = C_2$ folgt $A(C_2 u_1 - C_1 u_2) = 0$. Von ihnen sind nur $m-1$ linear unabhängig und da sie auch Integrale von $B = 0$ sind, so zeigt sich, dass im Falle $(A, B)_x = 0$ die $A = 0$, $B = 0$ nur $m-1$ gemeinsame Integrale haben, mit Ausnahme des Falles, wo $a_0 b_0' - b_0 a_0' = 0$, also $a_0 = \text{Const.}\, b_0$.

Hierin ist $m = n + 1$ oder $n$, je nachdem $A$, $B$ nicht homogen oder homogen sind. Dass aber ja doch für $(A, B)_x = 0$

das $(A, B)$ eine lineare Combination von $A, B$ ist, darf nicht beirren, da wir in unserer Definition in Art. III auch die lineare Unabhängigkeit der Gleichungen mit aufgenommen haben, welche, weil $A = fB$ ist, nicht stattfindet.

V. Defect der Vollständigkeit. Sowohl für das System 1), als für das System 3) bieten sich, wenn sie ein vollständiges System nicht bilden, worüber mittels Art. III entschieden werden kann, zwei Probleme dar:

1. Das vollständige System möglichst niedriger Gliederzahl zu finden, unter dessen Gleichungen die des gegebenen enthalten sind.

2. Ein vollständiges System möglichst großer Gliederzahl zu finden, dessen sämmtliche Gleichungen in dem gegebenen Systeme enthalten sind.

Das erste Problem kann wegen der Unabhängigkeit der Gleichungen 3) auch so formuliert werden, dass man zu den gegebenen möglichst wenige hinzufüge, um sie zu einem vollständigen Systeme zu ergänzen. Es wird gelöst, indem man alle Symbole $(A_i A_k)_x$ bestimmt, jene, die sich durch $A_1, \ldots A_r$ ausdrücken lassen, beiseite lässt, die anderen zu $A_1, \ldots, A_r$ als $A_{r+1}, \ldots$ hinzufügt und so fortsetzt, bis man keine Symbole $(A_i, A_k)_x$ mehr erhält, die nicht durch die schließlich angesammelten $A$ ausdrückbar wären. Ist deren Anzahl $s$, so kann man $s-r$, falls die $A_1, \ldots, A_r$ an sich schon linear unabhängig waren, als den Defect der Vollständigkeit des Systemes $A_1, \ldots, A_r$ bezeichnen.[1]

Auch für partielle Gleichungen ist das zweite Problem von Bedeutung, weil es zur Integration eines Systemes Pfaff'scher Gleichungen führt.

Ist $s-r$ der Defect, so haben $A_1, \ldots, A_r$ gerade $n-s+2$ (oder $n-s+1$) gemeinsame Integrale. Es ist also die Bildung des vollständigen Systemes aus $A_1, \ldots, A_r$ thatsächlich eine Art von Resultantenbildung für $r$ gegebene Gleichungen.

---

[1] Diese Zahl ließe sich ganz wohl in Analogie mit einer Bezeichnungsweise des Herrn Frobenius beim Pfaff'schen Systeme (Cr. J., Bd. LXXXII und LXXXVI), cf. auch v. Weber: »Das Pfaff'sche Problem«, Leipzig, Teubner 1900, als Classe des Systemes bezeichnet.

VI. Resultantenbildung. Ich werde nun zeigen, dass die Bildung der Resultantenform, wie sie zuerst von Herrn v. Escherich durchgeführt wurde, durch die Bildung eines vollständigen Systemes geleistet werden kann und so ist die vollständige Übereinstimmung zwischen der Theorie der Resultante und der der vollständigen Systeme hergestellt. Ich bediene mich des folgenden primitiven Verfahrens zur Herstellung der Resultante.[1]

Seien $A_1$, $A_2$ zwei nicht homogene Gleichungen der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, indem wir, falls eine der $m^{\text{ten}}$ Ordnung vorgelegt war, diese $(n-m)$mal differenziert voraussetzen, was auf die Gemeinsamkeit von Integralen keinerlei Wirkung hat,

$$A_1 \equiv a_{10} u^{(n)} + a_{11} u^{(n-1)} + \ldots + a_{1n} u - d_1 = 0,$$
$$A_2 \equiv a_{20} u^{(n)} + a_{21} u^{(n-1)} + \ldots + a_{2n} u - d_2 = 0.$$

Durch Elimination von $u^{(n)}$ stellen wir eine Gleichung her, der die gemeinsamen Integrale wieder genügen müssen. Eine andere solche Gleichung entsteht, wenn $a_{20}\frac{dA_1}{dx} - a_{10}\frac{dA_2}{dx}$ gebildet wird, was eben unser Symbol ist und aus dieser nebst $A_1$ oder $A_2$ das $u^{(n)}$ eliminiert wird. Seien

$$\left.\begin{aligned} A_1^{(1)} &\equiv a_{10}^{(1)} u^{(n-1)} + a_{11}^{(1)} u^{(n-2)} + \ldots + a_{1,n-1}^{(1)} u - d_1^{(1)} = 0 \\ A_2^{(1)} &\equiv a_{20}^{(1)} u^{(n-1)} + a_{21}^{(1)} u^{(n-2)} + \ldots + a_{2,n-1}^{(1)} u - d_2^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad 9)$$

diese beiden Gleichungen. Haben $A_1$, $A_2$ $m-1$ gemeinsame Integrale (wo $m$ die Anzahl der unabhängigen Integrale von $A_1$ oder $A_2$ sei, also $n+1$ für nicht homogene, $n$ für homogene), so müssen diese auch den $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$ genügen, diese müssen bis auf einen Factor identisch sein, also (cf. die Bemerkung am Ende des Beweises):

$$\frac{a_{10}^{(1)}}{a_{20}^{(1)}} = \frac{a_{11}^{(1)}}{a_{21}^{(1)}} = \ldots = \frac{a_{1,n-1}^{(1)}}{a_{2,n-1}^{(1)}} = \frac{d_1^{(1)}}{d_2^{(1)}} \quad 10)$$

[1] In Königsberger's »Lehrbuch der gewöhnlichen Differentialgleichungen«, Leipzig 1889, findet sich eine Art der Resultantenbildung, welche nach einem ersten dem obigen ähnlichen Ansatze eine total andere Wendung nimmt und statt dessen ganz ähnlich jener Methode für die algebraische Resultante wird, welche Herr Darboux in Houël's Bulletin 1877 ausführlich dargestellt hat.

sind die Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind, damit $m-1$ gemeinsame Integrale da seien.[1] Sind diese nicht erfüllt, so verfahren wir mit $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$ wie mit $A_1$, $A_2$ und bilden durch Elimination von $u^{(n-1)}$, sowie durch

$$a_{20}^{(1)} \frac{dA_1^{(1)}}{dx} - a_{10}^{(1)} \frac{dA_2^{(1)}}{dx}$$

zwei Gleichungen $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diesen müssen die gemeinsamen Integrale von $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, also auch jene von $A_1$, $A_2$ genügen. Seien

$$\left.\begin{array}{l} A_1^{(2)} \equiv a_{10}^{(2)} u^{(n-2)} + a_{11}^{(2)} u^{(n-3)} + \ldots + a_{1,n-2}^{(2)} u - d_1^{(2)} = 0 \\ A_2^{(2)} \equiv a_{20}^{(2)} u^{(n-2)} + a_{21}^{(2)} u^{(n-3)} + \ldots + a_{2,n-2}^{(2)} u - d_2^{(2)} = 0 \end{array}\right\} \quad 9')$$

diese Gleichungen. Hätten $A_1$, $A_2$ $m-2$ gemeinsame Integrale, so müssten $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$ bis auf einen Factor übereinstimmen, so müsste

$$\frac{a_{10}^{(2)}}{a_{20}^{(2)}} = \frac{a_{11}^{(2)}}{a_{21}^{(2)}} = \ldots = \frac{a_{1,n-2}^{(2)}}{a_{2,n-2}^{(2)}} = \frac{d_1^{(2)}}{d_2^{(2)}} \qquad 10')$$

sein, welches die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind. Sind sie nicht erfüllt, so können wir auf $A_1^{(2)}$, $A_2^{(2)}$ wieder dasselbe Verfahren anwenden, erhalten zwei Gleichungen $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung und eventuell so weiter, bis wir etwa zu zwei Gleichungen $1^{\text{ter}}$ Ordnung gelangt sind:

$$\left.\begin{array}{l} A_1^{(n-1)} \equiv a_{10}^{(n-1)} u' + a_{11}^{(n-1)} u - d_1^{(n-1)} = 0 \\ A_2^{(n-1)} \equiv a_{20}^{(n-1)} u' + a_{21}^{(n-1)} u - d_2^{(n-1)} = 0. \end{array}\right\} \quad 9'')$$

Dies war nur möglich, wenn die Gleichungen $A_1$, $A_2$ nicht $m-n+1$ gemeinsame Integrale hatten.

Sind die Gleichungen homogen, also $d_1$, $d_2$, also auch alle $d_1^{(i)}$, $d_2^{(i)}$ und $d_1^{(n-1)}$, $d_2^{(n-1)}$ gleich Null, so ist

$$R_{0,0} = a_{21}^{(n-1)} a_{10}^{(n-1)} - a_{20}^{(n-1)} a_{11}^{(n-1)} = 0 \qquad 11)$$

[1] Die Bedingungen, damit eine Gleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung alle Integrale gemeinsam haben, sind von Frobenius zum Ausgangspunkte einer Entwickelung gemacht worden, die in die Theorie der adjungierten Differentialausdrücke einläuft. Cr. J., Bd. LXXX.

die Bedingung für die Gemeinsamkeit eines Integrales von $A_1^{(n-1)}, A_2^{(n-1)}$, also auch von $A_1, A_2$, denn bis zu $au = 0$, $bu = 0$ können wir die Elimination nicht treiben.

Sind die Gleichungen nicht homogen, dann müssen wir auf $A_1^{(n-1)}; A_2^{(n-1)}$ nochmals das Verfahren anwenden und erhalten

$$A_1^{(n)} \equiv a_{10}^{(n)}u - (a_{10}^{(n-1)}d_2^{(n-1)} - a_{20}^{(n-1)}d_1^{(n-1)}) = 0$$
$$A_2^{(n)} \equiv a_{20}^{(n)}u - d_2^{(n)} = 0$$

und hieraus als die Bedingung für die Gemeinsamkeit nur eines Integrales, das dann aber keine willkürliche Constante enthält,[1] die Gleichung (wo kurz $d_1^{(n)}$ gesetzt ist):

$$a_{10}^{(n)}d_2^{(n)} - a_{20}^{(n)}d_1^{(n)} = 0,$$

für deren Form, wenn man bedenkt, dass $d_1^{(n)}, d_2^{(n)}$ homogene lineare Differentialfunctionen von $d_1, d_2$ sind, man durch eine Ausrechnung findet:

$$R_{d_1, d_2} = \Pi_1(d_1) + \Pi_2(d_2) + c_1 \frac{dR_{0,0}}{dx} + c_2 R_{0,0}, \tag{12)}$$

was die Resultante für $A_1, A_2$ ist.

Bemerkung. Ich habe in der Ableitung immer aus der Identität zweier Gleichungen eines Paares auf die Gemeinsamkeit der Integrale geschlossen. Dies ist zulässig, weil die eine Gleichung stets $(A_1^{(i)}, A_2^{(i)})_x$ war, es sich also eigentlich um die Anwendung des Theorems aus Art. III und des Verfahrens aus Art. V handelt.

Nehmen wir von jedem Gleichungspaare ($A_1, A_2$ inclusive) jedesmal nur die erste Gleichung, so erhalten wir, falls die Resultantenbildung bei $A_1^{(i-1)}, A_2^{(i-1)}$ abgebrochen ist, ein System von $i$ unabhängigen Gleichungen $A_1, A_1^{(1)}, \ldots, A_1^{(i-1)}$, und diese bilden ein vollständiges System, weil eben dieses Abbrechen anzeigte, dass $n-i+2$ oder $(n-i+1)$ gemeinsame Integrale vorhanden seien. Die Resultantenbildung ist also thatsächlich identisch mit der Lösung des 1. Problemes aus Art. V,

[1] Solche gemeinsame Integrale kommen häufig bei Königsberger vor.

das niederste vollständige System zu finden, in dem $A_1, A_2$ enthalten sind.

VII. Differentialmoduln. Ist $f.A_1^{(i)} \equiv A_2^{(i)}$, so gibt es uns direct die sämmtlichen gemeinsamen Integrale und es lässt sich also jedesmal die Gleichung $G = 0$ für diese durch reine Differentialquotienten aus $A_1$, $A_2$ herstellen, was ein wichtiger Umstand ist. Der Erfolg der Operationen zeigt uns sogar genau, dass mit $D_1$, $D_2$ als Bezeichnung für homogene lineare Differentialoperationen

$$G = D_1(A_1) + D_2(A_2)\,[1] \tag{13}$$

und wenn gar kein gemeinsames Integral vorhanden ist:

$$R_{d_1, d_2} = D_1(A_1) + D_2(A_2), \tag{14}$$

wo die Coefficienten von $D_1, D_2$ beidemale aus ganzen rationalen Differentialoperationen der Coefficienten $a_{1,0}, \ldots a_{1,n};\ a_{2,0}, \ldots, a_{2,n}$ entstehen.

Da nun nach Brassinne[2] jede Differentialgleichung, welche alle Integrale mit $G$ gemeinsam hat, in der Form $D(G)$ dargestellt werden kann, so kann also jede Differentialgleichung, welche die gemeinsamen Integrale von $A_1$, $A_2$ enthält, in der Form $D_1(A_1) + D_2(A_2)$ erhalten werden. Setzen wir unser Verfahren von $A_1$, $A_2$ weiter fort auf $A_1$, $A_2$, $A_3$ etc., so erhalten wir einen Beweis für das

Theorem. Jede lineare Differentialgleichung $H$, die alle gemeinsamen Integrale von $A_1 = 0, \ldots, A_r = 0$ enthält, lässt sich in der Form

$$R.H = D_1(A_1) + \ldots + D_r(A_r) \tag{15}$$

darstellen, wo $D_1, \ldots D_r$ lineare homogene Differentialfunctionen bedeuten, deren Coefficienten ebenso wie $R$ ganze rationale Differentialfunctionen der Coefficienten von $A_1, \ldots, A_r$ sind.

---

[1] Cf. G. v. Escherich, l. c. Dort findet sich bewiesen, dass irgend zwei Formen $A_1$, $A_2$ ohne gemeinsamen Factor für alle Differentialausdrücke als Basis dienen können, wenn man gebrochene Coefficienten zulässt.

[2] Brassinne, in den Noten zu Sturm's Cours d'Analyse. Sein Verfahren überträgt sich auf nicht homogene Gleichungen.

Die Gesammtheit aller Differentialformen, die durch $D_1(A_1)+\ldots+D_r(A_r)$ sich darstellen lassen, wo $D_1,\ldots D_r$ homogene lineare Differentialfunctionen sind, möge ein Differentialmodul heißen. Dann ist $A_1,\ldots,A_r$ eine Basis des Moduls, den wir mit $[A_1,\ldots,A_r]$ bezeichnen werden. Bilden $A_1,\ldots,A_r$ ein vollständiges System gemäß I. oder III., so heiße $[A_1,\ldots,A_r]$ ein vollständiger Modul. Lässt man gebrochene Differentialfunctionen als Coefficienten der $D_i$ zu, so genügt es, $r=2$ zu nehmen.

Unter den vollständigen Differentialmoduln und den Idealen der Körpertheorie besteht eine enge Analogie und es lassen sich auch die Theilbarkeitsgesetze, um derentwillen die Ideale geschaffen wurden, hieher übertragen. Nur bei der Productbildung tritt hier die Unterscheidung des Sinnes hinzu.[1]

Auch lässt sich der Begriff des Differentialmoduls sofort auf Differentialfunctionen $A_1,\ldots,A_r$ von mehreren Argumenten ausdehnen.

VIII. Die $i^{\text{ten}}$ Resultanten. So sehr das Verfahren in Art. VI. hinter dem der Determinantenbildung an Eleganz und Symmetrie zurücksteht, so hat es doch einiges für sich. Bei jenem erhält man wie in der Algebra zuerst die Resultantenform für ein gemeinsames Integral und muss daraus durch Infinitesimalprocesse oder anderweitig die Bedingungen für die Gemeinsamkeit von $2, 3,\ldots, m-i$ ($m$ hat die Bedeutung wie oben) Integralen herleiten. Aber es ist in diesem und ähnlichen Fällen immer schwierig, wie Kronecker hervorgehoben, die gerade nothwendigen Bedingungen unter ihnen anzugeben.[2] Das primitiv erscheinende Verfahren aus Art. VI hat 1. den eigenthümlichen Vortheil, dass es zuerst die Bedingungen für $m-1$, oder $m-2$, $m-3,\ldots m-i$ gemeinsame Integrale liefert und erst zuletzt die Bedingung für die Gemeinsamkeit eines einzigen Integrales, 2. dass es für jedes $i$ die gerade nothwendigen und hinreichenden Bedingungen liefert, 3. dass man

---

[1] Man wird rechtsläufige und linksläufige Factoren zu unterscheiden haben, ähnlich wie Hurwitz, Göttinger Nachrichten, 1897, es für Quaternionen macht.

[2] In Cr. J., Bd. XCVII, hat Kronecker einem solchen Falle eine mühsame Arbeit gewidmet.

den Ausdruck für die gemeinsamen Integrale in factischen Fällen direct durch $A_1, A_2$ dargestellt erhält.

Die Bedingungen für $m-i$ Integrale sind den 10), 10') analog in dem Verschwinden aller Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{10}^{(i)}, a_{11}^{(i)}, \ldots, a_{1,n-i}^{(i)}, d_1^{(i)} \\ a_{20}^{(i)}, a_{21}^{(i)}, \ldots, a_{2,n-i}^{(i)}, d_2^{(i)} \end{vmatrix}$$

enthalten. Hievon sind (Jacobi) nur $n-i+1$ unabhängig. Man kann sie als den $i^{\text{ten}}$ Resultantenmodul bezeichnen. Verschwinden die $i^{\text{ten}}$ Resultanten, so verschwinden auch die $(1+i^{\text{ten}})$ und alle folgenden. Die wirkliche Ausrechnung zeigt thatsächlich, dass sie alle Differentialfunctionen der $i^{\text{ten}}$ Resultanten sind, dass sie also im $i^{\text{ten}}$ Resultantenmodul (nach bekannter Terminologie) enthalten sind.

Das Verfahren in Art. VI und das eben Gesagte gelten entsprechend für die Algebra. Dort kann man aber die $i^{\text{ten}}$ Resultanten auch ersetzen durch eine der $i^{\text{ten}}$, eine der $(i+1)^{\text{ten}}$, eine der $(i+2)^{\text{ten}}$ und endlich die letzte Resultante. Hier ist dies nur mit Beschränkung möglich, weil eben die Resultanten sich durch Differentiation aus den jedesmal vorhergehenden entwickeln.

IX. Einige Eigenschaften der Resultante. $R_{0,0}$ kann sich von der Escherich'schen Determinante nur durch einen Factor unterscheiden.

Aus 12) ist ersichtlich, dass $R_{d_1,d_2}$ von der Ordnung $n$ ist. Es ist in Bezug auf $d_1$, $d_2$ je eine lineare nicht homogene Gleichung. Fasst man $R=0$ als Differentialgleichung in Bezug auf $a_{1i}$ auf, so definiert sie jene Gleichungen der Schaar $A_1+\alpha_{1i}u^{(n-i)}=0$ mit der Parameterfunction $\alpha_{1i}$, welche ein Integral mit $A_2=0$ gemeinsam haben. Nun kann die Gleichung für dieses Integral rational und differential aus den Coefficienten von $A_1$ bestimmt werden, also besteht eine Gleichung

$$u = F(\alpha_{1i}),$$

wo $F$ Differentialfunction ist, welche die Resultante in die Gleichung $A_2$ transformiert, denn jedem Integrale $\alpha_{1i}$ von $R=0$ muss ein Integral von $A_2=0$ entsprechen. Insbesondere ist $F$, wenn $\alpha_{1i}$ das $d_1$ ist, ein linearer Differentialausdruck; daher:

Theorem. Die Resultante von $A_1$, $A_2$ als Differentialgleichung in Bezug auf einen Coefficienten von $A_1$ oder $A_2$ aufgefasst, ist eine rationale (Vessiot'sche) Transformierte[1] der Differentialgleichung $A_2 = 0$, respective $A_1 = 0$, und insbesondere in Bezug auf $d_1, d_2$ eine Riemann'sche Transformierte von $A_2$, $A_1$. Sind $A_1$, $A_2$ homogen, so ist $R$ eine Transformierte der logarithmischen Transformierten von $A_1$ oder $A_2$.

Überhaupt steht die Bildung der Resultante mit der Riemann'schen Transformierten in genauer Beziehung. $A_1(u) = 0$ mittels $y = D(u)$, wo $D$ und $A$ auch homogen sein können, transformieren, heißt eben, aus $A_1(u)$ und $D(u) - y$ die Resultante bilden, wobei man also sieht, dass die Resultante $R_{d_1, d_2}$ doch nicht zu umgehen ist. Sie wird nach 12) eine nicht homogene lineare Gleichung in $y$, welche die Transformierte ist.

Das vorige Theorem gilt allgemeiner auch dann, wenn die Coefficienten von $A_1$ lineare Functionen einer Function $f$ und sogar, wenn sie lineare Differentialfunctionen von $f$ sind. Gibt es ferner in dieser Schaar eine Gleichung, welche mit $A_2 = 0$ $\mu$ gemeinsame Integrale hat, so haben die Gleichungen $R_1^{(i)} = 0, \ldots, R_{n-i+1}^{(i)} = 0$ in Bezug auf $f$ ein Integral gemeinsam. In der Algebra hat in diesem Falle $R = 0$ als Gleichung für $f$ eine $\mu$-fache Wurzel. Es wäre nützlich, einige Klarheit über den Sachverhalt auch im vorliegenden Falle zu gewinnen.

X. Vollständige Structur eines Systemes. Seien $u_1, \ldots, u_{n-r+1}, u_{n-r+2}, \ldots, u_n$ irgendwelche Functionen oder Functionenzweige von $x$. Wir bilden die Gleichungen, die je

$$u_1, \ldots, u_{n-r+2}, u_{n-r+3}, \ldots, u_{n-1},$$

$$u_1, \ldots, u_{n-r+2}, u_{n-r+3}, \ldots, u_{n-2}, u_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_1, \ldots, u_{n-r+2}, u_{n-r+4}, \ldots, u_{n-1}, u_n$$

zu Integralen haben. Diese $r$ Gleichungen bilden ein vollständiges System nicht homogener Gleichungen, das überdies

[1] Ann. de l'École Norm. 1892.

die Eigenschaft hat, dass irgend zwei, also auch irgend $i$ Gleichungen dieser Basis ein vollständiges System bilden. Eine solche Basis soll eine von vollständiger Structur heißen.

Ich möchte an ein Beispiel erinnern, das in der Theorie der Adjungierten vorkommt. Bezeichnet man nach Darboux den begleitenden Differentialausdruck von $f(u)$ mit $\Psi(u, v)$, so bestehen die Gleichungen

$$\Psi(u_i, v_i) = 0, \quad \Psi(u_i, v_k) \gtreqless 0, \ldots, i \gtreqless k$$

für die Integrale von $f(u)$ und seiner Adjungierten, daher bilden

$$\Psi(u, v_1) = 0, \ldots, \Psi(u, v_n) = 0,$$
$$\Psi(u_1, v) = 0, \ldots, \Psi(u_n, v) = 0$$

je ein vollständiges System von vollständiger Structur.

Im Gebiete der partiellen Gleichungen entsteht ein solches System, wenn man in der Functionaldeterminante von $f_1, \ldots, f_r$ nach $x_1, \ldots x_r$ je eine der Functionen als unbekannt nimmt und die $r$ Differentialgleichungen, die so dargestellt werden, anschreibt.[1]

Es entsteht nun die Frage, ob man jedem vollständigen Systeme 3) eine solche Basis geben könne. Man nehme $r$ weitere willkürliche Functionen $u_1, \ldots u_r$ und bestimme die Factoren $f_1, \ldots, f_r$ so, dass $f_1 A_1 + \ldots + f_r A_r$ einmal durch $u_1, \ldots, u_{r-1}$, einmal durch $u_1, \ldots, u_{r-2}, u_r$ u. s. w. Null wird, d. h. wenn $A_i(u_k) = \alpha_{ik}$ gesetzt wird; man bestimme $f_1, \ldots, f_r$ durch je $r-1$ der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \alpha_{11} + f_2 \alpha_{21} + \ldots + f_r \alpha_{r1} = 0 \\ f_1 \alpha_{12} + f_2 \alpha_{22} + \ldots + f_r \alpha_{r2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1 \alpha_{1r} + f_2 \alpha_{2r} + \ldots + f_r \alpha_{rr} = 0, \end{array}\right\} \quad 18)$$

---

[1] Setzt man in eine Gleichung wie 1) $n+1$ verschiedene Functionen ein, so kann man die Determinante dieser $n+1$ Gleichungen bilden. Nimmt man je eine Zeile als unbekannt an, so entstehen $n+1$ verschiedene Gleichungen, welche eine Basis von vollständiger Structur bilden. Man kann daraus $r$ Gleichungen nehmen, welche wieder ein System von vollständiger Structur bilden. Ähnliches gilt für vollständige Systeme von linearen partiellen Gleichungen mit $n+2$ Gliedern.

dann bilden die mit diesen $r$ Lösungssystemen $f_1,\ldots,f_r$ construierten Gleichungen eine Basis vollständiger Structur.

XI. Die Jacobi'sche Basis. 1. Wir halten uns an die bekannte weitere Definition bei den partiellen Gleichungen, wonach ein System $A_1,\ldots, A_r$ Jacobisch ist, wenn alle $(A_i, A_k) = 0$ sind. Solche Systeme gibt es auch hier. Ja, wir können das von Clebsch in Cr. J., Bd. LXV, gegebene Verfahren für die Ersetzung der Basis $A_1,\ldots A_r$ in eine Jacobi'sche Basis wörtlich übertragen, was ich wegen des großen Interesses thun will.

»Wir benützen $r$ willkürliche Functionen $u_1(x),\ldots, u_r(x)$ und setzen an

$$\begin{aligned} A_1(u) &= A_1(u_1)B_1(u)+\ldots+A_r(u_1)B_r(u) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_r(u) &= A_1(u_r)B_1(u)+\ldots+A_r(u_r)B_r(u), \end{aligned} \tag{19}$$

woraus auch ersichtlich ist, dass die $B_1(u),\ldots, B_r(u)$ nur dann bestimmt werden können, wenn die Gleichung, welcher die $u_1,\ldots, u_r$ genügen, nicht dem Systeme angehört, weil aus den Gleichungen

$$f_1 A_1(u_i)+\ldots+f_r A_r(u_i) = 0 \qquad i = 1,\ldots, r$$

das Verschwinden der Determinante $|A_k(u_i)|$ folgt.«[1]

»Wird in den Gleichungen 19) statt $u$ successive $u_1,\ldots, u_r$ gesetzt, so erhält man $r$ Systeme von Gleichungen zur Bestimmung von $B_k(u_i)$ und findet

$$B_i(u_i) = 1, \qquad B_i(u_h) = 0, h \gtrless i.«$$

»Nun muss

$$(B_i, B_h)_x = b_{h_0}\frac{dB_i}{dx} - b_{i_0}\frac{dB_h}{dx} = c_1 B_1+\ldots+c_r B_r \tag{20}$$

sein; und es ist direct zu sehen, dass $(B_i, B_h)_x(u_k) = 0$, während aus 20) folgt

$$(B_i, B_h)_x(u_k) = c_k, \text{ also } c_1 = \ldots = c_r = 0 \text{ und } (B_i, B_h)_x = 0«.$$

[1] Eine ähnliche einschränkende Bemerkung muss wohl auch für die Wahl der Functionen $\varphi_1,\ldots, \varphi_r$ bei Clebsch, l. c., gemacht werden.

2. Um zu $A$ die Gleichungen $B=0$ zu finden, welche $(B, A)_x = 0$ machen, hat man die Differentialgleichungen mit den Unbekannten $b_0, b_1, \ldots, b_n, b$ zu integrieren ($b$ statt $d$ geschrieben):

$$\left.\begin{aligned}
a_0 \frac{db_0}{dx} &= b_0\left(\frac{da_0}{dx} + a_1\right) - a_0 b_1 \\
a_0 \frac{db_1}{dx} &= b_0\left(\frac{da_1}{dx} + a_2\right) \qquad - a_0 b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_0 \frac{db_{n-1}}{dx} &= b_0\left(\frac{da_{n-1}}{dx} + a_n\right) \qquad - a_0 b_n \\
a_0 \frac{db_n}{dx} &= b_0 \frac{da_n}{dx}. \\
a_0 \frac{db}{dx} &= b_0 \frac{da}{dx}.
\end{aligned}\right\} \quad 22)$$

Im Falle

$$a_{i+1} = -\frac{da_i}{dx}$$

findet man einfach

$$b_{i+1} = -\frac{db_i}{dx},$$

also:

Ist

$$A(u) = v u^{(n)} - v' u^{(n-1)} + v'' u^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n . v^{(n)} u - a,$$

so hat jedes $B$, das $(A, B)_x = 0$ macht, die Form

$$B(u) = t u^{(n)} - t' u^{(n-1)} + t'' u^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n . t^{(n)} u - b. \qquad 23)$$

3. Wenn $(X_1, A) = 0$, $(X_2, A) = 0$, so folgt aus

$$\xi_{10} \frac{dA}{dx} - a_0 \frac{dX_1}{dx} = 0; \quad \xi_{20} \frac{dA}{dx} - a_0 \frac{dX_2}{dx} = 0$$

auch

$$\xi_{20} \frac{dX_1}{dx} - \xi_{10} \frac{dX_2}{dx} = 0,$$

also $(X_1, X_2)_x = 0$. Also bilden alle Lösungen von $(X_1, A)_x = 0$ mit $A$ selbst ein Jacobi'sches System.

4. Aus $(A, B)_x = 0$ folgt

$$\frac{dA}{dx} = \frac{a_0}{b_0} \frac{dB}{dx},$$

also ist $\frac{a_0}{b_0}$ ein Lagrange'scher Multiplicator von $\frac{dB}{dx}$ und bezeichnet man mit $B_1(u, v)$ den begleitenden Differentialausdruck von $\frac{dB}{dx}$ (nicht von $B$), so muss $A = B_1\left(u, \frac{a_0}{b_0}\right)$ sein. Bildet man also zu $\frac{dB}{dx}$ den Ausdruck $B_1(u, v)$ und setzt $v$ gleich den Multiplicatoren von $\frac{dB}{dx}$, 1 ausgenommen, so erhält man in $B_1(u, v_1), \ldots, B_1(u, v_n)$ lauter Ausdrücke $X$, welche der Bedingung $(X, B)_x = 0$ genügen.

Also: $B(u)$ und die $n$ begleitenden Differentialausdrücke[1] von $\frac{dB(u)}{dx}$ bilden ein Jacobi'sches System. Und dieses ist das allgemeinste Jacobi'sche System; denn in jedem derartigen Systeme gilt, dass jeder der $r$ Differentialausdrücke begleitender vom Differentialquotienten jedes der übrigen ist.

5. Jedem Systeme 3) kann leicht eine Basis gegeben werden, die aus $r$ vollständigen Differentialquotienten besteht. Es entsteht nun das Problem, das als Verallgemeinerung des Lagrange'schen Multiplicators aufzufassen ist: »Für die $r$ Gleichungen $A_1(u), \ldots, A_r(u)$ sind Multiplicatoren $f_1, \ldots, f_r$ zu finden, so dass $f_1 A_1 + \ldots + f_r A_r$ ein $i^{\text{ter}}$ und besonders ein $r^{\text{ter}}$ Differentialquotient wird und eine Basis, die aus solchen besteht.«

XII. Die Donkin'sche Formel. Stellt man das Symbol $(A, B)_x$ dem Symbol $(A, B)$ gegenüber, so liegt es nahe, zu fragen, welchen Wert

$$((A, B)_x, C)_x + ((B, C)_x, A)_x + ((C, A)_x, B)_x \tag{24}$$

besitze. Die Ausrechnung ergibt

---

[1] Als »die begleitenden Differentialausdrücke« von $A(u)$ bezeichne ich hier jene, die aus der begleitenden Form $A(u, v)$ dadurch entstehen, dass für $v$ die $n$ Multiplicatoren gesetzt werden.

$$a_1(B, C)_x + b_1(C, A)_x + c_1(A, B)_x = \begin{vmatrix} \frac{dA}{dx}, & \frac{dB}{dx}, & \frac{dC}{dx} \\ a_0, & b_0, & c_0 \\ a_1, & b_1, & c_1 \end{vmatrix}, \qquad 25)$$

so dass z. B., wenn

$$1. \quad a_0 : b_0 : c_0 = a_1 : b_1 : c_1$$

oder

$$2. \quad a_1 = b_1 = c_1 = 0$$

oder

$$3. \quad (A, B)_x = (B, C)_x = (C, A)_x = 0,$$

die Formel identisch den Wert 0 hat.

An Punkt 2 knüpft sich noch die folgende Bemerkung. Sind alle $\alpha_{i1}$ der Basisformen Null, so sind auch alle $a_{i1}$ des Systemes nur dann Null, wenn $a_{i0}a_{k2} - a_{i2}a_{k0}$, also $a_{i0} = \rho a_{i2}$, $\rho$ unabhängig von $i$. Bekanntlich nennt man $A$ im Falle $a_1 = 0$ eine Lagrange'sche Normalform.[1] Daher:

Wenn alle Basisformen $\alpha_{i1} = 0$ und $\alpha_{i0} = \rho\alpha_{i2}$ haben, so haben alle Gleichungen des Systemes die Normalform und das Donkin'sche Symbol wird Null für irgend drei Formen des Systemes.

Man kann leicht jedem Systeme 3) eine Basis verschaffen, für welche die oben genannten Bedingungen erfüllt sind. — Die Form 25) wird von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn

$$\Sigma \pm \left(\frac{da_0}{dx} + a_1\right) b_0 c_1 = 0,$$

also z. B., wenn

$$\frac{da_0}{dx} : a_0 = \frac{db_0}{dx} : b_0 = \frac{dc_0}{dx} : c_0 = f,$$

also

$$e^{\int x} = C_1 a_0 = C_2 b_0 = C_3 c_0,$$

oder auch, wenn

$$a_0' : b_0' : c_0' = a_1 : b_1 : c_1.$$

---

[1] Besonders Halphen macht häufige Anwendung von dieser Normalform.

Ebenso können die Bedingungen aufgestellt werden, damit 25) von der Ordnung $n-2$, $n-3,\ldots$ wird und auch jene, damit dies für alle Tripel des Systemes stattfinde.

XIII. Das Analogon zu Lie's invarianten Operationen. Wenn auch das Substrat der Transformationen hier mangelt, die formale Analogie zu den Operationen $X(f)$, welche $A(f)$ oder ein System solcher in sich verwandeln, besteht.

Sei
$$(X_1, A)_x = f_1 A,\ (X_2, A)_x = f_2 A,$$
dann folgt, wie Art. X, Punkt 4, dass
$$(X_1, X_2)_x = \frac{1}{a_0}(\xi_{20} f_1 - \xi_{10} f_2) A,$$
$$(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, A) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) A,$$
wenn $\alpha_1$, $\alpha_2$ Constanten sind. Für die directe Bestimmung aller Lösungen erhalten wir ein System von Differentialgleichungen analog dem in Art. X, Punkt 3.

Ist
$$c_1 A + c_2 \frac{dA}{dx} = \frac{dX}{dx},$$
so ist $X$ nur dann eine Lösung von $(X, A) = fA$, wenn $c_2 = \frac{\xi_0}{a_0}$. Ist
$$v_i A(u) = \frac{dA(u, v_i)}{dx},$$
also $v_i$ Multiplicator von $A(u)$, so ist $A(u, v_i) - A(u)$ eine Lösung von $(X, A)_x = fA$ (mit unbestimmtem $f$). Es ist
$$(X_1 - X_2, A)_x = (f_1 - f_2) A$$
und alle Lösungen von $(X, A)_x = f_1 A$ werden erhalten, indem man zu $X_1$ alle Lösungen von $(X, A)_x = 0$ addiert.

Ist $X_1$ eine Lösung von $(X, A)_x = B$, so werden alle anderen erhalten, indem man zu $X_1$ alle Lösungen von $(X, A)_x = 0$ addiert. — Ist $(X_1, A)_x = f_1 A$, so ist $(X_1, cA)_x = g_1 A$.

Ist

$$(X_1, A_i)_x = \sum_{i=1,\dots r} f_i A_i, \quad (X_2, A_i)_x = \sum_{i=1,\dots r} g_i A_i,$$

so ist

$$(X_1, X_2) = \Sigma\, h_i A_i$$

und

$$(X_1, \Sigma\, c_i A_i)_x = \sum_{i=1,\dots r} l_i A_i,$$

ferner

$$(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_p X_p, A_i) = \Sigma\, \alpha_i f_h A_h,$$

wenn $\alpha_1,.,.\alpha_p$ Constanten und $X_1,\dots,X_p$ Lösungen wie $X_1$ sind.

XIV. Der Jacobi'sche Multiplicator. Sind $n+1$ Integrale einer partiellen Differentialgleichung

$$\mathrm{A}(f) = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + A_0 f + A = 0$$

bekannt, so kann die Determinante von $\mathrm{A}(f_1),\dots,\mathrm{A}(f_{n+1})$ sich von der Gleichung nur durch einen Factor unterscheiden. Diesen »Multiplicator« hat Jacobi im Falle, wo $A_0 = 0$, $A = 0$ sind, mittels einer nicht homogenen linearen partiellen Gleichung bestimmt.

Die Analogie der Determinante $|u_i^{(k)}(x)|$ mit der Functionaldeterminante $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|$ hat Frobenius bereits erörtert[1] und hat schon aus dem Verschwinden jener auf die linear-constante Abhängigkeit der Functionen $u$ geschlossen, wie Jacobi aus dem Verschwinden von $\frac{\mathrm{D}(f_1,\dots f_n)}{\mathrm{D}(x_1, \dots x_n)}$ auf die functionale Abhängigkeit von $f_1,\dots f_n$.

Ebenso kann man aus dem Verschwinden der Determinante von $a_0 u_i^{(n)} + \dots + a_n u_i - d = 0 \quad (i = 1,\dots, n+2)$

$$\begin{vmatrix} u_1^{(n)}, \dots, u_1, & 1 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ u_{n+2}^{(n)}, \dots, u_{n+2}, & 1 \end{vmatrix} \qquad 27)$$

[1] Cr. J., Bd. LXXVII.

auf die lineare Abhängigkeit von $u_1, \ldots, u_{n+2}$ schließen, weshalb ich in Art. I von der linearen Abhängigkeit von $n+2$ Integralen der $A(u) = 0$ spreche.

Sind $u_1, \ldots, u_{n+1}$ unabhängige Integrale von $A(u) \doteq 0$, so kann sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} u^{(n)}, \ldots, u, & 1 \\ u_1^{(n)}, \ldots, u_1, & 1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ u_{n+1}^{(n)}, \ldots, u_{n+1}, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

von $A(u) = 0$ nur durch einen Factor unterscheiden, den wir auch Jacobi'schen Multiplicator nennen.

Er bestimmt sich aber hier viel einfacher als

$$\begin{vmatrix} u_1^{(n-1)}, \ldots, u_1, & 1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ u_{n+1}^{(n-1)}, \ldots, u_{n+1}, & 1 \end{vmatrix} : a_0 \qquad 28)$$

und hat also den Wert $\frac{1}{a_0} e^{-\int a_1 dx}$. Nämlich die Determinante wird durch Zeilensubstraction $|u_i^{(k)} - u_1^{(k)}|$, also da $u_i - u_1$ unabhängige Integrale von $A(u) + d = 0$ sind, nach dem Liouville'schen Satze $e^{-\int a_1 dx}$.

Im Jacobi'schen Multiplicator liegt der Keim einer Verallgemeinerung, die vorübergehend erwähnt sei: Ist ein vollständiges System $A_1(f) = 0, \ldots, A_r(f) = 0$ gegeben, so sollen Multiplicatorsysteme $m_1^{(i)}, \ldots, m_r^{(i)}$, $(i = 1, \ldots r)$, gefunden werden, so dass die Gleichungen

$$m_1^{(i)} A_1 + \ldots + m_r^{(i)} A_r = 0 \qquad i = 1, \ldots r$$

genau übereinstimmen mit $r$ Gleichungen, die aus einer Determinante

$$\sum \pm \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, f_{n+1}, 1 \right|$$

im nicht homogenen Falle und aber aus einer Functionaldeterminante im homogenen Falle dadurch hervorgehen, dass man in je einer der letzten $r$ Zeilen die Function durch die Unbestimmte $f$ ersetzt.

Und in unserem Falle haben wir die analoge Aufgabe: Dem Systeme 3) eine solche Basis zu verschaffen, wo die $r$ Gleichungen die aus $\Sigma \pm (u_1^{(n)} u_2^{(n-1)} \ldots u_{n+1} 1)$ durch Ersetzung je einer der letzten $r$ Functionen $u_i$ mittels der Unbekannten $u$ entstehenden sind.

Zur Lösung benützen wir eine in Art. IX construierte Basis vollständiger Structur und multiplicieren nur noch jede Gleichung dieser Basis mit ihrem Jacobi'schen Multiplicator.[1]

XV. Die Lie'schen Systeme. Sophus Lie hat in seiner Theorie der Gruppen solche vollständige Systeme angetroffen, welche sich nur mittels Constanten linear combinieren und wo insbesondere auch alle Symbole $(A_i, A_k)$ sich linear-constant aus der Basis herstellen. Sie verhalten sich zu den Clebschischen wie die Dedekind-Weber'schen Schaaren eines Körpers (Cr. J., Bd. XCII) zu ihren Moduln.

Obzwar das Substrat der Gruppentheorie für die Systeme 3) mangelt, so können doch auch hier derartige Systeme untersucht werden und es ist interessant, wie sich ihre Eigenschaften formal (ohne Bezug auf eine Gruppentheorie) ganz analog den von Lie entdeckten stellen. Ich werde also solche Systeme 3), wo die lineare Combination aus der Basis $A_1(u)$, $\ldots, A_r(u)$ nur mittels constanter Factoren geschieht und wo alle $(A_i, A_k)_x$ sich als $\lambda_1 A_1(u) + \ldots + \lambda_r A_r(u)$, wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ Constanten sind, darstellen, als Lie'sche Systeme bezeichnen.

1. Als einfachstem Falle begegnet man dem, wo $A_1(u)$, $\ldots, A_r(u)$ selbst constante Coefficienten haben, dies also für das ganze Lie'sche System gilt. Die Auffindung solcher Systeme erfordert jene von Matricen constanter Elemente

$$\left| \begin{array}{l} a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, d_1 \\ a_{20}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r0}, a_{r1}, \ldots, a_{rn}, d_r \end{array} \right|, \tag{29)}$$

[1] Sophus Lie hat im XI. Bande der Math. Ann. ebenfalls eine Verallgemeinerung des Jacobi'schen Multiplicators auf vollständige Systeme gegeben, auf die er mit Recht großes Gewicht legt. Ein Analogon dazu ließe sich auch für 3) formulieren, ausgenommen das Functionentheoretische.

wo jene Matrix, welche durch Hinzufügung aller Zeilen

$$c_{ik0},\ c_{ik1},\ c_{ik2},\ldots,\ c_{ikn},\ 0$$

mit dem Werte

$$c_{ikl} = a_{il}a_{k0} - a_{kl}a_{i0} \qquad 30)$$

aus 29) entstehen, doch nur den Rang $r$ hat.

2. Ist nun überhaupt das System 3) ein Lie'sches, so kann seine Gliederzahl $r > n$ sein. Um ein unvollständiges in ein vollständiges Lie'sches System zu verwandeln, kann man dasselbe Verfahren wie in Art. V anwenden, indem man nur jetzt als discriminierend die Combinierbarkeit mittels constanter Factoren erklärt.

Man beweist leicht die Sätze: Haben zwei vollständige Lie'sche Systeme Gleichungen gemeinsam, so bilden diese alle wieder ein vollständiges Lie'sches System.

Ist in einem $r$-gliederigen vollständigen Lie'schen Systeme ein $r_1 < r$-gliederiges enthalten, so kann die Basis des letzteren stets durch $r - r_1$ Gleichungen zu einer Basis des ersteren ergänzt werden.

Irgend zwei vollständige Lie'sche Systeme sind in einem ganz bestimmten dritten, $V$, von möglichst niederer Gliederzahl enthalten. Man ergänzt die Basis $M$ des gemeinsamen Systemes in beiden durch $Q_1$, $Q_2$; ist dann das von $M$, $Q_1$, $Q_2$ gebildete System ein vollständiges, so ist es das gesuchte $V$; wenn nicht, so ergänzt man es nach Art. V auf dieses.

Ein Lie'sches System heißt in einem anderen $X_1,\ldots,X_s$ invariant enthalten, wenn alle $(X_i A_k)_x$ sich durch $A_1,\ldots A_r$ linear-constant combinieren lassen. Nach Art. XII folgt dann, dass $(X_\alpha, X_\beta)_x = \Sigma\, m_i A_i$, wo aber die $m_i$ nicht nothwendig Constante sein müssen.

Suchen wir ein invariantes Untersystem von möglichst großer Gliederzahl, in diesem wieder ein derartiges, u. s. w., so erhalten wir eine Reihe vollständiger Lie'scher Systeme, die eine Reihe der Zusammensetzung des gegebenen heißt. Für alle Reihen der Zusammensetzung eines L. S. sind die Zahlen

$$r - r_1,\ r_1 - r_2,\ r_2 - r_3,\ldots,$$

wo $r_1, r_2, r_3, \ldots$ die successiven Gliederzahlen der Untersysteme sind, der Größe, wenn auch nicht der Folge nach, dieselben.[1]

Zwei eingliederige Systeme $\lambda_1 A_1(u)$ und $\lambda_2 A_2(u)$ heißen vertauschbar, wenn $(A_1, A_2)_x = 0$. Nicht jedes Lie'sche System kann eine Basis Jacobi'scher Art haben, hat es eine, so sind alle seine Gleichungen paarweise vertauschbar.

Die sämmtlichen Symbole $(X_i, X_k)_x$, gebildet in einem Lie'schen Systeme, erfüllen entweder dieses Lie'sche System oder nicht. Im letzten Falle bilden sie ein vollständiges Untersystem, das invariant im gegebenen ist. Denn $(X_\alpha, (X_\beta, X_\gamma))_x$ ist gemäß Definition in dem Untersysteme enthalten. Man kann es auch das erste derivierte Lie'sche System heißen. Innerhalb diesem gibt es ein derivirtes, welches in Bezug auf das gegebene Lie'sche System das zweite derivierte Lie'sche System heiße u. s. w.

Mit einem gegebenen vollständigen Lie'schen Systeme heißt $X$ vertauschbar, wenn alle $(X, A_i)_x$ im Lie'schen Systeme enthalten sind. Alle mit ihm vertauschbaren $X$ bilden ein vollständiges Lie'sches System, das das gegebene invariant enthält.

Zwei vollständige Lie'sche Systeme heißen vertauschbar, $A_1, \ldots, A_r$ mit $B_1, \ldots, B_s$, wenn jedes $(A_i, B_k)_x$ sich sowohl durch $A_1, \ldots, A_r$, als durch $B_1, \ldots, B_s$ linear-constant darstellen lässt. Haben zwei solche Lie'sche Systeme ein drittes gemeinsam, so ist dieses invariant in jedem von ihnen enthalten.

Jedes Lie'sche System ist in einem bestimmten vollständigen Systeme 3) enthalten, aber es kann auch bewiesen werden, dass in jedem vollständigen Systeme 3) auch Lie'sche Systeme enthalten sind.

3. Ist $A_1, \ldots, A_r$ eine Basis eines Lie'schen Systemes, so wird

$$(A_i, A_k)_x = \alpha_{ik1} A_1 + \ldots + \alpha_{ikr} A_r. \tag{31}$$

Die Zahlen $\alpha_{ikl}$ sind es, welche Lie als charakteristisch für die Structur oder Zusammensetzung der Gruppe ansieht und

[1] Der Beweis kann genau so geführt werden, wie ihn Vessiot nach Andeutungen von Sophus Lie in der Abhandlung: »Sur l'intégration des équations différentielles«, Annales de l'Ecole Normale, 1892, für den Fall partieller Gleichungen $A_1(f), \ldots, A_r(f)$ durchführt.

die wir hier als charakteristisch für die Zusammensetzung des Lie'schen Systemes ansehen. Haben zwei Lie'sche Systeme, nachdem man zwei Basen $A_1, \ldots, A_r$ und $B_1, \ldots, B_r$ einander zugewiesen hat, gleiche Zahlensysteme $\alpha_{ikl}$, so sage ich, sie haben gleiche Zusammensetzung oder sie seien isomorph. Es folgt dann, dass jeder Gleichung des einen Lie'schen Systemes eine Gleichung des anderen zugewiesen werden kann, so dass, wenn $X_i, X_k$ den $Y_i, Y_k$ zugewiesen sind, auch $(X_i, X_k)_x$ dem $(Y_i, Y_k)_x$ zugewiesen ist.

Wenn alle $A_1, \ldots A_r$, also alle Gleichungen des Lie'schen Systemes die Lagrange'sche Normalform haben, sind alle Donkin'schen Symbole Null, wie im partiellen und die Relationen unter den $\alpha_{ikl}$ sind dieselben, wie in Lie's Theorie (S. 296), nämlich

$$\alpha_{ikl} + \alpha_{kil} = 0,$$

$$\sum_{1}^{r} \nu \left\{ \alpha_{ik\nu} \alpha_{\nu jl} + \alpha_{kj\nu} \alpha_{\nu il} + \alpha_{ji\nu} \alpha_{\nu kl} \right\} = 0 \qquad 32)$$

$$(i, k, j, l = 1, \ldots, r).$$

Wenn einer linear-constant unabhängigen Basis des ganzen Lie'schen Systemes hiebei wieder eine linear-constant unabhängige Basis zugewiesen erscheint, so ist die Isomorphie holoedrisch, wenn aber eine linear-constant abhängige Basis, so ist sie meriëdrisch.[1] Dies gilt dann für alle möglichen Basen des ersten Systemes, von dem man ausgeht, weil der Determinantenfactor, der von der Zuweisung abhängt, jedesmal derselbe ist und die beiden Fälle hervorruft, je nachdem er nicht verschwindet oder verschwindet. Gleichzeitig folgt, dass im zweiten Falle das eine System überhaupt keine $r$-gliederige linear-constant unabhängige Basis haben könne, so dass meriedrische Isomorphie nur zwischen verschiedengliederigen Lie-schen Systemen bestehen kann.[2]

---

[1] Hier sei auch erwähnt, dass, wenn die nicht homogenen Gleichungen $A_1(u) = 0, \ldots A_r(u) = 0$ ein vollständiges Lie'sches System bilden, auch ihre reducierten Gleichungen ein solches bilden. Unter den beiden Systemen besteht meriëdrische Isomorphie.

[2] Sophus Lie, l. c. I, S. 292.

Hervorzuheben ist, dass hier wie auch schon in der Gruppentheorie ein dritter Fall denkbar ist, nämlich wo zwei linear-constant abhängige Basen $A_1 \dots A_r$ und $B_1 \dots B_r$ in den zwei Lie'schen Systemen mit Gleichheit der Zusammensetzungszahlen in den beiden Lie'schen Systemen einander entsprechen. Es ist wenigstens nicht selbstverständlich, dass es dann stets auch eine linear-constant unabhängige Basis im einen oder anderen Systeme geben müsse, dem im zweiten Lie'schen Systeme eine Basis unter Gleichheit der Zusammensetzungszahlen $\alpha_{ikl}$ entspricht. Dies steht auch in Übereinstimmung mit der 1—1-deutigen, $1 - \mu'$-deutigen und $\mu - \mu'$-deutigen Isomorphie der Cauchy'schen Gruppentheorie.

4. Die Definitionsgleichungen nach S. Lie. Auch hier kann man verlangen, die $n+2$ Coefficienten einer allgemeinen Gleichung des Systemes 3), nämlich

$$\alpha_0 = \Sigma f_i a_{i0},\ \alpha_1 = \Sigma f_i a_{i1}, \dots, \alpha_n = \Sigma f_i a_{in},\ \delta = \Sigma f_i d_i \qquad 33)$$

als Integrale eines Systemes von Differentialgleichungen zu erhalten. Von diesem sind dann alle jene, die durch Nullsetzung der $f$ bis auf je eines entstehen, particuläre Lösungen. Man erhält diese Gleichungen, indem man die $\alpha$ hinreichend oft differenziert und aus allen diesen Gleichungen die $f_1, \dots, f_r$ eliminiert. Das Resultat werden Gleichungen der Form

$$\left.\begin{array}{l} D_{10}(\alpha_0) + \dots + D_{1n}(\alpha_n) + D_1(\delta) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_{\lambda 0}(\alpha_0) + \dots + D_{\lambda n}(\alpha_n) + D_\lambda(\delta) = 0 \end{array}\right\} \qquad 34)$$

sein. Aus ihnen lassen sich viel einfacher, als im Lie'schen Falle möglich ist, die $\alpha$, $\delta$ bestimmen, mittels Elimination aller übrigen unbekannten Functionen bis auf eine. Dann bestehen nicht homogene, lineare Gleichungen der Form

$$\Delta_0(\alpha_0) = 0, \dots, \Delta_n(\alpha_n) = 0,\ \Delta(\delta) = 0.$$

Diese Gleichungen müssen sämmtlich von derselben Classe, im Riemann'schen Sinne, sein. Aber sie müssen noch eine andere Bedingung befriedigen, damit sie als Definitionsgleichungen gelten können.

Mit je zwei particulären Lösungssystemen

$$\alpha_0 = a_{10}, \ldots, \alpha_n = a_{1n}, \delta = d_1,$$
$$\alpha_0 = a_{20}, \ldots, \alpha_n = a_{2n}, \delta = d_2$$

muss auch noch ein drittes particuläres Lösungssystem vorhanden sein:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 &= a_{20}\left(\frac{da_{10}}{dx} + a_{11}\right) - a_{10}\left(\frac{da_{20}}{dx} + a_{21}\right) \\
\alpha_1 &= a_{20}\left(\frac{da_{11}}{dx} + a_{12}\right) - a_{10}\left(\frac{da_{21}}{dx} + a_{22}\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{n-1} &= a_{20}\left(\frac{da_{1,n-1}}{dx} + a_{1n}\right) - a_{10}\left(\frac{da_{2,n-1}}{dx} + a_{2n}\right) \\
\alpha_n &= a_{20}\frac{da_{1n}}{dx} - a_{10}\frac{da_{2n}}{dx} \\
d &= a_{20}d_1 - a_{10}d_2.
\end{aligned}\right\} \quad 35)$$

Fasst man diese Gleichungen als Transformation der Functionen $a_{10}, \ldots, a_{1n}, d_1$ in Functionen $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \delta$ auf, so sehen wir, dass das Gleichungssystem 33) durch eine Gruppe von Differentialtransformationen in sich selbst übergeht, nämlich durch alle Transformationen, welche entstehen, wenn man in 35) statt $a_{20}, \ldots, a_{2n}, d_2$ alle particulären Lösungen einsetzt. Von diesen Transformationen werden nur $r$ linear unabhängig sein.

Die Bedingungen, welche angegeben wurden, sind auch hinreichend, damit 34) oder sein Resultantensystem ein System von Definitionsgleichungen für ein Lie'sches System sei.

$A(u)$ kann ebenso wie das $X(f)$ von Lie von der $k^{\text{ten}}$ Ordnung heißen, wenn die sämmtlichen Coefficienten entwickelt nach Potenzen von $(x - x_0)$, wo $x_0$ eine Stelle der Variabeln $x$ ist, an der sich die Coefficienten von 34) regulär verhalten, mit keiner niederen als der $k^{\text{ten}}$ Potenz, mindestens einer mit der $k^{\text{ten}}$ Potenz anfängt. Sind $A_1(u)$, $A_2(u)$ von der $k_1^{\text{ten}}$, $k_2^{\text{ten}}$ Ordnung, so ist $(A_1, A_2)_x$ von der $(k_1 + k_2 - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, also bilden die sämmtlichen $A(u)$ des Lie'schen Systemes, welche

nicht von niederer als $k^{\text{ter}}$ Ordnung sind, ein Lie'sches Untersystem. Es gibt auch hier nur eine beschränkte Anzahl von $A(u)$ der $k^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Eigenschaft haben, dass sich aus ihnen kein $A(u)$ der $(k+1)^{\text{ten}}$ Ordnung zusammensetzen lässt.

5. Obzwar hier das Substrat der Gruppen fehlt, kann man das Theorem von Sophus Lie, l. c., S. 215, hieher übertragen und, es in eine Definition verwandelnd, sagen: Ein Lie'sches System heißt transitiv, wenn sich unter den Gleichungen $A_1, \ldots, A_r$ gerade $n+2$ voneinander unabhängige befinden, im entgegengesetzten Falle heißt es intransitiv. Es ist dann möglich, für irgend $n+1$ Integrale eine Gleichung des Systemes zu finden, der sie genügen.[1] Imprimitiv kann man nach Analogie zur Gruppentheorie ein Lie'sches System dann heißen, wenn es ein $q$-gliederiges vollständiges System 3) gibt, mit welchem es vertauschbar ist, oder besser, welches für das Lie'sche System invariant ist im Sinne von Art. XII. Auf die Imprimitivität komme ich noch in Punkt 6. zu sprechen.

6. Die adjungierte Gruppe. Wenn auch das System 3) keine Gruppe zu vertreten scheint, so ordnet sich ihm doch eine Gruppe zu. Wendet man nämlich auf alle Gleichungen

$$f_1 A_1 + \ldots + f_r A_r = 0$$

des Lie'schen Systemes eine und dieselbe Gleichung

$$g_1 A_1 + \ldots + g_r A_r = 0$$

mittels $(A, B)_x$ an, so entsteht nach Art. II die Gleichung

$$\Sigma (A_i, A_h)_x (f_i g_h - f_h g_i)$$

und hierin gelten 31).

So entsteht eine $r$-gliederige lineare Gruppe, nämlich, wenn

$$(\Sigma f_i A_i, \Sigma g_i A_i)_x = \Sigma c_{fgi} A_i$$

ist

---

[1] Dies wäre eine Art Analogie zur Transitivität der Gruppe, die sonst hier sehr schwer wieder zu erkennen ist.

$$\left.\begin{array}{l} c_{fg1} = \left(\sum\limits_m \alpha_{1m1} g_m - \sum\limits_m \alpha_{m11} g_m\right) f_1 + \ldots + \\ \qquad\qquad + \left(\sum\limits_m \alpha_{rm1} g_m - \sum\limits_m \alpha_{mr1} g_m\right) f_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{fgr} = \left(\sum\limits_m \alpha_{1mr} g_m - \sum\limits_m \alpha_{m1r} g_m\right) f_1 + \ldots + \\ \qquad\qquad + \left(\sum\limits_m \alpha_{rmr} g_m - \sum\limits_m \alpha_{mrr} g_m\right) f_r, \end{array}\right\} \quad 36)$$

welche die zum Lie'schen Systeme adjungierte Gruppe heißt.

Das Lie'sche System und die adjungierte Gruppe sind isomorph, aber holoedrisch nur dann, wenn keine ausgezeichnete Gleichung $A(u) = 0$ im Lie'schen Systeme vorhanden ist; sind deren $q$ unabhängige vorhanden, also $\infty^{q-1}$, so hat die Meriedriedifferenz der Isomorphie den Wert $q$.[1]

Jedes Untersystem kann dadurch charakterisiert werden, dass man Relationen unter $f_1, \ldots, f_r$ angibt. Ist das Untersystem ein Lie'sches, so müssen diese Relationen erfüllt bleiben, wenn die $f$ durch die $c$ aus 38) ersetzt werden. Also:

Sollen die Relationen

$$\Omega_1(f_1, \ldots f_r) = 0, \ldots, \Omega_p(f_1, \ldots f_r) = 0$$

unter den Factoren $f$ von $f_1 A_1 + \ldots + f_r A_r = 0$[2] ein Lie'sches Untersystem herausheben, so muss die Gesammtheit dieser Relationen durch die linearen Substitutionen 36) in sich selbst übergehen.

Wenn die adjungierte Gruppe an sich schon eine Schaar von einzeln invarianten Functionen unter den $f_1, \ldots, f_r$ besitzt

---

[1] Benützt man die nützliche geometrische Repräsentation auf den $f$-Raum, die Sophus Lie in seinem Falle gegeben hat, auch hier, so sieht man, dass im Falle $q$ ausgezeichnete $A(u)$ vorhanden sind, sämmtliche Substitutionen der adjungierten Gruppe $\infty^{q-1}$ Doppelpunkte, die einen $R_q$ erfüllen, gemeinsam. Dann ist nach einem allgemeinen Theoreme noch ein invarianter $R_{r-q-1}$ vorhanden und die Gruppe besteht in einer Vertauschung der $R_q$ durch den $R_{q-1}$ untereinander gemäß der unter den Punkten dieses $R_{r-q-1}$ entstehenden Gruppe.

[2] S. Lie nennt die $f$ in seinem Falle mit Recht die Coordinaten.

(was man ihre identischen Covarianten zu nennen pflegt), so ist das Lie'sche System intransitiv.

Es ist imprimitiv, wenn es zwar keine invariante monogrediente, wohl aber eine Schaar invarianter bigredienter Formen $\Omega(f_1^{(1)},\dots f_r^{(1)}; f_1^{(2)},\dots f_r^{(2)})$ gibt, die durch die Substitutionen 36) cogredient in sich selbst übergeführt wird, oder mehrere solche Formen.

Hiebei entsteht die Frage, wie weit die Particularisierung für ein Lie'sches System reicht, wenn es weder eine mono-, noch eine bigrediente invariante Form gibt, wohl aber eine tri- oder mehrgrediente

$$\Omega(f_1^{(1)},\dots,f_r^{(1)};\dots;f_1^{(l)},\dots,f_r^{(l)}) = 0 \qquad 37)$$

und jene andere, wo nicht einzelne bi-, tri-,..., $l$-grediente Formen für sich invariant sind, sondern nur die Schaar derselben durch die ganze Gruppe 36) in sich übergeführt wird, also der Modul

$$[\Omega_1(f^{(1)};\dots;f^{(l)});\dots;\Omega_s(f^{(1)};\dots f^{(l)})],$$

wo $f$ für $f_1,\dots f_r$ geschrieben ist.[1]

Ist das erste derivierte System von dem Lie'schen Systeme verschieden, so müssen die Substitutionen 36) verschwindende Determinanten haben. Dann gibt es eine bestimmte Relation unter den $f$, welche durch eine aus 36) leicht ableitbare Gruppe in sich transformiert wird.

Nimmt man irgend eine Schaar von $A(u)$ in dem Lie'schen Systeme, so können alle $X(u)$ derselben bestimmt werden, welche die Schaar in sich überführen. Ihre Gesammtheit bildet kein Lie'sches System. Aber ihr entspricht in der adjungierten Gruppe eine Untergruppe und so entstehen alle Untergruppen derselben. Die linearen invarianten Räume stellen auch hier wie bei Lie die invarianten Untersysteme des Lie'schen Systemes dar.

---

[1] Killing und S. Lie benützen öfters mehrgrediente Formen, ohne sie jedoch in Beziehung zu einem der Imprimitivität ähnlichen Begriffe zu bringen.

7. Ein Interpretationsversuch. An Stelle von Sophus Lie's Darstellung der Gruppentheorie wäre eine andere Anordnung möglich, in der man die Theorie der vollständigen Systeme ganz an den Anfang stellt, dann als einen wichtigen Spezialfall derselben jene vornimmt, wo die $(A, B)$ sich durch die $A, B, \ldots$ linear-constant combinieren lassen, deren Theorie ohne alle Rücksicht auf Transformationen erledigt, also die Capitel XIII, XV, XXI u. a. von Lie's Buche (I. Abschnitt) und dann erst nachträglich als Interpretation dieser Classe vollständiger Systeme die Transformationsgruppen aus ihnen genetisch entwickelt. Vielleicht wäre dies sogar eine für Vortragscurse geeignetere Darstellung.

Um auch im vorliegenden Falle einen Versuch zu machen, zu den Lie'schen Systemen eine Interpretation hinzuzusuchen, kann man die $A(u)$ als Differentialoperationen auffassen. Wendet man alle $A(u)$ eines Lie'schen Systemes auf irgend eine Function $u$ an, so erhält man ein unendliches Functionengebiet, das jedoch durch $r$ Functionen $A_1(u) = u_1, \ldots, A_r(u) = u_r$ linear-constant darstellbar ist. Das Functionengebiet ist also das gesammte Integralgebiet einer homogenen linearen Differentialgleichung $V(u) = 0$. Diese Gleichung muss die Eigenschaft haben, dass man aus zweien ihrer Integrale $u_1, u_2$ stets ein drittes herstellen kann $a_{20}\frac{du_1}{dx} - a_{10}\frac{du_2}{dx}$, wo jedoch $a_{10}, a_{20}$ von den $u_1, u_2$ abhängen. Hätte man das Lie'sche System mit $a_{i0} = 1$ construiert, so hätte man zu je zwei Integralen das dritte $\frac{d(u_1 - u_2)}{dx}$.

Für intransitive Lie'sche Systeme kann man auch sagen, dass die Gleichung $G(u) = 0$, welche das invariante Integralgebiet, d. h. die gemeinsamen Integrale von $A_1(u) = 0, \ldots, A_r(u) = 0$ liefert, durch die Differentialtransformationen

$$A_1(u) + u = 0, \ldots, A_r(u) + u = 0$$

in sich übergeführt wird.

Ob man an die Lie'schen Systeme auch Gruppen von Differentialtransformationen direct knüpfen könne, ist mir nicht ersichtlich. Solches ist aber bei einer von der gegenwärtigen

ganz verschiedenen Theorie vollständiger Systeme, die nämlich innerhalb eines gewissen Körpers sich befinden, möglich.

XVI. Das Analogon zur Pfaff'schen Gleichung. Die Bedingung unter den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n, d$ des Differentialausdruckes $n^{\text{ter}}$ Ordnung $A(u) = 0$, damit derselbe durch eine Function $u$ als Integral befriedigt werde, ist

$$a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u - d = 0. \qquad 39)$$

Ist aber eine lineare Relation unter den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n, d$ gegeben mit den Coefficienten $C_0, C_1, \ldots, C_n, C$, welche Functionen von $x$ sind,

$$\Delta \equiv C_0 a_0 + C_1 a_1 + \ldots + C_n a_n - Cd = 0, \qquad 40)$$

so ist sie dann eine Relation der Art. 39), wenn

$$C_1 - \frac{dC_0}{dx} = 0, \; C_2 - \frac{dC_1}{dx} = 0, \ldots, \; C_n - \frac{dC_{n-1}}{dx} = 0. \qquad 41)$$

In diesem Falle kann man 40) einen »vollständigen Differentialausdruck« nennen. Im allgemeinen aber soll 40) eine $a$-Gleichung heißen.

Ich sehe aber in der Gleichung das Analogon zur Pfaff'schen Gleichung und stelle die $a_0, \ldots a_n, d$ in Parallele mit den Differentialen $dx_0, dx_1, \ldots, dx_{r+1}$, rein formal und so, dass in keiner Weise daran zu denken ist, dass etwa zu $a_0, \ldots, a_n, d$ Größen gehören, wie die $x_1, \ldots, x_{r+1}$ zu den $dx_0, \ldots, dx_{r+1}$. Wenn die Coefficienten in

$$C_0 dx_0 + \ldots + C_{r+1} dx_{r+1} = 0$$

die vollständigen Differentialquotienten einer Function

$$f(x_0, \ldots, x_{r+1})$$

sind, heißt sie eine vollständig integrierbare Pfaff'sche Gleichung.

Dem analog kann man 40), wenn die Bedingungen 41) befriedigt sind, eine vollständig integrable $a$-Gleichung heißen. Ist sie es nicht, so kann man fragen, ob sie durch einen Factor $f$ dazu gemacht werden könne. Dieser wäre das Analogon zum

Euler'schen Integrabilitätsfactor. Für $a_0 C_0 + a_1 C_1 - d = 0$ hat man für $f$ die Gleichung

$$\frac{d(fC_1)}{dx} - fC_0 = 0. \tag{42}$$

Ist also $f$ durch Integration von

$$C_1 \cdot \frac{df}{dx} + f\left(C_0 - \frac{dC_1}{dx}\right) = 0$$

bestimmt, so ist

$$a_0(fC_0) + a_1 . fC_1 = a_0 u_1' + a_1 u.$$

Die $a$-Gleichung

$$C_0 a_0 + C_1 a_1 + C_2 a_2 - d = 0$$

gestattet nur dann einen Euler'schen Factor, wenn

$$fC_0 = \frac{d(fC_1)}{dx} = \frac{d^2(fC_2)}{dx},$$

also wenn die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} & C_2 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2 \frac{dC_2}{dx} \frac{df}{dx} - f\left(C_0 - \frac{d^2 C}{dx^2}\right) = 0, \\ & C_1 \frac{df}{dx} + f\left(C_0 - \frac{dC_1}{dx}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

ein gemeinsames Integral haben, worüber die Resultante entscheidet. Ist dies der Fall und $f$ bestimmt, so ist

$$a_0(fC_0) + a_1(fC_1) + a_2(fC_2) - d \doteq a_0 u^{(2)} + a_1 u' + a_2 u - d.$$

Die Untersuchung der Integrabilitätsbedingung des eingliederigen Moduls $f . \Delta$ (siehe Art. XVIII) stellt sich dann analog den entsprechenden Untersuchungen Collet's in Ann. de l'Ecole Norm., 1870,[1] für die Pfaff'sche Gleichung und resumiert sich hier in der Frage, ob das aus Gleichungen

$$D^{(n)}(f) = 0, \; D^{(n-1)}(f) = 0, \ldots, D^{(1)}(f) = 0,$$

[1] Collet: »Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du premier ordre, renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes«. Ann. scient. de l'Ecole Normale, 1870, p. 59—88.

wo $D^{(i)}$ überhaupt ein homogener linearer Differentialausdruck $i^{\text{ter}}$ Ordnung ist, ergänzte vollständige System (gemäß Art. V) eine Gliederzahl $< n$ habe oder nicht.

XVI. Systeme von $a$-Gleichungen. Diese stehen den Systemen Pfaff'scher Gleichungen gegenüber. Alle Gleichungen, welche aus

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 \equiv C_{10}a_0 + \ldots + C_{1n}a_n - C_1 d = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_s \equiv C_{s0}a_0 + \ldots + C_{sn}a_n - C_s d = 0 \end{array}\right\} \quad 44)$$

durch lineare Combination mittels Factoren, welche Functionen von $x$ sein können, entstehen, nennen wir ein System oder einen Modul von $a$-Gleichungen und, wenn die 44) unabhängig sind, $s$ seine Gliederzahl, die $s$ Gleichungen eine Basis.

Hier entsteht die Frage nach der Anzahl linear unabhängiger vollständig integrierbarer $a$-Gleichungen des Systemes. Ist diese Anzahl $s$, so heißt es ein vollständig integrierbares System oder vollständig integrierbarer Modul. Dann besitzt dieser eine Basis

$$\left.\begin{array}{l} u_1^{(n)}a_0 + u_1^{(n-1)}a_1 + \ldots + u_1 a_n - d = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_s^{(n)}a_0 + u_s^{(n-1)}a_1 + \ldots + u_s a_n - d = 0. \end{array}\right\} \quad 45)$$

Für jeden anderen Modul entstehen zwei fundamentale Probleme:

1. Einen im Modul enthaltenen vollständig integrablen Modul von möglichst großer Gliederzahl zu finden, also die Frage, wie viele linear unabhängige integrierbare $a$-Gleichungen sich aus den Gleichungen 44) im Maximum combinieren lassen; sind sie etwa $A(u_i) = 0$, so nennt man $A(u_i)$ ein Integral des Systemes, in anderer Auffassung führt auch $u_i$ diesen Namen.

2. Einen den Modul enthaltenden vollständig integrablen Modul von möglichst kleiner Gliederzahl zu finden, also die Frage, aus wie vielen linear unabhängigen integrierbaren $a$-Gleichungen sich die Gleichungen 44) im Minimum combinieren lassen oder anders ausgesprochen (Frobenius, Cr. J., 82. Bd.), durch wie viele $a$-Gleichungen im Minimum das

System 44) zu einem vollständig integrierbaren Systeme ergänzt werden könne. Diese letztere Anzahl kann der Defect der Vollständigkeit für 44) genannt werden.

XVII. Adjungierte Moduln. Die Systeme 3) und 44) stehen einander dual gegenüber, wie die Clebsch'schen und Pfaff'schen Systeme. Statt eine eigene Darstellung dieser Abhängigkeit zu geben, die doch von dem Bekannten wenig verschieden sein könnte, glaube ich, ist es das beste, die mustergiltige Darstellung des Herrn Frobenius in §. 13 seiner Abhandlung des 82. Bandes vom Cr. J. hieher wörtlich zu übertragen, nur mit jenen Änderungen, welche durch die Verschiedenheit des Gegenstandes geboten sind. So wird die vollständige Analogie in die Augen springen.

»Je nachdem sich der Ausdruck

$$A(u) = a_0 u^{(n)} + \ldots + a_n u - d = 0$$

linear aus den Ausdrücken 44) zusammensetzen lässt oder nicht, verschwinden in dem Elementensysteme

$$\left.\begin{array}{llll} C_{10}, \ldots, & C_{1n}, & C_1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ C_{s0}, \ldots, & C_{sn}, & C_s \\ u^{(n)}, \ldots, & u, & 1 \end{array}\right\} \quad 46)$$

alle oder nicht alle Determinanten $(s+1)^{\text{ten}}$ Grades. Damit das erste stattfinde, ist nothwendig, dass alle Werte $v_0, \ldots v_n, v$, welche den Gleichungen

$$C_{i0} v_0 + \ldots + C_{in} v_n - C_i v = 0, \quad (i = 1, \ldots s)$$

genügen, auch die Gleichung

$$u^{(n)} v_0 + \ldots + u v_n - v = 0$$

befriedigen. Sind also $A_{\nu 0}, \ldots, A_{\nu n}, A_\nu, \; (\nu = 1, \ldots, n+2-s)$ verschiedene Lösungen von 44), so sind

$$A_{\nu 0} u^{(n)} + \ldots + A_{\nu n} u - A_\nu = 0 \qquad 47)$$

ebensoviele unabhängige homogene lineare Differentialausdrücke, denen jede Function $u$ genügt, welche $A(u) = 0$ macht,

also alle Integrale von 44). Daher soll 47) das zum $a$-Gleichungssystem 44) adjungierte System von Differentialgleichungen (der Form 3) genannt werden. Ist 44) vollständig integrierbar, so ist die Anzahl $s$ der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen 47) gerade die Differenz $n+2-(n-s+2)$, also sind die 47) ein vollständiges System.«

»Sei jetzt umgekehrt ein System von $n+2-s$ Gleichungen wie 3) gegeben. Gibt es ein gemeinsames Integral $u_1$, so haben die Gleichungen

$$A_{\nu 0}v_0+\ldots+A_{\nu n}v_n-A_\nu v=0 \quad \nu=1,\ldots,n+2-s \qquad 48)$$

die Lösung $v_0=u_1^{(n)},\ldots,v_n=u_1,\ v=1$. Sind $C_{\mu 0},\ldots,C_{\mu n}$, $C(\mu=1,\ldots s) s$ unabhängige Lösungen von 48), so lässt sich aus ihnen jede, also auch die soeben geschriebene linear zusammensetzen, folglich lässt sich der Ausdruck

$$u_1^{(n)}a_0+\ldots+u_n a_n-d$$

aus den Ausdrücken 44) linear zusammensetzen und daher ist nach der obigen Definition $A(u_1)=0$ ein Integral des Moduls 44). Da dieser gebildet wird, indem jede Lösung der Gleichungen 48) in $a_0v_0+\ldots+a_nv_n-d=0$ eingesetzt wird, so können sie auch erhalten werden, indem die Determinanten $(n-s+3)^{\text{ten}}$ Grades des Elementensystemes

$$\left.\begin{matrix} A_{10}, & \ldots, A_{1n}, & A_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-s+2,0}, & \ldots, A_{n-s+2,n}, & A_{n-s+2} \\ a_0, & \ldots, a_n, & d \end{matrix}\right\} \qquad 49)$$

gleich 0 gesetzt werden. Die aus 46) und 49) entstehenden Gleichungssysteme sollen zugeordnet oder adjungiert heißen. Die Anzahl der gemeinsamen Lösungen der ersten ist gleich der Anzahl der wie oben in Art. XVI definierten „Integrale“ der zweiten«.

Beide Systeme sind also gleichzeitig vollständig oder unvollständig, wenn wir bei 44) vollständig statt vollständig integrierbar sagen.

XVIII. Die Integrabilitätsbedingungen nach Jacobi in Frobenius'scher Darstellung. Wir gehen von den beiden adjungierten Systemen 44) und 47) aus. Da 47) vollständig sein soll, muss auch unser Symbol $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)_x$ ihm angehören, wenn $\mathrm{A}_i = 0$ seine Gleichungen bezeichnen,

$$(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)_x = \left(A_{20}\frac{dA_{10}}{dx} - A_{10}\frac{dA_{20}}{dx} + A_{20}A_{11} - A_{10}A_{21}\right)u^{(n)} + \dots$$
$$+\left(A_{20}\frac{dA_{1n}}{dx} - A_{10}\frac{dA_{2n}}{dx}\right)u + A_{10}\frac{dA_2}{dx} - A_{20}\frac{dA_1}{dx} = 0, \qquad 50)$$

so müssen alle Wertesysteme, die das Gleichungssystem

$$A_{\nu 0}v_0 + \dots + A_{\nu n}v_n - A_\nu v = 0 \qquad (\nu = 1, \dots, n-2+s)$$

befriedigen, auch diese Gleichung, wo $u^{(n)}, \dots, u$, 1 durch $v_0, \dots, v_n$, $v$ ersetzt sind, befriedigen, also, da zu jenen Wertesystemen auch die $C$-Reihen aus 44) gehören, müssen auch diese ihr genügen. Aber aus

$$A_{10}C_0 + \dots + A_{1n}C_n - A_1 C = 0$$
$$A_{20}C_0 + \dots + A_{2n}C_n - A_2 C = 0$$

folgen durch Differentiation

$$A_{10}\frac{dC_0}{dx} + \dots + A_{1n}\frac{dC_n}{dx} - A_1\frac{dC}{dx} + C_0\frac{dA_{10}}{dx} + \dots +$$
$$+ C_n\frac{dA_{1n}}{dx} - C\frac{dA_1}{dx} = 0,$$

$$A_{20}\frac{dC_0}{dx} + \dots + A_{2n}\frac{dC_n}{dx} - A_2\frac{dC}{dx} + C_0\frac{dA_{20}}{dx} + \dots +$$
$$+ C_n\frac{dA_{2n}}{dx} - C\frac{dA_2}{dx} = 0$$

und werden die hieraus resultierenden Werte in 50), wo die $u^{(n)}, \dots u$, 1 durch $C_0, C_1, \dots, C_n, C$ ersetzt sind, eingetragen, so entsteht

$$-A_{20}\left(A_{10}\frac{dC_0}{dx}+A_{11}\frac{dC_1}{dx}+\ldots+A_{1n}\frac{dC_n}{dx}-A_1\frac{dC}{dx}\right)$$

$$+A_{10}\left(A_{20}\frac{dC_0}{dx}+A_{21}\frac{dC_1}{dx}+\ldots+A_{2n}\frac{dC_n}{dx}-A_2\frac{dC}{dx}\right)$$

$$+(A_{20}A_{11}-A_{10}A_{21})C_0+(A_{20}A_{12}-A_{10}A_{22})C_1+\ldots+$$

$$+(A_{20}A_{1n}-A_{10}A_{2n})C_{n-1}=$$

$$=\left(C_0-\frac{dC_1}{dx}\right)(A_{20}A_{11}-A_{10}A_{21})+$$

$$+\left(C_1-\frac{dC_2}{dx}\right)(A_{20}A_{12}-A_{10}A_{22})+\ldots+$$

$$+\left(C_{n-1}-\frac{dC_n}{dx}\right)(A_{20}A_{1n}-A_{10}A_{2n})-\frac{dC}{dx}(A_{20}A_1-A_{10}A_2)=0.$$

Daher entsteht folgender Ausdruck für die Integrabilitätsbedingungen des $a$-Gleichungen-Systemes 44):

Man bilde das adjungierte System von Differentialausdrücken 47); dann muss die Gleichung

$$\Gamma=\sum_{i=0,\ldots,n-1}\left(C_{\alpha,i}-\frac{dC_{\alpha,i+1}}{dx}\right)(A_{\mu 0}A_{\nu,i+1}-A_{\mu,i+1}A_{\nu 0})$$

$$-\frac{dC_\alpha}{dx}(A_{\mu 0}A_\nu-A_{\nu 0}A_\mu)=0 \qquad 51)$$

bestehen, wenn für $C_{\alpha,0},\ldots, C_{\alpha,n}$, $C_\alpha$ irgend eine der $s$ Reihen aus 44) und für $A_{\mu,0}, A_{\mu,1},\ldots, A_{\mu,n}, A_\mu$; $A_{\nu,0}$, $A_{\nu,1},\ldots, A_{\nu,n}, A_\nu$ irgend zwei Coefficientenreihen aus 47) gesetzt werden.

Diese bilineare Form $\Gamma$ ist das Analogon zur bilinearen Covariante, die $A$ vertreten die Differentiale. Aber die Form 51) hat den Rang 2 in allen Fällen.

Stellen wir 51) für die allgemeine Gleichung von 44) auf, so entsteht zunächst

$$\Gamma(f\Delta)=\sum_i\left[f\left(C_i-\frac{dC_{i+1}}{dx}\right)-C_{i+1}\frac{df}{dx}\right](A_{\mu 0}A_{\nu,i+1}-A_{\nu 0}A_{\mu,i+1})$$

und weiterhin

$$\Gamma(\Sigma_h f_h\Delta_h)=f_1\Gamma(\Delta_1)+\ldots+f_s\Gamma(\Delta_s),\quad \mathrm{mod}\ [\Delta_1,\ldots,\Delta_s].$$

$\Gamma$ ist alternierend und es läge nahe, sich die Frage zu stellen, ob nicht gewisse analoge Probleme für die symmetrische Form existieren, welche entsteht, wenn $A_{\mu,0}A_{\nu,i+1}+A_{\nu 0}A_{\mu,i+1}$ geschrieben wird.[1]

XX. Das Integraläquivalent einer $a$-Gleichung. Jede Pfaff'sche Gleichung lässt sich als die Summe von $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ vollständig integrabeln Gleichungen darstellen, wo $n$ die Anzahl ihrer Differentiale und [ ] das bekannte arithmetische Zeichen ist.

Hier verhält es sich ganz anders. Soll

$$C_0 a_0 + \ldots + C_n a_n - Cd = 0$$

als Summe von $s$ integrabeln $a$-Gleichungen erscheinen, so muss mit $f_1, \ldots, f_s$ als Multiplicatoren

$$\left.\begin{array}{l} f_1 u_1 + \ldots + f_s u_s = C_n \\ f_1' u_1' + \ldots + f_s u_s' = C_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1 u_1^{(n)} + \ldots + f_s u_s^{(n)} = C_0 \\ f_1 + \ldots + f_s = C \end{array}\right\} \quad 53)$$

werden. Die Elimination der $f$ gibt $n-s$ Differentialgleichungen zur Bestimmung von $u_1, \ldots, u_s$. Diese scheint also nur möglich zu sein für $n-s \lesseqgtr s$ oder $s+1$, je nachdem $n$ gerade oder ungerade — wie beim Pfaff'schen Probleme.

Aber in diesen Gleichungen kommen die $u, u', \ldots, u^{(n)}$ in keinen anderen Verbindungen, als in den Determinanten des Art. XIV vor. Solcher gibt es $s(n-s)$ in den $n-s$ Gleichungen. Diese $s(n-s)$ lassen sich jedoch sämmtlich durch nur $s$ — die $s$ ersten — und ihre $n-s$ successiven Differentialquotienten

[1] Der Pfaff'schen Normalform entspricht als bilineare Covariante eine alternierende Form, deren Coefficienten $\pm 1$ sind. Man wird daher auch hier dazu geleitet, jene Form 51), wo $C_i - \frac{dC_{i+1}}{dx} = 1$ sind für alle $i$, genauer zu untersuchen. Eine solche $a$-Gleichung hat die Form $A(u) + a_0 + \ldots + a_n = 0$, also bis auf vollständig integrable Ausdrücke ist sie $a_0 + \ldots + a_n = 0$. Es ist jedoch nicht zu erkennen, ob etwas zur Normalform Analoges vermöge Art. XX bestehe.

nach $x$ ausdrücken. So bestehen $n-s$ lineare Differentialgleichungen mit $s$ unbekannten Functionen (Determinanten).

Die Gleichung, welche die $u_1, \ldots, u_s$ nebst $e^x$ liefert, ist

$$\Sigma \pm u \,.\, u_1' \ldots u_s^{(s)} \,.\, e^x.$$

Bestimmen wir zu diesen $s+1$ Functionen die Adjungierten $z$ (Frobenius, Cr. J., Bd. LXXVII), so zeigt die Gegenüberstellung von

$$\left|\begin{matrix} u_1, & \ldots, & u_s, & e^x \\ u_1', & \ldots, & u_s', & e^x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{(s)}, & \ldots, & u_s^{(s)}, & e^x \end{matrix}\right| \qquad \left|\begin{matrix} z_1, & \ldots, & z_s, & z_{s+1} \\ z_1', & \ldots, & z_s', & z_{s+1}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{(s)}, & \ldots, & z_s^{(s)}, & z_{s+1}^{(s)} \end{matrix}\right| \tag{54}$$

dass die Determinanten, zu deren Bestimmung die $n-s$ Differentialgleichungen überhaupt dienlich sind, proportional sind den $z_1, z_1', \ldots, z_1^{(s)}$. Gehen wir also von der adjungierten Gleichung aus, so haben wir von dieser nur erst ein Integral und außerdem wegen $e^x$ einen Multiplicator, also für ihre Coefficienten nur eine lineare Gleichung und eine lineare Differentialgleichung. Wir können also $s-1$ Functionen $z$ noch willkürlich wählen, ohne dass die am weitesten links in der ersten Matrix stehenden $s$ Determinanten geändert werden. Wir haben daher auch für die Gleichung, welche die $u$ liefert, nur zwei Bedingungen und außerdem noch die wegen $\Sigma f_i = C$ entstehende. Wir können also in dieser Gleichung alle Coefficienten bis auf 4 als Null nehmen und erhalten

$$a_0 u^{(2)} + a_1 u' + a_2 u - d = 0,$$

sodass dann resultieren würde, dass jede $a$-Gleichung durch drei vollständige Differentialausdrücke zusammengesetzt werden kann.

Dieses Resultat wäre nun in voller Übereinstimmung mit den Integrabilitätsbedingungen aus Art. XVIII. Da die Form 51) vom Range 2 ist, so können wir thatsächlich unter den Gleichungen 47), deren Anzahl nun $n+1$ ist, $(n-1)$-tupel finden, welche paarweise die Gleichung 51) befriedigen. Diesen $(n-1)$-tupeln entsprechen im adjungierten Systeme 44) Tripel, aus denen die $a$-Gleichung sich zusammensetzen lässt.

XXI. Lineare $a$- und $C$-Substitutionen. Differentialsubstitutionen. Zur vollständigen Analogie mit dem Pfaff'schen Probleme haben wir noch die linearen Transformationen derselben zu übertragen. Man pflegt die Pfaff'sche Form durch lineare Differentialsubstitutionen zu transformieren. Diesen würden hier lineare $a$-Substitutionen entsprechen. Es ist also die Wirkung von Substitutionen

$$a_i = t_{i0}a_0^{(1)} + \ldots + t_{in}a_n^{(1)} - t_i d^{(1)} \quad (i = 1, \ldots, r) \qquad 55)$$

zu untersuchen, durch welche aus einer $a$-Gleichung

$$C_0 a_0 + \ldots + C_n a_n - Cd = 0$$

die andere

$$C_0^{(1)} a_0^{(1)} + \ldots + C_n^{(1)} a_n^{(1)} - C^{(1)} d^{(1)} = 0$$

wird. Ebenso wie bei den Pfaff'schen Gleichungen die integrabeln Differentialsubstitutionen dadurch definiert waren, dass sie jede vollständig integrable Pfaff'sche Gleichung wieder in eine solche verwandelten, fragen wir hier nach jenen $a$-Substitutionen, welche jede integrable $a$-Gleichung wieder in eine integrable $a$-Gleichung verwandeln.

Ist

$$\tau_{i0}, \ldots \tau_{in}, \tau_i, \ldots \quad (i = 1, \ldots r) \qquad 56)$$

die zu 55) contragrediente Substitution, so werden mittels 56) die $C_0, \ldots, C_n, C$ transformiert und es muss also jedes System $C_0, \ldots C_n, C$, das den Integrabilitätsbedingungen genügt, in ein ebensolches verwandelt werden, es muss

$$\tau_{i0} u^{(n)} + \ldots + \tau_{in} u - \tau_i = v^{(s)}$$

sein für jede Function $u$. Diese Zeilen müssen also durch successive Differentiation aus der ersten entstehen, und da $u^{(n+1)}, \ldots$ nicht wegfallen können, schließt man, dass

$$v = \tau_{00} u - \tau_0$$

sein müsse, während der Rest von 56) daraus hervorgeht.

Wir haben also die Laguerre'sche Substitution, indem wir noch den Fall $v(x) = u(\xi)$ und $v'(x) = u'(\xi) \cdot \frac{d\xi}{dx}$, woraus

$v'', \ldots v^{(n)}$ durch weitere Differentiationen entstehen, hinzunehmen müssen. Die $a$-Substitutionen, welche aus den Laguerre'schen Substitutionen entstehen, sind mehrfach bereits (implicite) verwendet, so in Sturm's »Cours d'Analyse« und aufgeschrieben bei Appell: »Sur les invariants de quelques équatiens différentielles«, Liouville's Journal, 1889.

Die integrabeln $C$- oder $a$-Substitutionen transformieren jedes vollständige System von $C$- oder $a$-Gleichungen wieder in ein solches. Die $a$-Substitutionen transformieren also auch $G(u) = 0$, welcher die gemeinsamen Integrale $u_1, \ldots, u_{n-r+2}$ genügen, in sich. Die Äquivalenzbedingungen für zwei vollständige Systeme 3) gegenüber integrabeln $a$-Substitutionen kommen also überein mit den Äquivalenzbedingungen zweier linearer Differentialgleichungen durch die Laguerre'schen Substitutionen. Diese Bedingungen sind von Laguerre, Halphen zuerst untersucht und dann von Forsyth[1] systematisch behandelt worden. Neu dürfte es immerhin sein, dass man Differentialinvarianten Forsyth's auch dadurch finden kann, dass man das System

$$G(u) = 0, \; G'(u) = 0, \ldots, \; G^{(i)}(u) = 0$$

mit beliebig hohem Differentiationsindex $i$ bildet und dann die algebraischen Invarianten dieses Systemes von $a$-Gleichungen gegenüber den aus den Laguerreschen Substitutionen folgenden linearen $a$-Substitutionen bildet.[2]

Ordnet man einem Ausdrucke $A(u) = 0$ einen anderen zu, indem man die Coefficienten $a^{(1)}$ dieses als Differentialausdrücke der $a$ in $A(u)$ ansetzt, so kann man dies als eine Differentialsubstitution der $a$ durch die $a^{(1)}$ bezeichnen. Eine solche entsteht z. B. dann, wenn $A(u) = 0$ mittels $y = D(u)$ in $B(y) = 0$ transformiert wird.

XXII. Bilineare $a$- und $C$-Formen. Bilineare Differentialformen. 1. Die linearen $a$-Substitutionen können wir auch so auffassen, dass ein Functionengebiet — das Integral-

[1] Forsyth, Phil. Transactions of the Royal Society, London, Vol. 179.

[2] Cf. auch Hazzidakis, Cr. J. Bd. CIV, »Über invariante Differentialausdrücke«.

gebiet von 55) — auf ein anberes Functionengebiet — das Integralgebiet von 56) — eindeutig bezogen ist. Man kann eine solche Beziehung von Functionengebieten auch durch eine bilineare Differentialform unter den Differentialquotienten zweier Functionen $u$ und $v$ erreichen, also durch

$$\Sigma\, a_{ik} u^{(i)} v^{(k)} + \Sigma\, a_i u^{(i)} + \Sigma\, b_k v^{(k)} + c = 0. \qquad 57)$$

Es entspricht also jeder Function $u$ ein Functionengebiet $v$, bestimmt durch eine lineare Differentialgleichung. Mehreren Functionen $u_1, \ldots, u_r$ entsprechen also $r$ Functionengebiete, bestimmt durch $r$ lineare Differentialgleichungen. Haben dieselben gemeinsame Integrale $v$, so nennen wir diese die den $u_1, \ldots, u_r$ entsprechenden Functionen. Es muss aber solche nicht geben.

Wir können nun dieser Sache eine andere Wendung und größere Einheit geben, indem wir die $u^{(i)}, v^{(i)}$ allgemeiner durch die $C$ und $C^{(1)}$ ersetzen. Wir nennen

$$\Sigma\, a_{ik} C_i C_k^{(1)} + \Sigma\, a_i C_i + \Sigma\, b_i C_i^{(1)} + c = 0 \qquad 58)$$

eine bilineare $C$-Gleichung und wenn die letzten drei Terme fehlen, ist sie homogen. Wir bezeichnen sie durch $\Phi(C, C^{(1)}) = 0$, während die Differentialgleichung durch $\Psi(u, v) = 0$ bezeichnet wird.

Ist eine $a$-Gleichung 44) gegeben, so bilden wir eine dazu bezüglich $\Phi$ reciproke $C$-Gleichung, indem wir die Coefficienten $C$ statt der einen Reihe in $\Phi$ einsetzen. Sind mehrere $a$-Gleichungen gegeben, so bilden wir eben derart die zu ihnen bezüglich $\Phi$ reciproken $C$-Gleichungen und dann ist das ganze System jener reciprok nach $\Phi$ zum ganzen Systeme dieser. Zu diesem letzteren Systeme bilden wir nach Art. XVII das adjungierte System von $a$-Gleichungen und nennen auch dieses zu dem gegebenen Systeme von $a$-Gleichungen bezüglich $\Phi$ reciprok.

3. Zur Gleichung $\Phi = 0$ ist eine Form $X(a, a^{(1)}) = 0$ adjungiert, die eine bilineare $a$-Gleichung heißen möge. In Bezug auf $X$ können wir in eben derselben Weise zu einem Systeme von $C$-Gleichungen ein reciprokes System von $C$-Gleichungen bilden. Wird zu einem $a$-Gleichungssysteme

bezüglich $\Phi$ und zum adjungierten $C$-Gleichungssysteme bezüglich $X$ je das reciproke gesucht, so sind die beiden so erhaltenen $a$- und $C$-Systeme wieder adjungiert.

Verschwindet die Determinante von $\Phi$ oder $X$ nicht, so werden die Gliederzahlen der beiden reciproken Systeme bezüglich auf $\Phi$ oder $X$ zur Summe den Rang der Determinante haben, der $n$ sei. Auch für die bilinearen Differentialformen ist die Maximalzahl der Functionen $v$, welche $r$ Functionen $u$ entsprechen können, die soeben angegebene.

XXIII. Functionengruppen. 1. Einem vollständigen $C$-Gleichungssysteme oder, was nach Art. XVI dasselbe ist, einem vollständigen Systeme von Gleichungen 3) entspricht als reciprokes System nach $X(a, a^{(1)}) = 0$ nicht immer ein vollständiges System $C$-Gleichungen als reciprokes. Jene Paare vollständiger Systeme, welche einander reciprok sind bezüglich $X$, geben zu einer Theorie Anlass, deren Anfänge hier nur angedeutet werden können.[1]

In diesem Falle nämlich haben die beiden $r$- und $(n-r)$-gliederigen Systeme ihre Maximalzahl gemeinsamer Integrale. Da ich die Formen $\Phi$, $X$ nicht explicite angeschrieben habe, so will ich generell diese Maximalzahlen mit $s$ und $s_1$ bezeichnen. Seien $u_1, \ldots u_s$ und $v_1, \ldots v_s$ die gemeinsamen Integrale dieser beiden vollständigen Systeme, dann heißen diese Functionen zwei bezüglich $X = 0$ oder auch, wenn wir die $C$ der adjungierten Form $\Phi$ durch die $u$ ersetzen, zwei bezüglich $\Psi(u, u^{(1)}) = 0$ reciproke Functionengruppen.

Setzt man also irgend eine der Functionen $u$ und eine der Functionen $v$ für die zwei unbekannten Functionen in $\Psi$ ein, so wird $\Psi$ annulliert, also die $u$ sind den $v$ entsprechend im Sinne von Art. XXI, wenn die sie vertretenden Differentialgleichungssysteme reciprok sind bezüglich $X$.

Ist ein $a$- oder $C$-Gleichungssystem sich selbst reciprok, so soll es involutorisch heißen. Ist ein involutorisches $C$-Gleichungssystem vollständig, so definiert es eine sich selbst reciproke Functionengruppe, die auch involutorisch heißen kann.

[1] Sie liefert eine merkwürdige Analogie zur Theorie der Lie'schen Functionengruppen.

Zwei Functionen $u, v$ sollen conjugiert heißen, wenn sie $\Psi$ erfüllen. Die Begriffe des Conjugiertseins verschiedener Stufen können von der Algebra her[1] auf die $a$- und $C$-Gleichungssysteme übertragen werden, aber auch auf die Paare von Functionengruppen, insoferne in irgend zwei Functionengruppen ein oder mehrere Paare conjugierter Functionen vorhanden sein können. In der Algebra heißen zwei voll conjugierte Räume reciprok (oder polar), hier wollen wir Functionengruppen als reciprok nur dann bezeichnen, wenn beide die maximale Gliederzahl haben.

2. Die Fragen über die maximale Gliederzahl involutorischer Systeme (ohne Rücksicht auf Vollständigkeit) erfordern Betrachtungen, die von Differentialrechnung nichts an sich haben und aus der Theorie der algebraischen bilinearen Formen zu entnehmen sind. Sind etwa die drei bilinearen Leitformen homogen und von der Differentiationsordnung $n$, so steht die Frage nach den in einer Correlation des $R_n$ sich selbst conjugierten $R_i$ maximaler Dimension $i$. Dass in einer $M_{n-1}^2$ des $R_n$ die maximalen linearen Räume die Dimension $\left[\frac{n}{2}\right]-1$, die maximalen vollständigen Räume in einem Strahlencomplexe des $R_n$ die Dimension $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ haben, ist bekannt,[2] in der nicht singulären Correlation stimmt die Dimension mit der ersteren Zahl überein, wegen der $M_{n-1}^2$, welche Ort der Incidenzpunkte ist.

Die Gliederzahl der involutorischen $a$- oder $C$-Systeme und Functionengruppen kann jedoch größer werden, wenn die Determinante der bilinearen Leitform ($\Phi$, $\Psi$ oder $X$) verschwindet. Hieher gehören die Untersuchungen über die Dimensionen der $R_i$, die in Kegeln des $R_n$ enthalten sind und über die vollständigen $R_i$ in einem singulären Strahlencomplexe des $R_n$.

---

[1] D'Ovidio: »Le proprietà metriche fondamentali negli spazi a quante si vegliano dimensioni«. Acc. dei Lincei 1877.

[2] Clifford, Phil. Trans. of the Roy. Academy, London. Vol. 159, und Kantor, Cr. J., Bd. CXVIII.

3. Sind mehrere linear-constant unabhängige Functionen $u_1, \ldots, u_s$ gegeben, so kann nach jenen Differentialformen $\Psi$ gefragt werden, in Bezug auf welche sie involutorisch sind. Insonderheit können entweder nur die symmetrischen oder nur die alternierenden Leitformen gesucht werden, in Bezug auf welche eine oder mehrere involutorische Functionengruppen gegeben sind. Allgemein kann man die Differentialgleichung $\Psi = 0$ bestimmen durch $(n+1)^2-1$ conjugierte Functionenpaare, wenn sie allgemein ist; durch $(n+1)(n+4):2$, wenn sie symmetrisch; durch $(n+3)n:2$, wenn sie alternierend ist.

4. Für $\Psi(u, v) = 0$ kann der Fall eintreten, dass die sämmtlichen Gleichungen

$$A_k(u) = \Sigma\, a_{ik} u^{(i)} + b_k = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots n$$
$$A(u) = \Sigma\, a_i u^{(i)} + c \quad = 0$$

gemeinsame Integrale besitzen. Hiezu ist zuvörderst nöthig, dass die Gleichungen linear abhängig sind, falls die Differentiationsordnungen für $u$ und $v$ bis zum gleichen Werte gehen.[1] In diesem Falle kann man die Ordnung der Form $\Psi$ durch Riemann'sche Transformation erniedrigen. Ist nämlich $G(u) = 0$ die Gleichung, welcher die $s$ gemeinsamen Integrale der $A_k(u)$, $A(u)$ genügen, so schreiben wir einfach die $A_k(u)$, $A(u)$ in der Form $D_k(G)$, $D(G)$ und es besteht die bilineare Leitform

$$\Sigma\, u^{(i)} D_i(G) + D(G) = 0$$

oder

$$\Sigma\, u^{(i)} D_i(v) + D(v) = 0,$$

welche nun in $v$ eine um $s$ niedrigere Ordnung hat.

XXIV. Canonische Formen. 1. In der Algebra der bilinearen Formen hat man bekanntlich zwei Mittel, um die canonischen Formen herzustellen, die lineare Transformation oder die Benützung der Pol-$s$-Ecke und dort aber sind diese beiden Methoden so eng verbunden, dass die eine auf die andere zurückgeführt werden kann. Hier ist es etwas anders.

---

[1] Die genauere Discussion muss übergangen werden.

Allerdings können bilineare $C$- oder $a$-Formen durch die linearen Transformationen der $C$ oder $a$ auf dieselben canonischen Formen gebracht werden, wie in der Algebra. Sehen wir aber die $C$ als integrabel an, so dürfen wir nur integrable Substitutionen, also die aus den Laguerre'schen Substitutionen $v = \varphi\ u + \psi$, $x = \chi(\xi)$ hervorgehende $a$- und $C$-Substitutionen verwenden und wir sind somit vor das hochwichtige Problem gestellt:

Die Äquivalenzbedingungen für zwei bilineare Differentialformen gegenüber Laguerre'schen Transformationen zu finden. Hiefür liegen Vorarbeiten in einer die symmetrischen bilinearen Differentialformen betreffenden, sehr ideenreichen Arbeit Appell's vor.[1]

Integrable $a$-, $C$-Substitutionen allein sind imstande, eine bilineare $a$- oder $C$-Form so umzuwandeln, dass die Paare reciproker vollständiger Systeme von $C$- oder $a$-Gleichungen wieder in solche übergehen, insbesondere die involutorischen Systeme wieder in solche.

2. Die zweite Methode würde sich auf die reciproken Functionengruppen stützen. Es sollen hier einige Bemerkungen Platz finden. Lässt $\Psi(u, v)$ die Darstellung zu

$$\Psi(u, v) = A(u) B(v) + C(u) D(v), \qquad 60)$$

so bilden die Integrale von $A(u) = 0$, $D(v) = 0$ und $C(u) = 0$, $B(v) = 0$ je zwei bezüglich $\Psi = 0$ reciproke Functionengruppen und wenn $A = D$, $B = C$, hat man eine involutorische Gruppe. Allgemeiner, wenn

$$\Psi(u, v) = A_r(u) B_1(v) + \ldots + A_l(u) B_l(v) \qquad 61)$$

und $A_1(u), \ldots, A_l(u)$, sowie $B_1(v), \ldots, B_l(v)$ je ein vollständiges System bilden, so sind die gemeinsamen Integrale dieser beiden Systeme zwei bezüglich $\Psi(u, v) = 0$ reciproke Functionengruppen. Sind keine gemeinsamen Integrale vorhanden und haben aber die Systeme vollständige Structur (Art. X), so bilden

[1] Appell P., Journal de Liouville 1889: Sur les invariants de quelques équations différentielles.

die Functionen $u_1, \ldots u_{n+2}$ und $v_1, \ldots v_{n+2}$ (im Falle $n$ die Differentialordnung ist) zwei conjugierte $(n+2)$-tupel, nämlich so, dass $u_i$, $v_k$ conjugiert sind, wenn $i \neq k$. Ist $\Psi'$ symmetrisch, so gibt die Darstellung

$$\Psi'(u, v) = A_1(u) A_1(v) + \ldots + A_l(u) A_l(v) \qquad 62)$$

unter denselben Voraussetzungen eine sich selbst conjugierte Functionengruppe (Analogon zum Pol-$(r+1)$-Eck einer $M_{r-1}^2$ im $R_r$).[1]

All dies lässt sich umkehren: Sind die reciproken oder conjugierten Functionengruppen vorhanden, so hat man auch jene Darstellung von $\Psi'(u, v)$.

Ist $\Psi'(u, v)$ alternierend, so hat man stets unendlich viele Darstellungen der Form

$$\Psi'(u, v) = A_1(u) B_1(v) - A_1(v) B_1(u) + \ldots + \\ + A_l(u) B_l(v) - A_l(v) B_l(u), \qquad 63)$$

wo das Minimum von $l$ vom Range des $\Psi'$ abhängt. Die gemeinsamen Integrale von $A_1(u), \ldots, A_l(u)$ und $B_1(u), \ldots, B_l(u)$ bilden je eine involutorische Functionengruppe.

Voraussichtlich dürfte besondere Wichtigkeit der Fall erlangen, wo unter den in 63) betheiligten Gleichungen

$$A_1(u) = 0, \ldots, A_l(u) = 0; \; B_1(u) = 0 \ldots, B_l(u) = 0 \qquad 64)$$

alle Paare nur mit Ausnahme der Paare $A_i(u) = 0$, $B_i(u) = 0$ vollständige Systeme bilden, wegen der Analogie mit der »canonischen Form« der Lie'schen Functionengruppen.

In 62) und 63) kann die Zahl auch größer als es gerade nothwendig für die Darstellungsfähigkeit von $\Psi'(u, v)$ ist, genommen werden. Dann erscheint das Analogon zu den höheren Reye'schen Pol-Ecken.[2]

XXV. Lagrange's begleitende bilineare Differentialform. Die Functionengruppen und die canonischen

[1] Einen derartigen Fall hat Herr Darboux in den »Leçons sur les surfaces«, II., cap. IV, angetroffen und behandelt.

[2] Im Gebiete der partiellen Gleichungen hat Sophus Lie bereits eine auf diese Art zu interpretierende Idee vorgelegt in Math. Ann., Bd. XI.

Darstellungen sind in einem ganz speciellen Falle bereits vorgekommen, nämlich in der Theorie der adjungierten Differentialausdrücke und der zweiten Variation. Dort handelt es sich aber um eine solche bilineare Differentialform, welche nicht selbst, sondern deren Differentialquotient eine bestimmte Darstellung gestattet. Über solche Formen mögen einige Bemerkungen folgen.

1. Ist $A'(u)$ die Adjungierte von $A(u)$, so sind die beiden Integralgebiete von $A(u) = 0$, $A'(u) = 0$ conjugierte (nicht reciproke) Functionengruppen bezüglich des begleitenden bilinearen Differentialausdruckes, Definition in Art. XXIII (confer besonders Darboux: »Leçons sur les surfaces«, II).

Ist eine sich selbst adjungierte Gleichung $P(u)$ in der Jacobi'schen Form $P(u) = AaA'(u)$ dargestellt (Frobenius, Cr. J., Bd. LXXXV), so sind die Integrale von $A(u)$ sowohl, als jene von $A'(u)$ je eine involutorische Functionengruppe bezüglich der Begleitform $P(u, v)$. Durch die Integrale von $A(u) = 0$ allein ist $P(u, v)$ schon bestimmt, trotzdem wir doch eigentlich nur zwei Involutionsgruppen kennen, will sagen, zwei vollständige $R_q$ eines linearen Strahlencomplexes im Raume $R_{2q+1}$ (an irgend einer Stelle $x = x_0$).

Ist $A(u, v)$ eine begleitende Differentialform, so gehört sie als solche zu allen Formen $A(u)+au$ und nur zu diesen (wo $a$ eine willkürliche Function von $x$). Ist speciell $P(u, v)$ alternierend, so entsteht für jede Stelle $x_0$ von $x$ ein linearer Strahlencomplex $P(u, v)$ des $R_{2q+1}$ und ein linearer Raum $P(u)$ und also wegen des Gliedes $au$ ein Büschel solcher $R_{2q}$. Alle vollständigen $R_q$ des Complexes, die in einem dieser $R_{2q}$ enthalten sind, dienen für Jacobi'sche Darstellungen.[1]

2. Man kann ein dem Pfaff'schen Probleme in merkwürdiger Weise ähnliches Problem für die begleitenden (auch die nicht alternierenden) bilinearen Differentialformen stellen: Aus wie viel begleitenden Formen lässt sich jede bilineare Differentialform $\Psi(u, v)$ des Art. XXIII linear in der Form $m_1 A_1(u, v) + \ldots + m_s A_s(u, v)$ combinieren? Durch wie viele Formen muss man ein lineares System

[1] Man vergl. besonders die Anmerkung von Frobenius in Cr. J., Bd. LXXXV, p. 195, unter dem Texte.

$$f_1\Psi_1(u,v)+\ldots+f_l\Psi_l(u,v)$$

aus $l$ bilinearen Differentialformen ergänzen, damit das neue System die mögliche Maximalzahl von begleitenden Formen enthalte, also etwa eine unabhängige Basis aus lauter solchen Formen besitzen könne.

Gegenüber passenden Laguerre'schen Transformationen sind $A(u)$ und $A(u,v)$ covariant verbunden, ebenso wie gegenüber integrabeln Differentialtransformationen $\Sigma a_i dx_i$ und die bilineare Covariante covariant verbunden sind. In Verfolg der oben in Art. XXIII angedeuteten Äquivalenztheorie wird also auch das Problem zu lösen sein:[1]

Die Invariantenrelationen anzugeben, die erfüllt sein müssen, damit eine bilineare Differentialform durch Laguerre'sche Transformation und einen Multiplicator in eine begleitende bilineare Form übergehen könne.

3. Sind ferner $u_1,\ldots,u_l$; $v_1,\ldots,v_l$ zwei Functionengruppen conjugiert bezüglich $\Psi(u,v)$, die die Gleichungen $\Psi(u_i,v_k)=0$, $i\neq k$, und $\Psi(u_i,v_i)=c_i$ geben, so gibt es eine Gleichung $D(u)=0$, der die $c_1,\ldots,c_l$ als Integrale genügen. Dann ist

$$D[\Psi(u_i,v_i)]=0 \qquad 65)$$

eine bilineare Differentialform, bezüglich welcher die $u$, $v$ sogar reciproke Functionengruppen sind. Hat $l$ seinen Maximalwert $n+2$, so wird 65) von der Ordnung $2n+2$ und hat reciproke $(n+2)$-gliederige Functionengruppen.

Sind die $c_i$ ganze rationale Functionen von $x$ eines Grades $i<l$, so wird statt $D$ schon $\frac{d^{i+1}\Psi}{dx^{i+1}}$ benützt werden können und diese bilineare Differentialform wird höchstens

[1] Mittels der Appell'schen Methoden (l. c.) kann man jedenfalls die Bedingungen finden, damit eine symmetrische Form $\Psi(u,v)$ in eine begleitende Form (also die zu einem Darboux'schen Differentialausdrucke $f(u)$ der Eigenschaft $f(u)=-f'(u)$ gehört) transformiert werden könne. Eine andere interessante Frage, die ich nicht unerwähnt lassen mag, ist die nach den Bedingungen, damit eine bilineare Differentialform sowohl bezüglich $u$ als $v$ sich selbst adjungiert sei.

den Rang $n+i+3$ haben können ($\Psi$ immer nicht homogen vorausgesetzt).

4. Sind aber die $c_i$ Constanten, so wird 65) einfach $\frac{d\Psi}{dx} = 0$, also eine Form $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(n+2)$-gliederigen Gruppen. Dies ist nach den in Art. XXI angezogenen Resultaten der Algebra nur möglich, wenn die bilineare Form vom Range 2 ist, also ist

$$\frac{d\Psi}{dx} = A(u)B(v) + C(u)D(v). \qquad 66)$$

Ein solcher Fall tritt thatsächlich ein, wenn $\Psi$ die Begleitform eines Ausdruckes $P(u)$ ist. Denn es ist ja definitionsweise (Frobenius, Cr. J., Bd. LXXXV):

$$\frac{dP(u,v)}{dx} = uP(v) - vP'(u). \qquad 66')$$

Die Begleitform eines Ausdruckes $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist eine Form nicht verschwindender Determinante (i. a.), deren Differentialquotient doch nur den Rang 2 hat.[1] Allgemein kann man nun die Bedeutung jener Formen $\Psi(u,v)$ Ranges $n+2$ tragen, deren Differentialquotient den Rang $n+2$ oder $n+1$ oder $n, n-1, \ldots 3, 2$ habe.

Überhaupt knüpft sich an eine bilineare Differentialform $\Psi(u,v)$ eine unendliche Reihe charakteristischer (und beschränkt invarianter) Zahlen, die Rangzahlen derjenigen bilinearen Formen, welche die successiven Differentialquotienten von $\Psi$

$$\Psi, \frac{d\Psi}{dx}, \frac{d^2\Psi}{dx^2}, \ldots, \frac{d^i\Psi(u,v)}{dx^i}, \ldots, \text{ in inf.} \qquad 67)$$

sind.

5. Aus zwei bezüglich $\Psi(u,v)$ einander conjugierten Functionen-$l$-tupeln, für die die $\Psi(u_i, v_i) = c_i$ Constanten, respective aus einem sich selbst conjugierten, können zwei

[1] Es ist fraglich, ob für $\Psi$ die Bedingung, dass ihr Differentialquotient eine bilineare Form vom Range 2 sei, hinreichend sei, damit eine Riemann'sche Transformation von $\Psi$, etwa mittels $y = A(u)$, $z = D(v)$, in eine Begleitform möglich sei, also 66) in 66') übergehen könne.

reciproke, respective eine involutorische Functionengruppe in Bezug auf $\Psi$ hergeleitet werden durch ein Verfahren, das zuerst von Hesse und Clebsch[1] für alternierende Formen verwendet wurde. Ist allgemein $\Psi(u_i, v_k) = a_{ik}$ constant, so setze man

$$\bar{u} = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_l u_l, \quad \bar{v} = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_l u_l, \tag{68}$$

wo die $\alpha, \beta$ wieder Constanten sind, und suche für das Substitutionsresultat von $\bar{u}, \bar{v}$ in $\Psi$, nämlich für die bilineare Form mit constanten Coefficienten

$$\Psi(\alpha, \beta) = \Sigma\, a_{ik} \alpha_i \beta_k = 0 \tag{69}$$

die Paare reciproker Wertsystemgruppen oder die sich selbst conjugierten Gruppen von Wertsystemen $\alpha, \beta$. Jede solche Lösung von 69) gibt eine Lösung für $\Psi(u, v) = 0$. Involutorische Functionengruppen, die auf diese Art gewonnen werden, sind dann die Grundlage für die Umformung der zweiten Variation.

Sind, um einen Schritt weiter zu gehen, die $a_{ik} = \Psi(u_i, v_k)$ lineare Functionen von $x$, also $a_{ik} = b_{ik} x + c_{ik}$, sodass die $u_1, \ldots, u_l; v_1, \ldots v_l$ reciproke Functionengruppen bezüglich der Bilinearform $\frac{d^2 \Psi(u_i, v_k)}{dx^2}$ sind, so setzen wir wieder 68) ein und erhalten

$$\overline{\Psi}(\alpha, \beta) = (\Sigma\, b_{ik} \alpha_i \beta_k) x + (\Sigma\, c_{ik} \alpha_i \beta_k).$$

Da die Functionengruppen, die wir suchen, unabhängig von dem Variieren des $x$ bestehen muss, so haben wir also für die beiden bilinearen Formen mit constanten Coefficienten

$$\Sigma\, b_{ik} \alpha_i \beta_k = 0, \quad \Sigma\, c_{ik} \alpha_i \beta_k = 0$$

das im allgemeinen einzige gemeinsame Paar conjugierter, respective im symmetrischen oder alternierenden Falle das eine gemeinsame sich selbst conjugierte $l$-tupel von Wertesystemen $\alpha, \beta$ zu suchen.

---

[1] Cr. J., Bd. LIV und LVI. Der alternierende Fall ist von Herrn Frobenius, Cr. J., Bd. LXXXV sehr systematisch und verbessert dargestellt worden. Den symmetrischen Fall erledigt Herr Darboux in »Leçons sur les surfaces«, II.

XXVI. Bilineare $(a, C)$-Formen. Collineare Functionengruppen. Durch eine bilineare Form

$$\Pi(a, C) = \Sigma p_{ik} a_i C_k + \Sigma p_i a_i + \Sigma p_k^{(1)} C_k + p = 0$$

(wo die Summenzeichen einfacherweise über $a_0, \ldots a_n$, $a$ und $C_0, C_1, \ldots C_n$, $C$ gedacht sind) mit von $x$ abhängigen Coefficienten $p_{ik}$, $p_i$, $p_k^{(1)}$, $p$ kann man ebenfalls eine $C$-Gleichung (Art. XVIII) durch Einsetzung der Coefficienten derselben statt der $a_0, \ldots a_n$, $a$ in eine andere $C$-Gleichung verwandeln. Wir erhalten also bezüglich $\Pi = 0$ Paare entsprechender $C$-Gleichungen, und indem wir eine Basis in eine Basis umsetzen, Paare entsprechender $C$-Gleichungensysteme. Desgleichen können wir bezüglich $\Pi = 0$ eine $a$-Gleichung durch Einsetzung der Systeme solcher in Systeme verwandeln. Wir sprechen von collinearen Systemen von $a$- oder von $C$-Gleichungen oder, indem wir uns die $C$ den Bedingungen 41) genügend denken, auch von collinearen Systemen 3), die gleiche Gliederzahl haben, wenn $\Pi$ nicht singulär ist.

Auch hier wiederum wird durch allgemeine $\Pi$ nicht jedes vollständige System 3) in ein dazu collineares System verwandelt, das wieder vollständig ist. Bei solchen Paaren aber, die beide vollständig sind, können wir auch die beiden Gruppen gemeinsamer Integrale, oder anders zu sprechen, die beiden gemeinsamen Integralgebiete als collinear durch $\Pi$ ansehen und sprechen demnach von collinearen Functionengruppen

$$u_1, \ldots u_{n+2-r} \text{ und } v_1, \ldots, v_{n+2-r}.$$

Im allgemeinen gibt es $n+2$ lineare Differentialgleichungen, die vermöge $\Pi = 0$ sich selbst collinear sind. Sollen unter diesen sich verschiedene $i$-tupel finden, die ein vollständiges System bilden oder soll in extremo überhaupt das System dieser $n+2$ Gleichungen ein solches mit vollständiger Structur sein (Art. X), so erfordert dies Relationen unter den Laguerre'schen Invarianten der bilinearen Gleichung $\Pi = 0$. Hiebei ist die Invarianz gemeint gegenüber integrablen $a$- und $C$-Substitutionen, also jenen, die unter der Wirkung einer Laguerre'schen Substitution $v = \varphi u + \psi$, $x = \chi(\xi)$ auf die $a$ und die ihnen contragredienten Größen entstehen.

Integrable bilineare Formen $\Pi(a, C)$ könnte man jene nennen, die jedes vollständige System 3) wieder in ein vollständiges System umwandeln. Man sieht, dass diese Eigenschaft keine anderen als folgende Formen haben:

Ist

$$a_i^{(1)} = t_{i0}a_0 + \ldots + t_{in}a_n + t_i a$$

nebst

$$a^{(1)} = {}_1t_0 a_0 + \ldots + {}_1t_n a_n + {}_1t a$$

eine integrable (Laguerre'sche) $a$-Substitution, so ist

$$\sum_{i=0}^{n} (t_{i0}a_0 + \ldots + t_{in}a_n + t_i a)\, C_i + ({}_1t_0 a_0 + \ldots + {}_1t_n a_n + {}_1ta)\, C$$

eine Form $\Pi$ der verlangten Art. Gewisse Appell'sche Invariantenrelationen werden sie bezüglich Äquivalenz charakterisieren. Irgend zwei derartige Formen sind stets äquivalent gegen integrable Substitutionen.

XXVII. Nochmals über Functionengruppen. Zu der gegebenen Definition von reciproken und collinearen Functionengruppen gibt es ein Analogon bei den Lie'schen Functionengruppen, worauf ich hier nicht eingehen kann. Man kann aber hier auch Functionengruppen gemäß der ursprünglichen Lie'schen Art definieren. Man setze nämlich eine Differentialoperation fest, welche sich auf 1, 2 oder mehr Functionen $u$ beziehen kann, also $D(u)$. $D(u, u_2)$ oder $D(u_1, \ldots, u_l)$, gehe dann von $1, 2, \ldots$ Functionen $u$ aus, die linear-constant unabhängig sind, bilde aus ihnen vermöge der $D$ neue Functionen, füge diese hinzu, wende auf alle so entstandenen Functionen, die noch linear-constant unabhängig sind, die $D$ an und so fort, bis man nicht mehr Functionen erhält, welche von den bereits angesammelten linear-constant unabhängig sind. Sie alle genügen dann einer linearen Differentialgleichung, welche etwa von unendlich hoher Ordnung sein kann [1] und man merkt. dass diese Theorie von Functionengruppen in jener der Gruppen Appell'scher Transformationen, die eine lineare Differentialgleichung in sich überführen, enthalten sein wird. Auf

[1] Man sieht hier, wie es nothwendig ist, auch für die unendlich hohe Ordnung einer Differentialgleichung die G. Cantor'schen Distinctionen der Unendlichs zu beachten.

Untersuchungen dieser Art bezieht sich eine große Anzahl von Königsberger's Arbeiten in Math. Ann. und in Cr. J. Aber seine mit großem, manchmal staunenswerten Aufwande von Methoden und Kunstgriffen gefundenen Resultate sind durchwegs so sehr speciell, dass sie nicht als Fundamente einer Theorie dienen können.

Nachdem wir jedoch hier in den voraufgehenden Artikeln eine Theorie von Functionengruppen in ganz anderer Weise begründet haben, entsteht die Frage, ob schon vermöge jener Definition jede solche Functionengruppe eine von den Coefficienten von $\Psi$ oder $\Pi$ (eventuell auch $\Phi$, X) abhängige Differentialtransformation in sich gestatte, wie solches bei den Lie'schen Gruppen die bekannte Transformation $u_\gamma = (u_\alpha, u_\beta)$ ist. Die Frage kommt in letzter Linie auf folgende hinaus. Hat man ein vollständiges System von Differentialgleichungen der Form

$$\left.\begin{array}{l} A_0(u_1)v^{(n)}+\ldots+A_n(u_1)v+A(u_1)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0(u_r)v^{(n)}+\ldots+A_n(u_r)v+A(u_r)=0, \end{array}\right\} \quad 72)$$

wo die $A_0,\ldots A_n$, $A$ lineare Differentialausdrücke sind, ist es dann eine nothwendige Folge, dass das gemeinsame Integralgebiet $v_1,\ldots,v_{n+2-r}$ eine Differentialtransformation in sich selbst gestatte? Diese Frage wird ihrerseits vollkommen erschöpft durch das Problem, die linearen Substitutionen (mit dem Parameter $x$ in den Coefficienten) zu bestimmen, welche eine bilineare Form (mit dem Parameter $x$ in den Coefficienten) in sich selbst verwandeln und unter ihnen jene Untergruppen, welche ein bestimmtes lineares System von Gleichungen in sich verwandeln. Für dieses Problem liegt eine große Anzahl algebraischer Vorarbeiten vor, in die dann eventuell nur noch die hier nöthigen Integrabilitätsbedingungen einzutragen sind.

XXVIII. Das System von zwei Differentialgleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer unabhängigen Veränderlichen. Die Resultante. Die Theorie der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, der eine ansehnliche Zahl von Mathematikern des 19. Jahrhunderts ihre Kräfte widmeten, hat hier ihr Gegenbild in den Gleichungen

$$\varphi_1(C_0, C_1,\ldots, C_n, C, x) = 0 \quad 73)$$

oder, wenn wir die $C\ldots$ den Integrabilitätsbedingungen 41) unterwerfen, in

$$\varphi_1(u^{(n)}, u^{(n-1)}, \ldots, u', u, x) = 0, \tag{74}$$

die allgemeinsten Differentialgleichungen mit einer Unabhängigen.

Nehmen wir an, es sei außer der Gleichung 74) noch eine zweite, ebenfalls willkürliche Gleichung $\varphi_2 = 0$ gegeben, und wir hätten die Aufgabe, unter den Integralen von $\varphi_1 = 0$ jene zu finden, welche auch $\varphi_2 = 0$ erfüllen. Während wir aus zwei Gleichungen 73) nur eines der $C$ eliminieren können, können wir mit Hilfe der 41) aus zwei Gleichungen 74) alle $u$ eliminieren. Wir werden im folgenden öfters noch $C_0, C_1, \ldots, C_n$ statt $u^{(n)}, u^{(n-1)}, \ldots, u', u$ schreiben.

Das Verfahren aus Art. III befolgen wir auch hier. Wir eliminieren aus $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ das $u^{(n)}$ und stellen außerdem eine dritte Gleichung $\varphi_3 = 0$ her, der das gemeinsame Integral $u$ ebenfalls genügen muss, indem wir bilden

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_0} u^{(n+1)} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_1} u^{(n)} + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_n} u' + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial C_0} u^{(n+1)} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial C_1} u^{(n)} + \ldots + \frac{\partial\varphi_2}{\partial C_n} u' + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0$$

und hieraus $u^{(n+1)}$ eliminieren durch Bildung von

$$\varphi_3 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial C_0}\,\frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_0}\,\frac{d\varphi_2}{dx} = 0$$

und endlich noch aus $\varphi_1$ und $\varphi_3$ oder, was dasselbe ist, aus $\varphi_2$ und $\varphi_3$ das $u^{(n)}$ eliminieren. So entstehen uns zwei Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{(1)}(u^{(n-1)}, \ldots, u', u, x) = 0 \\ \varphi_2^{(1)}(u^{(n-1)}, \ldots, u', u, x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Auf diese können wir nun genau dasselbe Verfahren anwenden, indem wir $u^{(n-1)}$ eliminieren und nicht nur eine,

sondern zwei Gleichungen $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung herstellen, denen das gemeinsame Integral genügen muss, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{(2)}(u^{(n-2)},\ldots,u',u,x) &= 0,\\ \varphi_2^{(2)}(u^{(n-2)},\ldots,u',u,x) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad 76)$$

Solange diese beiden Gleichungen nicht an einer Stelle, etwa der $i^{\text{ten}}$, bis auf einen von $u$ freien Factor übereinstimmen, solange setzen wir das Verfahren fort, bis wir etwa zu

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{(n-1)}(u',u,x) &= 0\\ \varphi_2^{(n-1)}(u',u,x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 77)$$

gelangen. Eliminieren wir daraus noch $u'$, so entstehen

$$\varphi_1^{(n)}(u,x) = 0, \qquad \varphi_2^{(n)}(u,x) = 0. \quad 78)$$

Jede gleichzeitig den Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ genügende Function $u$ muss auch den 78) genügen und auch umgekehrt, wenn $u$ die Gleichungen $\varphi_1^{(n)} = 0$, $\varphi_2^{(n)} = 0$ erfüllt, so erfüllen $u$, $u'$ die Gleichungen

$$\varphi_1^{(n-1)},\ \varphi_2^{(n-1)},\ \varphi_3^{(n-1)} = \frac{\partial\varphi_1^{(n-1)}}{\partial C_0}\,\frac{d\varphi_2^{(n-1)}}{dx} - \frac{\partial\varphi_2^{(n-1)}}{\partial C_0}\cdot\frac{d\varphi_1^{(n-1)}}{dx}.$$

Die Function $R = 0$, welche in $x$ identisch verschwinden muss, damit es eine 78) gemeinsam befriedigende Function $u$ gebe, heiße die Resultante von $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$.

Kommt an einer Stelle jenes Verfahrens ein Paar Gleichungen zum Vorschein, die einen gemeinsamen effectiven Factor besitzen, so kann man diesen abtrennen und mit den Quotienten das Verfahren fortsetzen, genau wie Kronecker in Cr. J. Bd. XCII es bei der allgemeinen algebraischen Elimination macht.

XXIX. Das Analogon zum Art. III. Als Grundlage des Verfahrens in Art. XXVIII haben wir das Symbol

$$\varphi_3 = \frac{\partial\varphi_2}{\partial C_0}\,\frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_0}\,\frac{d\varphi_2}{dx}$$

erkannt, das wir nun mit $(\varphi_1, \varphi_2)_x$ bezeichnen wollen. Wir beweisen nun, indem wir noch $\overline{(\varphi_1, \varphi_2)}_x = \frac{\partial\varphi_2}{\partial C_0}\varphi_1 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial C_0}\varphi_2$ setzen:

α. Lässt sich $(\varphi_1, \varphi_2)_x$ als eine gleichzeitig mit $\varphi_1, \varphi_2$ verschwindende Function von $\varphi_1, \varphi_2$ darstellen, so haben $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ die sämmtlichen Integrale einer Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gemeinsam.

Setzen wir

$$Y = \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_0} \varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_0} \varphi_2,$$

so entsteht

$$\frac{dY}{dx} = (\varphi_1, \varphi_2)_x + m_2 . \varphi_1 - m_1 . \varphi_2 .$$

Aus

$$Y = \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_0} \varphi_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_0} \varphi_2,$$

$$\frac{dY}{dx} = (\varphi_1, \varphi_2)_x + m_2 . \varphi_1 - m_1 . \varphi_2$$

kann man $\varphi_1, \varphi_2$ als Functionen von $Y$ und $\frac{dY}{dx}$ berechnen, die gleichzeitig mit $Y = 0$ verschwinden.

β. Lassen sich $(\varphi_1, \varphi_2)_x, \ldots, (\varphi_1, \varphi_r)_x$ als gleichzeitig mit $\varphi_1, \ldots \varphi_r$ verschwindende Functionen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ darstellen, so haben $\varphi_1 = 0, \ldots \varphi_r = 0$ die sämmtlichen Integrale einer Differentialgleichung $(n-r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gemeinsam.

Es gibt sicherlich eine Resultante $Y$ von

$$\overline{(\varphi_1, \varphi_2)_x}, \ldots, \overline{(\varphi_1, \varphi_r)_x},$$

welche $u^{(n)}, \ldots, u^{(n-r+2)}$ nicht enthält und sich als Functionen von $\overline{(\varphi_1, \varphi_2)_x}, \ldots, \overline{(\varphi_1, \varphi_r)_x}$, die gleichzeitig mit allen diesen Functionen verschwindet, darstellen lässt, also auch als gleichzeitig mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ verschwindende Function dieser Functionen. Bildet man $\frac{dY}{dx}$, so erscheinen als Factoren der Differentialquotienten von $Y$ nach den $\overline{(\varphi_1, \varphi_i)_x}$ immer Functionen, die gleichzeitig mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ verschwinden. Dann folgt wie in Art. III aus $(Y, \varphi_i)_x$, dass auch $\frac{d\varphi_i}{dx}$ eine solche Function ist und infolge dessen wiederum $\frac{d^2Y}{dx^2}$ wegen $\left(\frac{dY}{dx}, \varphi\right)_x$ u. s. w., sodass wir schließlich

$$\left.\begin{array}{l} Y = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \\ \dfrac{dY}{dx} = F_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^{r-1}Y}{dx^{r-1}} = F_{r-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \end{array}\right\} \quad 80)$$

erhalten, wo die $F_1, \ldots, F_{r-1}$ mit $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_r = 0$ gleichzeitig verschwindende Functionen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sind. Hieraus können $\varphi_1, \ldots \varphi_r$ als Functionen von $Y, \dfrac{dY}{dx}, \ldots \dfrac{d^{r-1}Y}{dx^{r-1}}$ berechnet werden, welche gleichzeitig mit $Y = 0$ verschwinden. Es wird sogar i. a. möglich sein, ein Wertesystem der $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ (als Functionen von $Y, Y', \ldots$) von den übrigen zu separieren.[1]

XXX. Das Analogon zum Poisson'schen Symbol. Neuerdings Functionengruppen. Betrachten wir die aus $\varphi_1, \varphi_2$ gerechnete Function $(\varphi_1, \varphi_2)_x$ näher. Sie lautet, ausgeführt:

$$\begin{aligned}(\varphi_1, \varphi_2)_x = & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial C_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_1} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_1}\right) u^{(n)} + \\ & + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial C_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_2}\right) u^{(n-1)} + \ldots + \\ & + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial C_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_n}\right) u' + \\ & + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial C_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

ist also eine alternierende bilineare Differentialform in den beiden Reihen

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial C_0}, \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial C_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial C_n}, \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial C_0}, \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial C_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial C_n}, \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \end{array}\right\} \quad 81)$$

[1] Herrn Appell's Note in den C. R. 12. Déc. 1888, und seine Abhandlung im Journal de Liouville 1889, behandeln einen ähnlichen Gegenstand.

ebenso wie das Poisson'sche Symbol eine alternierende bilineare Differentialform in den Reihen

$$\begin{array}{c}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_r},\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1},\ldots,\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_r}\\[2ex] \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_r},\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_1},\ldots,\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_r}\end{array}$$

ist. Nur ist nun $(\varphi_1, \varphi_2)_x$ vom Range 2. Wir fassen geradezu $(\varphi_1, \varphi_2)_x$ als das Analogon zum Poisson'schen Symbole auf. Indem wir alle Functionen von

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(u^{(n)},\ldots,u',u,x)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_r(u^{(n)},\ldots,u',u,x)\end{array}\right\} \qquad 82)$$

welche gleichzeitig mit $\varphi_1 = 0,\ldots,\varphi_r = 0$ verschwinden, als das aus 82) gebildete Functionengebiet bezeichnen, nennen wir dieses speciell eine Functionengruppe bezüglich $(\varphi_1, \varphi_2)_x$, wenn gleichzeitig alle Functionen $(\psi, \chi)_x$, wo $\psi, \chi$ Functionen des Gebietes sind, dem Gebiete angehören, und $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ nennen wir eine Basis, wenn alle Functionen des Gebietes, also auch alle $(\psi, \chi)_x$ sich durch $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ ausdrücken lassen.

Hiezu genügt es, dass sich alle $(\varphi_i, \varphi_h)_x$ durch die $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ als mit diesen gleichzeitig verschwindende Functionen ausdrücken lassen.

Denn es ist, wenn $\chi_1(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$, $\chi_2(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ zwei Functionen des Gebietes $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ sind,

$$(\chi_1, \chi_2)_x = \sum_i u^{(i)}\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial C_0}\frac{\partial\chi_2}{\partial C_{n-i+1}} - \frac{\partial\chi_1}{\partial C_{n-i+1}}\frac{\partial\chi_2}{\partial C_0}\right) + \\ + \left(\frac{\partial\chi_1}{\partial C_0}\frac{\partial\chi_2}{\partial x} - \frac{\partial\chi_1}{\partial x}\frac{\partial\chi_2}{\partial C_0}\right) = \\ = \sum_i u^{(i)}\frac{D(\chi_1, \chi_2)}{D(C_0, C_{n-i+1})} + \frac{D(\chi_1, \chi_2)}{D(C_0, x)},$$

und nach einem bekannten einfachen Satze über die Functionaldeterminante

$$(\chi_1, \chi_2)_x = \sum\sum_{\alpha,\beta} u^{(i)} \frac{D(\chi_1, \chi_2)}{D(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)} \cdot \frac{D(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)}{D(C_0, C_{n-i+1})} + \\ + \sum \frac{D(\chi_1, \chi_2)}{D(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)} \cdot \frac{D(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)}{D(C_0, x)} \qquad 83)$$

und es ist also thatsächlich $(\chi_1, \chi_2)_x$ eine mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ gleichzeitig verschwindende Function von $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$.

Fasst man $(\chi_1, \chi_2)_x$ als eine lineare Differentialgleichung in $u$ auf, vermöge der Schreibung

$$(\chi_1, \chi_2)_x = \sum u^{(i)} \frac{D(\chi_1, \chi_2)}{D(C_0, C_{n-i+1})} + \frac{D(\chi_1, \chi_2)}{D(C_0, x)}, \qquad 84)$$

so sehen wir, dass alle Gleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche so entstehen, indem wir für $\chi_1, \chi_2$ irgend zwei Functionen der durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ bestimmten Gruppe wählen, ein vollständiges System im Sinne des Art. III bilden, das $r$-gliederig ist. Hiebei sind allerdings in der Berechnung der $(A, B)_x$ aus Art. II die $C_i$ den Integrabilitätsbedingungen gemäß zu behandeln, aber sie sind hiebei von denjenigen $u^{(i)}$, welche in 84) in Evidenz gesetzt sind, unterschieden zu halten.

Folglich lassen sich alle $(\chi_1, \chi_2)_x$ als Differentialfunctionen einer Function $Y(u^{(n-r+1)}, \ldots, u', u, x)$ darstellen und genauer als lineare homogene Functionen. Da nun die $(\chi_1, \chi_2)_x$ sich durch die $\varphi_1, \ldots \varphi_r$ in besprochener Weise ausdrücken lassen, so entstehen mit Intervention der $u'$ oder $C$ auf den rechten Seiten Gleichungen der Form

$$\left.\begin{array}{l} F_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) = D_1(Y) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_r(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) = D_r(Y) \end{array}\right\} \qquad 85)$$

und hieraus berechnen sich $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ wieder wie in Art. XXIX als Differentialfunctionen von $Y$, welche mit $Y = 0$ verschwinden. Und dies gilt aber auch umgekehrt für jedes $Y = 0$, deren sämmtliche Integrale auch $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_r = 0$ erfüllen. Also:

Die Gleichungen $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_r = 0$ haben stets die sämmtlichen Integrale einer Differentialgleichung $(n-r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gemeinsam, wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ eine

Functionengruppe bezüglich der bilinearen Form $(\chi_1, \chi_2)_x$ bilden, von der sie die Basis sind.

Es scheint aber, dass sich durchaus nicht beweisen lässt, es müsste etwa auch jede Differentialgleichung, die jene Integrale gestattet, ihre linke Seite in der wie vorhin definierten Functionengruppe haben, denn sonst müssten

$$Y, Y', \ldots, Y^{(n-r+1)}$$

darunter enthalten, also $\varphi_i$ durch diese Ausdrücke ohne Interventionen der höheren Differentialquotienten von $u$ darstellbar sein, was nach dem vorhergehenden nicht der Fall ist.

XXXI. Involutionssysteme. Reciproke Functionengruppen. Wie in der Lie'schen Theorie im partiellen, nennen wir zwei Functionen

$$\varphi_1(u^{(n)}, u^{(n-1)}, \ldots, u', u, x)$$

und

$$\varphi_2(u^{(n)}, u^{(n-1)}, \ldots, u', u, x)$$

involutorisch, wenn sie der Bedingung $(\varphi_1, \varphi_2)_x = 0$ identisch genügen. Um die zu $\varphi_1$ involutorischen Functionen zu finden, haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C_0}\frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{\partial\varphi}{\partial C_1}\frac{\partial\varphi}{\partial C_0}u^{(n)} - \frac{\partial\varphi}{\partial C_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial C_0}u^{(n-1)} - \ldots -$$

$$- \frac{\partial\varphi}{\partial C_n}\frac{\partial\varphi_1}{\partial C_0}u' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial C_0} = 0 \qquad 86)$$

mit der unbekannten Function $\varphi$ zu integrieren. $\varphi_1$ ist bereits ein Integral.

In jeder Functionengruppe $r > 2$ wird es im vorliegenden Falle Functionen geben, welche mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ und infolge dessen mit allen Functionen der Gruppe involutorisch sind. Sie können die ausgezeichneten Functionen der Gruppe heißen. Bestimmt man die zu allen Functionen einer Gruppe involutorischen, so erhält man wieder Functionen einer Gruppe. Diese ist die zu jener reciproke Gruppe. Da die Leitform vom Range 2 ist, so ist die reciproke Gruppe stets mindestens $n$-gliederig.

Sind alle $(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = 0$, also auch alle $(\chi_1, \chi_2) = 0$ für die Functionenpaare der Gruppe, so heißt dieselbe ein Involutions-

system. Da die Form den Rang 2 hat, so können sogar $(n+1)$-tupel von Functionen gefunden werden, welche paarweise die Gleichung 86) befriedigen.

Sind zwei partielle Differentialgleichungen wie 86) gegeben, und setzt man

$$A(\varphi) = (\varphi_1, \varphi)_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_0}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{\partial \varphi}{\partial C_0}\frac{d\varphi_1}{dx},$$

$$B(\varphi) = (\varphi_2, \varphi)_x = \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_0}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{\partial \varphi}{\partial C_0}\frac{d\varphi_2}{dx},$$

so entsteht nach leichter Rechnung

$$AB(\varphi) = \frac{\partial}{\partial C_0}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial C_0}\frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_0}\frac{d\varphi_1}{dx}\right)\frac{d\varphi}{dx} - \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial C_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial C_0}\frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_0}\frac{d\varphi_1}{dx}\right) = ((\varphi_1, \varphi_2), \varphi)_x$$

und hiemit ist ein Analogon zu einem bekannten Satze über das Poisson'sche Symbol gefunden. Den drei Hauptsätzen über das Poisson'sche Symbol analog gilt also auch hier:

1. Sind $\varphi_1$, $\varphi_2$ zwei Lösungen von 86), so ist auch $(\varphi_1, \varphi_2)_x$ eine solche.

2. Genügt $u_1$ zwei Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, so genügt es auch der $(\varphi_1, \varphi_2)_x = 0$.

3. Ist das System der partiellen Gleichungen wie 86): $(\varphi_1, \varphi)_x = 0, \ldots, (\varphi_r, \varphi)_x = 0$ ein vollständiges, so ist $\varphi_1, \ldots \varphi_r$ eine Functionengruppe.

XXXII. Übertragung von Lie's Integrationsmethode auf den nichtpartiellen Fall. Nach allem Vorhergehenden ist zu erwarten, dass die bisher kaum angebahnte Lösung des Problemes, die allgemeinste Differentialgleichung

$$\varphi_1(u^{(n)}, u^{(n-1)}, \ldots, u', u, x) = 0$$

zu integrieren, in genauer Analogie mit den von Jacobi Clebsch, Adolph Mayer, S. Lie gegebenen Verfahren entdeckt werden kann, nur muss in allen Dingen das Poisson'sche Symbol durch das Symbol $(\varphi_1, \varphi_2)_x$ ersetzt werden.

Die Integration von $\varphi_1 = 0$ könnte also geleistet werden, wenn wir eine zweite Gleichung $\varphi_2 = 0$ dazu bestimmen

könnten, von der wir gemäß ihrer Herleitung wüssten, dass sie mit jener ein Integral gemeinsam haben muss. Um dies zu leisten, würde es hinreichen, eine Functionengruppe von weniger als $n+2$ Gliedern zu bestimmen, von welcher $\varphi_1$ einen Bestandtheil bilde. Diese Bestimmung lässt sich auf vielfache Art durchführen, aber ebenso wie Lie im partiellen es für das einfachste befunden hat, sich die Aufsuchung einer involutorischen Functionengruppe vorzusetzen, so ist dies auch hier das einfachste.

Wir suchen also eine Lösung der partiellen Differentialgleichung 86) etwa $\varphi_2$. Dann hat $\varphi_2 = 0$ mit $\varphi_1 = 0$ die sämmtlichen Integrale einer Gleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gemeinsam, die durch Elimination von $u^{(n)}$ bestimmt werden kann. Um die Gleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu integrieren, können wir wiederum so verfahren.

Aber wir können statt dessen auch gleich von $\varphi_1$ ab das Verfahren vollständig anlegen. Haben wir $\varphi_2$ bestimmt, sodass $(\varphi_1, \varphi_2)_x = 0$, so bestimmen wir nun eine Lösung der simultanen partiellen Gleichungen

$$(\varphi_1, \varphi)_x = 0, \ (\varphi_2, \varphi)_x = 0.$$

Sei $\varphi_3$ eine solche Lösung. Dann bestimmen wir eine Lösung von

$$(\varphi_1, \varphi)_x = 0, \ (\varphi_2, \varphi)_x = 0, \ (\varphi_3, \varphi)_x = 0.$$

Sei diese $\varphi_4$ und nun fahren wir so fort, bis wir ein maximales Involutionssystem bestimmt haben.

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_{n+1} = 0$$

die $u^{(n)}, \ldots, u'$, so bleibt uns eine Gleichung, welche das Integral $u$ bestimmt. Dieses wird dann keine willkürliche Constante enthalten. Will man aber ein Integral mit einer Constanten, so wird man nur ein Involutionssystem von $n$ Gliedern bestimmen, von dem $\varphi_1$ ein Bestandtheil ist.

Allein man kann zur Gleichung $\varphi_1 = 0$ auch die Gleichungen $\varphi_2 = C_1, \ldots, \varphi_{n+1} = C_n$ hinzunehmen und erhält dann durch Elimination von $u^{(n)}, u^{(n-1)}, \ldots, u'$ aus

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = C_2, \ldots, \varphi_{n+1} = C_n$$

ein Integral mit $n$ willkürlichen Constanten.

Man sieht nun auch, wie übrigens schon aus der Lagrange-Jacobi'schen[1] Umwandlung eines Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen (das eine Gleichung $\varphi_1 = 0$ vertreten kann) in eine partielle Differentialgleichung folgt, dass eine Gleichung $\varphi_1 = 0$ i. a. wirklich eine unendliche Anzahl unabhängiger Transcendenten bestimmt, deren jede ganz wohl $n$ willkürliche Constanten enthalten kann, ohne dass diese Transcendenten aufeinander zurückführbar wären, was von verschiedenen Verfassern hervorgehoben worden ist (Königsberger, Acta Math. III, Bohlmann, Guldberg).[2]

XXXIII. Differentialtransformationen. Die Integration der Gleichungen mit mehreren abhängigen Functionen, welche Hamburger in Cr. J., Bd. LXXXI und XCIII, versucht hat, könnte analog auch hier vorgenommen werden, aber hier vereinfacht sich die Sache bedeutend, weil die Elimination gemäß Art. XXVIII durchgeführt werden kann. Aus

$$\varphi_1(u_1^{(n)}, u_1^{(n-1)}, \ldots, u_1, \ldots; u_r^{(z)}, \ldots, u_r, x) = 0, \ldots;$$
$$\varphi_r(u_1^{(n)}, \ldots, u_1; u_r^{(z)}, \ldots, u_r, x) = 0$$

eliminiert man erst $u_1$ durch zwei Gleichungen, dann $u_2$ aus der erhaltenen und der dritten u. s. w., bis man

$$\Phi(u_r^{(z)}, \ldots, u_r; x) = 0$$

als Endresultante erhält. Für die partiellen Resultanten gelten die für algebraische von Kronecker in Cr. J., Bd. XCII, gemachten Bemerkungen.

So kann man aus den Differentialgleichungen

$$\Omega(u_1; \ldots; u_r; x) = 0$$
$$v_1 = D_1(u_1; \ldots; u_r; x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_r = D_r(u_1; \ldots; u_r; x),$$

[1] Cr. J., Bd. II.

[2] Bei Königsberger finde ich auch in Cr. J., Bd. XCI, p. 265, die folgende Bemerkung. »Es mag noch erwähnt werden, dass der Kernpunkt dieser Überlegungen die Frage nach der Anzahl der einer algebraischen Differentialgleichung zugehörigen selbständigen Transcendenten bildet und dass in die Classe dieser Untersuchungen auch jene merkwürdigen Sätze von Poisson und Jacobi gehören, nach welchen man aus zwei Integralen eines mechanischen Problemes alle (?) finden kann«.

wo in diesen Gleichungen stets $u_i$ für alle vorkommenden Differentialquotienten $u_i, u_i', \ldots, u_i^{(n)}$ gesetzt ist, durch Elimination von $u_1, \ldots u_r$ gemäß Art. XXVIII eine Differentialgleichung

$$\Psi(v_1; \ldots; v_r; x) = 0$$

herstellen, welche man die Transformierte von $\Omega = 0$ mittels der Differentialtransformation $v_1 = D_1, \ldots, v_r = D_r$ nennen kann.

Aber eben diese Transformationsgleichungen

$$v_1 = D_1, \ldots, v_r = D_r$$

gestatten die Elimination von je $r-1$ der $u$ gemäß Art. XXVIII, wodurch man die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{array}{c} F_1(v_1; \ldots; v_r; u_1, x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_r(v_1; \ldots; v_r; u_r; x) = 0 \end{array}\right\} \quad 90)$$

erhält, welche wiederum eine Transformation feststellen, die man nun als die Umkehrung der Transformation 89) bezeichnen kann. Aber dies ist keine explicite Differentialtransformation, da $u_1$ inplicite in Differentialform vorkommt. Übrigens ist die Transformation 90) nur eine specielle Form einer allgemeineren Transformationsart, die durch Gleichungen wie

$$\begin{array}{c} H_1(u_1; \ldots; u_r; v_1; \ldots; v_r; x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_r(u_1; \ldots; u_r; v_1; \ldots; v_r; x) = 0 \end{array}$$

definiert ist, wo die Zeichen $u_i$, $v_i$ nur als Vertreter der sämmtlichen Differentialquotienten von $u$, $v$ bis zu einer gewissen Ordnung hin (eventuell bis zu unendlich hoher Ordnung) gesetzt sind und durch welche man sich die Functionen $u_1 \ldots, u_r$ in die $v_1, \ldots v_r$ umgewandelt denkt.

In dem besonderen Falle, wo eine Auflösung von 90) ohne Integration möglich ist, wo also die Umkehrung die Form hat

$$\left.\begin{array}{c} u_1 = F_1(v_1; \ldots; v_r; x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_r = F_r(v_1; \ldots; v_r; x) \end{array}\right\} \quad 91)$$

und $F_1, \ldots F_r$ Differentialformen sind, hat man in der Umkehrung wieder eine Differentialtransformation und dann kann man in Analogie zu den birationalen Raumtransformationen die Transformation 89), 91) als eine bidifferentiale bezeichnen.[1]

Die beiden Gleichungen $\Omega$, $\Psi$ von oben sind in allen Fällen bidifferential auf einander bezogen, ebenso wie auf algebraischem Gebiete auch durch eine nicht birationale Transformation ein bestimmtes Paar von Gleichungen in birationale (eindeutige) Beziehung gesetzt werden kann.

Man wird einsehen, dass sich durch solche Differentialtransformation und besonders durch bidifferentiale Transformationen in den Differentialgleichungen werden Vereinfachungen bewirken lassen. Die größte Vereinfachung ist die, wenn die transformierte Gleichung $\Psi = 0$ überhaupt keine Differentialquotienten mehr enthält. Denn dann kann man die Integration als geleistet ansehen.

Auch die Fälle, wo die Anzahl der Functionen $\lesseqgtr$ als die Anzahl der transformierten Functionen $v$ ist, sind zu beachten. Insbesondere kann der Fall eintreten, dass die Gleichung $\Omega = 0$ identisch erfüllt wird durch Gleichungen $u_i = F_i(v_1, \ldots, v_p)$, wo $p < r$ und die $F_i$ Differentialfunctionen sind. Man kann dieses unendliche Functionengebiet mit den willkürlichen Functionen $v_1, \ldots, v_p$ als ein in $\Omega = 0$ enthaltenes Integralgebiet bezeichnen, analog den in einer Mannigfaltigkeit $M(x_1, \ldots, x_r) = 0$ enthaltenen durch die Parameterdarstellung

$$x_1 = f_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_p), \ldots, x_r = f_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

ausgedrückten Mannigfaltigkeiten niederer Dimension.

---

[1] Den Begriff der Differentialtransformation hat schon Herr Bohlmann in Cr. J., Bd. CXIII, gelegentlich seiner Untersuchung der Gleichungen mit Fundamentallösungen angetroffen, sich jedoch nur mit der Frage, welcher im Algebraischen die der sogenannten Exceptionalität der Transformation gegenübersteht, beschäftigt. Von bidifferentialen Transformationen, auf deren Idee ich im Herbste 1897 kam, ist bisher nirgends Erwähnung gethan.

# Inhalt.

# Zur Theorie der Scintillation der Fixsterne

von

Dr. **Egon** Ritter v. **Oppolzer,**

*a. o. Professor.*

(Mit 1 Textfigur.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 10. October 1901.)**

Tiefstehende Sterne zeigen bei gewöhnlichem Luftzustande farbiges Funkeln. Montigny[1] war der erste, welcher diese Erscheinung auf die regelmäßige Dispersion der Luft zurückgeführt hat. Um dieser Erklärung die nöthige Beweiskraft zu geben, ist es nöthig, den Strahlengang in der Atmosphäre für die verschiedenen Farben zu studieren. Es ist das von einem Fixsterne auf die Grenze der Atmosphäre fallende, alle Farben enthaltende Lichtbündel ein nahezu paralleles. Die violetten Strahlen, die in der Atmosphäre stärker abgelenkt werden als die rothen, müssen nun offenbar von der Grenze bis zu dem Beobachter auf der Erdoberfläche einen anderen Weg zurücklegen wie die rothen, und zwar offenbar einen stärker gekrümmten, und treffen mit den letzteren im Auge des Beobachters zusammen. Die verschiedenfarbigen Strahlen laufen getrennt durch die Atmosphäre, und da nach den Untersuchungen Herrn Karl Exner's[2] schon Strahlen, die einige Centimeter voneinander getrennt sind, unabhängig scintillieren können, so bedarf es nur des Beweises, dass verschiedenfarbige Strahlen, die sich dann im Auge des Beobachters vereinigen, in der Atmosphäre um mehr als einige Centimeter getrennt werden.

---

[1] Montigny, La cause de la scintillation. Brüssel 1856.

[2] Karl Exner, diese Sitzungsberichte, 1881.

Es liegt nun nahe, die Frage zu stellen: Wie weit stehen zwei Strahlen von bestimmter Farbe an der Grenze der Atmosphäre ab, die von einem Fixsterne kommen und sich im Auge des Beobachters vereinigen? In dieser Weise behandelten das Problem Mossotti,[1] Montigny[2] und Lord Rayleigh.[3] Die beiden letzteren schlagen den rein physikalischen Weg ein, indem sie das Gesetz aus den physikalischen Beobachtungen über die Dispersion der Luft ableiten, während Mossotti auch die spectrale Verbreiterung der Fixsterne in kleinen Höhen zugrunde legt. Da die Formeln Montigny's und Rayleigh's unrichtig sind, so muss auf den Gegenstand nochmals eingegangen werden, umso mehr als schon die Fragestellung über die Separation an der Grenze der Atmosphäre eigentlich für die Scintillation bedeutungslos ist, da doch infolge des dort verschwindenden Brechungsvermögens überhaupt keine anormalen Ablenkungen und hiemit Scintillationen platzgreifen können. Streng genommen muss nach der Größe der Separation in den Schichten gefragt werden, wo Zustandsänderungen noch kräftige Störungen verursachen. Allerdings wird man behaupten können, dass die Separationen an der Grenze gewisse Schätzungen zulassen, da man ja weiß, dass die Hauptkrümmung der Strahlen schon in den tieferen Schichten erfolgt und in höheren Schichten ein mehr oder minder paralleler Gang eintritt. Wir wollen zuerst auf

### 1. die Separation an der Grenze der Atmosphäre

eingehen.

Vom Beobachter in $B$ gehen die zwei Strahlen $Bv$ und $Br$ aus, verlassen schließlich die Grenze der Atmosphäre, die durch eine punktierte Linie angedeutet ist, und werden hier parallel. Für beide Strahlen gilt das Grundgesetz der sphärisch geschichteten Medien:

---

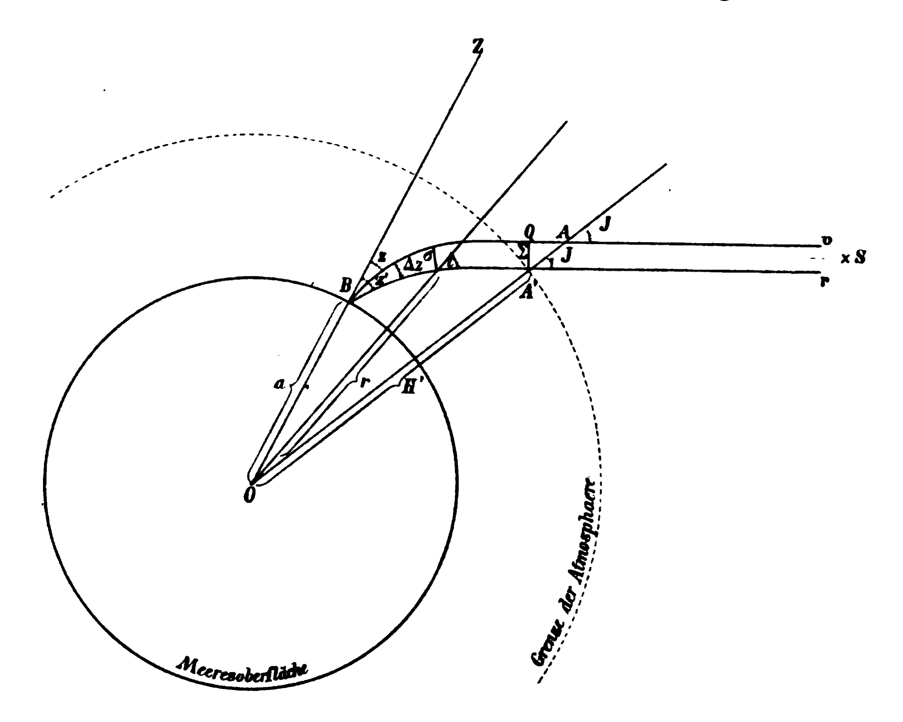
[1] Mossotti, Sur la scintillation des étoiles. Nuov. Cim., 1. Serie, Florenz 1855.

[2] Montigny l. c.

[3] Rayleigh, On the theory of stellar scintillation. Phil. mag., 5. Serie, London 1893.

$$\begin{aligned} \mu r \sin i &= \text{constans} = \mu_0 a \sin z \\ \mu' r' \sin i' &= \text{constans}' = \mu'_0 a \sin z'. \end{aligned} \qquad 1)$$

Es bedeuten die $\mu$ die Brechungsexponenten im Abstande $r$ vom Erdcentrum $O$, $i$ die Winkel zwischen dem Radiusvector $r$ und dem Lichtstrahle, $\mu_0$ die Brechungsexponenten an der Erdoberfläche, $a$ den Erdradius und $z$ die scheinbaren Zenithdistanzen, also die Winkel, welche die Zenithrichtung $BZ$ mit




den Tangenten der Lichtstrahlen im Punkte $B$ bilden. Die gestrichelten Größen beziehen sich auf eine andere Farbe. Wir wollen der Einfachheit des Ausdruckes halber die ungestrichelten Größen auf einen violetten, die gestrichelten auf einen rothen Strahl beziehen.

Im Punkte $A'$ verlässt der rothe Strahl die Atmosphäre; den zu diesem Punkte gehörigen Radiusvector wollen wir mit $H'$ bezeichnen und insoweit verlängern, bis er den violetten Strahl im Punkte $A$ trifft, dessen Radiusvector $H$ sei. In beiden

Punkten $A$ und $A'$ herrscht der Brechungsexponent des Vacuums $\mu = 1$, die Winkel, welche die beiden Strahlen mit dem Radiusvector $OA'$ bilden, sind infolge ihrer Parallelität gleich und heißen $J$. Das Grundgesetz 1), auf die beiden Punkte angewendet, ergibt sofort:

$$\begin{aligned} H \sin J &= \mu_0 a \sin z \\ H' \sin J &= \mu_0' a \sin z'. \end{aligned} \tag{2}$$

Fällen wir von $A'$ auf den violetten Strahl eine Senkrechte $A'Q$, so ist diese gleich der Separation $\Sigma$ an der Grenze der Atmosphäre; aus der Figur folgt leicht:

$$\Sigma = (H-H') \sin J. \tag{3}$$

Und weiter durch Subtraction der beiden Gleichungen 2):

$$\Sigma = \mu_0 a \sin z - \mu_0' a \sin z' = a[\mu_0 \sin z - \mu_0' \sin z'].$$

Der Einfluss der verschiedenen Farben ist infolge der äußerst geringen Dispersion der Luft ein differentieller zu nennen, d. h. wir brauchen uns nur auf die ersten Differenzen zu beschränken und erhalten nach der üblichen Bezeichnungsweise

$$\Sigma = a \sin z \Delta \mu_0 + a \mu_0 \cos z \Delta z, \tag{4}$$

wo

$$\begin{aligned} \Delta \mu_0 &= \mu_0 - \mu_0' \\ \Delta z &= z - z' \end{aligned} \tag{5}$$

ist.

Die Formel 4) würde es bereits gestatten, die Separation zu berechnen. $\Delta \mu_0$ ist uns durch die physikalischen Beobachtungen der Dispersion der Luft gegeben, $\Delta z$ durch die astronomischen Beobachtungen, welche ja durch die Messungen der Zenithdistanzen in verschiedenen Farben, d. h. durch Einstellungen auf verschiedene Farben des sich in großen Zenithdistanzen darbietenden Sternspectrums unmittelbar den Unterschied $\Delta z$ ergeben. Es liegen diesbezügliche Messungen der Herrn Henry[1] vor. Diese Berechnung der Größe $\Sigma$ wäre aber

[1] Henry, Sur une methode de mesure de la dispersion atmosphaerique. C. R., Vol. CXII, p. 377; 1891.

inconsequent, weil ja offenbar das $\Delta z$ eine Function der Dispersion $\Delta\mu_0$ ist. Es wäre dies der Weg, den Mossotti eingeschlagen hat. Wollen wir streng physikalisch vorgehen, so werden wir die $\Delta\mu_0$ als gegeben betrachten und auf diese die ganze Untersuchung gründen.

Es ist, wenn $R_0$ und $R_0'$ die Refractionen für den Beobachtungsort bedeuten, definitionsgemäß:

$$z = z_0 - R_0$$
$$z' = z_0 - R_0',$$

denn die wahre Zenithdistanz $z_0$ ist für beide Strahlen natürlich dieselbe. Also ist:

$$\Delta z = z - z' = -(R_0 - R_0') = -\Delta R_0. \qquad 6)$$

Aus der Refractionstheorie ergibt sich mit ausreichender Genauigkeit:

$$\Delta R_0 = \frac{\Delta\mu_0}{\mu_0 - 1} R_0. \qquad 7)$$

Führt man diese Gleichung 7) unter Berücksichtigung der Gleichung 6) in die Gleichung 4) ein, so ist das gestellte Problem gelöst:

$$\Sigma = a \sin z \Delta\mu_0 \left[1 - \frac{R_0\mu_0}{\mu_0 - 1} \operatorname{cotg} z\right]. \qquad 8)$$

Diese Formel bleibt für alle Zenithdistanzen giltig, da für sehr kleine Zenithdistanzen $R_0 = (\mu_0 - 1)\operatorname{tg} z$ ist, und gibt mit Hilfe der üblichen Refractionstafeln (es genügt die mittlere Refraction zu nehmen) die verlangte Größe $\Sigma$.

Montigny's Formel lautet:

$$\Sigma = a \sin z \Delta\mu_0 \quad \text{(Montigny)}, \qquad 9)$$

ist also gerade im Horizonte richtig, aber schon in kleinen Höhen ganz falsch, da der Klammerausdruck in der Gleichung 8) rasch mit kleiner werdendem $z$ gegen Null convergiert.

Lord Rayleigh's Formel

$$\Sigma = 7990 \frac{\sin z}{\cos^2 z} \Delta\mu_0 \quad \text{(Rayleigh)}, \qquad 10)$$

die nur für $z<80°$ gelten soll, basiert offenbar auf einer Reihenentwickelung; wie man sieht, kann aber die Abhängigkeit von der Zenithdistanz nicht richtig sein, weil man ja bis 80° mit großer Annäherung die Refraction in eine nach ungeraden Potenzen der Tangente fortschreitende Reihe entwickeln kann,

$$R_0 = \alpha_0 \operatorname{tg} z - \alpha_1 \operatorname{tg}^3 z + \ldots \text{ für } z<80°,$$

wo überdies der Coefficient $\alpha_0$ sehr nahe

$$\alpha_0 = \mu_0 - 1$$

genommen werden kann. So wird

$$\frac{R_0}{\mu_0 - 1} \operatorname{cotg} z = 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \operatorname{tg}^2 z \qquad \text{für } z<80°. \tag{11}$$

Nachdem wir auf die Rayleigh'sche Form lossteuern wollen, so haben wir uns bereits Vernachlässigungen erlaubt, die allerdings für die Separation selbst im Horizonte nicht über 2 *cm* betragen; aus diesem Grunde können wir in 8) auch das $\mu_0$ weglassen und erhalten, wenn nicht die größte Genauigkeit (auf Bruchtheile des Centimeters) gewünscht wird (dann müsste auf die strenge Gleichung 8) zurückgegangen werden), durch Einführung der Beziehung 11):

$$\Sigma = a \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \cdot \frac{\sin^3 z}{\cos^2 z} \Delta \mu_0 \qquad \text{für } z<80°. \tag{12}$$

Ein Vergleich mit der Rayleigh'schen Formel zeigt, dass statt $\sin z$ die dritte Potenz dieser Größe zu setzen ist, wodurch die Separation in großen Höhen noch verringert wird. Der Zahlenfactor ergibt sich aus den numerischen Werten

$\log a = 6 \cdot 80391$ (Krümmungsradius der Erde unter 45° geogr. Breite.)

$\log \alpha_0 = 1 \cdot 76413$, $\log \alpha_1 = 8 \cdot 8278$ } nach Oppolzer bei 10° C. und 760 *mm* Druck,

zu 7372 *m*, so dass, wenn nicht die Centimeter genau gewünscht werden,

$$\Sigma = 7372 \cdot \frac{\sin^3 z}{\cos^2 z} \Delta \mu_0 \text{ (in Metern)} \tag{12'}$$

wird. Auch der Zahlenfactor erheischt gegen Rayleigh eine wesentliche Verkleinerung.

Will man nun für zwei Farben die Separationen berechnen, so bedarf es der Kenntnis von $\Delta\mu_0$. Die besten Messungen der Dispersion der Luft rühren von den Herren Kayser und Runge[1] her. Sie finden für

| | | | |
|---|---|---|---|
| die $B$-Linie | (roth) | $\mu_0 = 1{\cdot}0002908$ | |
| | | | 11 |
| » $D$ » | (gelb) | $= 1{\cdot}0002919$ | |
| | | | 21 |
| » $F$ » | (grün) | $= 1{\cdot}0002940$ | |
| | | | 19 |
| » $G$ » | (blau) | $= 1{\cdot}0002959$ | |
| | | | 8 |
| $\frac{G+H}{2}$-Linie | (violett) | $= 1{\cdot}0002967$ | |

Wir können nun auf Grund dieser Werte die Separationen nach der strengen Gleichung 8) berechnen. In kleinen Zenithdistanzen wird die Formel zur Berechnung unangenehm. Mit Hilfe der Bessel'schen Tafelform jedoch, welche die Refraction durch

$$R = \alpha \operatorname{tg} z$$

darstellt, wo $\alpha$ mit $z$ veränderlich ist, wird, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\mu_0 - 1}{\mu_0} = \alpha_0$$

ist:

$$\Sigma = a \sin z \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0} \Delta\mu_0.$$

Das $\alpha$ kann man den Bessel'schen Tafeln für jede Zenithdistanz entnehmen; das $\alpha_0$ wird für mittlere Verhältnisse

$$\log \alpha_0 = 1{\cdot}76156 \quad \text{(in Bogensecunden)},$$

so dass man für kleine Zenithdistanzen ($z < 70°$) mit Vortheil die Formel

$$\Sigma = 110240(57{\cdot}751 - \alpha)\Delta\mu_0 \sin z \quad (\Sigma \text{ in Metern})$$

anwenden kann.

---

[1] Kayser und Runge, Die Dispersion der atmosphärischen Luft. Monatsber. Berlin. S. 79; 1893.

Hier ist:

$\Delta\mu$ = der Unterschied des Brechungsexponenten im Abstande $r$.

$\Delta i$ = der Unterschied der scheinbaren Zenithdistanzen, unter welchen ein in $r$ befindlicher anderer Beobachter die verschiedenfarbigen Strahlen anlangen sehen würde.

Man darf in Anbetracht der durch die geringen Separationen verursachten Niveaudifferenz annehmen, dass analog der Gleichung 6) auch hier

$$\Delta i = -\Delta R = -\frac{\Delta\mu}{\mu-1} R \qquad 15)$$

ist, wo

$R$ = die Refraction im Abstande $r$,

$\Delta R$ = der Unterschied der Refractionen in diesem Abstande für die verschiedenfarbigen Strahlen

ist.

Nach der Refractionstheorie kann für dieses Problem genügend genau

$$R = \frac{\mu-1}{\mu_0-1} R_0 = \frac{\rho}{\rho_0} R_0 \qquad 16)$$

und analog der Gleichung 13)

$$\Delta\mu = \frac{\mu-1}{\mu_0-1} \Delta\mu_0 = \frac{\rho}{\rho_0} \Delta\mu_0 \qquad 17)$$

angenommen werden, wo sich alle Größen mit dem Index 0 auf den Beobachtungsort, die ohne auf den Abstand $r$ beziehen. Die Separation $\sigma$ im Abstande $r$ ist offenbar (siehe Figur):

$$\sigma = \sin i . \Delta r. \qquad 18)$$

Führt man alle diese Relationen in die Differentialformel 14) ein und auch die Gleichungen 1), 6) und 7) zur Elimination von $r$, $\sin i$ und $\Delta z$, so erhält man durch leichte Transformationen:

$$\mu . \sigma = a \sin z \Delta\mu_0 \left[1 - \frac{\mu_0}{\mu}\frac{\rho}{\rho_0} - \frac{\mu_0 R_0}{\mu_0-1} \operatorname{cotg} z \left(1 - \frac{1}{\mu}\frac{\operatorname{cotg} i}{\operatorname{cotg} z}\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]. \qquad 19$$

Nun darf man sich Vernachlässigungen erlauben, wenn keine größere Genauigkeit als eine 10procentige verlangt wird, und

$$\mu\sigma = \sigma$$

$$\frac{\mu_0}{\mu}\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\operatorname{cotg} i}{\operatorname{cotg} z} = \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{r}{a}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z\left(1-\frac{\mu_0^2 a^2}{\mu^2 r^2}\right)} = 1$$

setzen.

Da der Wurzelausdruck in der Gleichung 19) mit cotg $z$ multipliciert erscheint und die Klammer in der Wurzel höchstens 0·02 werden kann, so erscheinen die Vernachlässigungen gerechtfertigt.

Übrigens gestattet die Gleichung 19) jederzeit die Werte strenge zu berechnen, was vorderhand jedoch nicht der Mühe wert wäre.

Man darf daher statt der Gleichung 19)

$$\sigma = a \sin z \Delta\mu_0 \left[1 - \frac{\mu_0}{\mu_0 - 1} R_0 \operatorname{cotg} z\right]\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \tag{20}$$

schreiben, womit die Separation in beliebigen Höhenschichten berechenbar ist. In sehr übersichtlicher Weise kann man die Gleichung 20) durch das Gesetz für $\Sigma$ [Gleichung 8)] darstellen, wie folgt:

$$\sigma = \Sigma\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right). \tag{21}$$

Die obigen Tabellenwerte sind daher bloß mit dem Klammerausdruck durchzumultiplicieren, falls man die Separation für eine Höhe $h$, für die

$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{h}{8000}}$$

ist, kennen will und man an der Meeresfläche beobachtet. Will man die Separationen $\sigma'$ für Höhen berechnen über einer Station von der Seehöhe $h_0$, so ist

$$\sigma' = \Sigma'\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0'}\right),$$

wo sich die gestrichelten Größen auf den Beobachtungsort in der Seehöhe $h_0$ beziehen. Nach der Bemerkung 13) wird weiter

$$\Sigma' = \Sigma \frac{\rho'_0}{\rho_0}$$

und also:

$$\sigma' = \Sigma \frac{\rho'_0}{\rho_0}\left(1 - \frac{\rho}{\rho'_0}\right) = \Sigma e^{-\frac{h_0}{8000}}(1 - e^{-\frac{h}{8000}}),$$

welche Formel gestattet, aus der Seehöhe $h_0$ des Beobachtungsortes die Separation $\sigma'$ in der Höhe $h$ über dem Beobachtungsorte zu berechnen; das $\Sigma$ kann der obigen Tabelle entnommen werden.

Die in der Einleitung ausgesprochene Vermuthung über das rasche Anwachsen der Separation mit der Höhe ist also gerechtfertigt. In 5545 *m* ist sie schon halb so groß wie an der Grenze. Dies ist eigentlich der Grund, weshalb die farbige Scintillation schon in mäßigen Höhen eintritt; denn in Höhen von 5 *km* finden noch beträchtliche Störungen der normalen Temperaturvertheilung statt, da gibt noch die Luftmischung mit den inhomogenen tieferen Schichten zu Schlierenbildungen Anlass.

### 3. Die Luftunruhe.

Vom Standpunkte des Physikers hat man das Phänomen der Luftunruhe, das sich darin äußert, dass die punktförmigen Fixsterne durch Zitterbewegungen in eine helle Fläche ausgedehnt werden, dem Scintillationsphänomen unterzuordnen. Herr Karl Exner bezeichnet es als Newton'sches Scintillationsphänomen. Es gehört ebenso wie die Scintillation im engeren Sinne, womit die Astronomen Helligkeits- und Farbenschwankungen der Fixsterne verstehen, zu der Classe der unregelmäßigen Strahlenbrechungen. Herr Karl Exner bezeichnet analog zur Foucault'schen Definition des optischen Vermögens des Instrumentes mit:

$\frac{1}{2\omega}$ das optische Vermögen des Beobachtungsortes,

wo ω die mittlere Amplitude der Zitterbewegung ist. Ist diese Zitterbewegung von ihrer Richtung gegen den Vertical des Fixsternes unabhängig, so wird sie eine kreisförmige Scheibe mit dem Radius ω erzeugen. Ich glaube, dass dies nur im Zenithe der Fall ist. Die unregelmäßigen Strahlenbrechungen wirken im Vertical unverhältnismäßig stärker als im Almukantharat (in der zum Vertical senkrechten Richtung). Das Scheibchen wird also in eine Ellipse übergehen, deren große Axe gegen das Zenith gerichtet ist und mit der Zenithdistanz stark anwächst, deren kleine Axe auch mit der Zenithdistanz wächst, jedoch wohl in geringerem Grade. Schon das im Verticale liegende, mit der Zenithdistanz stark an Länge zunehmende Spectrum verhindert eine kreisförmige Gestalt des Scheibchens, und erst wenn man im monochromatischen Lichte beobachten würde, so würde die elliptische Form des Scheibchens zum Ausdruck kommen. Es wird sich daher empfehlen die Größe ω auf eine passende Zenithdistanz, etwa 75° zu beziehen und dieselbe nur im Almukantharat zu messen.

Es ist wohl keine Frage, dass ω auch mit der Seehöhe des Beobachtungsortes im allgemeinen abnehmen wird, weil die Wahrscheinlichkeit einer Ablenkung des Lichtstrahles von seiner normalen Richtung mit der Anzahl der Schlieren wächst. Höher gelegene Stationen werden sich also meistens durch ruhigere Bilder auszeichnen.

Auch das Funkeln der Sterne wird im allgemeinen mit der Erhebung des Beobachtungsortes abnehmen; bei sehr starken Mischungen der Luftschlieren jedoch erscheint es mir geradezu nothwendig, dass das Funkeln bis zu einer gewissen Seehöhe zunimmt. Die Ursache des Funkelns liegt, wie ja die Untersuchungen des Herrn Karl Exner wohl einwurfsfrei darthun, darin, dass durch die unregelmäßigen Strahlenbrechungen die Homogenität der Strahlenbündel leidet, so dass sogar das Bündel, von der Dicke eines großen Objectives (über 10 *cm* Öffnung), in jedem Momente sehr inhomogen ist. Je mehr störende Schichten die Bündel zu passieren haben, desto mehr wird sich nach Wahrscheinlichkeitsprincipien Homogenität einstellen. Zieht man eine inhomogene Glasplatte zwischen Stern und Auge

vorbei, so wird man Helligkeitsschwankungen des Sternes wahrnehmen; man kann damit leicht die Scintillationserscheinungen, wie Herr Exner zeigte, künstlich herstellen. Würden nun mehrere hundert solcher Platten durcheinander- und hin- und hergeschoben, so wird sich eine merkliche Constanz der Helligkeit herstellen. Insofern sind also tiefergelegene Stationen vorzuziehen, wenn man photometrische Messungen anstellt.

# Über den Helligkeitseindruck von Sternhaufen

von

Dr. **J. Holetschek.**

**(Vorgelegt in der Sitzung am 21. November 1901.)**

In dieser Abhandlung wird an einigen mehr oder minder zerstreuten Sternhaufen untersucht, wie weit die beobachtete Gesammthelligkeit eines Sternhaufens durch die Summierung der Helligkeiten der einzelnen Sterne, welche den Cumulus bilden, dargestellt werden kann, wobei sich fast durchgehends das Resultat ergibt, dass der beobachtete Helligkeitseindruck schon durch eine verhältnismäßig geringe Zahl der helleren Sterne so nahe dargestellt wird, dass die schwächeren gar nicht in Rechnung gezogen zu werden brauchen, und zwar genügt es im allgemeinen, nur die Sterne zu berücksichtigen, welche — von dem hellsten Stern des Cumulus an — auf ein Helligkeitsintervall von ein bis zwei Größenclassen vertheilt sind. Zum Schlusse sind noch Untersuchungen über drei sehr reiche und dicht gedrängte Sternhaufen beigefügt.

Um die berechnete Gesammthelligkeit mit der beobachteten vergleichen zu können, ist es einerseits nothwendig, den Helligkeitseindruck eines Sternhaufens durch die Beobachtung zu bestimmen, und anderseits sollen bei der Summierung gerade diejenigen Sterne in Rechnung gezogen werden, welche den Gesammthelligkeitseindruck des Cumulus thatsächlich bewirken. Jede dieser beiden Operationen ist aber mit Unsicherheiten verknüpft, die nicht ganz zu beseitigen und im allgemeinen umso größer sind, je zerstreuter oder je ausgebreiteter ein Sternhaufen ist; man muss daher trachten, diese Unsicherheiten wenigstens klein zu machen oder zu umgehen.

Zur Bestimmung des Helligkeitseindruckes eines Sternhaufens bietet sich die bekannte Wahrnehmung dar, dass mehrere Sterne, falls sie einander hinreichend nahestehen, für das Auge als ein einziges Object erscheinen können, zu welcher noch die andere hinzutritt, dass auch schwächere, einzeln nicht sichtbare Sterne wenigstens in ihrer Vereinigung gesehen werden können, falls sie nicht nur hinreichend nahe aneinander stehen, sondern auch genügend zahlreich sind. Diese Erscheinung lässt sich zur Bestimmung des Helligkeitseindruckes in der Weise benützen, dass man den Cumulus mit dem schwächsten optischen Instrument, in welchem er noch sichtbar ist, eventuell auch mit bloßen Augen betrachtet und diejenigen Fixsterne angibt, welche so leicht oder so schwer wie der Cumulus gesehen werden können. Auch die Verschiedenheit der Schärfe der Augen liefert noch eine Fortsetzung der Scala, denn was vom Fernrohr, gilt in dieser Beziehung auch vom Auge: Ein schärferes unterscheidet oder trennt, ein schwächeres unterscheidet nicht, sondern vermengt, trennt nicht, sondern vereinigt. Infolgedessen ist ein schwächeres Auge imstande, auch von relativ weit ausgebreiteten Sternhaufen, z. B. von der Plejadengruppe, ja sogar von der Coma Berenices oder von den Sternen im Kopfe der Hydra, den Gesammthelligkeitseindruck — wenn auch nicht sicher, so doch wenigstens angenähert — zu bestimmen.

Es braucht aus diesem Grunde auch gar nicht zu überraschen, dass ein schwächeres Auge einen Sternhaufen im allgemeinen größer sieht — allerdings minder deutlich — als ein schärferes. Es zeigt sich hier eben dasselbe, was bei der Betrachtung eines Kometenkernes mit Instrumenten von verschiedener optischer Kraft beobachtet wird. Mit einem stärkeren Instrument und insbesondere mit stärkeren Vergrößerungen kann man von dem Kern mehr Hüllen trennen und sieht ihn demnach kleiner; mit einem schwächeren dagegen sieht man die Hüllen mit dem Kern zu einem einzigen, viel ansehnlicheren Körper vereinigt und gibt daher sowohl die Dimension als auch die Helligkeit des Kernes größer an. Hierin liegt offenbar auch der hauptsächlichste Grund davon, dass in der Harvard Photo-

metry[1] die mit bloßen Augen geschätzten Helligkeiten von Sternhaufen bedeutender sind als die mit dem Photometer beobachteten, doch lassen diese Differenzen auch vermuthen, was übrigens auf dasselbe hinauskommt, dass bei den Messungen nicht alle Sterne in die Beobachtung einbezogen worden sind, welche zur Sichtbarkeit des betreffenden Cumulus für das bloße Auge beitragen, sondern nur eine beschränkte Partie derselben.

Bei solchen Beobachtungen eines Sternhaufens mit successive schwächeren Instrumenten rücken die Sterne optisch immer näher zusammen und vereinigen sich schließlich zu einem einzigen Gestirn. Aber nicht alle Sterne; denn solche, die zu weit abstehen oder zu lichtschwach und zu wenig zahlreich sind, werden bei Betrachtung mit schwächeren optischen Instrumenten unsichtbar, ohne sich früher untereinander oder mit anderen Sternen zu einem einzigen Object vereinigt zu haben. Diese Sterne dürfen also bei der Berechnung der Gesammthelligkeit eines Cumulus aus den einzelnen Sternen nicht mitgezählt, sondern müssen ausgeschieden werden, indem nur diejenigen in Rechnung zu ziehen sind, welche zum Gesammthelligkeitseindrucke thatsächlich beitragen. Und das ist die zweite Aufgabe, deren Erledigung nothwendig ist, wenn die berechnete Gesammthelligkeit mit der beobachteten vergleichbar gemacht werden soll.

Wie weit zwei oder mehrere Sterne voneinander abstehen dürfen, damit sie noch als ein einziges Object erscheinen können, trifft mit der für die Erkennbarkeit von Doppelsternen wichtigen Frage zusammen, wie weit zwei Sterne voneinander wenigstens entfernt sein müssen, damit sie für ein bestimmtes Auge oder für ein bestimmtes Fernrohr bei einer gewissen Vergrößerung getrennt erscheinen, hängt also von der Helligkeit der Sterne, von der Schärfe der Augen oder des optischen Instrumentes und schließlich auch noch vom Luftzustand ab. So z. B. sind die zwei, 6 Minuten voneinander abstehenden Sterne $\alpha_1$ und $\alpha_2$ Capricorni, welche die Helligkeiten $4^m7$, beziehungsweise $3^m8$ besitzen, von Heis, dessen Auge von

[1] Annals of the astronomical observatory of Harvard College, Vol. 14.

besonderer Schärfe war, stets getrennt, von Argelander dagegen, dessen Auge nur von mittlerer Schärfe war, als ein einziges Gestirn dritter bis vierter Größe gesehen worden. Die zwei nur 3 Minuten voneinander abstehenden Sterne 4 und 5 Lyrae sind von Heis nur bei reiner Luft getrennt gesehen worden, sonst aber nicht.

Es können auch Sterne, die weiter voneinander abstehen, als ein einziges, zusammenhängendes Object erscheinen, wenn ein zwischenliegender Stern von hinreichender Helligkeit gewissermaßen eine verbindende Brücke bildet. So ist in der Uranométrie générale von Houzeau, S. 22 unter den mit bloßen Augen nicht auflösbaren Sternhaufen nebst anderen auch die Vereinigung der Sterne 4 und 5 Vulpeculae angeführt, welche beiden Sterne mehr als 20′ voneinander abstehen und in der Uranometria nova von Argelander und im Atlas coelestis novus von Heis einzeln angegeben sind; es scheint hier, dass die Vereinigung, also eigentlich das undeutliche Sehen, durch einen etwas seitlich von der Verbindungslinie stehenden Stern sechster bis siebenter Größe verursacht worden ist. Houzeau führt unter mehreren Sternen, die für das bloße Auge undeutlich erscheinen, als ob sie durch einen Nebel gesehen werden würden, auch einen Stern sechster bis siebenter Größe bei $\alpha = 11^h 29^m 5$, $\delta = +11° 35'$ (1880·0) an; dieser Anblick ist aber wahrscheinlich durch das Zusammenwirken von drei einander relativ nahe stehenden, ziemlich gleich hellen Sternen verursacht worden, nämlich:

| B. D. | α (1855·0) | δ (1855·0) | H |
|---|---|---|---|
| +11° 2372 | 11h 26m 40s | +11° 50′ | (6m50) |
| 2376 | 28 2 | 59 | (6·69) |
| 2377 | 11 28 13 | +11 43 | (6·54) |

Die Helligkeiten der Sterne sind hier nach der photometrischen Durchmusterung von E. Pickering[1] angesetzt. Bei Heis findet man von diesen Sternen den ersten und den

[1] Annals of the astronomical observatory of Harvard College, Vol. 45.

letzten, bei Argelander den letzten, und dieser ist derjenige, dessen Position mit der von Houzeau angegebenen übereinstimmt.

Eine genauere Untersuchung der Distanzen braucht uns aber hier, wo es sich nicht um zwei oder drei, sondern meistens um sehr viele Sterne handelt, nicht weiter zu beschäftigen, denn wenn schon wenige Sterne als ein einziges Object erscheinen können, so wird dies bei Sternhaufen, die zu zahlreichen Verbindungen Veranlassung geben, noch eher der Fall sein, und zwar umsomehr, je reicher ein Cumulus mit Sternen von genügender Helligkeit besetzt ist. Kommen aber doch, wie insbesondere am Rand eines Cumulus, Sterne vor, die wegen ihrer isolierten Stellung sich mit den enger stehenden nicht summieren, so macht sich dieser Umstand meistens von selbst bemerkbar, und zwar dadurch, dass sich die Gesammthelligkeit aus der Berechnung unter Berücksichtigung sämmtlicher Sterne größer ergibt als aus der Beobachtung. Auf besonders große Abstände wird in den betreffenden Fällen eigens hingewiesen werden.

Was nun die Unsicherheit der Aufgabe anbelangt, bei der Summierung überall nur diejenigen Sterne in Rechnung zu ziehen, welche den beobachteten Helligkeitseindruck eines Cumulus thatsächlich bewirken, so erscheint es nach diesen Bemerkungen am einfachsten und zweckmäßigsten, sie auf empirischem Wege zu umgehen, und zwar dadurch, dass man überhaupt versucht, durch eine naturgemäß erscheinende Auswahl der Sterne die berechnete Gesammthelligkeit mit dem beobachteten Helligkeitseindruck in Übereinstimmung zu bringen.

Ich werde nun in dieser Weise einige mehr oder minder zerstreute Sternhaufen untersuchen, möchte aber vorerst noch angeben, wie ich die Helligkeiten der einzelnen Sterne berechnet, beziehungsweise summiert habe. Ist $I$ die der Größenclasse $H$ entsprechende Intensität, so ist für jeden Stern zu rechnen

$$I = \frac{1}{2 \cdot 512^H},$$

worin, wie jetzt nahezu allgemein üblich, das Verhältnis zwischen den Fixsterngrößenclassen so gewählt ist, dass der Logarithmus

dieser Zahl genau 0·4 ist und $I$ so gefunden wird, dass die Intensität eines Sternes von der Helligkeit $0^m0$ (der also um eine Größenclasse heller ist als ein Stern erster Größe) = 1 ist.

Ist die Zahl der Sterne, deren Helligkeiten summiert werden sollen, eine sehr große, so empfiehlt es sich, die den Größenclassen $H$ entsprechenden Intensitäten $I$ der einzelnen Sterne aus einer zu diesem Zwecke angelegten Tabelle zu entnehmen, welche mit dem Argument $H$ die Intensitäten $I$ gibt. Eine solche ist in abgekürzter Form hier beigefügt, und zwar ist $I$ auf fünf Decimalstellen angegeben und das Argument $H$ in der Strecke von $H = 4^m0$ bis $10^m2$ für jedes Zehntel, sonst aber in größeren Intervallen angesetzt.

| $H$ | $I$ | $H$ | $I$ | $H$ | $I$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0^m0$ | 1·00000 | $6^m0$ | 0·00398 | $8^m5$ | 0·00040 |
| 1·0 | 0·39811 | 6·1 | 0·00363 | 8·6 | 0·00036 |
| 2·0 | 0·15849 | 6·2 | 0·00331 | 8·7 | 0·00033 |
| 3·0 | 0·06310 | 6·3 | 0·00302 | 8·8 | 0·00030 |
| 3·5 | 0·03981 | 6·4 | 0·00275 | 8·9 | 0·00028 |
| 4·0 | 0·02512 | 6·5 | 0·00251 | 9·0 | 0·00025 |
| 4·1 | 0·02291 | 6·6 | 0·00229 | 9·1 | 0·00023 |
| 4·2 | 0·02089 | 6·7 | 0·00209 | 9·2 | 0·00021 |
| 4·3 | 0·01905 | 6·8 | 0·00191 | 9·3 | 0·00019 |
| 4·4 | 0·01738 | 6·9 | 0·00174 | 9·4 | 0·00017 |
| 4·5 | 0·01585 | 7·0 | 0·00158 | 9·5 | 0·00016 |
| 4·6 | 0·01445 | 7·1 | 0·00145 | 9·6 | 0·00014 |
| 4·7 | 0·01318 | 7·2 | 0·00132 | 9·7 | 0·00013 |
| 4·8 | 0·01202 | 7·3 | 0·00120 | 9·8 | 0·00012 |
| 4·9 | 0·01096 | 7·4 | 0·00110 | 9·9 | 0·00011 |
| 5·0 | 0·01000 | 7·5 | 0·00100 | 10·0 | 0·00010 |
| 5·1 | 0·00912 | 7·6 | 0·00091 | 10·1 | 0·00009 |
| 5·2 | 0·00832 | 7·7 | 0·00083 | 10·2 | 0·00008 |
| 5·3 | 0·00759 | 7·8 | 0·00076 | 10·4 | 0·00007 |
| 5·4 | 0·00692 | 7·9 | 0·00069 | 10·6 | 0·00006 |
| 5·5 | 0·00631 | 8·0 | 0·00063 | 10·8 | 0·00005 |
| 5·6 | 0·00575 | 8·1 | 0·00058 | 11·0 | 0·00004 |
| 5·7 | 0·00525 | 8·2 | 0·00052 | 11·3 | 0·00003 |
| 5·8 | 0·00479 | 8·3 | 0·00048 | 11·8 | 0·00002 |
| 5·9 | 0·00436 | 8·4 | 0·00044 | 12·5 | 0·00001 |

Sind die Intensitäten $I$ addiert, so kann die zugehörige Größenclasse $H$ entweder aus der Tafel genommen oder nach der Formel gerechnet werden:

$$H = \frac{10}{4} \cdot \log \frac{1}{I}.$$

Es sollen zunächst diejenigen Objecte betrachtet werden, welche in der Uranometria nova von Argelander und im Atlas coelestis novus von Heis als Cumuli verzeichnet, aber keine eigentlichen Sternhaufen, sondern nur Gruppen von sehr wenigen, physisch vielleicht gar nicht zusammengehörenden Sternen sind.

Eine solche Gruppe ist im Monoceros bei $\alpha = 6^h 17^m$, $\delta = +11\overset{\circ}{.}3$. Sie kommt in keinem Katalog von Nebeln oder Sternhaufen vor, und zwar offenbar darum, weil die Sichtbarkeit dieses Objectes für das bloße Auge nur durch das Zusammenwirken von vier oder höchstens sechs Sternen entsteht, deren Helligkeiten nach der Bonner Durchmusterung (B. D.) sind: $7\overset{m}{.}5$, $8\overset{m}{.}0$, $8\overset{m}{.}5$, $9\overset{m}{.}3$, $7\overset{m}{.}9$, $7\overset{m}{.}5$. Die Summierung derselben gibt $6\overset{m}{.}0$.

Zwei ähnliche Gruppen sind im Sternbild der Jagdhunde, und zwar die eine bei $\alpha = 12^h 28^m$, $\delta = +37\overset{\circ}{.}2$, die andere bei $\alpha = 12^h 8^m$, $\delta = +47\overset{\circ}{.}9$. Die erste kommt bei Argelander und Heis vor und ist so gut wie ein Stern sechster Größe zu erkennen. Es befinden sich hier vier hellere Sterne, deren Größen nach der B. D. $7\overset{m}{.}0$, $7\overset{m}{.}6$, $7\overset{m}{.}9$ und $8\overset{m}{.}2$ sind, so dass die Summe ihrer Helligkeiten $6\overset{m}{.}1$ ist, und durch diese ist die Sichtbarkeit der Gruppe für das bloße Auge hinreichend erklärt. In der Harvard Photometry ist $6\overset{m}{.}4$ angegeben. Die zweite dieser Gruppen kommt bei Heis, aber nicht bei Argelander vor, ist demnach nicht so hell wie ein Stern sechster Größe, aber doch heller als ein Stern siebenter Größe. Hier scheinen nur drei Sterne zusammenzuwirken, deren Größen nach der B. D. $7\overset{m}{.}3$, $7\overset{m}{.}5$ und $8\overset{m}{.}0$ sind, aber durch die Helligkeitssumme derselben, nämlich $6\overset{m}{.}4$, ist der Umstand, dass der Helligkeitseindruck der Gruppe zwischen der sechsten und siebenten Größe liegt, völlig erklärt. In der Harvard Photometry ist die von dieser Helligkeit nicht wesentlich verschiedene $6\overset{m}{.}5$ angegeben.

Während nun, wie man sieht, die Erkennbarkeit dieser drei kleinen Sterngruppen ganz leicht erklärt werden kann, ist dies bei der folgenden weniger der Fall. Im Sternbild Serpens, und zwar bei $\alpha = 15^h 48^m$, $\delta = +9°7$ ist im Atlas von Heis, aber nicht bei Argelander, ein Cumulus angegeben, an dessen Stelle man nur drei hellere Sterne mit den Helligkeiten $7^m9$, $8^m3$ und $8^m5$ in Abständen von 4′, beziehungsweise 10′ aneinandergereiht findet, so dass die Summe der Helligkeiten, selbst wenn der weiter entlegene Stern mitgerechnet wird, nur $7^m0$ ist. Auch in der Harvard Photometry ist eine von dieser nicht wesentlich verschiedene Helligkeit, nämlich $7^m09$ angegeben, die sich aber möglicherweise nur auf den hellsten der drei Sterne bezieht, da für denselben in der photometrischen Durchmusterung von E. Pickering die davon nur wenig verschiedene Helligkeit $6^m98$ angesetzt ist. Nimmt man auf Grund dieser Angabe für den hellsten Stern $7^m0$ an, so gibt die Vereinigung der Helligkeit dieses mit der des Sternes $8^m3$ als Helligkeitssumme $6^m7$, und diese Zahl macht es schon eher erklärlich, dass diese Sterne in ihrer Vereinigung von Heis mit seinen scharfen Augen ohne Fernrohr erkannt worden sind.

Ebenso wie die Sichtbarkeit dieses »Cumulus« im Sternbild Serpens wird man auch die des folgenden »Nebels« auf ein besonders scharfes Gesicht des Beobachters zurückführen müssen. Houzeau gibt in seiner Uranométrie générale, S. 22 und 23 unter den für das bloße Auge nicht auflösbaren Sternhaufen nach Lacaille bei $\alpha = 7^h 21^m 6$, $\delta = -33° 55'$ (1880·0) einen Sternhaufen sechster Größe an, der aus acht einander sehr nahe stehenden Sternen sechster bis siebenter Größe gebildet sein soll. Das kann aber nicht ganz richtig sein. Abgesehen davon, dass acht Sterne sechster bis siebenter Größe in ihrer Vereinigung viel heller als sechster Größe, und zwar nahe so hell wie ein Stern vierter Größe erscheinen müssten, findet man an dieser Stelle außer einem Stern $6^m5$ nur einige schwächere Sterne, die allerdings ziemlich nahe aneinander stehen, aber nicht sechster bis siebenter, sondern nur achter bis zehnter Größe und überdies zu wenig zahlreich sind, als dass sie die Helligkeit des Sternes $6^m5$ wesentlich verstärken könnten. Man wird daher, um hier wenigstens die Sichtbarkeit

eines Nebels wahrscheinlich zu machen, annehmen müssen, dass Lacaille, der sich besonders sein rechtes Auge durch sorgfältige Schonung sehr lichtempfindlich erhalten hat und damals am Cap der guten Hoffnung beobachtete, einige der schwächeren Sterne in Verbindung mit dem Sterne $6^m5$ als Nebel gesehen hat.

Nach diesen sternarmen, vielleicht nur zufälligen Gruppen sollen nun einige von den eigentlichen Sternhaufen bezüglich der Berechenbarkeit ihrer Helligkeit untersucht werden. Was die Auswahl derselben betrifft, so habe ich hauptsächlich die bei Argelander und Heis vorkommenden, also schon für das bloße Auge, wenn auch zum Theile nur unter besonders günstigen Umständen sichtbaren Sternhaufen in Betracht gezogen.

1. Wir beginnen zu diesem Zwecke, indem wir dem Zuge der Milchstraße in der Richtung von Nord nach Süd folgen, mit dem nördlichsten der bei Argelander und Heis vorkommenden Sternhaufen, nämlich mit dem im Camelopard, G. C. 802 (W. H. VII, 47) [$3^h59^m+62^\circ1$].[1] Seine Helligkeit ist nach den Messungen der Harvard Photometry $6^m15$, nach den Schätzungen $5^m5$. Was die einzelnen Sterne anbelangt, so ist der hellste derselben der Doppelstern $\Sigma$ 485, dessen Gesammthelligkeit $6^m27$ ist. Dieser gibt in Verbindung mit seiner näheren Umgebung, zu welcher nebst mindestens 12 Sternen neunter bis zehnter Größe noch ein 5′ abstehender Stern $8^m3$ und ein 7′ abstehender $8^m0$ gerechnet werden kann, als Helligkeitssumme $5^m9$ und noch mehr, also schon eine zur Erkennbarkeit für das bloße Auge hinreichende Helligkeit. Zieht man noch den 20′ abstehenden Stern B. D. +61° 669 ($7^m0$, $6^m75$) in Rechnung, so erhält man $5^m6$, beziehungsweise $5^m5$, und damit ist die aus Schätzungen abgeleitete, größere Helligkeit schon so weit erreicht, dass es nicht mehr nöthig erscheint, auch noch andere Sterne in Betracht zu ziehen. Die Einbeziehung dieses letzten Sternes erscheint zwar wegen des großen Abstandes kaum mehr zulässig, doch hat Houzeau in seiner Uranométrie

[1] Die in eckigen Klammern [ ] beigesetzten genäherten Positionen der Sternhaufen beziehen sich auf das Äquinoctium 1900·0, die anderen, falls nicht ausdrücklich ein Äquinoctium genannt ist, auf 1855·0.

générale, S. 9 noch größere Distanzen angeführt, bei denen er zwei Sterne sechster bis siebenter Größe mit bloßen Augen vereinigt gesehen hat.

2. und 3. Eine ausgedehntere Untersuchung erfordert der große Doppelcumulus im Perseus *h* und $\chi$ Persei. Position [$2^h 12^m + 56\overset{\circ}{.}7$] und [$2^h 15^m + 56\overset{\circ}{.}7$], Distanz der beiden Sternhaufen von Mitte zu Mitte ungefähr 25′.

Nach Houzeau liegt die Helligkeit eines jeden dieser beiden Sternhaufen zwischen der fünften und sechsten Größe, so dass also in dieser Beziehung zwischen ihnen kein erheblicher Unterschied wäre. Nach den Schätzungen in der Harvard Photometry ist die Helligkeit des vorangehenden *h* $5^m0$, die des nachfolgenden $\chi$ $5^m3$, also der vorangehende auffallender als der nachfolgende. Diese Differenz zeigt sich besonders bei ungünstigen Sichtbarkeitsverhältnissen, also z. B. bei tiefem Stande, indem hier der nachfolgende mehr geschwächt erscheint als der vorangehende. Übrigens kann für jede der beiden Componenten, namentlich wenn die Randpartien mitgerechnet werden, so dass jeder Cumulus unter einem Durchmesser von etwa 20′ erscheint, auch eine bedeutendere Helligkeit angesetzt werden, und die beiden Sternhaufen erscheinen, insbesondere bei klarer Luft und großer Höhe, durch die Angaben $4^m3$ und $4^m7$ noch immer nicht zu hell geschätzt.

Es soll nun untersucht werden, durch welche Sterne und durch welches Areal diese Helligkeitsangaben dargestellt werden können.

Zu dieser Untersuchung habe ich für *h* Persei hauptsächlich die Arbeit von Oertel,[1] für $\chi$ Persei die von Vogel[2] benützt. Die erstere erstreckt sich auf 126 Sterne, unter denen 2 Sterne $6^m5$, 1 Stern $6^m6$, 3 Sterne von $7^m1$ bis $7^m7$, 8 Sterne von $8^m1$ bis $8^m9$, 51 Sterne von $9^m0$ bis $9^m9$, 41 Sterne von $10^m0$ bis $10^m8$ und 20 Sterne von $11^m0$ bis $12^m5$ sind, die letztere auf 176 Sterne, unter denen man 1 Stern $6^m6$, 1 Stern $7^m7$, 9 Sterne

[1] Neue Beobachtung und Ausmessung des Sternhaufens 38 *h* Persei am Münchener großen Refractor von K. Oertel. Neue Annalen der k. Sternwarte in Bogenhausen bei München, 2. Bd.

[2] Der Sternhaufen $\chi$ Persei, beobachtet am achtzölligen Refractor der Leipziger Sternwarte von H. C. Vogel. Leipzig, 1878.

von $8^m0$ bis $8^m9$, 24 Sterne von $9^m0$ bis $9^m9$, 59 Sterne von $10^m0$ bis $10^m9$, 42 Sterne von $11^m0$ bis $11^m9$ und 40 Sterne von $12^m0$ bis $13^m2$ findet. Addiert man die Helligkeiten dieser Sterne, so erhält man als Helligkeitssumme für *h* Persei $4^m0$, für χ Persei $4^m4$, und damit erscheint zunächst bestätigt, dass der letztere Sternhaufen weniger hell ist als der erstere. Es lässt sich zwar einwenden, dass die beiden Ausmessungen, insbesondere was das Areal und die beobachteten schwächeren Sterne betrifft, nicht durchgehends miteinander vergleichbar sind, doch kann dieser Einwand nicht schwer ins Gewicht fallen, weil der wesentlichste Unterschied zwischen den beiden Arbeiten hauptsächlich in der verschiedenen Berücksichtigung der schwächeren Sterne liegt und diese in der Helligkeitssumme nur wenig bemerkbar sind. Lässt man diese Sterne weg und berücksichtigt bloß die helleren, so erhält man für *h* Persei durch Summierung der 43 Sterne von $6^m5$ bis $9^m7$ als Helligkeitssumme $4^m3$ und für χ Persei aus den 30 Sternen von $6^m6$ bis $9^m7$ als Summe $4^m9$, also auch jetzt für *h* eine größere Helligkeit als für χ Persei. Dadurch ist nun von den zwei letzten Helligkeitsangaben die für *h* Persei vollständig und die für χ Persei bis auf $0^m2$ dargestellt.

Es soll nun, da hier wahrscheinlich bei dem einen, wie bei dem anderen Cumulus Sterne mitgezählt sind, die wegen ihrer größeren Distanz oder isolierten Stellung bei der Sichtbarkeit des Cumulus für das bloße Auge gar nicht mitwirken, eine entsprechende Einschränkung des Areals versucht werden.

Bei *h* Persei bietet sich als eine inniger zusammenhängende Gruppe diejenige dar, welche von der anscheinend dichtesten Stelle (etwa 1′ nordwestlich von dem ersten Stern $6^m5$) einerseits bis 6′, anderseits bis zu 8′ absteht. Sie hat einen Durchmesser von 10 bis 14′, und zwar sind die äußersten Grenzen durch die Rectascensionen 32° 37′ und 33° 0′ und durch die Declinationen 56° 33′ und 56° 44′ (1890·0) gegeben. Man findet hier 78 Sterne mit Helligkeiten von $6^m5$ bis $12^m5$, und die Summe dieser Helligkeiten ist nach der Rechnung $4^m6$. Berücksichtigt man nur die 38 Sterne von $6^m5$ bis $9^m8$ (welche Größenclasse in den Helligkeitsangaben von Oertel überhaupt am häufigsten vorkommt), so erhält man $4^m85$ und, wenn man nur

die 23 Sterne von $6^m5$ bis $9^m5$ in Rechnung zieht, den noch immer beträchtlichen Wert $5^m0$. Durch diese Zahl erscheint die in der Harvard Photometry für *h* Persei angegebene Helligkeit vollständig dargestellt.

Zu einem ähnlichen Resultat gelangt man durch die in der Ausmessung von Krueger[1] enthaltenen 43 Sterne, die übrigens im allgemeinen dieselben sind, welche auch in der B. D. vorkommen, und auch nicht wesentlich anders geschätzt sind, so dass also die schwächsten mit $9^m5$ bezeichnet sind (nur einer mit $9^m6$). Die Summe der Helligkeiten dieser Sterne ist nach der Rechnung $4^m3$. Werden die an den Rändern stehenden Sterne ausgeschlossen, so bleiben noch 35 übrig, deren Helligkeitssumme $4^m7$ ist. Will man als Helligkeitssumme $5^m0$ erhalten, so braucht man unter diesen nur die 20 helleren Sterne, nämlich außer den zwei hellsten Sternen $6^m5$ nur noch die Sterne von $8^m1$ bis $9^m1$ in Rechnung zu ziehen.

Übrigens liefert schon die dichtere Partie, nämlich die zwei Sterne $6^m5$ in Verbindung mit den innerhalb eines Umkreises von 5′ Durchmesser stehenden Sternen, unter denen drei Sterne neunter Größe und fünf Sterne $9^m5$ die helleren sind, die Helligkeit eines Sternes $5^m5$, also eine so bedeutende Helligkeit, dass durch dieselbe die allgemeine Angabe, dass die Helligkeit des Sternhaufens *h* zwischen der fünften und sechsten Größe liegt, dargestellt erscheint.

Ganz anders ist es in dieser Beziehung bei $\chi$ Persei. Hier sind die Sterne der dichteren Partie, die sich — nebenbei bemerkt — bis auf 1′ oder 2′ Differenz in derselben Declination wie die dichtere Partie von *h* Persei befindet, wesentlich schwächer, indem selbst der ansehnlichste nur die Helligkeit $8^m3$ hat und die Summierung der 11 hellsten ($8^m3$ bis $9^m6$) bloß $6^m3$ gibt. Man muss daher, um die Auffälligkeit dieses Cumulus für das bloße Auge darstellen zu können, auch noch weiter entlegene Sterne, insbesondere den mehr als 6′ nördlich stehenden hellsten Stern $6^m6$ und die nordöstlich stehenden

[1] Der Sternhaufen *h* Persei. Beobachtungen desselben am Bonner Heliometer nebst deren Berechnung, von A. Krueger. Helsingfors, 1865.

Sterne $7^m7$ und $8^m0$ in Rechnung ziehen und wird dadurch auf ein Gebiet von 12′ bis 15′ Durchmesser geführt, dessen äußerste Grenzen durch die Rectascensionen 33° 8′ und 33° 36′ und durch die Declinationen 56° 29′ und 56° 41′ (1870·0) gegeben sind. Nimmt man die genauere Abgrenzung des in Rechnung zu ziehenden Gebietes in der Weise vor, dass an den Rändern entweder nur helle Sterne oder Gruppen von schwächeren Sternen, also in keinem Falle vereinzelte schwächere Sterne stehen, so fallen von den auf der Karte von Vogel dargestellten 176 Sternen 73 weg und die übrigbleibenden 103 Sterne geben als Helligkeitssumme $4^m8$. Schließt man unter diesen die 80 schwächeren aus, so geben die jetzt noch übrigbleibenden 23, nämlich die Sterne von $7^m7$ bis $9^m6$ in Verbindung mit dem hellsten Stern $6^m6$ als Helligkeitssumme $5^m1$. Um die in der Harvard Photometry für $\chi$ Persei angegebene Helligkeit $5^m3$ zu erhalten, braucht man nur die 14 Sterne von $6^m6$ bis $9^m0$ in Rechnung zu ziehen. Und damit erscheint auch die allgemeine Angabe, dass die Helligkeit von $\chi$ Persei zwischen der fünften und sechsten Größe liegt, dargestellt.

Nahe zu demselben Resultat führt auch die Beobachtung dieses Sternhaufens von Pihl,[1] nach welcher man übrigens die südliche Grenze noch etwas weiter nach Süden, nämlich bis $\delta = +56° 26'$ rücken kann, so dass der Abstand zwischen der nördlichsten und der südlichsten Stelle 15′ beträgt.

Wenn nun so wie bei *h* Persei auch hier bei $\chi$ Persei untersucht wird, durch welche Sterne der Hauptlhelligkeitseindruck des Cumulus bewirkt wird, so zeigt sich, dass dies durch die Vereinigung des Lichtes der dichteren Partie ($6^m3$) mit dem des Sternes $6^m6$ geschieht. Die Helligkeitssumme dieser ein Gebiet von etwa 8′ umfassenden Vereinigung ist demnach $5^m7$, und auch von dieser Zahl kann man sagen, dass sie die Angabe, die Helligkeit des Cumulus liege zwischen der fünften und sechsten Größe, darstellt. Die anderen Sterne tragen zum Helligkeitseindrucke hauptsächlich in der Weise bei, dass sie den Cumulus für das Auge zu einem verschlungenen Sterngewebe machen.

[1] The stellar cluster $\chi$ Persei, micrometrically surveyed by O. A. L. Pihl. Christiania, 1891.

Nach diesen Darlegungen erscheint die hellste Partie bei $\chi$ Persei auf eine größere Fläche vertheilt als bei *h* Persei, hat aber eine geringere Flächenhelligkeit.

Die ungleichmäßige Vertheilung der Sterne und insbesondere die unsymmetrische Stellung der helleren Sterne gegen die aus schwächeren Sternen bestehende dichtere Partie gibt der Vermuthung Raum, dass die Sterne, welche zur Berechnung des Gesammthelligkeitseindruckes von $\chi$ Persei herangezogen worden sind, nicht durchgehends dieselben sind, welche die Gesammthelligkeit thatsächlich bewirken, und dass somit die erreichte Übereinstimmung der berechneten mit der beobachteten Gesammthelligkeit zum Theile nur eine zufällige ist. Das mag nun allerdings nicth nur hier, sondern auch bei anderen Sternhaufen vorkommen, kann sich aber im allgemeinen doch nur auf die isolierten und die schwächeren Sterne beziehen, auf deren Ausschließung ohnehin überall das Hauptaugenmerk gerichtet wird. Man wird übrigens, wenn hier trotz der unsymmetrischen Vertheilung der Sterne durch ausschließliche Berücksichtigung der helleren Sterne eine befriedigende Darstellung der Gesammthelligkeit erzielt werden konnte, eine solche Darstellung auch bei anderen Sternhaufen und insbesondere bei solchen, in denen die Sterne symmetrischer angeordnet sind, erwarten dürfen.

Wenn schließlich noch nach der Helligkeit des ganzen Cumulus *h* und $\chi$ Persei gefragt wird, so ist zu erwarten, dass sich dieselbe durch die directe Beobachtung größer ergibt als durch die Addition der beiden Einzelhelligkeiten, weil bei der Bestimmung derselben unter anderen die zwischenliegenden Sterne, welche die beiden Haufen miteinander verbinden und für das bloße Auge zu einem Ganzen machen und die daher auch den Gesammthelligkeitseindruck verstärken, außer acht gelassen worden sind. In der That erscheint bei der Beobachtung die ganze bis zu einer Länge von etwa 50′ ausgedehnte Sternwolke schon unter minder günstigen Sichtbarkeitsverhältnissen so auffallend wie der Stern vierter Größe $\eta$ Persei, unter günstigen aber noch wesentlich auffallender, nämlich zwischen $\gamma$ Persei ($3^m$) und $\eta$ Persei ($4^m$), und zwar näher der dritten als der vierten Größe, so dass als Maximum

ungefähr $3^m3$ angesetzt werden kann. Addiert man aber die Einzelhelligkeiten, z. B. $5^m0$ und $5^m3$, so erhält man als Helligkeitssumme nur $4^m4$, und selbst, wenn man die größeren Helligkeiten $4^m3$ und $4^m7$ in Rechnung zieht, so wird durch die Summe derselben, nämlich $3^m7$, die beobachtete Gesammthelligkeit noch immer nicht erreicht.

Es liegt nun nahe, die früher ausgeschlossenen zwischenliegenden Sterne mit zu berücksichtigen; ich habe jedoch, um ja nichts außer acht zu lassen und auch der Einfachheit halber, nicht nur die zwischenliegenden, sondern überhaupt sämmtliche Sterne der Ausmessungen von Oertel und Vogel, also auch die entlegeneren, ohne Rücksicht auf ihre Abstände in Rechnung gezogen. Man braucht dabei nicht zu befürchten, dass vielleicht ein Stern doppelt gezählt oder etwas Wesentliches weggelassen ist, weil die beiden Ausmessungen fast unmittelbar aneinander anschließen. Eigentlich wäre dazu eine einheitliche Aufnahme beider Sternhaufen sammt einer einheitlichen Bestimmung aller Sterngrößen am dienlichsten, doch habe ich eine solche nicht zur Verfügung gehabt.

Beschränkt man sich auf die 32 Sterne bis zur neunten Größe, von denen *h* Persei 17, $\chi$ Persei 15 enthält, so bekommt man als Helligkeitssumme $4^m1$, also die schon unter minder günstigen Verhältnissen beobachtete Gesammthelligkeit. Nimmt man auch noch die Sterne bis zur zehnten Größe hinzu, so dass von *h* Persei 71, von $\chi$ Persei 41, also zusammen 112 Sterne in Rechnung kommen, so erhält man $3^m7$, und wenn man sämmtliche 302 Sterne der beiden Ausmessungen in Rechnung zieht, $3^m4$.

Damit wäre nun die beobachtete Maximalhelligkeit $3^m3$ nahezu erreicht. Betrachtet man aber die Untersuchungen der anderen Sternhaufen, welche hier noch vorgeführt werden, so findet man, dass bei ihnen die durch die Summierung der einzelnen Sternhelligkeiten entstehende Helligkeitssumme fast ausnahmslos größer ist als der durch die Beobachtung gefundene Helligkeitseindruck, und es ergibt sich somit, dass *h*$\chi$ Persei zu diesen anderen Sternhaufen einen auffallenden Gegensatz bildet, indem bei ihm, selbst wenn sämmtliche Sterne, auch die schwächeren, in Rechnung gezogen werden,

die durch Summierung der Sternhelligkeiten berechnete Helligkeitssumme gewiss nicht größer, sondern eher noch kleiner ist als die beobachtete Gesammthelligkeit. Dieser Umstand wird bei der Erörterung der Frage, ob durch die Ausbreitung einer Lichtintensität auf eine größere Fläche der Helligkeitseindruck vergrößert oder verkleinert wird, seine muthmaßliche Erklärung finden.

4. Südlich von dem großen Doppelcumulus steht im Perseus noch ein anderer, dem bloßen Auge erkennbarer Sternhaufen, nämlich G. C. 584 (M. 34) [$2^h 36^m + 42^\circ 3$], dessen Helligkeitseindruck nicht weit von $5^m 7$ ist. In diesem Cumulus sind von Pihl[1] auf einem Gebiete, das sich in $\alpha$ von $2^h 31^m 8$ bis $2^h 35^m 3$, in $\delta$ von $+41^\circ 56'$ bis $42^\circ 26'$ (1865·0) erstreckt, 85 Sterne beobachtet worden. Diese würden den angegebenen Größen zufolge ($7^m 2$ bis $10^m 7$), welche sich an die der Bonner Durchmusterung anschließen, nach der Rechnung zusammen einen Stern von der Helligkeit $4^m 4$ liefern. Da diese Helligkeit im Vergleiche mit der beobachteten viel zu groß ist, so können bei der Sichtbarkeit des Cumulus für das freie Auge nicht alle diese Sterne mitwirken, und es zeigt sich in der That, dass das in Rechnung zu ziehende Gebiet bis auf etwa 7′ Durchmesser eingeengt werden darf. Man findet hier 13 Sterne mit Helligkeiten von $7^m 7$ bis $10^m 3$, und die Summierung derselben gibt $5^m 6$. Die schwächeren Sterne sind aber hier so wenig und stehen so isoliert, dass sie zum Gesammthelligkeitseindrucke so gut wie gar nichts mehr beitragen und daher von der Rechnung ausgeschlossen werden können. Werden demgemäß nur die neun helleren Sterne, nämlich zwei Sterne $7^m 7$, zwei Sterne $8^m 0$, drei Sterne $8^m 3$, je ein Stern $8^m 4$ und $8^m 7$ in Rechnung gezogen, so ergibt sich die von der früheren nicht wesentlich verschiedene Helligkeit $5^m 7$, und damit erscheint der beobachtete Helligkeitseindruck völlig dargestellt.

5. Vom Perseus gelangen wir, dem Zuge der Milchstraße nach Süden folgend, zum Fuhrmann, und hier werden wir zuerst den auffallendsten Cumulus, nämlich G. C. 1451 (W. H.

---

[1] Micrometric examination of stellar cluster in Perseus by O. A. L. Pihl. Christiania, 1869.

VIII, 71) ($6^h 40^m + 41^\circ.2$] untersuchen, welcher zwar nicht bei Argelander, wohl aber bei Heis vorkommt und somit für schärfere Augen ohne Fernrohr zu erkennen ist. Diese bedeutende Auffälligkeit können aber nicht ausschließlich die Sterne des eigentlichen Cumulus — etwa sechs Sterne neunter Größe nebst einigen noch schwächeren — bewirken, da dieselben eine zur Erkennbarkeit für das bloße Auge unzureichende Helligkeitssumme geben, sondern es müssen noch entferntere helle Sterne in Betracht kommen, und zwar insbesondere der vorangehende B. D. $+41^\circ 1501$ ($8^m.5$), der südlich stehende $+41^\circ 1516$ ($8^m.5$) und der nördlich stehende $+41^\circ 1513$ ($8^m.0$), der letztere schon deshalb, weil Heis die Position dieses Sternes als Position des Cumulus angesetzt hat. Es ergibt sich durch diese Erweiterung der Grenzen ein Gebiet von ungefähr 20′ Durchmesser, welches sich in Rectascension von $6^h 36^m 42^s$ bis $6^h 38^m 29^s$, in Declination von $+41^\circ 7'$ bis $41^\circ 27'$ (1855·0) erstreckt und neun hellere Sterne enthält, nämlich einen Stern $8^m.0$, zwei Sterne $8^m.5$, einen Stern $8^m.9$, drei Sterne $9^m.0$ und zwei Sterne $9^m.1$, außerdem als schwächere Sterne einen Stern $9^m.3$, vier Sterne $9^m.4$ und sechs Sterne $9^m.5$. Addiert man diese Helligkeiten, so erhält man als Summe $5^m.8$ und, wenn man die schwächeren Sterne nicht berücksichtigt, $6^m.3$. Durch dieses Resultat erscheint nicht nur der Umstand dargestellt, dass der Cumulus zwar bei Heis, aber nicht bei Argelander vorkommt, sondern auch die in der Harvard Photometry angegebene, aus Schätzungen abgeleitete Helligkeit $6^m.4$. Dagegen kann die andere, in der Harvard Photometry angegebene, aus Messungen abgeleitete wesentlich größere Helligkeit $5^m.34$ durch diese Sterne in keiner Weise erklärt werden, und man müsste, um diese bedeutende Helligkeit darzustellen, noch viel weiter südlich stehende helle Sterne mitrechnen. Das ist übrigens der einzige Fall, dass in der Harvard Photometry die durch Messungen gefundene Helligkeit eines Sternhaufens größer ist als die durch Schätzungen gefundene.

6. Der ebenfalls im Fuhrmann stehende Cumulus G. C. 1119 (M. 38) [$5^h 22^m + 35^\circ.7$] ist ein Beispiel dafür, dass nicht jeder Sternhaufen bei Betrachtung mit schwächeren optischen Mitteln eine einzige Gruppe bleibt, die schließlich als Ganzes unsichtbar

wird, sondern dass es auch Sternhaufen gibt, welche bei Betrachtung mit schwächeren Instrumenten in mehrere Gruppen zerfallen, die einzeln schwächer und unabhängig voneinander unsichtbar werden.

Der Helligkeitseindruck dieses Sternhaufens lässt sich wegen der erwähnten Gruppenbildung und auch darum, weil der gegen 15′ betragende scheinbare Durchmesser im Vergleiche zu der geringen Helligkeit der einzelnen Sterne schon zu groß, also die Helligkeit im Vergleiche zu der Größe der Fläche zu gering ist, durch das oben dargelegte Verfahren nicht mit Sicherheit ermitteln, kann aber, da der Cumulus weder bei Argelander, noch bei Heis vorkommt, gewiss nicht die sechste Größe übersteigen und dürfte wahrscheinlich nicht einmal bis $6^1/_2{}^m$ reichen. Die Rechnung nach den von Matthiessen[1] beobachteten 35 Sternen gibt aber, auch wenn der am Rande stehende hellste Stern $8^m5$ ausgeschlossen wird und demnach nur 34 Sterne mit den Helligkeiten von $9^m3$ bis $10^m9$ berücksichtigt werden, als Helligkeitssumme den wesentlich bedeutenderen Wert $5^m8$. Der Grund dieser großen Differenz liegt nun darin, dass die Sterne zu wenig gedrängt stehen, und dass infolge dessen, wenn der Cumulus mit schwächeren Instrumenten betrachtet wird, nicht nur an den Rändern, sondern auch im Inneren Sterne unsichtbar werden, und der Cumulus in mehrere Partien, gewissermaßen in mehrere Sterngruppen zerfällt, von denen jede für sich einen eigenen Helligkeitseindruck hervorruft, aber auch, da sie mit den anderen nicht hinlänglich verbunden ist, jede für sich unsichtbar wird, ohne sich mit den anderen zu einer einzigen Gruppe vereinigt und somit verstärkt zu haben. Solcher Gruppen sind hier mindestens drei und bei schärferer Unterscheidung sogar sechs zu erkennen; ihre Helligkeiten, die wesentlich sicherer bestimmt werden können als die des ganzen Cumulus, liegen zwischen $7^m7$ und $8^m4$, also nicht weit von $8^m0$, und dieser Mittelwert kann als durchschnittliche Flächenhelligkeit des Cumulus angesehen werden.

Dieser Cumulus nimmt also zwischen den dicht gedrängten und den weit zerstreuten Sternhaufen eine Mittelstellung ein;

[1] Veröffentlichungen der Großherzoglichen Sternwarte zu Karlsruhe. IV.

während die ersteren bei Betrachtung mit schwächeren optischen Mitteln als Ganzes unsichtbar werden und bei den letzteren die Sterne einzeln verschwinden, werden sie hier gruppenweise unsichtbar.

7. Der in der Nähe dieses Objectes stehende Cumulus G. C. 1166 (M. 36) [$5^h 30^m + 34^\circ 1$] ist bezüglich seines Helligkeitseindruckes zwischen $6^1/_2{}^m$ und $7^m$. Die Beobachtung desselben von Valentiner[1] erstreckt sich auf 36 Sterne mit Helligkeiten von $8^m 8$ bis $10^m 9$, die nach der Rechnung als Helligkeitssumme $5^m 9$ geben, also wieder mehr, als die beobachtete Gesammthelligkeit ist. Es zeigt aber schon der Anblick der beigegebenen Karte, dass bei dieser Rechnung die entfernteren, größtentheils vereinzelt stehenden Sterne ausgeschlossen werden müssen. Zieht man demgemäß nur die zwischen $\alpha = 5^h 27^m 42^s$ und $5^h 28^m 15^s$, $\delta = +34^\circ 1'$ und $34^\circ 7'$ (1875·0) befindlichen 24 Sterne in Betracht, so erhält man als Helligkeitssumme $6^m 3$. Zu derselben Summe gelangt man auch, wenn man statt der von Valentiner geschätzten Größen die von Oppenheim[2] aus photographischen Aufnahmen dieses Sternhaufens abgeleiteten Größenclassen in Rechnung zieht. Man kommt also durch diese Begrenzung dem beobachteten Helligkeitseindrucke schon recht nahe, kann ihn aber völlig darstellen ($H = 6^m 6$), wenn man die isoliert stehenden schwächeren Sterne ausschließt und nur die 12 helleren Sterne ($8^m 8$ bis $10^m$), welche sich auf einer Fläche von 6′ bis 7′ Durchmesser befinden, in Rechnung zieht.

8. Wir untersuchen jetzt den bei Argelander und Heis vorkommenden ziemlich dicht gedrängten Cumulus im Sternbild der Zwillinge G. C. 1360 (M. 35) [$6^h 3^m + 24^\circ 4$]. Sein Helligkeitseindruck ist nicht weit von $5^1/_2{}^m$, nach den Schätzungen der Harvard Photometry $5^m 2$. Die Ausmessung dieses Sternhaufens von Rebeur-Paschwitz[3] erstreckt sich auf 113 Sterne, die bezüglich ihrer Positionen auf das Gebiet von $\alpha = 6^h 1^m 18^s$ bis $6^h 3^m 24^s$, $\delta = +24^\circ 7'$ bis $24^\circ 36'$ (1887·0) und bezüglich

[1] Astronomische Beobachtungen auf der Großherzoglichen Sternwarte zu Mannheim. III.

[2] Publicationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien. III.

[3] Veröffentlichungen der Großherzoglichen Sternwarte zu Karlsruhe. III.

ihrer Helligkeiten auf das Intervall von $8^m$ bis $12^m$ vertheilt sind. Ihre Helligkeitssumme ist $5^m2$, welcher Wert zufällig mit der Angabe der Harvard Photometry ganz übereinstimmt. Will man als Helligkeitssumme $5^m5$ erhalten, so braucht man nur die 42 Sterne von $8^m1$ bis $10^m3$ in Rechnung zu ziehen. 20 dieser Sterne kommen auch in der Bonner Durchmusterung vor, und es ist daher Gelegenheit zu einer Vergleichung der Helligkeiten geboten. Addiert man die Helligkeiten dieser 20 Sterne, so erhält man als Helligkeitssumme nach den Angaben der B. D. $5^m8$, nach den Schätzungen des genannten Beobachters $6^m0$, also hier eine etwas geringere Helligkeit, was aber seinen Grund zum Theile gewiss darin hat, dass in der B. D. die Größen der Sterne schon mit $9^m5$ abschließen, obwohl manche derselben wesentlich schwächer sind, und in der That kommen unter diesen 20 Sternen 9 vor, die in der genannten Publication schwächer als $9^m5$ und zum Theile sogar schwächer als $10^m0$ geschätzt sind. Jedenfalls geht aus diesen Zahlen hervor, dass man zur Darstellung einer bedeutenden Auffälligkeit dieses Cumulus, d. h. zur Darstellung einer Helligkeit von mindestens $5^1/_2{}^m$, mit den Sternen der B. D. nicht ausreicht, sondern noch schwächere in Rechnung ziehen muss, und dieses Einbeziehen von schwächeren Sternen erweist sich besonders nothwendig, wenn die zwei nördlich stehenden Sterne B. D. $+24°$ 1127 und 1128, die wohl kaum mehr zum Cumulus gerechnet werden dürfen, ausgeschlossen werden. Der Sternhaufen wird dadurch auf ein Gebiet von wenig mehr als 20′ Durchmesser reduciert, und man hat hier, um als Helligkeitssumme $5^1/_2{}^m$ zu erhalten, außer den zwei helleren Sternen $8^m1$ und $8^m4$ die von $8^m8$ bis $10^m5$, ungefähr 45 an der Zahl, in Rechnung zu ziehen.

9. und 10. Über die Plejadengruppe [$3^h 42^m + 23°8$] habe ich schon an einer anderen Stelle[1] bemerkt, dass sie bezüglich ihrer Wahrnehmbarkeit zwischen der ersten und zweiten Größe liegt und dass der Rechnung zufolge die 69 helleren Sterne bis $9^m2$ als Helligkeitssumme $1^m8$ und schon die sechs hellsten

---

[1] Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 33. Jahrgang (1898), S. 271.

Sterne für sich allein $2^m1$ geben. Nach den Potsdamer Messungen ist die Helligkeitssumme dieser sechs Sterne $2^m0$. An derselben Stelle ist auch über die Krippe im Krebs [$8^h 34^m + 20°2$] bemerkt, dass ihre Wahrnehmbarkeit nicht weit von der vierten Größe ist, und dass dieser Helligkeitseindruck durch die 45 helleren Sterne, wie sie in der Abhandlung von Schur enthalten sind, dargestellt wird; es soll hier nur noch hinzugefügt werden, dass schon die 26 helleren Sterne (von $7^m0$ bis $8^m5$) als Helligkeitssumme $4^m1$ und die 15 hellsten, die von $7^m0$ bis $8^m0$ vertheilt sind, $4^m4$ geben, welche Zahl noch immer die Angabe von Houzeau darstellt, dass die Helligkeit der Praesepe zwischen der vierten und fünften Größe liegt.

11. Der zweithellste Sternhaufen im Krebs, G. C. 1712 (M. 67) [$8^h 46^m + 12°2$], kommt bei Heis, aber nicht bei Argelander vor und ist demgemäß für schärfere Augen ohne Fernrohr zu erkennen. In diesem Cumulus sind von Koch[1] 37 Sterne beobachtet worden, die bezüglich ihrer Positionen auf ein Gebiet von $\Delta\alpha = 56^s$, $\Delta\delta = 16'$ und bezüglich ihrer Helligkeiten auf das Intervall von $8^m$ bis $11^m$ vertheilt sind. Sie geben als Helligkeitssumme $5^m4$ oder, wenn der am östlichen Rande stehende hellste Stern $8^m0$ und die vereinzelt stehenden schwächeren Sterne ausgeschlossen werden, $5^m6$, und dieses Resultat kommt der in der Harvard Photometry angegebenen Helligkeit $5^m63$ so nahe, dass man wohl die hier abgegrenzte mit der dort photometrisch bestimmten Sterngruppe identificieren darf. Das in der Bonner Durchmusterung unter $+20°$ 1926 als »neb« angegebene Object ist die Stelle des Cumulus, an welcher die hellsten Sterne verhältnismäßig nahe aneinander stehen, insbesondere ein Stern $8^m5$, ein Stern $8^m7$ und zwei Sterne $8^m8$, welche vier Sterne allein schon die Helligkeit eines Sternes $7^m2$ geben. Rechnet man noch die neun Sterne bis zur Helligkeit $9^m7$ hinzu, welche von dieser dichtesten Stelle um $\pm 16^s$ in Rectascension und $\pm 4'$ oder $5'$ in Declination abstehen, so erhält man als Gesammthelligkeit dieser 13 Sterne $6^m3$, welches Resultat ganz befriedigend den Umstand darstellt, dass dieser Cumulus bei Heis, aber nicht bei Argelander vorkommt.

[1] Mikrometrische Vermessung des Sternhaufens Herschel 1712. Leipzig, 1876.

12. Im Sternbild Monoceros befindet sich außer der schon früher erwähnten, für das bloße Auge erkennbaren, aber nur aus wenigen Sternen bestehenden Gruppe auch noch ein anderer mit bloßen Augen sichtbarer, aber viel reicherer Sternhaufen, nämlich G. C. 1637 (W. H. VI, 22) [$8^h 9^m$—5°5]. Für diesen sind in der Uranometria Argentina, wo er aber zur Hydra gerechnet ist, 12 Sterne angegeben, die in der Rectascension auf $2^m 42^s$, in der Declination auf 32′ vertheilt sind und auf Grund der dort angesetzten Helligkeiten ($7^1/_2{}^m$ bis $8^1/_2{}^m$) als Helligkeitssumme $5^m5$ geben. In der Bonner Durchmusterung und ebenso im Argentinischen General-Catalog sind die meisten dieser Sterne wesentlich schwächer geschätzt. Nach den Größenangaben der B. D. ($7^m5$, $8^m0$ bis $9^m1$) ergibt sich als Helligkeitssumme $5^m8$, also um $0^m3$ weniger, wodurch aber noch immer dem Umstande Genüge geleistet wird, dass dieser Cumulus bei Heis und bei Argelander vorkommt. Im A. G. C., S. 620 ist das Gebiet des Cumulus in Rectascension auf $4^m 2^s$, in Declination auf 34′ erweitert und dementsprechend eine größere Zahl von Sternen beobachtet, nämlich 30, von denen der hellste mit $8^m$, der schwächste mit $10^1/_4{}^m$ bezeichnet ist. Diese geben als Helligkeitssumme $5^m2$. Zieht man nur die 16 Sterne von $8^m$ bis $9^m$ in Rechnung, so erhält man als Helligkeitssumme $5^m6$, und somit erscheint der beobachtete Helligkeitseindruck, welcher in der Nähe von $5^1/_2{}^m$ liegt, durch die Helligkeitsangaben eines jeden dieser drei Sternverzeichnisse dargestellt.

Es sei hier noch beigefügt, dass ich den von Messier unter Nr. 48 beschriebenen, aber am Himmel in der angegebenen Position nicht auffindbaren Sternhaufen im Einhorn mit dem Cumulus G. C. 1637 identificieren möchte, indem die Rectascension völlig stimmt und bezüglich der Declination nur anzunehmen ist, dass im Messier'schen Nebelverzeichnisse, wie man es z. B. in der Connaissance des Temps, 1787 findet, statt —5° 6′ irrthümlich —1° 16′ gedruckt ist, was mir bei der Form, in der die Franzosen die Ziffer 5 zu schreiben pflegen, sehr leicht möglich erscheint.

13. Ein dritter im Monoceros befindlicher, aber mit bloßen Augen nicht mehr erkennbarer Sternhaufen G. C. 1483 (M. 50)

[$6^h58^m$—$8^\circ2$] erinnert an das Verhalten des Cumulus im Fuhrmann M. 38, nämlich dadurch, dass er bei Betrachtung mit schwächeren optischen Mitteln nicht als Ganzes verschwindet, sondern in zwei Partien zerfällt, von denen jede für sich unsichtbar wird. Die nördliche dieser Partien wird hauptsächlich aus den drei Sternen B. D. —8° 1701 ($8^m9$), 1703 ($8^m9$) und 1706 ($8^m4$) gebildet, zu welchen noch zwei Sterne mit den Helligkeiten $9^m3$ und $9^m5$ gerechnet werden können, so dass die Helligkeitssumme $7^m2$ wird. Zu der 8′ südlicher befindlichen Partie kann außer dem Stern B. D. —8° 1699 ($7^m9$) noch ein Stern $9^m1$ sammt zwei Sternen zehnter Größe gerechnet werden, so dass sich hier als Helligkeitssumme $7^m4$ ergibt. Und das sind auch ungefähr die Helligkeiten, welche sich bei der directen Beobachtung ergeben.

14. Der bei Argelander und Heis vorkommende Cumulus im Schiff Argo G. C. 1551 (W. H. VIII, 38) [$7^h32^m$—$14^\circ3$] ist für das freie Auge so gut wie ein Stern fünfter Größe zu erkennen. Nach der Uranometria Argentina (Puppis) entsteht der nebelige Gesammthelligkeitseindruck dieser Gruppe durch das Zusammenwirken von vier Sternen, unter denen drei einander verhältnismäßig nahe stehen ($\Delta\alpha = 37^s$, $\Delta\delta = 3'$), während der vierte in Rectascension um eine Zeitminute entfernt ist. Ihre Helligkeiten sind nach der Uranometria Argentina $6^m0$, $7^m0$ (ein Doppelstern), $7^m0$, $7^m3$, nach der südlichen Bonner Durchmusterung in derselben Reihenfolge $6^m9$, ($8^m0$, $8^m0$), $8^m0$, $7^m5$, so dass sich als Helligkeitssumme dort $5^m2$, hier aber nur $5^m8$ ergibt. Es scheint nun, dass zu der beobachteten Gesammthelligkeit auch noch andere, insbesondere schwächere und in $\delta$ weiter abstehende Sterne beitragen, und man findet innerhalb der in diesem Sinne erweiterten Grenzen, nämlich zwischen $\alpha = 7^h29^m24^s$ und $7^h30^m59^s$, $\delta = -14^\circ 0'$ und $-14^\circ 23'$ (1855·0), in der Bonner Durchmusterung 15 Sterne von $6^m9$ bis $9^m0$, die als Helligkeitssumme $5^m2$ geben. Benützt man die zu Cordoba (Argentina) gemachten photographischen Aufnahmen,[1] so findet man hier 17 Sterne von $6^1/_2{}^m$ bis $9^m$, die

[1] Cordoba Photographs. Photographic observations of star-clusters ... Lynn, Mass. 1897.

als Helligkeitssumme $4^m9$ geben; zieht man nur die 10 Sterne von $6^1/_2{}^m$ bis $8^1/_2{}^m$ in Rechnung, so erhält man $5^m1$. Es wird also durch die Resultate dieser letzten Summierungen die beobachtete Gesammthelligkeit so gut wie vollständig dargestellt.

Es dürfte nicht unangebracht sein, hier darauf hinzuweisen, dass man durch die von Glasenapp in diesem Cumulus gemessenen 13 Sterne (Observations astronomiques, deuxième série des mesures d'étoiles doubles) fast zu demselben Resultat gelangt, aber nur infolge von beträchtlichen Differenzen, die sich im Schlussresultat größtentheils aufheben. Addiert man die Helligkeiten dieser 13 Sterne nach den von diesem Beobachter angegebenen Größen, so erhält man $4^m7$, ein Resultat, welches die bedeutende Auffälligkeit des Cumulus in einem solchen Grade darstellt, dass man von dieser Darstellung beinahe überrascht ist. Bei näherer Betrachtung findet man aber, dass sich diese Ausmessung nur auf ein Gebiet von 5′ Durchmesser erstreckt und dass unter anderen der in Rectascension vorangehende hellste Stern der Gruppe gar nicht berücksichtigt ist. Dass aber trotzdem die Summe der Helligkeiten eine so bedeutende ist, hat seinen Grund darin, dass die Sterne ganz anders und meist viel heller geschätzt sind. So ist als Helligkeit der beiden Componenten des erwähnten Doppelsternes $6^m4$, beziehungsweise $6^m6$ angegeben, während diese Sterne nach der südlichen Durchmusterung und nach dem Argentinischen General-Catalog nur von der achten Größe sind. Es muss daher die anscheinend gute Darstellung durch die von diesem Beobachter angegebenen Sterngrößen einem besonderen Zufalle zugeschrieben werden.

15. Der südlichste Sternhaufen in dieser Himmelsgegend, der hier noch untersucht werden soll, ist der für das bloße Auge sichtbare Cumulus im Großen Hund, G. C. 1454 (M. 41) [$6^h42^m$—20°6]. Seine Helligkeit ist nach Houzeau $5^m$, nach der Uranometria Argentina $5^1/_2{}^m$. Zur Berechnung erscheinen die Resultate der Cordoba Photographs sehr geeignet, doch ist es, da die Aufnahme weit über den eigentlichen Cumulus hinausgeht, vorerst nothwendig, das in Rechnung zu ziehende Gebiet in bestimmter Weise abzugrenzen. Zu diesem Zwecke

kann als Anhaltspunkt benützt werden, dass der südöstlich stehende Stern sechster Größe jedenfalls nicht mehr zum Cumulus gehört, und nach dieser Feststellung ist schon so viel sicher, dass man von dem mittleren Stern, dessen Position $\alpha = 6^h 40^m 45^s$, $\delta = -20° 37'4$ (1875·0) ist, nicht über eine Zeitminute in Rectascension und 10′ in Declination hinausgehen darf. Man findet auf diesem Gebiete 61 Sterne von $8^m$ bis $10^1/_4{}^m$, deren Helligkeitssumme nach der Rechnung $4^m7$ ist. Werden nur diejenigen Sterne in Rechnung gezogen, welche auch in der südlichen Durchmusterung vorkommen, so ist die Zahl derselben 36 und ihre Helligkeitssumme sowohl nach den Angaben der Durchmusterung ($7^m6$ bis $9^m9$), als auch nach denen der Cordoba Photographs ($8^m$ bis $9^3/_4{}^m$) fast übereinstimmend $5^m0$. Werden auch die Sterne ausgeschlossen, welche schwächer als neunter Größe sind, so geben die übrigbleibenden helleren Sterne, nämlich die 15 Sterne der Durchmusterung von $7^m6$ bis $9^m0$ oder die 19 Sterne der Cordoba Photographs von $8^m$ bis $9^m$ als Helligkeitssumme $5^m5$, stellen also den in der Uranometria Argentina angegebenen Helligkeitseindruck völlig dar. Man kann die hier angenommenen Grenzen noch enger ziehen, ohne dass eine große Anzahl von Sternen wegfallen würde, aber wesentlich weiter als bis zu den Dimensionen $\Delta\alpha = 65^s$, $\Delta\delta = 16'$, also bis auf 15′ oder 16′ Durchmesser wird man das Gebiet nicht einengen dürfen, wenn die Sichtbarkeit des Cumulus für das bloße Auge noch dargestellt werden soll.

16. Wir werden nun einige Sternhaufen betrachten, welche den die Sternbilder Sagittarius und Scorpius berührenden Zug der Milchstraße begleiten, und beginnen zu diesem Zwecke mit dem bei Argelander und Heis vorkommenden Cumulus im Schwan, G. C. 4681 (M. 39) [$21^h 28^m + 48°1$]. Er ist dem bloßen Auge fast so auffallend wie ein Stern der fünften Größe. Was seine Dimensionen betrifft, so scheint es, dass die Sichtbarkeit für das bloße Auge durch die zwischen $\alpha = 21^h 25^m 6^s$ und $21^h 27^m 4^s$, $\delta = +47° 38'$ und $48° 4'$ (1855·0) stehenden Sterne zustande kommt. Es befinden sich hier 23 Sterne von $6^m3$ bis $9^m5$, die aber, da sie als Helligkeitssumme $4^m5$ geben, bei der Sichtbarkeit für das bloße Auge gewiss nicht alle zur

Wirksamkeit gelangen. Berücksichtigt man nur die neun Sterne von $6^m3$ bis $8^m2$, so erhält man als Helligkeitssumme $4^m8$ und selbst wenn man sich auf die fünf Sterne von $6^m3$ bis $7^m4$ beschränkt, die noch immer beträchtliche Helligkeit $5^m0$. Es erscheint also auch hier der beobachtete Helligkeitseindruck schon durch die helleren Sterne vollständig dargestellt.

17. Der Sternhaufen im Ophiuchus, G. C. 4410 (W. H. VIII, 72) [$18^h 22^m + 6°5$] ist in der Uranometria Argentina, wo er zum Sternbild Serpens gerechnet ist (Cauda Nr. 42), mit der Helligkeit $6^1/_2{}^m$ bezeichnet, kann jedoch, da er bei Argelander und Heis vorkommt, auch mit bloßen Augen erkannt werden und ist in der That fast so gut zu sehen wie ein Stern der fünften Größe. Die bedeutende Differenz zwischen diesen Angaben lässt vermuthen, dass bei der erstgenannten Beobachtung nur die dichteste Partie des Cumulus, bei den anderen dagegen auch die angrenzende, minder dichte, in Betracht gekommen ist, und diese Vermuthung wird durch die Anordnung der Sterne sehr wahrscheinlich gemacht.

Der Cumulus hat eine längliche Form und erstreckt sich von Südwest gegen Nordost, wobei die Sterne im allgemeinen so vertheilt sind, dass sie nur in der südwestlichen Partie enger beisammen stehen, in der nordöstlichen dagegen weiter auseinander liegen. Es lässt sich daher von vornherein nicht sagen, ob bei der Sichtbarkeit des Cumulus für das bloße Auge diese letzteren Sterne noch mitwirken oder nicht, und diese Unsicherheit scheint sich nun in den Differenzen zwischen den Angaben der Gesammthelligkeit auszusprechen.

Zur Berechnung habe ich hauptsächlich die Ausmessung dieses Sternhaufens von Valentiner[1] benützt, welche sich auf 71 Sterne erstreckt, die auf das Gebiet von $\alpha = 18^h 20^m 5^s$ bis $18^h 22^m 39^s$, $\delta = +6° 16'$ bis $6° 49'$ (1875·0) und bezüglich ihrer Helligkeit auf das Intervall von $8^m2$ bis zur 11. Größe vertheilt sind. Die Helligkeitssumme dieser Sterne ist $4^m9$. Werden nur die 40 Sterne von $8^m2$ bis $9^m9$ in Rechnung gezogen, also die 31 schwächeren von $10^m0$ an ausgeschlossen,

[1] Astronomische Beobachtungen auf der Großherzoglichen Sternwarte zu Mannheim. III.

so ergibt sich $5^m1$. Diese letztere Helligkeitssumme erhält man auch, wenn man die in der Bonner Durchmusterung vorkommenden 39 Sterne mit den daselbst angegebenen Helligkeiten ($8^m4$ bis $9^m5$) in Rechnung zieht. Werden die nordöstlichen und die wenigen im Nordwesten und Südosten stehenden Sterne ausgeschieden, so geben die jetzt noch übrigbleibenden, auf ein Feld von ungefähr 20′ Durchmesser vertheilten 44 Sterne als Helligkeitssumme $5^m3$. Werden hier nur die 32 Sterne von $8^m4$ bis $10^m0$ in Rechnung gezogen, so erhält man $5^m4$. Ganz dasselbe Resultat geben auch die 34 auf das Helligkeitsintervall von $8^m5$ bis $10^m0$ vertheilten Sterne der Ausmessung von Nijland,[1] welche gegen Norden und Osten weniger weit reicht und somit nur die dichtere Partie des Cumulus umfasst.

Es wird also durch jedes dieser Resultate die Sichtbarkeit des Cumulus für das bloße Auge hinreichend dargestellt. Was aber die in der Uranometria Argentina zu $6^1/_2{}^m$ angegebene Helligkeit betrifft, so scheinen bei der Bestimmung derselben nur die den dichtesten Theil der südwestlichen Partie bildenden sechs bis zehn Sterne mit den Helligkeiten von $8^m4$ bis $9^m0$ oder $9^m3$ in Betracht gekommen zu sein.

18. Der nordöstlich von β Ophiuchi stehende Sternhaufen [$17^h41^m+5°7$] hat nach Houzeau die Helligkeit $6^m$, nach der Harvard Photometry $5^m9$. In der Uranometria Argentina ist an dieser Stelle eine Gruppe von neun Sternen $7^1/_4{}^m$ bis $8^1/_4{}^m$ zusammengefasst und als Helligkeit wie bei Houzeau die sechste Größe angegeben. Die Addition der Helligkeiten dieser Sterne gibt zwar die bedeutendere Helligkeit $5^m5$, doch kann man der beobachteten leicht etwas näher kommen, wenn man zwei Sterne achter Größe, nämlich den ersten und den letzten, die wegen zu großen Abstandes von der Hauptgruppe bei der Sichtbarkeit für das bloße Auge ohnehin kaum mehr mitwirken, weglässt. Die Dimension des Cumulus wird dadurch, während sie in der Declination dieselbe bleibt, nämlich 15′, in der Rectascension von $4^m28^s$ auf $1^m55^s$ reduciert, und die hier befindlichen sieben Sterne geben als Helligkeitssumme $5^m7$. Werden für die neun Sterne die Größenangaben der Bonner Durch-

[1] Uitmeting van den Sterrenhoop G. C. 4410. Utrecht, 1897.

musterung benützt, so ergibt sich als Helligkeitssumme $5^m4$ und wenn die zwei entlegeneren Sterne weggelassen werden, $5^m6$. Man kann also die beobachtete Helligkeit durch diese Rechnung bis auf eine Differenz von $0^m2$ oder $0^m3$ darstellen.

19. Wir betrachten jetzt den bei Argelander und Heis nicht vorkommenden ziemlich reichen und gedrängten Sternhaufen im Sobieski'schen Schild, G.C. 4437 (M. 11) [$18^h46^m$—$6^\circ4$], für welchen in der Uranometria Argentina die siebente Größe angegeben ist. Zu diesem Helligkeitseindrucke trägt jedoch in einem bedeutenden Grade der weitaus hellste Stern der Gruppe, nämlich B. D. —6° 4929 ($8^m8$), bei. Zur Berechnung der Helligkeiten aus den einzelnen Sternen können die Arbeiten von Helmert[1] und Stratonoff[2] benützt werden. Die erstere erstreckt sich auf 200 Sterne, von denen der Beobachter die schwächsten mit der Helligkeitszahl 12, den hellsten mit 9 bezeichnet hat. Addiert man die Helligkeiten aller dieser Sterne, wie sie angegeben sind, so erhält man als Summe $5^m2$, also weit mehr, als die beobachtete Gesammthelligkeit beträgt, und diese Helligkeitssumme wird auch durch die Ausscheidung der an den Rändern befindlichen Sterne, wodurch die Dimension des Cumulus auf 4′ bis 5′ in Rectascension und auf 3′ bis 4′ in Declination reduciert wird, nicht bis zu der angegebenen Größe vermindert, indem die Helligkeitssumme der jetzt noch übrigbleibenden, den dichteren Theil des Cumulus bildenden Sterne den noch immer beträchtlichen Wert $5^m5$ bis $5^m6$ hat. Der Verfasser hebt zwar hervor, dass seine Bestimmung der Sternhelligkeiten nur als eine relative aufzufassen ist und seine Zahlen mit den üblichen Größenclassen nicht identisch sind, doch kann dieser Umstand nicht die Hauptursache der hier auftretenden bedeutenden Differenz sein, was man besonders daraus ersieht, dass die von Stratonoff nach photographischen Aufnahmen dieses Cumulus bestimmten Sterngrößen die Gesammthelligkeit nicht schwächer, sondern

---

[1] Der Sternhaufen im Sternbilde des Sobieski'schen Schildes, von F. R. Helmert. Publicationen der Hamburger Sternwarte, Nr. 1 (1874).

[2] Amas stellaire de l'écu de Sobieski (Messier 11) d'après des mesures photographiques par W. Stratonoff. Publications de l'observatoire astronomique et physique de Tachkent. No. 1 (1899).

sogar noch größer geben. Sucht man nämlich aus den 862 Sternen dieser weit über den eigentlichen Cumulus hinausgehenden Vermessung diejenigen heraus, welche auch in der Aufnahme von Helmert vorkommen (198 Sterne), so findet man, während sich dort $I = 0 \cdot 00808$ und demnach $H = 5^m2$ ergeben hat, hier $I = 0 \cdot 01195$ und demnach $H = 4^m8$. Die Summe der Intensitäten $I$ ist also hier fast um die Hälfte größer als dort, aber trotzdem stimmen die beiden Resultate wenigstens in dem Sinne überein, dass nach dem einen, wie nach dem anderen Beobachter die aus der Gesammtheit der Sterne berechnete Helligkeit viel zu groß ist, als dass man sie als Darstellung der beobachteten ansehen könnte; denn wesentlich bedeutender als $6^1/_2{}^m$ kann, da der Cumulus nicht bei Argelander und nicht bei Heis vorkommt, der beobachtete Helligkeitseindruck gewiss nicht sein. Wollte man die Helligkeit $6^1/_2{}^m$ durch Benützung der Sterne sämmtlicher Helligkeitsgrade, also auch der schwächsten, darzustellen suchen, so müsste man sich auf ein Areal von kaum 2′ Durchmesser beschränken, was aber nicht zulässig ist, denn die Anordnung der Sterne zeigt, dass man mit dem Durchmesser des in Rechnung zu ziehenden Gebietes nicht viel unter 4′ heruntergehen darf, auf welchem Gebiete sich ungefähr $^6/_{10}$ der erwähnten 200, beziehungsweise 198 Sterne befinden. Unter diesen geben, wenn man die Größenbestimmungen von Stratonoff benützt, schon die 20 helleren, nämlich außer dem mit $8^m6$ bezeichneten hellsten Stern die Sterne von $9^m4$ bis $10^m0$ die Helligkeit $6^1/_2{}^m$, während man zur Erreichung dieses Resultates mit den Helligkeitsangaben von Helmert 30 Sterne, nämlich außer dem mit $9^m$ bezeichneten hellsten Stern noch die Sterne von $10^m2$ bis ungefähr $10^m7$ in Betracht zu ziehen hätte. Die Differenz zwischen den beiden Resultaten hat ihren Grund nicht nur in dem von Helmert hervorgehobenen Umstande, sondern auch darin, dass die photographisch bestimmten Größen mit den visuellen nicht identisch zu sein brauchen.

20. Am nördlichen Rande des Sagittarius bei ungefähr $\alpha = 18^h10^m2$, $\delta = -18° 40'$ (1855·0) befindet sich ein auch in unseren Breiten den bloßen Augen auffallender, und zwar mindestens so gut wie ein Stern fünfter Größe sichtbarer Stern-

haufen, dessen Componenten aber je nach der verschiedenen Auffassung anders gewählt werden müssen.

In der Uranometria Argentina sind für den Cumulus drei Sterne siebenter Größe angegeben, die aber, da ihre Helligkeitssumme nur $5^m8$ ist, keine bedeutende Auffälligkeit für das bloße Auge, sondern nur eine Sichtbarkeit unter günstigen Verhältnissen erwarten lassen.

Was bei Argelander und Heis als Position des Cumulus angegeben ist und auch hier angesetzt wurde, ist die Position des östlichsten der erwähnten drei Sterne, der — nebenbei bemerkt — ein Doppelstern (Struve, Cat. gen. 2074) ist. Diese Position legt die Vermuthung nahe, dass der Doppelstern ungefähr die Mitte der für das bloße Auge erkennbaren Sterngruppe einnimmt und dass demnach u. a. auch der noch 40′ östlicher, ziemlich isoliert stehende Stern sechster Größe hinzuzurechnen sei. Dadurch würde nun allerdings die Helligkeitssumme von $5^m8$ auf $5^m2$ erhöht, doch wird man diese Zahl wegen der großen Distanz des Sternes, obwohl Houzeau a. a. O., S. 9 einen Fall anführt, in welchem er zwei Sterne in einer noch größeren Distanz mit freien Augen vereinigt gesehen hat, nur als ein bloßes Rechnungsresultat betrachten dürfen.

Messier hat unter allen der von ihm beobachteten Nebelflecke und Sternhaufen für diesen (M. 24) den größten Durchmesser angegeben, nämlich 1° 30′, und in der That findet man hier auf einem Felde von diesen Dimensionen außer einigen Sternen siebenter und achter Größe, zu denen auch die drei erwähnten gehören, eine große Menge von Sternen neunter und zehnter Größe, die offenbar das sind, was Messier als grande nébulosité bezeichnet. Die von Messier angegebene Position, welche sich nach seiner Bemerkung auf die Mitte des Haufens bezieht, weist auf eine Stelle, die durch einen Stern neunter Größe ($\alpha = 18^h 8^m 8^s$, $\delta = -18° 24'$ für 1875·0) markiert erscheint, sonst aber nur relativ wenig Sterne enthält, aber trotzdem als die Mitte, wenigstens der Gruppe der schwächeren Sterne, angesehen werden kann, weil sie in Abständen von ungefähr 15′ bis 45′ fast ringsherum von Sternen neunter bis zehnter Größe umgeben ist. Diese sind

im Osten und Süden besonders zahlreich und hier auch noch um einige hellere Sterne vermehrt, unter denen sich nebst anderen die drei in der Uranometria Argentina genannten befinden, und diese Gruppe, welche sich in der Rectascension auf mindestens 45′, in der Declination auf mehr als 30′ erstreckt, ist diejenige, welche bei der Darstellung der großen Auffälligkeit des Cumulus jedenfalls in Rechnung gezogen werden muss. Sie enthält die folgenden zehn helleren Sterne, deren Helligkeiten hier nach der südlichen Bonner Durchmusterung, nach dem Argentinischen General-Catalog und nach den Aufnahmen Nr. 37 der Cordoba Photographs angesetzt und summiert sind. Die in der Uranometria Argentina als Componenten des Cumulus angegebenen drei Sterne sind mit U. A. bezeichnet.

| 1875·0 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\delta$ | B. D. | A. G. C. | Cord. Ph. | |
| $18^h\ 8^m 10^s$ | $-18°42'$ | $6^m8$ | $6^m5$ | $6\frac{3}{4}^m$ | |
| 8 51 | 18 50 | 8.6 | $8\frac{1}{4}$ | $8\frac{1}{4}$ | |
| 9 37 | 19 1 | 8·0 | $7\frac{1}{2}$ | $7\frac{3}{4}$ | |
| 9 17 | 18 51 | 8·6 | $8\frac{1}{4}$ | $8\frac{3}{4}$ | |
| 10 9 | 18 30 | 6·7 | 7 | 7 | U. A. |
| 10 30 | 18 51 | 7·3 | $7\frac{1}{4}$ | 7 | U. A. |
| 10 38 | 18 45 | 8·2 | $7\frac{3}{4}$ | 8 | |
| 11 3 | 18 31 | 8·2 | $7\frac{3}{4}$ | 8 | |
| 11 23 | 18 40 | 7·3 | $7\frac{1}{4}$ | $7\frac{1}{2}$ | } U. A. |
| 18 11 24 | —18 40 | 9·0 | 8 | $8\frac{1}{2}$ | } U. A. |
| Summe der Helligkeiten ... | | 5·1 | 4·9 | 5·1 | |

Durch dieses Resultat erscheint der beobachtete Helligkeitseindruck größtentheils dargestellt, und man braucht, wenn man ihn bis etwa $4^m7$ erhöht haben will, über das hier abgegrenzte Gebiet und die hier noch in Rechnung gezogenen schwächeren Sterne nicht mehr weit hinauszugehen.

Der von J. Herschel bei $\alpha = 18^h 10^m 2$, $\delta = -18°28'$ (1860·0) beobachtete Cumulus G. C. 4397 (»sehr reich, sehr gedrängt, rund, Sterne 15. Größe«) kann weder mit dem, was von Messier unter Nr. 24 beschrieben ist, noch mit der für

das bloße Auge erkennbaren Gruppe identificiert werden; er befindet sich der angegebenen Position zufolge nicht weit von dem achten der oben aufgezählten Sterne, scheint aber nur ein verhältnismäßig kleines Object zu sein, da er z. B. auf der erwähnten Karte Nr. 37 in Cordoba Photographs nicht mit Sicherheit nachzuweisen ist.

Es hat sich also hier unter anderem Folgendes ergeben. Was für das bloße Auge erkennbar ist (Cumulus im Sagittarius), was Messier beschrieben hat (M. 24) und was J. Herschel beobachtet hat (G. C. 4397), deckt sich nicht vollständig; jedes Object hat mit den anderen etwas gemeinsam, aber nicht alles.

21. Über die Sterngruppe Messier Nr. 25, in welcher sich u. a. der Veränderliche U Sagittarii [$18^h 26^m$—19°2] befindet, soll hier nur in Kürze bemerkt werden, dass die wenigen helleren Sterne zu zerstreut und die etwas gedrängter stehenden zu lichtschwach und zu wenig zahlreich sind, als dass sie durch Anwendung schwächerer optischer Instrumente zu einem bedeutenderen Gesammthelligkeitseindrucke vereinigt werden könnten. Es verschwinden vielmehr die helleren Sterne sammt der gedrängteren Partie einzeln für sich, und dieser Umstand macht es begreiflich, dass diese Gruppe, obwohl ihre Helligkeitssumme nach der Rechnung eine beträchtliche, nämlich $5^1/_2{}^m$ ist, in keinem jener Kataloge, welche die für das bloße Auge erkennbaren Gestirne enthalten, vorkommt.

22. und 23. Wir schließen diese Reihe mit den zwei großen Sternhaufen im Scorpion Messier Nr. 6 und 7. Sie kommen nicht bei Argelander und Heis, wohl aber in dem Atlas des südlichen gestirnten Himmels von Behrmann vor und können daher in größeren Höhen, als es bei uns möglich ist, mit bloßen Augen erkannt werden. Nach Houzeau ist der erste zwischen der fünften und sechsten Größe, der zweite von der fünften Größe. Beobachtungen der einzelnen Sterne finden sich im Argentinischen General-Catalog, in den Cordoba Photographs (Karte 35 und 36) und im 26. Bande der Annals of the astronomical observatory of Harvard College, und zwar gehen diese Beobachtungen, insbesondere die in der zuletzt genannten Publication enthaltenen, weit über die Grenzen der eigentlichen Sternhaufen hinaus. Es ist daher schon aus diesem Grunde zu

erwarten, dass bei jedem Cumulus die durch die Addition der Helligkeiten sämmtlicher Sterne entstehende Helligkeitssumme wesentlich bedeutender ist, als die beobachtete Gesammthelligkeit. Die Resultate dieser Summierungen ersieht man aus der folgenden Zusammenstellung, in welcher die drei Quellenwerke nach der Anzahl der in der betreffenden Aufnahme enthaltenen Sterne geordnet sind.

G. C. 4318 (Messier Nr. 6).

| | Grenzen | | Größen der Sterne | Zahl der Sterne | *I* | *H* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A. G. C. | $17^h 28^m\!.8$—31° 57′<br>17 34·9—32 27 | 1875·0 | $6^3/_4{}^m$ bis $10^m$ | 58 | 0·02401 | $4^m\!.0$ |
| Harvard Coll. | 17 31·5—30 27<br>17 39·8—33 39 | 1900·0 | 6·7 bis 10 | 90 | 0·03140 | 3·8 |
| Cordoba Ph. | 17 28·8—31 30<br>17 35·6—32 49 | 1875·0 | $6^3/_4$ bis $10^1/_4$ | 163 | 0·03786 | 3·6 |

G. C. 4340 (Messier Nr. 7).

| | Grenzen | | Größen der Sterne | Zahl der Sterne | *I* | *H* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cordoba Ph. | $17^h 41^m\!.9$—34° 5′<br>17 48·8—35 20 | 1875·0 | $7^1/_4{}^m$ bis $10^m$ | 133 | 0·04126 | $3^m\!.5$ |
| A. G. C. | 17 39·0—34 8<br>17 49·1—35 12 | 1875·0 | 6·8 bis 10 | 139 | 0·04898 | 3·3 |
| Harvard Coll. | 17 39·2—33 24<br>17 53·7—36 17 | 1900·0 | 6·8 bis 10 | 333 | 0·09275 | 2·6 |

Am weitesten erstreckt sich, wie man sieht, die zuletzt genannte Aufnahme des Sternhaufens Messier Nr. 7. Da als Summe der Intensitäten $I = 0\cdot09275$ gefunden wurde, während die der beobachteten Gesammthelligkeit $5^m$ entsprechende Intensität nur 0·01000 ist, so kann man, ohne diese Sterne, sei es auf einer Karte oder am Himmel selbst, gesehen zu haben, behaupten, dass bei der Sichtbarkeit dieses Sternhaufens für das bloße Auge nur der neunte Theil der Intensitäten, welche von den in diesem Verzeichnisse enthaltenen 333 Sternen geliefert werden, zur Wirkung gelangt.

Bis zu welcher Grenze das Gebiet eines jeden dieser beiden Sternhaufen eingeengt werden muss, damit der beobachtete Helligkeitseindruck dargestellt werden kann, lässt sich, abgesehen von der Betrachtung der betreffenden Sternkarten,

verhältnismäßig sicher aus der Uranometria Argentina entnehmen, deren Angaben hier als Ausgangspunkt dienen sollen.

Zum Sternhaufen Messier 6 sind in der Uranometria Argentina fünf Sterne gerechnet, deren Helligkeiten $6^m8$, $7^m$, $7^1/_4{}^m$ $7^1/_2{}^m$ und $7^3/_4{}^m$ sind, so dass also die Helligkeitssumme $5^m5$ ist. Die Positionen dieser Sterne sind durch die Rectascensionen $17^h31^m28^s$ und $17^h32^m50^s$ und durch die Declinationen $-32°5'$ und $-32°15'$ (1875·0) begrenzt, so dass sich also das Gebiet auf $1^m22^s$, beziehungsweise $10'$ erstreckt. Im Argentinischen General-Catalog befinden sich innerhalb dieser Grenzen 30 Sterne von $6^3/_4{}^m$ bis $9^3/_4{}^m$; sie geben als Helligkeitssumme $4^m6$, also im Vergleiche mit der beobachteten Gesammthelligkeit zu viel. Schließt man die schwächeren Sterne aus, so geben die übrigbleibenden 20 Sterne von $6^3/_4{}^m$ bis $9^m$ als Helligkeitssumme $4^m7$, die 11 Sterne von $6^3/_4{}^m$ bis $8^1/_2{}^m$ als Summe $5^m0$ und die fünf hellsten Sterne, nämlich je ein Stern $6^3/_4{}^m$ und $6^m8$ und drei Sterne $7^1/_4{}^m$ als Summe $5^m3$. Wollte man, um auch noch einen weiter südlich stehenden Stern $7^3/_4{}^m$ zu berücksichtigen, die Grenzen der Declinationen von $10'$ auf $17'$ erweitern, so würden nur noch drei Sterne in Rechnung zu ziehen sein, die aber an dem Wesen dieser Darlegungen nichts mehr ändern. Man braucht demnach, um als Helligkeitssumme die fünfte Größe zu erhalten, vom Stern $6^3/_4{}^m$ an nicht wesentlich weiter als bis zu den Sternen achter Größe, und um ungefähr $5^1/_2{}^m$ zu erhalten, nicht einmal bis zur achten Größe zu gehen.

Zum Sternhaufen Messier 7 sind in der Uranometria Argentina acht Sterne von $6^m8$ bis $8^m0$ gerechnet, die als Helligkeitssumme $5^m1$ geben und somit die Angabe, dass der Cumulus von der fünften Größe ist, so gut wie vollständig darstellen. Die Positionen dieser Sterne sind durch die Rectascensionen $17^h43^m54^s$ und $17^h46^m9^s$ und durch die Declinationen $-34°23'$ und $-34°52'$ (1875·0) begrenzt. Im Argentinischen General-Catalog befinden sich innerhalb dieser Grenzen 39 Sterne von $6^m8$ bis $10^m$, die als Helligkeitssumme $4^m3$ geben. Werden nur die 20 Sterne von $6^m8$ bis $8^3/_4{}^m$ in Rechnung gezogen, so erhält man $4^m6$, und wenn man nur die zehn hellsten, nämlich

die von $6^m8$ bis $8^m$ berücksichtigt, $4^m9$ als Helligkeitssumme, kommt also hier der fünften Größe schon recht nahe.

Der Anblick der Karte 36 in Cordoba Photographs lässt übrigens die Möglichkeit zu, dass die am nordwestlichen und am nordöstlichen Rande stehenden Sterne, zusammen sieben, bei der Sichtbarkeit für das bloße Auge gar nicht mehr zur Wirksamkeit kommen, dafür aber zwei im Süden stehende Sterne mitgerechnet werden können. Durch diese Wahl reduciert sich die Dimension der Declination von 29′ auf 24′, und die 34 Sterne des General-Cataloges, welche sich auf dem in dieser Weise abgegrenzten Gebiete befinden, geben als Helligkeitssumme $4^m4$. Auch hier geben die 20 Sterne von $6^m8$ bis $8^3/_4{}^m$ als Helligkeitssumme $4^m6$, während die neun Sterne von $6^m8$ bis $8^m$ als Summe $5^m0$ geben.

Wählt man die Grenzen des Cumulus so enge, dass man sich auf die dichteste Partie beschränkt, die also bei der Sichtbarkeit für das bloße Auge ganz gewiss in Betracht kommt, nämlich auf das Gebiet von $17^h45^m0^s$ bis $17^h46^m0^s$ und $-34°42′$ bis $-34°52′$, so findet man auf demselben im General-Catalog 17 Sterne mit den Helligkeiten von $6^m8$ bis $9^1/_4{}^m$, die als Helligkeitssumme $5^m0$ geben. Zieht man nur die zehn helleren Sterne, nämlich die von $6^m8$ bis $8^1/_4{}^m$ in Rechnung, so erhält man $5^m2$, also fast dasselbe Resultat, welches die in der Uranometria Argentina angegebenen acht Sterne liefern. Man kann somit, selbst wenn man das Areal bedeutend verkleinert, die beobachtete Gesammthelligkeit darstellen, ohne wesentlich weiter gehen zu müssen, als bis zu den Sternen achter Größe und braucht somit nur ein Helligkeitsintervall von kaum mehr als $1^1/_2$ Größenclassen zu berücksichtigen.

Behält man aber für Messier 6 und 7 die in der Uranometria Argentina angegebenen größeren Dimensionen bei, so braucht man, wie schon die anfangs dargelegten Zahlen gezeigt haben, mit dem in Rechnung zu ziehenden Helligkeitsintervall nicht einmal so weit zu gehen. Man reicht nämlich, um für jenen Sternhaufen $5^1/_2{}^m$, für diesen $5^m$ als Helligkeitssumme zu erhalten, schon mit den Sternen aus, die vom hellsten an auf ein Intervall von ungefähr einer Größenclasse vertheilt sind.

Es ist also bei allen diesen Sternhaufen möglich gewesen, die beobachtete Gesammthelligkeit durch die Summierung der Helligkeiten der einzelnen Sterne darzustellen, ohne dass es nöthig gewesen wäre, die Frage zu entscheiden, ob durch Vertheilung einer Helligkeit auf eine größere Fläche der Gesammthelligkeitseindruck derselbe bleibt oder andernfalls vergrößert oder verkleinert wird; ja es ist im Gegentheile gerade darauf hingearbeitet worden, überall eine Übereinstimmung der berechneten Helligkeitssumme mit dem beobachteten Helligkeitseindrucke durch eine entsprechende Auswahl, beziehungsweise Ausscheidung von Sternen herzustellen, also gewissermaßen auf empirischem Wege einer Unterscheidung zwischen diesen Fällen auszuweichen.

Fechner ist in seiner bekannten Abhandlung: »Über ein psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrößen« zu der Folgerung gelangt, dass die Helligkeitssumme einer starken Intensität durch Vertheilung, wenn solche nicht zu weit geht, wächst, anderseits aber, wenn eine schwache Intensität von einem Punkte auf mehrere Punkte vertheilt wird oder die Vertheilung einer starken Intensität zu weit getrieben wird, eine Abnahme der Helligkeit im ganzen erfolgt. Wo aber die Grenze zwischen diesen beiden Fällen, d. h. zwischen starker und schwacher Intensität liegt, lässt sich nicht ziffermäßig feststellen, und überhaupt kann von vorneherein auch ein Gleichbleiben des Helligkeitseindruckes ebensowenig in Abrede gestellt werden, wie ein Zu- oder Abnehmen desselben. Wer behauptet: Größeres fällt mehr in die Augen, auch wenn es weniger hell ist, kann ebenso recht haben, wie der, welcher sagt: Helleres fällt mehr in die Augen, auch wenn es kleiner ist, oder wie der, welcher meint, für ihn sei der Helligkeitseindruck in beiden Fällen derselbe.

Wenn man nun aber doch die hier untersuchten Sternhaufen auf die beiden Fälle vertheilen soll, so wird man die meisten derselben als Beispiele für den zweiten Fall bezeichnen können, indem bei ihnen der durch directe Beobachtung bestimmte Helligkeitseindruck geringer ist, als die durch Addition der Helligkeiten sämmtlicher Sterne erhaltene Helligkeitssumme. Als Beispiel für den ersten Fall drängt sich, wie schon früher

bemerkt worden ist, der Doppelcumulus im Perseus auf, und ebenso wird man hier die Plejadengruppe nennen dürfen, bei welcher die berechnete Gesammthelligkeit nicht weit von $2^m0$, die beobachtete dagegen zwischen $1^m$ und $2^m$, also etwas bedeutender ist.

Die Krippe im Krebs, deren Sterne nach der Rechnung sehr nahe die vierte Größe geben, kann nach den Beobachtungen von Houzeau ($4^m$ bis $5^m$) zum zweiten Falle, nach den meinigen ($3^1/_2$ bis $4^m$) zum ersten gerechnet werden, zeigt also, dass eine solche Unterscheidung zwischen den beiden Fällen in einem hohen Grade durch die verschiedene Auffassung der Beobachter bedingt ist.

Sicher ist, dass diese Unentschiedenheit umsoweniger auftreten kann, je gedrängter ein Sternhaufen ist, und in demselben Grade zeigt sich auch die Widerstandsfähigkeit eines Sternhaufens gegen das Unsichtbarwerden. Ein gedrängter, fast wie ein einziger heller Fixstern erscheinender Sternhaufen, der genau so viel und so helle Sterne enthält wie ein anderer, aber zerstreuter Sternhaufen, kann seiner Extinction viel mehr Widerstand entgegensetzen und somit auch viel länger sichtbar bleiben als der zerstreute, und dieser Unterschied macht sich nicht nur dann bemerkbar, wenn ein Sternhaufen mit schwächeren optischen Mitteln betrachtet wird, sondern auch bei irgendeiner anderen Schwächung seines Lichtes, so durch Trübung der Atmosphäre oder durch Mondschein oder auch dann, wenn ein Sternhaufen in der Morgendämmerung immer mehr vom Tageslicht überstrahlt wird.

Es zeigen sich hier Eigenthümlichkeiten, die auch an Kometen beobachtet werden.

Sowie in einem Sternhaufen, der gegen die Mitte reichlich, gegen die Ränder zu aber nur spärlich mit Sternen besetzt ist, bei Erhellung des Himmelsgrundes, z. B. in der Morgendämmerung, zuerst die Sterne an den Rändern unsichtbar werden und die mittlere, dichtere Partie am längsten sichtbar bleibt, so wird auch ein Komet unter denselben Umständen zuerst an den Rändern unkenntlich, während die am hellsten erscheinende, den Kern bildende Partie am längsten der Extinction widersteht, und zwar ist diese Widerstandsfähigkeit

gegen die Extinction durch das Tageslicht umso größer, je concentrierter, je fixsternartiger der Kern erscheint.

Durch den Umstand, dass in einem zerstreuten, verhältnismäßig spärlich mit Sternen besetzten Cumulus, z. B. M. 38 oder 25, die Sterne gruppenweise oder gar einzeln, ihren Helligkeiten entsprechend, verschwinden, und daher der Cumulus viel früher unsichtbar wird, als nach der berechneten Helligkeitssumme zu erwarten wäre, wird man an die häufig beobachtete Thatsache erinnert, dass ein Komet, der im Nachtdunkel auffallender erscheint, als ein in seiner Nähe stehender Fixstern, bei Tagesanbruch eher unkenntlich wird als der Stern.

Sternhaufen dieser Art bilden einen Übergang zu denjenigen, welche wie der im Bootes [$14^h 1^m + 29^\circ 0$], der große Nebel im Triangel M. 33 [$1^h 28^m + 30^\circ 1$] oder der planetarische Nebel im Großen Bären M. 97 [$11^h 9^m + 55^\circ 6$] ziemlich gleichförmig erhellt, aber im Verhältnisse zu ihrer Größe so lichtschwach sind, dass die Bestimmung der Gesammthelligkeit unthunlich wird, indem die Flächenhelligkeit mehr zur Geltung gelangt und die Sichtbarkeit hauptsächlich davon abhängt, in welchem Grade sich das Gebilde vom Himmelsgrund abheben kann. Auch diese Sichtbarkeitsverhältnisse können an Kometen beobachtet werden, wenn dieselben das hier angedeutete Aussehen zeigen.

Wenn wir nun nach dieser recht nahe liegenden Digression die hier dargelegten Untersuchungen von Sternhaufen nochmals überblicken, so zeigt sich, dass das Verhältnis, in welchem die helleren und die schwächeren Sterne zum Totaleindruck eines Sternhaufens beitragen, im Grunde genommen überall dasselbe ist: Die schwächeren Sterne kommen neben und zwischen den helleren so wenig zur Wirksamkeit, dass der beobachtete Helligkeitseindruck schon durch die helleren Sterne allein dargestellt wird, und zwar genügt es im allgemeinen, nur die Sterne in Rechnung zu ziehen, welche von dem hellsten Stern des Cumulus an auf ein Helligkeitsintervall von ein bis zwei Größenclassen vertheilt sind.

Um übersichtlich zu zeigen, durch wie wenig Sterne die beobachtete Gesammthelligkeit dargestellt werden kann, habe ich hier die wichtigsten Zahlenresultate kurz zusammengestellt.

$H_0$ ist die beobachtete, $H_c$ die aus den in der vorletzten Columne angedeuteten Sternen berechnete Gesammthelligkeit und $D$ ein genäherter Mittelwert für den Durchmesser des in Rechnung gezogenen Gebietes. Die Sternhaufen werden in derselben Reihenfolge vorgeführt, in welcher sie untersucht worden sind. Die zwei unter 6. und 21. untersuchten Sternhaufen M. 38 und 25, deren Helligkeitseindruck nach dem hier angewandten Verfahren nicht hinreichend sicher ermittelt werden kann, sind weggelassen.

| Cumulus | α | δ | $H_0$ | $D$ | Sterne * | $H_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Camelopardali . | $3^h\,59^m$ | $+62^{\circ}1$ | $6^m15$ | 7′ | 3* $6^m2$— $8^m3$ | $5^m9$ |
| | | | 5·5 | 20 | 4* 6·2— 8·3 | 5·6 |
| 2. *h* Persei....... | 2 12 | +56·7 | 4·3 | 20 | 43* 6·5— 9·7 | 4·3 |
| | | | 5·0 | 12 | 20* 6·5— 9·1 | 5·0 |
| | | | 5—6 | 5 | 10* 6·5— 9·5 | 5·5 |
| 3. χ Persei....... | 2 15 | +56·7 | 4·7 | 20 | 30* 6·6— 9·7 | 4·9 |
| | | | 5·3 | 15 | 14* 6·6— 9·0 | 5·3 |
| | | | 5—6 | 8 | 12* 6·6— 9·6 | 5·7 |
| 4. M. 34 Persei... | 2 36 | +42·3 | 5·7 | 7 | 13* 7·7—10·3 | 5·6 |
| | | | | | 9* 7·7— 8·7 | 5·7 |
| 5. Heis Aurigae .. | 6 40 | +41·2 | 6·4 | 20 | 9* 8·0— 9·1 | 6·3 |
| 7. M. 36 Aurigae . | 5 30 | +34·1 | 6½—7 | 6—7 | 12* 8·8—10 | 6·6 |
| 8. M. 35 Gemin... | 6 3 | +24·4 | 5½ | 20 | 47* 8·1—10·5 | 5·5 |
| 9. Plejades ...... | 3 42 | +23·8 | 1—2 | 50 | 6* 3·1— 4·6 | 2·0 |
| 10. Praesepe...... | 8 34 | +20·0 | 4 | 60 | 26* 7·0— 8·5 | 4·1 |
| 11. M. 67 Cancri .. | 8 46 | +12·2 | 5·6 | 15 | 27* 8·5— 9·8 | 5·6 |
| | | | 6—6½ | 8 | 13* 8·5— 9·7 | 6·3 |
| 12. M. 48 (?) Monoc. | 8 9 | — 5·5 | 5½ | 36 | 12* 7½— 8½ | 5·5 |
| | | | | | 12* 7·5— 9·1 | 5·8 |
| | | | | 47 | 30* 8 —10¼ | 5·2 |
| | | | | | 16* 8 — 9 | 5·6 |

| Cumulus | α | δ | $H_0$ | D | Sterne * | $H_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 13. M. 50 Monoc... | $6^h\ 58^m$ | — 8°2 | $< 6^1/_2{}^m$ | — | 5* $8^m4$— $9^m5$ | $7^m2$ |
| | | | | | 4* 7·9—10 | 7·4 |
| 14. Argus (Puppis). | 7 32 | — 14·3 | 5 | 23′ | 17* $6^1/_2$— 9 | 4·9 |
| | | | | | 10* $6^1/_2$— $8^1/_2$ | 5·1 |
| | | | | 23 | 15* 6·9— 9·0 | 5·2 |
| 15. M. 41 Can. maj | 6 42 | — 20·6 | 5 | 24 | 36* 7·6— 9·9 | 5·0 |
| | | | $5^1/_2$ | | 15* 7·6— 9·0 | 5·5 |
| 16. M. 39 Cygni... | 21 28 | + 48·1 | 5 | 23 | 9* 6·3— 8·2 | 4·8 |
| | | | | | 5* 6·3— 7·4 | 5·0 |
| 17. Ophiuchi (Serp.) | 18 22 | + 6·5 | 5·3 | 20 | 32* 8·4—10·0 | 5·4 |
| 18. Ophiuchi...... | 17 41 | + 5·7 | 5·9 | 22 | 7* $7^1/_4$— $8^1/_4$ | 5·7 |
| 19. M. 11 Scuti.... | 18 46 | — 6·4 | 7 | 4 | 20* 8·6—10·0 | 6·5 |
| 20. M. 24 Sagittarii | 18 11 | — 18·7 | > 6 | 19 | 3* $7^m$ | 5·8 |
| | | | > 5 | > 30 | 10* $6^1/_2$—$8^1/_4$ | 4·9 |
| 22. M. 6 Scorpii... | 17 34 | — 32·2 | 5—6 | 19 | 5* 6·8—$7^3/_4$ | 5·5 |
| | | | | | 5* $6^3/_4$—$7^1/_4$ | 5·3 |
| 23. M. 7 Scorpii... | 17 47 | — 34·7 | 5 | 28 | 8* 6·8—8·0 | 5·1 |
| | | | | 26 | 9* 6·8—8 | 5·0 |
| | | | | 11 | 10* 6·8—$8^1/_4$ | 5·2 |

Nach diesen Untersuchungen von mehr oder minder zerstreuten Sternhaufen möchte ich noch einige Rechnungen über die drei sehr reichen und dicht gedrängten kugeligen Sternhaufen M. 13 Herculis, ω Centauri und 47 Tucanae mittheilen. Diese Sternhaufen lassen sich zwar bezüglich ihres Helligkeitseindruckes viel sicherer als die früher untersuchten in bestimmte Fixsterngrößenclassen einreihen, werden aber hier abgesondert behandelt, weil die Helligkeiten der einzelnen Sterne, welche den betreffenden Cumulus bilden, entweder gar nicht bestimmt sind oder doch nicht so, dass sie direct an eine Größenscala, insbesondere die der B. D., angeschlossen werden könnten.

Für den ersten, nämlich den zwischen $\zeta$ und $\eta$ im Hercules befindlichen Sternhaufen M. 13 [$16^h 38^m + 36^\circ 7$] besitzen wir eine eingehende Monographie von Scheiner.[1] Man findet hier in dem Katalog der gemessenen Sterne:

| | | $H$ | $I$ |
|---|---|---|---|
| 2 | Sterne | ....$11^m 7$ | 0·00004 |
| 8 | » | ....12·2 | 0·00011 |
| 43 | » | ....12·4 | 0·00047 |
| 65 | » | ....12·5 | 0·00065 |
| 90 | » | ....12·7 | 0·00075 |
| 128 | » | ....12·8 | 0·00097 |
| 206 | » | ....13·0 | 0·00130 |
| 153 | » | ....13·5 | 0·00061 |
| 138 | » | ....14 | 0·00035 |
| 833 | Sterne | | 0·00525 |

Aus der Summe der Intensitäten $I$ ergibt sich als Größenclasse der Gesammthelligkeit $H = 5^m 7$, was mit der Beobachtung insofern übereinstimmt, als dieser Cumulus für das bloße Auge etwas heller erscheint als die Sterne sechster Größe. In der Harvard Photometry ist $5^m 9$ angegeben.

Das Resultat ist aber nicht ganz einwandfrei, denn abgesehen davon, dass eine größere Zahl von Sternen in der Mitte des Haufens und der das Innere erfüllende Nebel nicht berücksichtigt ist und anderseits Sterne mitgerechnet sind, die wegen zu großen Abstandes von der mittleren Partie zur Erhöhung des Gesammthelligkeitseindruckes gewiss nicht mehr beitragen, hat der Verfasser auch noch die Bemerkung beigefügt, dass seine Größen um eine halbe bis eine ganze Classe zu schwach sein dürften. Es muss daher die gute Übereinstimmung wenigstens zum Theil einem glücklichen Zufalle zugeschrieben und angenommen werden, dass sich die Abweichungen nach der einen und nach der anderen Richtung hin gegenseitig aufheben.

Als durchschnittliche Helligkeit aller dieser 833 Sterne würde sich $13^m 0$ ergeben.

[1] Der große Sternhaufen im Hercules Messier 13, nach Aufnahmen am Potsdamer photographischen Refractor von J. Scheiner. Berlin, 1892.

Auch die Abzählungen, welche H. K. Palmer[1] nach den auf der Lick-Sternwarte gelungenen Photographien dieses Sternhaufens vorgenommen hat, können zu einer Untersuchung der Gesammthelligkeit benützt werden, wenn auch in etwas anderer Weise, indem über die Größen der Sterne keine bestimmten Angaben gemacht, sondern nur helle und schwache Sterne unterschieden sind, aber immerhin wenigstens das eine ermittelt worden ist, dass die Grenze zwischen beiden bei ungefähr $13^m5$ der Scheiner'schen Scala liegt.

Der Cumulus ist in acht concentrische Ringe getheilt.

| Kreisring | Radius | Helle Sterne | Schwache Sterne | Alle Sterne |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2'7 | 551 | 580 | 1131 |
| 2 | 3·8 | 148 | 671 | 819 |
| 3 | 4·8 | 100 | 714 | 814 |
| 4 | 5·6 | 43 | 623 | 666 |
| 5 | 6·4 | 29 | 504 | 533 |
| 6 | 7·2 | 25 | 398 | 423 |
| 7 | 8·0 | 22 | 279 | 301 |
| 8 | 9·2 | 27 | 306 | 333 |
| Außerhalb | ... | 71 | 391 | 462 |
| Summe.. | | 1016 | 4466 | 5482 |

Ich habe unter der nicht ganz unwahrscheinlichen Voraussetzung, dass die durchschnittliche Größe der schwächeren Sterne von der Grenzstelle $13^m5$ ebensoweit entfernt ist wie die durchschnittliche Größe der helleren Sterne, zwei Annahmen gemacht, nämlich für die helleren Sterne $12^m7$ und $13^m0$ und dementsprechend für die schwächeren $14^m3$, beziehungsweise $14^m0$. Wesentlich weiter wird man sich bei Rücksichtnahme auf die Größenangaben von Scheiner von der Grenze $13^m5$ wohl nicht entfernen dürfen.

[1] The Astrophysical Journal, Vol. 10 (1899), S. 246.

Man findet nun sofort, dass man bei Berücksichtigung aller hier zusammengezählten Sterne eine viel zu große Helligkeitssumme erhalten würde, was auch ganz natürlich ist, indem die Partien des Cumulus, welche bei der Sichtbarkeit für das bloße Auge noch in Betracht kommen können, gewiss nicht über den 3. Ring hinausreichen. Aber auch dieses Gebiet muss noch eingeengt werden; es ergeben sich nämlich die folgenden Helligkeitssummen $H$:

| | Durchmesser | | $H$ | | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Ring ........ | 5'4 | 551 Sterne $12^m7$<br>580 » 14·3 | $5^m6$ | 551 Sterne $13^m0$<br>580 » 14·0 | $5^m8$ |
| 1. und 2. Ring .. | 7·6 | 699 Sterne $12^m7$<br>1251 » 14·3 | $5^m2$ | 699 Sterne $13^m0$<br>1251 » 14 0 | $5^m3$ |
| 1., 2. und 3. Ring | 9·6 | 799 Sterne $12^m7$<br>1965 » 14·3 | $5^m0$ | 799 Sterne $13^m0$<br>1965 » 14·0 | $5^m0$ |

Diesen Zahlen zufolge kann man eine zwischen etwa $5^1/_8{}^m$ und $6^m$ liegende Helligkeitssumme zunächst dann erhalten, wenn man alle Sterne des 1. Ringes in Rechnung zieht ($5^m6$, beziehungsweise $5^m8$); dann aber auch in dem Falle, wenn man die schwächeren Sterne, die trotz ihrer großen Menge auch schon bei den äußeren Ringen für den Gesammthelligkeitseindruck gar nicht in Betracht kommen, ganz außer acht lässt und nur die helleren Sterne, aber nebst denen des 1. Ringes, die für sich allein nur $5^m8$, beziehungsweise $6^m1$ geben, auch noch die des zweiten in Rechnung zieht ($5^m6$, beziehungsweise $5^m9$). Nach dieser Wahl scheint der Durchmesser der bei der Sichtbarkeit für das bloße Auge in Betracht kommenden Partie des Cumulus bei 6′ oder 7′ zu liegen.

Es lassen also diese Abzählungen nach concentrischen Ringen erkennen, dass auch in diesem Cumulus beim Zustandekommen des Gesammthelligkeitseindruckes die schwächeren Sterne trotz ihrer großen Zahl sich nur wenig oder gar nicht bemerkbar machen.

Auf Photographien des Cumulus ω Centauri [$13^h 20^m 7$ —$46^\circ 8$], und zwar auf einer quadratischen Fläche von 30′ Seitenlänge, sind von S. J. Bailey gegen 6400 Sterne gezählt worden.[1] Über die Größe derselben sind keine Angaben gemacht, und man ist daher nicht in der Lage, aus den Helligkeiten der einzelnen Sterne die Gesammthelligkeit zu berechnen, kann aber dafür umgekehrt versuchen, aus der Anzahl der Sterne und der Gesammthelligkeit des Cumulus die durchschnittliche Größenclasse dieser Sterne zu berechnen. Nach J. Herschel erscheint der Cumulus für das bloße Auge wie ein nebeliger Stern vierter oder fünfter Größe, nach der Uranometria Argentina wie ein Stern vierter Größe. Man findet nun, dass 6400 Sterne, wenn sie zusammen die Helligkeit eines Sternes vierter oder fünfter Größe geben, durchschnittlich von der Helligkeit $13^m 5$, beziehungsweise $14^m 5$ sein müssen. Da aber von den a. a. O. zusammengezählten Sternen bei der Sichtbarkeit für das bloße Auge, also beim Gesammthelligkeitseindrucke, gewiss nicht alle zur Wirksamkeit gelangen, indem die photographischen Aufnahmen weit über die Grenzen des eigentlichen Cumulus hinausgehen, so müssen viele und insbesondere die von der Mitte weiter abstehenden Sterne ausgeschlossen werden. Diese dürften den dritten Theil aller Sterne betragen, so dass nur etwa 4000 in Rechnung zu ziehen wären. Für diese findet man, wenn sie zusammen die Helligkeit eines Sternes vierter oder fünfter Größe geben sollen, als durchschnittliche Helligkeit $13^m 0$, beziehungsweise $14^m 0$.

Eine ähnliche Rechnung lässt sich für den Cumulus 47 Tucanae [$0^h 20^m$—$72^\circ 6$] machen, dessen Helligkeit nach der Uranometria Argentina $4^1/_2{}^m$ ist. Man findet auf S. 214 und 215 des schon citierten 26. Bandes der Annalen des Harvard College Observatory die Resultate einer Abzählung, nach welcher sich auf einer quadratischen Fläche von 30′ Seitenlänge 2673 Sterne und unter diesen 1715 »helle« befinden. Dabei sind aber die Sterne in der Mitte des Cumulus, nämlich auf einem quadratischen Felde von 3′ Seitenlänge weggelassen,

---

[1] Astronomy and Astrophysics, Vol. 12 (1893), S. 689 und Annals of the astronomical observatory of Harvard College, Vol. 26, S. 213.

weil sie wegen ihrer zu großen Gedrängtheit nicht mehr mit genügender Sicherheit gezählt werden konnten. Erlaubt man sich die Annahme, dass die hier fehlenden Sterne durch die weiter abstehenden, bei der Sichtbarkeit für das bloße Auge nicht mehr in Betracht kommenden Sterne an Helligkeit aufgewogen werden, so können die angegebenen Summen gleich so wie sie sind zur Rechnung benützt werden. Man findet nun, dass die 1715 als hell bezeichneten Sterne, wenn sie zusammen die Helligkeit eines Sternes $4^{m}5$ geben sollen, durchschnittlich von der Helligkeit $12^{m}6$ und sämmtliche 2673 Sterne bei derselben Forderung von der Helligkeit $13^{m}1$ sein müssen.

J. Herschel hat in seinen Cap-Beobachtungen die Sterne dieses Cumulus einmal als Sterne 14. bis 16. Größe, einmal als Sterne 14. Größe und einmal als Sterne 12. bis 14. Größe bezeichnet.

Man wird bemerkt haben, dass sich für jeden der drei Sternhaufen M. 13 Herculis, ω Centauri und 47 Tucanae ungefähr dieselbe durchschnittliche Sternhelligkeit ergibt, doch darf diese angenäherte Übereinstimmung nicht überraschen, weil die Rechnungsgrundlagen, nämlich Gesammthelligkeit und Anzahl der Sterne, nicht so weit voneinander verschieden sind, dass eine wesentliche Verschiedenheit der durchschnittlichen Sternhelligkeit zu erwarten wäre.

## XXVI. SITZUNG VOM 12. DECEMBER 1901

Der Vorsitzende, Herr Prof. E. Sueß, verliest eine an die Classe gelangte Einladung des Vereines der Geographen in Wien zu einer am 17. d. M. abzuhaltenden Trauerfeier für sein verstorbenes Mitglied, Prof. Dr. Wilhelm Tomaschek, w. M. der kaiserl. Akademie.

Das Owens College in Manchester übersendet eine Einladung zu der am 12. März 1902 stattfindenden Jubelfeier seines fünfzigjährigen Bestandes.

Herr E. Oekinghaus in Königsberg übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die mathematische Statistik in allgemeinerer Entwickelung und Ausdehnung auf die Statistik der Bevölkerungsbewegung«.

Herr Dr. Bronislaus Georg Sabat in Lemberg übersendet ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität mit dem Motto: »Memento semper rebus in arduis aequam servare mentem«.

Das w. M. Herr Prof. R. v. Wettstein überreicht folgende drei im botanischen Museum der Wiener Universität ausgeführte Arbeiten:

I. »Über den Bau und die Aufblühfolge der Rispen von *Phlox paniculata*«, von Herrn Dr. R. Wagner.

II. »Bearbeitung der von O. Simony 1898 und 1899 in Südarabien, auf Socotra und den benachbarten Inseln gesammelten Flechten«, von Herrn Prof. Dr. J. Steiner.

III. Vergleichende Untersuchungen über Farnprothallien; I. Reihe, von Herrn Dr. Anton Jakowatz.

Das w. M. Herr Hofrath Franz Steindachner übergibt die Bearbeitung der während der dritten und vierten Tiefsee-Expedition im östlichen Mittelmeer und in der Adria 1893, 1894 gesammelten Polychaeten des Grundes von dem c. M. Herrn Dr. Emil v. Marenzeller.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Dr. J. Wiesner erstattet auf Grund von an ihn gelangten Mittheilungen des Herrn Professor Palla in Graz einen Bericht über die Ergebnisse der von dem Genannten mit Unterstützung der kaiserl. Akademie nach Buitenzorg (Java) unternommenen wissenschaftlichen Reise.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: »Beiträge zur Constitution des Chitins«, von Dr. S. Fränkel und Dr. Agnes Kelly.

Herr Hofrath Lieben überreicht ferner zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium:

I. »Über die Alkylierung des Pyrogallols und einige Derivate des Pyrogalloltriäthyläthers«, von Herrn Wilhelm Hirschel.

II. »Über Brasilin und Hämatoxylin« (VII. Mittheilung), von den Herren J. Herzig und J. Pollak.

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Indian Plague Commission, Minutes of Evidence. London, 1900—1901. 4°. (Vol. I, II, III.) — Indices to the Evidence, also Glossary, Maps, and Summary of the Report and Appendices. London, 1901. 4°. (Vol. IV.) — Report with Appendices and Summary. London, 4°. (Vol. V.)

Middendorp, H. W., Dr., L'Étiologie de la Tuberculose suivant le Professeur Dr. Robert Koch et sa méthode curative. Paris, 1901. 8°.

Universität in Basel, Akademische Schriften, 1900—1901.

---

## XXVII. SITZUNG VOM 19. DECEMBER 1901.

Erschienen: Berichte der Commission für oceanographische Forschungen. VII. Reihe.

Der Secretär, Herr Hofrath V. v. Lang, legt das im Auftrage Sr. k. und k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserlichen Akademie, durch die Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übersendete Druckwerk »Alexandrette« vor.

Ferner legt der Secretär folgende eingelangte Abhandlungen vor:

I. »Binäranalyse unseres Raumes«, von Herrn Prof. Emil Waelsch in Brünn.
II. »Erdbewegung und Äther«, von Herrn Prof. Dr. Egon v. Oppolzer in Innsbruck.
III. »Die dinarisch-albanesische Scharung«, von Herrn Prof. J. Cvijić.

Das w. M. Herr Zd. H. Skraup überreicht zwei Abhandlungen; die eine von Prof. v. Hemmelmayer ist im Laboratorium der Grazer Landes-Oberrealschule, die andere von Dr. Kudernatsch im chemischen Institute der Universität Graz ausgeführt.

I. »Über das Ononin« (I. Mittheilung), von F. v. Hemmelmayer.
II. »Zur Darstellung von Methylendiaminderivaten«, von Dr. R. Kudernatsch.

Das c. M. Herr Hofrath E. Ludwig übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine Chemie an der k. k.

Technischen Hochschule in Graz von Herrn Prof. Fr. Emich, betitelt: »Notizen über die Lackmusseide«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung »Über Einwirkung verdünnter Säuren auf Glycole«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine Abhandlung des Herrn Dr. H. Mache vor: »Über die Zerstreuung der Elektricität in abgeschlossener Luft.«

Derselbe legt ferner eine Abhandlung des Herrn Dr. F. v. Lerch vor: »Über die Abhängigkeit der Polarisation von Stromdichte und Temperatur«.

Herr Prof. Dr. Paul Czermak in Innsbruck übersendet eine Mittheilung über Elektricitätszerstreuung bei Föhn.

Das w. M. Herr Hofrath G. Ritter v. Escherich legt eine Abhandlung vor, betitelt: »Die zweite Variation der einfachen Integrale«. (V. Mittheilung.)

---

**Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:**

Centralbureau der internationalen Erdmessung in Potsdam, Verhandlungen der XIII. allgemeinen Conferenz der internationalen Erdmessung, redigiert von H. G. van de Sande Backhuyzen, 1901; 4°.

Passalsky P., Anomalies magnétiques dans la région des mines de Krivoï-Rog. Odessa, 1901; 4°.

Ryn J. J. L. van, Dr., On the composition of Dutch Butter. London, 1902; 8°.

# Über die Zerstreuung der Elektricität in abgeschlossener Luft

von

**Dr. Heinrich Mache.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

**(Vorgelegt in der Sitzung am 19. December 1901.)**

Im folgenden sollen die Ergebnisse einiger Versuche über die Zerstreuung der Elektricität in abgeschlossener Luft mitgetheilt werden, welche in der Absicht unternommen wurden, einen Beitrag zur Kenntnis der Gesetze zu liefern, nach welchen diese Zerstreuung vor sich geht.

Die hiebei befolgte Methode ist die gleiche, wie sie J. Elster und H. Geitel eingeführt haben.[1] Das zur Messung der Elektricitätszerstreuung hergerichtete Elektroskop wird mit aufgesetztem Zerstreuungskörper unter eine weite tubulierte Luftpumpenglocke gebracht, welche auf einem starken Metallteller luftdicht aufgesetzt werden kann. Der Zerstreuungskörper ist zum Schutze gegen Ladungen des Glases der Luftpumpenglocke rings von einem auf dem Halse des Elektroskopes aufgesetzten Schutzcylinder umgeben. Der Boden dieses Schutzcylinders trägt eine Reihe weiter Öffnungen, durch welche eine kleine, von außen mittels eines Magnetes betriebene Metallfeder bis zur Berührung mit dem Zerstreuungskörper gelangen kann. Diese Metallfeder, also auch der Zerstreuungskörper, können durch eine, den Metallteller isoliert durchsetzende Zuleitung nach Bedarf geladen oder entladen werden. Auch in dem Deckel des Schutzcylinders befindet sich eine

[1] Phys. Zeitschrift, Bd. 2, S. 116, 560, 590.

Öffnung, durch welche eine im Tubus der Luftpumpenglocke verschiebbare Sonde bis auf den Zerstreuungskörper hinabgestoßen werden kann. Diese Sonde trägt an ihrem unteren Ende einen mit einem Gewinde versehenen Ebonitstift, welcher sich in eine am Zerstreuungskörper oben angebrachte Öffnung einschrauben lässt und es so ermöglicht, denselben aus dem Elektroskope herauszuheben und den durch Zerstreuung und einen eventuellen Isolationsmangel im Elektroskope selbst bewirkten Verlust zu bestimmen. Zwei im Tubus und im Metallteller eingekittete Hähne dienen zum Durch- oder Absaugen der Luft.

Um ein genaues Ablesen des Elektroskopes zu ermöglichen, wurde die Luftpumpenglocke an der geeigneten Stelle angeschliffen und die Öffnung durch eine Spiegelglasplatte geschlossen.

Von einer Berechnung des Zerstreuungscoefficienten im Sinne der Coulomb'schen Formel wurde abgesehen, nachdem die citierte Untersuchung von Geitel die Unrichtigkeit dieser Formel nachgewiesen hat. In der That zeigte sich innerhalb der bei meinen Versuchen zur Verwendung gelangten Potentialdifferenzen von 180 bis 60 Volt die Abnahme der Zeit völlig proportional. Es wurden also die beobachteten Werte des Potentials in ein Millimeterpapier eingetragen, welches als Abscisse die Zeit enthielt, und dann durch die so bestimmten Punkte möglichst zwanglos eine Gerade gezogen, an welcher der Wert der Zerstreuung in Volt pro Stunde sich ohneweiters entnehmen ließ.

Es hat nun Geitel zuerst die merkwürdige Erscheinung beobachtet, dass der Zerstreuungswert der Luft zunimmt, wenn man den Apparat durch längere Zeit sich selbst überlässt, um sich dann schließlich einem bestimmten Grenzwerte zu nähern. Diese Erscheinung wurde dahin gedeutet, dass Körper, welche lange der Luft in elektrisiertem Zustande ausgesetzt sind, eine längere Zeit anhaltende Activierung aufweisen und daher eine erhöhte Leitfähigkeit der umgebenden Luft veranlassen.

Es erschien mir nicht ohne Interesse, die diesbezüglichen Geitel'schen Versuche auf ein größeres Zeitintervall auszudehnen, und ich führe im folgenden eine Versuchsreihe an,

welche sich auf etwa zwei Monate erstreckt. Die Ladung war stets positiv. $Z$ gibt den Wert der Zerstreuung in Volt pro Stunde.

| | $Z$ |
|---|---|
| 2. August | 6·57 |
| 3. » | 7·64 |
| 4. » | 7·75 |
| 5. » | 7·86 |
| 6. » | 9·20 |
| 7. » | 9·60 |
| 8. » | 8·89 |
| 9. » | 8·92 |
| 31. » | 11·2 |
| 14. September | 10·8 |
| 15. » | 11·3 |
| 27. » | 11·1 |

Es zeigt sich also eine Zunahme der Zerstreuung, die nach ungefähr 14 Tagen beendet ist, worauf sich der erzielte Endwert stationär erhält.

Pumpt man nun die Luft weg und ersetzt sie durch solche von außen, so zeigt dieselbe unter der Glocke sofort den gleichen Zerstreuungswert wie in dem Raume, dem sie entnommen wurde. So ergab sich beispielsweise unter der Glocke der Wert 7·27, während außen gleichzeitig an einem zweiten Apparate 7·36 beobachtet wurde. Die durch das Abstehen der Luft erzielte scheinbare Activierung scheint also doch ihren Sitz in der Luft selbst zu haben. Dies würde zur Annahme nöthigen, dass der einem bestimmten Drucke und einer bestimmten Temperatur entsprechende normale Gehalt an Ionen einem Gleichgewichtszustande entspricht, welcher nur in abgeschlossener Luft und auch da erst nach längerer Zeit zu erzielen ist.

In welcher Weise dieser Gehalt von Druck und Temperatur abhängt, erforderte eine besondere Untersuchung. Was die Abhängigkeit der Zerstreuung vom Druck betrifft, so fand bereits Matteucci,[1] dass dieselbe im luftverdünnten Raume so klein

[1] Ann. de Chem. et de Phys., 3 sér., 28, 1850.

wird, dass ein Elektroskop seine Ladung tagelang erhält. Auch wird man im voraus ein derartiges Verhalten erwarten, woferne man auf der freilich etwas rohen Vorstellung fußt, dass gleichzeitig mit der Gasmenge auch ihr Gehalt an freien Ionen vermindert wird. Thatsächlich zeigt sich die Zerstreuung dem Drucke proportional, wie die folgende kleine Tabelle lehrt. $p$ bedeutet den Druck in Millimeter Quecksilber.

| $p$ | $Z$ |
|---|---|
| 745 | 11·1 |
| 495 | 8·24 |
| 387 | 6·35 |
| 285 | 4·30 |
| 193 | 2·98 |
| 100 | 1·24 |
| 45 | 0·63 |

Es erwies sich bei diesen Versuchen, dass der durch die Leitung der Bernstein-Isolation des Elektroskopes bedingte Verlust völlig vernachlässigt werden kann. Hingegen durfte von einer besonderen Bestimmung der Zerstreuung im Elektroskope selbst nicht Umgang genommen werden.

Um die Abhängigkeit der Zerstreuung von der Temperatur kennen zu lernen, wurde ein dem beschriebenen Apparate ganz analoger in ein Wasserbad gebracht. Der einzige erwähnenswerte Unterschied bestand darin, dass hier um Raum zu sparen der Zerstreuungscylinder durch eine Platte und der Schutzcylinder durch ein Drahtnetz ersetzt wurde, welches der Platte parallel gegenüberstand. Natürlich musste die Aichung des Elektroskopes im Wasserbade selbst vorgenommen werden. Brachte man nun, nachdem der Normalwert der Zerstreuung durch 14tägiges Stehen erreicht war, das Bad durch Anwärmen von etwa 16° auf 60°, so zeigte sich keine Änderung der Zerstreuung, die nicht durch Fehler in der Beobachtung gedeutet werden könnte. So ergaben sich in vier Beobachtungen die folgenden Werte:

| | | Z | | Z |
|---|---|---|---|---|
| I[1] | 17° C. | 22·0 | 52—58° C. | 21·5 |
| II | 14 | 11·6 | 58—62 | 12·0 |
| III | 16 | 10·9 | 55—58 | 11·6 |
| IV | 16 | 11·5 | 57—60 | 10·8 |

Diese Beobachtung steht im Widerspruche mit einer diesbezüglichen von Matteucci, welcher zwischen 0° und 18° eine Zunahme der Zerstreuung von 38 auf 85 angibt. Im Gegentheile bewirkt eine Erhöhung der Temperatur bei den meisten Isolationsmitteln eine scheinbar geringere Zerstreuung, indem hiebei der Isolator getrocknet wird.

Noch einige gelegentliche Beobachtungen sollen hier Platz finden, welche für die Deutung des besprochenen Entladungsvorganges möglicherweise von Bedeutung sind.

So gelingt es nicht, durch halbstündiges Röntgenisieren von frisch eingefüllter Luft den oben besprochenen Endzustand oder auch nur ein durch längere Zeit gesteigertes Leitvermögen der Luft zu erzielen. Ferner ist es auffallend, dass das Hindurchsaugen durch ein Thomson'sches Filter das natürliche Leitvermögen der Luft nicht herabsetzt. Dagegen bewirkt das Vorbeistreichen an einem elektrisierten Körper eine vollständige Zerstörung ihrer Leitfähigkeit, wie dies auch H. Ebert[2] bemerkt hat.

[1] Die Capacität des Systems war hier eine andere.

[2] Phys. Zeitschrift, Bd. 2, S. 662.

# Über die Abhängigkeit der Polarisation von Stromdichte und Temperatur

von

Dr. **Fr. v. Lerch.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 4 Textfiguren.)

**(Vorgelegt in der Sitzung am 19. December 1901.)**

Die folgenden Versuche haben den Zweck, den Verlauf der Polarisation bei verschiedener Temperatur und Concentration für Lösungen von $CuCl_2$ und $CdJ_2$ etwas eingehender zu untersuchen. Bei den Messungen, die ich mit einer Poggendorf'schen Wippe und Elektrometer in der weiter unten beschriebenen Versuchsanordnung, zuerst mit einer Kupferchloridlösung, anstellte, beobachtete ich Folgendes: Ansteigen der Polarisation bis zu einem Werte, der sich mit wachsender Stromstärke nur wenig ändert, dann plötzliches Wachsen der Polarisation bis zu einem höheren Werte. Die Curve, Stromstärke als Abscissen, Polarisation als Ordinaten gezeichnet, zeigt bei einer bestimmten Stromstärke einen scharfen Knick.

Ich will hier gleich bemerken, dass die Methode, mit welcher hier gearbeitet wurde, im Principe von der Methode der Zersetzungsspannungen verschieden ist. Im letzteren Falle, bei Zersetzungsspannungsmessungen, bestimmt man die Stromstärke, die man durch Anlegen einer beliebig variierten oder nach Bose,[1] einer sich stetig ändernden elektromotorischen Kraft durch die Zelle bekommt. Der Punkt, bei welchem die Curve einen Knick zeigt, oder nach Glaser[2] der Schnittpunkt

[1] Zeitschrift für Elektrochemie, V., 154, 1898/99.

[2] Glaser, Zeitschrift für Elektrochemie, IV., 355, 373, 397, 1898.

des horizontalen und steil aufsteigenden Theiles der Curve, wenn die Curve keinen scharfen Sprung zeigt, ist dann der Zersetzungspunkt.

Nach der Methode mit Wippe schickt man gleich einen Strom von hoher elektromotorischer Kraft (in diesem Falle circa 200 Volt) durch die elektrolytische Zelle und misst dann die Potentialdifferenz, bis zu welcher die Elektroden sich laden.

Das Ansteigen der Polarisation mit wachsender Stromstärke hat nach Wiedemann[1] zuerst Lenz beobachtet. Genauere Messungen stellte dann Poggendorf an, indem er von höheren Stromdichten zu niederen übergieng, um das langsame Laden der Elektroden bei schwachen Strömen zu umgehen. Dieses Verfahren schlägt Wiedemann als am zweckmäßigsten vor, um den jeder Stromdichte zukommenden Maximalwert schnell zu erreichen. Später hat Wiedeburg[2] unter gewissen Annahmen, dass nämlich nicht alle Ionen elektromotorisch wirksam sind und nur ein Theil, ein der Differenz zwischen dem erreichbaren und dem erreichten Wert der Ionenansammlung proportionaler Theil, zum Potentialsprung an der Elektrode beiträgt, die Vorgänge an der Elektrode theoretisch verfolgt. Unter Berücksichtigung der freiwilligen Depolarisation hat Overbeck[3] mit Wiedeburg'schen Annahmen eine Formel für verschiedene Stromdichten abgeleitet. In letzter Zeit ist von A. Gockel[4] in einer Arbeit über die Beziehungen zwischen Polarisation und Stromdichte in festen und geschmolzenen Salzen, diese, sowie eine von Plank aufgestellte logarithmische Formel geprüft worden. Die Voraussetzungen, unter welchen diese Formeln gelten, dass nämlich der Elektrolyt mit den Producten der Elektrolyse gesättigt ist, und die oben erwähnte Wiedemann'sche Vorschrift, von höheren Stromdichten zu niederen überzugehen, sind wohl die Ursache, dass die Werte der Polarisation bei kleinen Stromdichten, ohne dass vorher ein stärkerer Strom die Zelle durchflossen hat, nicht mehr oder gar nicht beachtet wurden.

[1] Wiedemann, Elektricität, II., 682, 1894.

[2] Wiedeburg, Wied. Ann., 51, 302, 1894.

[3] Overbeck, Wied. Ann., 63, 29, 1897.

[4] A. Gockel, Zeitschrift für phys. Chemie, 34, 529, 1900.

Dass man wirklich keinen Knick in der Polarisationscurve bekommt, wenn man die Wiedemann'sche Vorschrift befolgt, mögen folgende zwei Tabellen zeigen.

| Ampère | Volt |
|---|---|
| 0·1000 | 1·19 |
| 0·0020 | 1·01 |
| 0·0050 | 1·06 |
| 0·0100 | 1·09 |
| 0·0200 | 1·14 |
| 0·0300 | 1·16 |
| 0·0500 | 1·18 |
| 0·1000 | 1·19 |

| Ampère | Volt |
|---|---|
| 0·0020 | 0·36 |
| 0·0050 | 0·80 |
| 0·0100 | 0·87 |
| 0·0200 | 0·895 |
| 0·0300 | 0·92 |
| 0·0400 | 0·93 |
| 0·0460 | 0·94 |
| 0·0480 | 1·14 |
| 0·0600 | 1·17 |
| 0·1000 | 1·19 |

Die erste Tabelle zeigt keinen Sprung, die zweite bei 0·0460 Ampère.

Bevor ich noch in die Einzelheiten und die Discussion der gefundenen Werte eingehe, will ich die Versuchsanordnung beschreiben, mit der sie gefunden sind. Wie schon oben bemerkt, verwendete ich eine Poggendorf'sche Wippe mit Metallcontacten. Durch einige Übung war es möglich, die Wippe sehr schnell um- und wieder zurückzulegen, so dass das Elektrometer kurz nach der Stromunterbrechung nur einen Moment mit der Zelle in Berührung war. Übrigens machte ein mehr oder weniger schnelles Wippen bei den Versuchen nichts aus, so dass ich wirklich den betreffenden Vollwert glaube erhalten zu haben.

Als elektromotorische Kraft wurde der negative Pol der Straßenleitung gegen die Erde verwendet (circa +200 Volt). Die Versuchsanordnung ist in Fig. 1 schematisch gezeichnet. Bei $A$ der negative Pol der Straßenleitung. Von hier wurde der Strom durch eine Glühlampe, um eventuelle Kurzschlüsse zu vermeiden, nach einem variablen Flüssigkeitswiderstande geführt. Derselbe bestand aus einem parallelepipedischen Trog,

der mit verdünnter Zinksulfatlösung gefüllt war und in den zwei Zinkelektroden tauchten, von denen die eine bei *B* verschoben werden konnte. Von *B* führte die Leitung weiter durch drei Stöpsel-Rheostatenwiderstände (100.000 Ω bis 100 Ω) zu einem Siemens-Ampèremeter, dessen Empfindlichkeit für einen Theilstrich 0·001 Ampère betrug und durch einen Nebenschlusswiderstand auf 0·01 Ampère herabgesetzt werden konnte. Von hier durch einen Schlüssel nach der Wippe über *C* nach *D*; von da nach der zweiten Wippe bei *E*, mittels welcher man *D* abwechselnd mit einem selbstverfertigten Clark'schen Normalelemente oder mit der elektrolytischen Zelle verbinden

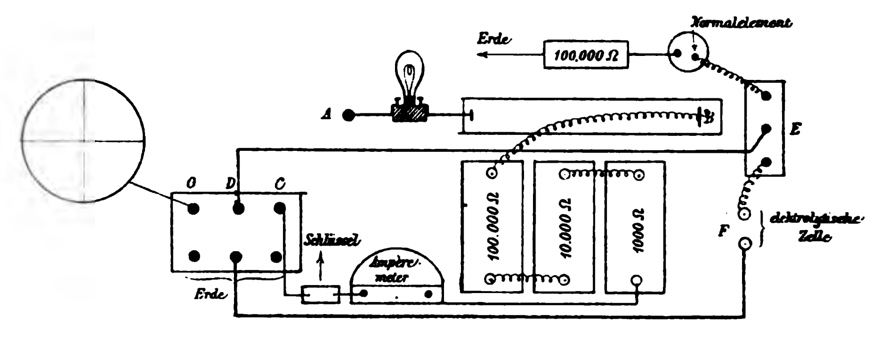



Fig. 1.

konnte. Die Elektrometerausschläge konnten also jederzeit geaicht werden. Die Empfindlichkeit betrug für das Clarkelement, dessen elektromotorische Kraft mit 1·43 Volt angenommen wurde, ungefähr 90 Theilstriche. Der Pol der Zelle bei *F* war beständig zur Erde abgeleitet. *G* stand mit einem Hallwachs'schen Quadrantenelektrometer mit Luftdämpfung in Verbindung. Das Elektrometer selbst, sowie die Leitung nach der Wippe waren eingebaut, die Klemmschraube bei *G* war durch ein abgeleitetes Gehäuse vor äußerer Inductionswirkung geschützt und konnte von außen durch einen Stift mit dem Gehäuse in Berührung gesetzt und so abgeleitet werden. Die Ausschläge wurden mit Scala und Fernrohr abgelesen.

Diese Versuchsanordnung erwies sich im folgenden als sehr bequem und handlich. Sie gestattete die Stromstärke innerhalb weiter Grenzen von 0·0020 bis 0·9 Ampère und darüber

zu variieren und constant zu halten, da wegen der verwendeten großen elektromotorischen Kraft und der eingeschalteten größeren Wiederstände die Übergangswiderstände nicht in Betracht kamen. Die größeren Stromstärken wurden bei kurzgeschlossenen Rheostatenkästen durch Verschieben der Elektrode bei *B* reguliert. Es wurde der negative Pol und nicht etwa beide Pole der Straßenleitung verwendet, um nicht störende Inductionswirkungen in der Wippe zu bekommen. Die elektrolytische Zelle konnte mit dem auf den Tisch geschraubten Schlüssel bei *F* verbunden und durch Kurzschluss depolarisiert werden.

Als Elektroden wurden zuerst Kohlenstäbe von 3 *mm* Durchmesser benützt. Um ihnen eine constante Oberfläche zu geben, wurden über dieselben Kautschukschläuche gezogen, so dass ein ungefähr 1 *cm* langes Stück frei blieb. Versuche, die Kohlen auf andere Weise partiell zu isolieren, scheiterten an der Unbeständigkeit der aufgetragenen Isolatoren bei höherer Temperatur.

Zur Erreichung höherer Temperatur wurde das die Lösung enthaltende Becherglas in ein weiteres mit Wasser gefülltes gesteckt, das mittels eines Bunsenbrenners während der Versuchsdauer auf genügend constanter Temperatur gehalten werden konnte.

In den angeführten Tabellen bedeuten:

$c$ die Normalconcentration,
$t$ die Temperatur,
$p$ die Polarisation,
$i$ die Stromstärke.

Die Stromstärken und elektromotorischen Kräfte, bei welchen der Sprung auftritt, sind durch Kreuze bezeichnet. Sämmtliche hier zunächst angeführten Werte beziehen sich auf Kupferchloridlösungen.

1.

| $c$ | $t$ | $p$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 0° | 0·63 | 0·0020 |
| | | 0·76 | 0·0050 |
| | | 0·80 | 0·0100 |
| | | 0·82 | 0·0185 |
| | | 0·84 | 0·0390 |
| | | 1·18 | 0·0400 |
| | | 1·19 | 0·0750 |
| | | 1·50 | 0·0760 |
| | | 1·54 | 0·0800 |
| | | 1·58 | 0·0850 |
| | | 1·59 | 0·1400 |

2.

| $c$ | $t$ | $p$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 20° | 0·55 | 0·0020 |
| | | 0·65 | 0·0040 |
| | | 0·75 | 0·0115 |
| | | 0·80 | 0·0240 |
| | | 0·80 | 0·0475 |
| | | 1·11 | 0·0485 |
| | | 1·13 | 0·0780 |
| | | 1·13 | 0·1250 |
| | | 1·18 | 0·1300 |
| | | 1·19 | 0·1350 |
| | | 1·20 | 0·1550 |
| | | 1·21 | 0·2100 |

3.

| $c$ | $t$ | $p$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 37° | 0·55 | 0·0020 |
| | | 0·63 | 0·0050 |
| | | 0·72 | 0·0150 |
| | | 0·76 | 0·0300 |
| | | 0·78 | 0·0560 |
| | | 1·03 | 0·0570 |
| | | 1·04 | 0·0700 |
| | | 1·06 | 0·0850 |
| | | 1·07 | 0·1400 |
| | | 1·08 | 0·2000 |

4.

| $c$ | $t$ | $p$ | $i$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 50° | 0·47 | 0·0020 |
| | | 0·58 | 0·0050 |
| | | 0·63 | 0·0100 |
| | | 0·73 | 0·0300 |
| | | 0·77 | 0·0750 |
| | | 0·78 | 0·0800 |
| | | 0·96 | 0·0820 |
| | | 1·02 | 0·0950 |
| | | 1·05 | 0·1400 |
| | | 1·07 | 0·2000 |

5.

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| 2 | 65° | 0·26 | 0·0020 |
| | | 0·40 | 0·0050 |
| | | 0·50 | 0·0100 |
| | | 0·66 | 0·0190 |
| | | 0·73 | 0·0300 |
| | | 0·76 | 0·0570 |
| | | 0·78 | 0·0950 |
| | | 0·78 | 0·1020 |
| | | 0·97 | 0·1030 |
| | | 0·99 | 0·1150 |
| | | 1·01 | 0·1700 |
| | | 1·04 | 0·2000 |

6.

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| 2 | 80° | 0·18 | 0·0020 |
| | | 0·32 | 0·0050 |
| | | 0·40 | 0·0100 |
| | | 0·52 | 0·0200 |
| | | 0·57 | 0·0250 |
| | | 0·60 | 0·0300 |
| | | 0·64 | 0·0570 |
| | | 0·68 | 0·1200 |
| | | 0·70 | 0·1450 |
| | | 0·87 | 0·1500 |
| | | 0·92 | 0·2000 |
| | | 0·97 | 0·3000 |

7.

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| 2 | 95° | 0·13 | 0·0020 |
| | | 0·20 | 0·0040 |
| | | 0·30 | 0·0100 |
| | | 0·47 | 0·0175 |
| | | 0·56 | 0·0270 |
| | | 0·59 | 0·0350 |
| | | 0·65 | 0·0800 |
| | | 0·68 | 0·1500 |
| | | 0·70 | 0·2350 |
| | | 0·88 | 0·2450 |
| | | 0·96 | 0·3000 |
| | | 0·99 | 0·4000 |

8.

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| 1 | 0° | 0·69 | 0·0020 |
| | | 1·06 | 0·0050 |
| | | 1·13 | 0·0100 |
| | | 1·15 | 0·0150 |
| | | 1·19 | 0·0280 |
| | | 1·19 | 0·0320 |
| | | 1·45 | 0·0330 |
| | | 1·50 | 0·0450 |
| | | 1·52 | 0·1000 |
| | | 1·54 | 0·1400 |

9.

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| 1 | 20° | 0·70 | 0·0020 |
| | | 0·88 | 0·0050 |
| | | 1·05 | 0·0100 |
| | | 1·09 | 0·0200 |
| | | 1·16 | 0·0380 |
| | | 1·18 | 0·0950 |
| | | 1·19 | 0·1500 |
| | | 1·20 | 0·2500 |

10.

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| 1 | 37° | 0·30 | 0·0020 |
| | | 0·70 | 0·0050 |
| | | 1·03 | 0·0100 |
| | | 1·07 | 0·0190 |
| | | 1·12 | 0·0770 |
| | | 1·13 | 0·1180 |
| | | 1·15 | 0·2200 |

11.

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| 1 | 50° | 0·50 | 0·0020 |
| | | 0·58 | 0·0050 |
| | | 0·76 | 0·0100 |
| | | 0·79 | 0·0170 |
| | | 0·81 | 0·0260 |
| | | 0 82 × | × 0·0390 |
| | | 0·99 | 0·0400 |
| | | 1·01 | 0·0450 |
| | | 1·03 | 0·0500 |
| | | 1·06 | 0·1000 |
| | | 1·09 | 0·2500 |

**12.**

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 65° | 0·30 | 0·0020 |
| | | 0·46 | 0·0050 |
| | | 0·58 | 0·0100 |
| | | 0·72 | 0·0220 |
| | | 0·79 | 0·0380 |
| | | 0·83 | 0·0620 |
| | | 0·84 | 0·0730 |
| | | × | × |
| | | 1·01 | 0·0750 |
| | | 1·03 | 0·1000 |
| | | 1·06 | 0·1400 |
| | | 1·08 | 0·2500 |

**13.**

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 80° | 0·18 | 0·0020 |
| | | 0·29 | 0·0050 |
| | | 0·42 | 0·0100 |
| | | 0·60 | 0·0220 |
| | | 0·70 | 0·0320 |
| | | 0·74 | 0·0500 |
| | | 0·78 | 0·0800 |
| | | 0·78 | 0·1050 |
| | | × | × |
| | | 0·95 | 0·1070 |
| | | 0·97 | 0·1150 |
| | | 1·01 | 0·1400 |
| | | 1·03 | 0·2700 |

**14.**

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 96° | 0·16 | 0·0020 |
| | | 0·25 | 0·0050 |
| | | 0·34 | 0·0100 |
| | | 0·42 | 0·0150 |
| | | 0·53 | 0·0250 |
| | | 0·61 | 0·0330 |
| | | 0·65 | 0·0400 |
| | | 0·67 | 0·0600 |
| | | 0·71 | 0·1200 |
| | | 0·72 | 0·1550 |
| | | × | × |
| | | 0·88 | 0·1600 |
| | | 0·93 | 0·2000 |
| | | 0·99 | 0·2700 |

**15.**

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 0° | 0·75 | 0·0020 |
| | | 1·08 | 0·0050 |
| | | 1·16 | 0·0100 |
| | | 1·18 | 0·0190 |
| | | 1·19 | 0·0280 |
| | | × | × |
| | | 1·43 | 0·0300 |
| | | 1·48 | 0·0380 |
| | | 1·51 | 0·1490 |

**16.**

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 20° | 0·74 | 0·0020 |
| | | 0·90 | 0·0050 |
| | | 1·10 | 0·0100 |
| | | 1·16 | 0·0250 |
| | | 1·19 | 0·0380 |
| | | 1·20 | 0·0600 |
| | | 1·21 | 0·0950 |
| | | 1·23 | 0·2000 |

**17.**

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 37° | 0·35 | 0·0020 |
| | | 0·87 | 0·0050 |
| | | 1·05 | 0·0100 |
| | | 1·08 | 0·0180 |
| | | 1·11 | 0·0280 |
| | | 1·15 | 0·0780 |
| | | 1·17 | 0·1350 |
| | | 1·18 | 0·2500 |

**18.**

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 50° | 0·27 | 0·0020 |
| | | 0·62 | 0·0050 |
| | | 0·81 | 0·0100 |
| | | 0·86 | 0·0150 |
| | | 0·86 | 0·0225 |
| | | 0·86 | 0·0240 |
| | | 1·07 × | × 0·0250 |
| | | 1·09 | 0·0380 |
| | | 1·10 | 0·0560 |
| | | 1·12 | 0·1000 |
| | | 1·13 | 0·3000 |

**19.**

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 65° | 0·18 | 0·0020 |
| | | 0·34 | 0·0050 |
| | | 0·69 | 0·0100 |
| | | 0·77 | 0·0150 |
| | | 0·81 | 0·0220 |
| | | 0·83 | 0·0320 |
| | | 0·83 | 0·0400 |
| | | 1·03 × | × 0·0410 |
| | | 1·05 | 0·0520 |
| | | 1·07 | 0·0900 |
| | | 1·09 | 0·2500 |

**20.**

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 80° | 0·34 | 0·0020 |
| | | 0·51 | 0·0050 |
| | | 0·60 | 0·0100 |
| | | 0·70 | 0·0200 |
| | | 0·76 | 0·0300 |
| | | 0·81 | 0·0600 |
| | | 0·81 × | × 0·0730 |
| | | 0·99 | 0·0750 |
| | | 1·02 | 0·0800 |
| | | 1·06 | 0·1300 |
| | | 1·08 | 0·2700 |

**21.**

| c | t | p | i |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 96° | 0·17 | 0·0020 |
| | | 0·27 | 0·0050 |
| | | 0·38 | 0·0100 |
| | | 0·50 | 0·0200 |
| | | 0·63 | 0·0320 |
| | | 0·68 | 0·0500 |
| | | 0·74 | 0·1000 |
| | | 0·76 × | × 0·1050 |
| | | 0·91 | 0·1100 |
| | | 0·95 | 0·1200 |
| | | 1·00 | 0·2200 |
| | | 1·02 | 0·3000 |

In nachstehenden Figuren 2 und 3 sind die Curven für die 2- und $\frac{1}{2}$-Normallösung räumlich gezeichnet, die Stromstärken, Temperaturen und Polarisationen als Coordinaten genommen. Die Zeichnung ist für die Concentrationen einzeln durchgeführt. Sämmtliche Messungsreihen zeigen gemeinsame charakteristische Eigenschaften. Die Polarisation nähert sich scheinbar einem Grenzwert, bis ein plötzliches Umspringen zu einem höheren Wert erfolgt. Dieser Knick tritt bei verdünnter Lösung früher auf als bei den höheren Concentrationen. Auch sind die Werte, wie zu erwarten war, sämmtlich höher. Mit steigender Temperatur nimmt die Polarisation ab, der Sprung erfolgt später. So zeigt z. B. die Curve bei 50° für die 2-Normallösung (Fig. 2) einen Knick von 0·78 bis 0·96 Volt bei einer Stromstärke von 0·08 Ampère, für die Normallösung einen Sprung von 0·82 auf 0·99 Volt bei 0·039 Ampère, die $\frac{1}{2}$-Normallösung den Sprung von 0·86 bis 1·07 bei 0·024

Ampère. Die Ebene, die man durch obige Zeichnungsweise erhält, zeigt eine Falte, die mit steigender Temperatur im Sinne der wachsenden Stromstärken wandert. Die durch diese Polarisationsebene verdeckten Theile der Curven sind in der Figur zur Erhöhung der Anschaulichkeit punktiert ausgezogen.

**Cu $Cl_2$ mit Kohlenelektroden**
**2 normal**

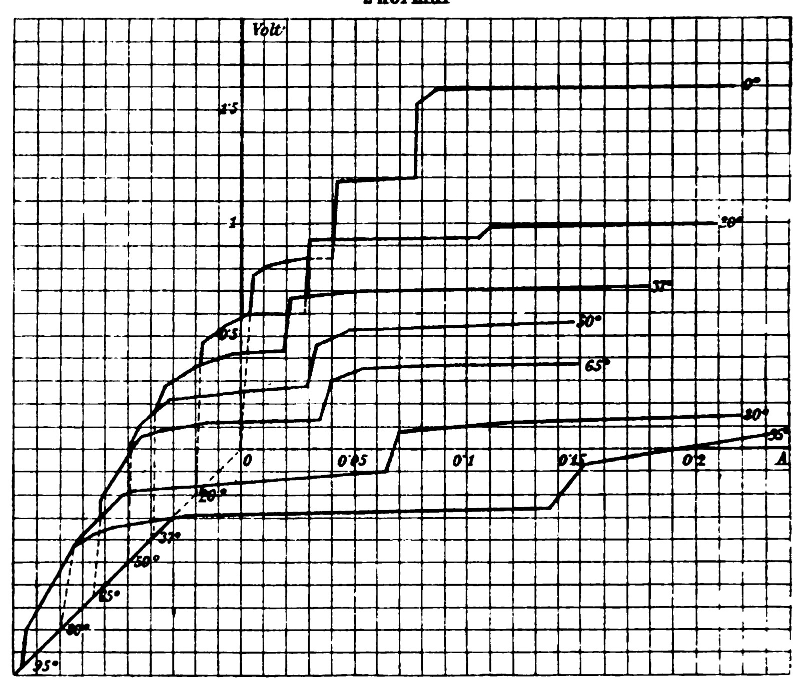



**Fig. 2.**

Eine Erklärung dieser Knicke fällt nicht schwer, wenn man sich auf den Boden der Le Blanc'schen Anschauungsweise stellt. An der Elektrode geht der Vorgang vor sich, der die geringste Arbeitsleistung erfordert. Es scheiden sich zuerst die leicht abscheidbaren Ionen aus, erst wenn diese nach dem Faraday'schen Gesetze zur Strombildung nicht genügen, werden auch schwerer abscheidbare Ionen abgeschieden. Auf obigen Fall kann man diese Anschauungsweise ebenfalls anwenden, wenn man eine stufenweise Dissociation des gelösten

Salzes annimmt. Zuerst ist in Arbeiten über Gasketten[1] die stufenweise Dissociation des Wassers in den Ionen $\overset{+}{H}$, $\overset{-}{OH}$, $\overset{--}{O}$ nachgewiesen worden.

Verdünnte Schwefelsäure ist in $\overset{+}{H}$, $\overset{-}{OH}$, $\overset{--}{O}$, $\overset{--}{SO_4}$, $\overset{-}{HSO_4}$ dissociiert,[2] wie man aus Knicken der Zersetzungsspannungscurven schließen kann. In geschmolzenen Salzen hat Garrard[3]

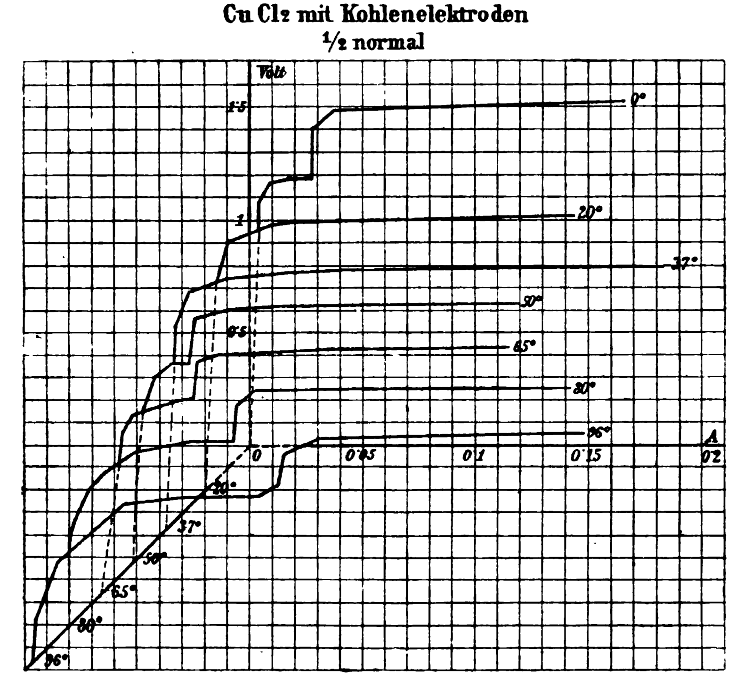



Fig. 3.

gefunden, dass zweiwertige neutrale Salze, z. B. Haloidverbindungen des Pb und Cd zwei Zersetzungspunkte zeigen und sie einer stufenweisen Dissociation zugeschrieben. In unserem Falle beim Kupferchlorid können wir $\overset{++}{Cu}$, $\overset{+}{CuCl}$ und $\overset{-}{Cl}$-Ionen annehmen. Die CuCl-Ionen werden leichter an der

[1] Glaser, l. c.; Bose, l. c.

[2] Le Blanc, Elektrochemie, S. 239.

[3] Garrard, Zeitschrift für Elektrochemie, VI., 214, 1899.

Kathode abgeschieden. So lange die durch die Wanderung, Diffusion, Neubildung und mechanische Einflüsse, wie z. B. das Umrühren der aufsteigenden Gasblasen, an die Elektrode gelangten CuCl-Ionen als einwertige Zersetzungsproducte dem Faraday'schen Gesetze genügen, so lange gelangen auch nur CuCl-Ionen zur Abscheidung. Bei einer gewissen Ionenarmut geben auch Cu-Ionen ihre Ladung ab und wir erhalten den Sprung in der Polarisation. Gleichzeitig bemerkt man den Beginn der charakteristischen Kupferfärbung an der Kathode. Dass der Knick wirklich an der Kathode stattfindet, zeigt folgende Versuchsreihe.

Wenn der Knick infolge Ionenmangels bei einer gewissen Stromdichte auftritt, so kann man durch Verbinden einer großen und einer kleinen (Arbeitselektrode) einen Schluss bezüglich der Elektrode ziehen.

Die Kathode wie gewöhnlich, die Anode groß:

| $p$ | $i$ |
|---|---|
| 0·43 | 0·0020 |
| 0·57 | 0·0050 |
| 0·67 | 0·0100 |
| 0·73 | 0·0200 |
| 0·78 | 0·0400 |
| 0·80 | 0·0600 |
| × | × |
| 1·11 | 0·0610 |
| 1·14 | 0·0800 |
| 1·16 | 0·1000 |
| 1·17 | 0·1400 |

Die Vergrößerung der Anode ist ohne Einfluss auf das Auftreten des Sprunges.

Die Anode wie gewöhnlich, die Kathode groß:

| $p$ | $i$ |
|---|---|
| 0·14 | 0·0020 |
| 0·32 | 0·0030 |
| 0·43 | 0·0100 |
| 0·57 | 0·0200 |
| 0·64 | 0·0300 |
| 0·73 | 0·0400 |
| 0·76 | 0·0600 |
| 0·77 | 0·0800 |
| 0·78 | 0·1000 |
| 0·80 | 0·2000 |
| 0·80 × | 0·3500 |
| 1·11 | × 0·4000 |

Bei großer Kathode erfolgt der Sprung später. Zur Erreichung derselben Stromdichte an der Kathode muss ein stärkerer Strom die Zelle passieren. Man kann also wirklich obigen Schluss ziehen.

Die $Cu_2Cl_2$-Bildung ist primär. Es wäre, abgesehen von dem Sprunge in der Polarisation, auch kein Grund vorhanden, warum das nach dem Knick elektrolytisch abgeschiedene Kupfer sich durch einige Zeit in der Lösung hält. Allerdings reduciert dann das Kupfer das Chlorid zu Chlorür.

In verdünnter Lösung wird diese Ionenarmut begreiflicherweise früher eintreten, der Knick also früher bei geringerer Stromdichte erfolgen. Bei höherer Temperatur wird wegen der erhöhten Diffusionsgeschwindigkeit und der größeren Wanderungsgeschwindigkeiten der Knick später auftreten. Vielleicht verschiebt sich auch das Gleichgewicht zwischen CuCl und Cu-Ionen zu Gunsten der CuCl-Ionen.

Die Curve für die 2-Normallösung zeigt bei 0° zwei Knicke. Für die $\frac{1}{2}$-Normallösung fällt der erste Knick noch in den aufsteigenden Theil der Curve und ist erst bei 50° so weit nach rechts gerückt, dass er sichtbar wird. Man müsste also noch irgend ein Ion annehmen, in das Kupferchlorid bei 0° dissociiert ist. Bei Zimmertemperatur merkt man nur für die 2-Normallösung einen zweiten kleinen Anstieg. Die Falte, welche die zweiten Sprünge liefern, ist also schnell verflacht.

Ein deutliches Bild dieser Verflachung der Knicke mit steigender Temperatur zeigt eine Cadmiumjodid-Lösung. Die Messungen wurden in gleicher Weise, wie beim Kupferchlorid, mit Kohlenelektroden, die durch Kautschukschläuche bis auf circa 1 *cm* isoliert waren, ausgeführt.

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 2 | 0° | 0·97 | 0·0020 |
| | | 1·00 | 0·0045 |
| | | 1·02 | 0·0100 |
| | | 1·04 | 0·0300 |
| | | 1·04 | 0·0350 |
| | | × | × |
| | | 1·87 | 0·0360 |
| | | 1·91 | 0·0565 |
| | | 1·91 | 0·1320 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 2 | 16° | 0·98 | 0·0020 |
| | | 1·00 | 0·0050 |
| | | 1·03 | 0·0470 |
| | | × | × |
| | | 1·72 | 0·0480 |
| | | 1·76 | 0·0560 |
| | | 1·76 | 0·1300 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 2 | 35° | 0·73 | 0·0020 |
| | | 0·90 | 0·0043 |
| | | 0·97 | 0·0095 |
| | | 0·99 | 0·0175 |
| | | 1·01 | 0·0550 |
| | | 1·02 | 0·0660 |
| | | 1·02 | 0·0680 |
| | | × | × |
| | | 1·47 | 0·0700 |
| | | 1·49 | 0·0920 |
| | | 1·55 | 0·1400 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 2 | 53° | 0·86 | 0·0020 |
| | | 0·92 | 0·0050 |
| | | 0·96 | 0·0090 |
| | | 0·98 | 0·0150 |
| | | 1·00 | 0·0270 |
| | | 1·00 | 0·1100 |
| | | 1·05 | 0·1200 |
| | | × | × |
| | | 1·26 | 0·1280 |
| | | 1·29 | 0·1400 |
| | | 1·31 | 0·2000 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 2 | 65° | 0·84 | 0·0020 |
| | | 0·94 | 0·0050 |
| | | 0·98 | 0·0150 |
| | | 0·99 | 0·0190 |
| | | 1·01 | 0·1340 |
| | | 1·04 | 0·1600 |
| | | 1·08 | 0·1850 |
| | | 1·14 | 0·2000 |
| | | 1·16 | 0·4800 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 2 | 85° | 0·83 | 0·0020 |
| | | 0·95 | 0·0050 |
| | | 0·98 | 0·0150 |
| | | 1·00 | 0·0580 |
| | | 1·01 | 0·1270 |
| | | 1·03 | 0·2000 |
| | | 1·03 | 0·5500 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 2 | 96° | 0·88 | 0·0020 |
| | | 0·95 | 0·0040 |
| | | 0·97 | 0·0150 |
| | | 0·98 | 0·0260 |
| | | 1·00 | 0·1280 |
| | | 1·01 | 0·5400 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 0° | 0·87 | 0·0020 |
| | | 1·01 | 0·0050 |
| | | 1·04 | 0·0100 |
| | | 1·06 | 0·0175 |
| | | 1·06 | 0·0280 |
| | | 1·89 | 0·0290 |
| | | 1·97 | 0·0370 |
| | | 1·99 | 0·1400 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 19° | 1·00 | 0·0020 |
| | | 1·03 | 0·0040 |
| | | 1·06 | 0·0190 |
| | | 1·07 | 0·0275 |
| | | 1·07 | 0·0370 |
| | | 1·07 | 0·0410 |
| | | 1·71 | 0·0420 |
| | | 1·75 | 0·0460 |
| | | 1·78 | 0·1350 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 40° | 0·94 | 0·0020 |
| | | 0·97 | 0·0050 |
| | | 1·00 | 0·0100 |
| | | 1·02 | 0·0150 |
| | | 1·03 | 0·0270 |
| | | 1·03 | 0·0560 |
| | | 1·53 | 0·0570 |
| | | 1·58 | 0·0610 |
| | | 1·60 | 0·1300 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 51° | 0·92 | 0·0020 |
| | | 0·96 | 0·0040 |
| | | 1·00 | 0·0105 |
| | | 1·01 | 0·0150 |
| | | 1·01 | 0·0550 |
| | | 1·01 | 0·0780 |
| | | 1·41 | 0·0800 |
| | | 1·50 | 0·0950 |
| | | 1·50 | 0·1350 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 66° | 0·97 | 0·0020 |
| | | 0·98 | 0·0045 |
| | | 0·99 | 0·0100 |
| | | 1·02 | 0·0560 |
| | | 1·03 | 0·1000 |
| | | 1·03 | 0·1050 |
| | | 1·18 | 0·1100 |
| | | 1·20 | 0·1200 |
| | | 1·23 | 0·1350 |
| | | 1·29 | 0·1600 |
| | | 1·30 | 0·5000 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 84° | 0·93 | 0·0020 |
| | | 0·96 | 0·0045 |
| | | 0·98 | 0·0115 |
| | | 0·99 | 0·0260 |
| | | 1·00 | 0·0560 |
| | | 1·02 | 0·1200 |
| | | 1·07 | 0·5000 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| 1 | 96° | 0·96 | 0·0020 |
| | | 0·98 | 0·0045 |
| | | 0·99 | 0·0115 |
| | | 1·00 | 0·0150 |
| | | 1·01 | 0·0570 |
| | | 1·02 | 0·1300 |
| | | 1·03 | 0·5500 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 0° | 0·98 | 0·0020 |
| | | 1·03 | 0·0045 |
| | | 1·08 | 0·0100 |
| | | 1·09 | 0·0150 |
| | | 1·10 | 0·0200 |
| | | 1·94 | 0·0210 |
| | | 1·99 | 0·0300 |
| | | 2·06 | 0·1350 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 19° | 0·96 | 0·0020 |
| | | 1·04 | 0·0045 |
| | | 1·07 | 0·0115 |
| | | 1·07 | 0·0250 |
| | | 1·74 | 0·0265 |
| | | 1·84 | 0·0355 |
| | | 1·88 | 0·0570 |
| | | 1·88 | 0·1300 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 40° | 0·99 | 0·0025 |
| | | 1·02 | 0·0050 |
| | | 1·03 | 0·0150 |
| | | 1·04 | 0·0280 |
| | | 1·04 | 0·0400 |
| | | 1·04 | 0·0435 |
| | | 1·56 | 0·0445 |
| | | 1·61 | 0·0620 |
| | | 1·65 | 0·1300 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 51° | 0·98 | 0·0020 |
| | | 1·00 | 0·0045 |
| | | 1·02 | 0·0100 |
| | | 1·03 | 0·0240 |
| | | 1·04 | 0·0580 |
| | | 1·04 | 0·0630 |
| | | 1·46 | 0·0640 |
| | | 1·50 | 0·0720 |
| | | 1·54 | 0·1350 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 66° | 0·91 | 0·0020 |
| | | 0·98 | 0·0045 |
| | | 1·00 | 0·0100 |
| | | 1·02 | 0·0270 |
| | | 1·03 | 0·0375 |
| | | 1·03 | 0·0620 |
| | | 1·03 | 0·0830 |
| | | 1·34 | 0·0850 |
| | | 1·37 | 0·1000 |
| | | 1·42 | 0·1300 |
| | | 1·43 | 0·1900 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 83° | 0·96 | 0·0020 |
| | | 0·98 | 0·0045 |
| | | 0·99 | 0·0100 |
| | | 1·00 | 0·0260 |
| | | 1·00 | 0·0620 |
| | | 1·01 | 0·1000 |
| | | 1·05 | 0·1350 |
| | | 1·09 | 0·1600 |
| | | 1·09 | 0·6000 |

| *c* | *t* | *p* | *i* |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 96° | 0·90 | 0·0020 |
| | | 0·97 | 0·0045 |
| | | 0·99 | 0·0100 |
| | | 1·00 | 0·0260 |
| | | 1·01 | 0·0430 |
| | | 1·01 | 0·0570 |
| | | 1·03 | 0·1300 |
| | | 1·05 | 0·2700 |

In Fig. 4 sind die Curven für die $\frac{1}{2}$-Normal-Cadmiumjodid-Lösung in gleicher Weise, wie für Kupferchlorid, gezeichnet, Sie zeigen sämmtlich ein ähnliches Verhalten, das Hinauswandern der Knicke mit wachsender Temperatur und

**Cd $J_2$ mit Kohlenelektroden**
**$1/2$ normal**

Fig. 4.

Concentration. Nur wird der Sprung immer kleiner, bis er bei 80° kaum merklich geworden ist.

Falls wir es hier mit der Folgeerscheinung einer Ionenarmut zu thun hätten, so müsste ein schnelles Bewegen der Flüssigkeit das Auftreten des Knickes verzögern. Es wäre dann nämlich dafür gesorgt, dass sich immer frische Theile der Lösung an der Elektrode befänden, deren Oberfläche dadurch

gleichsam vergrößert würde. Zu diesem Zwecke wurden die Elektroden in ein Krystallisiergefäß gestellt, in welchem die Lösung mittels eines von einem Heißluftmotor getriebenen Rührers in schnelle Rotation versetzt werden konnte.

Folgende Tabellen zeigen nun das Verhalten bei ruhendem und strömenden Elektrolyt. Der Widerstand ändert sich bekanntlich nicht bei strömendem Elektrolyt, es sind alle Versuchsbedingungen gleich geblieben. Als Elektroden verwendete ich diesmal platinierte Platinscheiben von 12 *mm* Durchmesser, die, in Glasröhren eingeschmolzen, starr verbunden waren. Die Entfernung der beiden parallelgestellten Scheiben betrug 5 *mm* bis 9 *mm.* Alle Versuche sind bei Zimmertemperatur mit einer $CuCl_2$-Lösung ausgeführt.

| Die Lösung | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| rotierend | | | ruhend | | |
| *c* | *p* | *i* | *c* | *p* | *i* |
| 2 | 0·50 | 0·0020 | 2 | 0·52 | 0·0020 |
| | 0·61 | 0·0050 | | 0·67 | 0·0050 |
| | 0·67 | 0·0100 | | 0·72 | 0·0100 |
| | 0·68 | 0·0200 | | 0·75 | 0·0200 |
| | 0·70 | 0·0400 | | 0·77 | 0·0300 |
| | 0·72 | 0·0600 | | 0·78 | 0·0500 |
| | 0·76 | 0·1000 | | 0·79 | 0·1000 |
| | 0·78 | 0·2000 | | 0·80 | 0·1150 |
| | 0·79 | 0·3000 | | 1·11 | 0·1170 |
| | 1·05 | 0·4000 | | 1·13 | 0·1500 |
| | 1·15 | 0·8000 | | 1·15 | 0·2000 |
| | | | | 1·18 | 0·6000 |

| Die Lösung | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| rotierend | | | ruhend | | |
| $c$ | $p$ | $i$ | $c$ | $p$ | $i$ |
| 1 | 0·33 | 0·0020 | 1 | 0·40 | 0·0020 |
| | 0·64 | 0·0050 | | 0·76 | 0·0050 |
| | 0·69 | 0·0100 | | 0·81 | 0·0100 |
| | 0·74 | 0·0200 | | 0·83 | 0·0200 |
| | 0·77 | 0·0300 | | 0·84 | 0·0300 |
| | 0·79 | 0·0500 | | 0·85 | 0·0500 |
| | 0·83 | 0·1000 | | 0·86 | 0·0660 |
| | 0·85 | 0·2000 | | 1·12 | 0·0680 |
| | 1·09 | 0·2100 | | 1·15 | 0·1000 |
| | 1·15 | 0·3000 | | 1·18 | 0·2000 |
| | 1·18 | 0·4000 | | 1·20 | 0·3000 |
| | 1·19 | 0·5000 | | | |

| Die Lösung | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| rotierend | | | ruhend | | |
| $c$ | $p$ | $i$ | $c$ | $p$ | $i$ |
| $\frac{1}{2}$ | 0·45 | 0·0020 | $\frac{1}{2}$ | 0·45 | 0·0020 |
| | 0·63 | 0·0050 | | 0·65 | 0·0050 |
| | 0·72 | 0·0100 | | 0·86 | 0·0100 |
| | 0·80 | 0·0200 | | 0·92 | 0·0200 |
| | 0·85 | 0·0400 | | 0·93 | 0·0400 |
| | 0·91 | 0·0700 | | 0·93 | 0·0450 |
| | 0·92 | 0·1200 | | 1·18 | 0·0460 |
| | 1·17 | 0·1300 | | 1·20 | 0·0700 |
| | 1·20 | 0·2000 | | 1·21 | 0·2000 |
| | 1·21 | 0·4000 | | | |

| Die Lösung | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| rotierend | | | ruhend | | |
| $c$ | $p$ | $i$ | $c$ | $p$ | $i$ |
| $\frac{1}{4}$ | 0·48 | 0·0020 | $\frac{1}{4}$ | 0·80 | 0·0020 |
| | 0·76 | 0·0050 | | 0·86 | 0·0050 |
| | 0·81 | 0·0100 | | 0·90 | 0·0100 |
| | 0·85 | 0·0200 | | 0·95 | 0·0200 |
| | 0·90 | 0·0400 | | 0·97 | 0·0350 |
| | 0·94 | 0·0800 | | 1·17 | 0·0370 |
| | 1·17 | 0·0820 | | 1·18 | 0·0400 |
| | 1·18 | 0·1000 | | 1·20 | 0·0800 |
| | 1·20 | 0·2000 | | 1·23 | 0·1200 |
| | 1·22 | 0·3000 | | | |

| Die Lösung | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| rotierend | | | ruhend | | |
| $c$ | $p$ | $i$ | $c$ | $p$ | $i$ |
| $\frac{1}{8}$ | 0·60 | 0·0020 | $\frac{1}{8}$ | 0·81 | 0·0020 |
| | 0·81 | 0·0050 | | 0·90 | 0·0050 |
| | 0·89 | 0·0100 | | 0·96 | 0·0100 |
| | 0·93 | 0·0200 | | 1·00 | 0·0140 |
| | 0·96 | 0·0400 | | 1·18 | 0·0150 |
| | 0·97 | 0·0480 | | 1·19 | 0·0200 |
| | 1·16 | 0·0490 | | 1·20 | 0·0500 |
| | 1·18 | 0·0700 | | 1·22 | 0·1000 |
| | 1·20 | 0·1000 | | 1·23 | 0·2000 |
| | 1·23 | 0·2000 | | 1·24 | 0·3000 |

| Die Lösung | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| langsam rotierend | | | sehr schnell rotierend | | |
| *c* | *p* | *i* | *c* | *p* | *i* |
| $\frac{1}{16}$ | 0·53 | 0·0020 | $\frac{1}{16}$ | 0·52 | 0·0020 |
| | 0·86 | 0·0050 | | 0·72 | 0·0050 |
| | 0·93 | 0·0100 | | 0·82 | 0·0100 |
| | 0·98 | 0·0200 | | 0·96 | 0·0200 |
| | 1·03 | 0·0300 | | 1·00 | 0·0300 |
| | × 1·12 | × 0·0400 | | 1·01 | 0·0400 |
| | 1·15 | 0·0500 | | 1·03 | 0·0500 |
| | 1·17 | 0·0600 | | 1·04 | 0·0560 |
| | 1·19 | 0·1000 | | × 1·12 | × 0·0570 |
| | 1·20 | 0·2000 | | 1·15 | 0·0600 |
| | 1·21 | 0·3000 | | 1·17 | 0·1000 |
| | × 1·35 | × 0·4000 * | | 1·19 | 0·2000 |
| | 1·37 | 0·5000 | | 1·20 | 0·3000 |
| | 1·39 | 0·7000 | | 1·21 | 0·4000 |
| | | | | 1·22 | 0·5000 |
| | | | | × 1·27 | × 0·6000 * |

| Die Lösung ruhend | | |
|---|---|---|
| *c* | *p* | *i* |
| $\frac{1}{16}$ | 0·67 | 0·0020 |
| | 0·88 | 0·0050 |
| | 0·95 | 0·0100 |
| | 1·12 | 0·0200 |
| | 1·31 | 0·0300 |
| | 1·58 | 0·0500 |
| | * 1·71 | 0·1000 |
| | 1·82 | 0·2000 |

* Wasserzersetzung.

| Die Lösung | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| sehr schnell rotierend | | | ruhend | | |
| *c* | *p* | *i* | *c* | *p* | *i* |
| $\frac{1}{64}$ | 0·53 | 0·0020 | $\frac{1}{64}$ | 0·78 | 0·0020 |
| | 0·86 | 0·0050 | | 1·02 | 0·0050 |
| | 0·97 | 0·0100 | | 1·58 | 0·0100 |
| | 1·03 | 0·0200 | | 1·70 | 0·0200 |
| | 1·09 | 0·0300 | | 1·76 | 0·0300 |
| | 1·13 | 0·0500 | | 1·82 | 0·0500 |
| | 1·19 | 0·1000 | | * 1·87 | 0·1000 |
| | * 1·20 × | × 0·2000 | | * 1·93 | 0·2000 |
| | * 1·28 | 0·3000 | | 2·03 | 0·3000 |
| | 1·30 | 0·4000 | | | |

Wie man aus den Tabellen sieht, erfolgt der Sprung bei rotierender Flüssigkeit wirklich später. Auch macht die schnelle und langsame Rotation einen erheblichen Einfluss, wie aus den Werten für die $\frac{1}{16}$-Normallösung folgt. Aus dem zweiten Anstieg der Curven für die $\frac{1}{16}$-Normallösung bei Rotation kann man auf Wasserzersetzung schließen. Bei ruhendem Elektrolyt erhält man gleich die hohen Werte, auch treten Übersättigungserscheinungen und Concentrationsänderungen störend auf.

Eine quantitative Trennung für Ionen verschiedener Haftintensität auf diese Weise wäre natürlich nicht so sicher, wie durch Regulieren der elektromotorischen Kraft der Stromquelle, worauf Freudenberg[1] hingewiesen hat.

Nach dem Gesagten kommt also diesem Knicke keine streng definierte Stromdichte zu. Er tritt nicht auf, wenn man von hohen Stromdichten zu niederen übergeht, er erfolgt

---

* Wasserzersetzung.

[1] Zeitschrift für phys. Chemie, 12, 97, 1893.

später, wenn sich die Flüssigkeit bewegt, ist also eine secundäre Erscheinung, insoferne er von den Versuchsbedingungen abhängt. Bei längerem Warten könnte man ihn auch für etwas kleinere Stromdichten erhalten, wenn die Neubildung der CuCl-Ionen mit ihrer Abscheidung nicht gleichen Schritt hält. Ein mathematisches Verfolgen der Vorgänge stößt auf große Schwierigkeiten, wegen der vielen Vorgänge, die sich superponieren. Das Charakteristische bei obigen Messungsreihen ist, dass sich trotz der hohen angewandten elektromotorischen Kraft von 200 Volt, die Ionen nicht nach einer von Stromstärke unabhängigen Gesetzmäßigkeit ausgeschieden haben, sondern dass die Ausscheidungsproducte ganz secundärer Art waren.

---

# Über $l$-grediente Verwandtschaften im $R_r$, auf $M_{r-1}$ und auf Curven

von

**S. Kantor.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. December 1901.)

Die meisten anzahlgeometrischen Probleme aus der Strahlengeometrie des $R_r$ lassen sich mit Hilfe des Correspondenzprincipes oder jener Consequenzen desselben, welche der abzählende Calcül daraus zieht, lösen. In zwei Arbeiten habe ich bereits Probleme der $R_l$-Geometrie in Angriff genommen. Dabei ist mir klar geworden, dass alle anzahlgeometrischen Resultate mit systematischer Übersichtlichkeit nur dann zu erreichen sind, wenn das bekannte Zeuthen-Schubert'sche Princip zu einem Correspondenzprincipe für $l$-grediente Verwandtschaften weiter gebildet wird. Dieses anzugeben und zu beweisen, auch in einigen Fällen anzuwenden, ist der Zweck dieser Arbeit.

## I. Allgemeines über $l$-lineare Verwandtschaft.

Sowie man im binären Gebiete (im unicursalen und im Gebiete vom Geschlechte $p$) zu Involutionen höherer Stufe und zu Verwandtschaften unter mehreren Variabelnreihen aufgestiegen ist, so führt auch im $r$-ären Gebiete, sei es im unicursalen, sei es im Gebiete höherer Irrationalität, bereits manche ganz fundamentale Construction zum Begriffe einer Verwandtschaft, in der $l$ Räume $R_r$ in derartige Beziehung gesetzt werden, dass mit der Festsetzung von je einem Punkte in $l-1$ dieser Gebiete sofort eine discrete Anzahl von Punkten des $l^{\text{ten}}$ Gebietes festgesetzt ist. Ich nenne eine solche Verwandtschaft $l$-gredient und, wenn die zu $l-2$ Punkten von

$l-2$ Gebieten complementären bigredienten Verwandtschaften alle bilinear sind, $l$-linear.

Ein Unterschied gegenüber dem binären Gebiete besteht darin, dass zur analytischen Darstellung einer solchen Verwandtschaft mehr als eine Gleichung unter den $l$ Variabelnreihen erforderlich ist. Überdies hat Herr Lindemann in den Vorlesungen über Geometrie bereits die Bemerkung gemacht, dass sich nicht jede bigrediente Verwandtschaft als vollständiger Schnitt zweier bigredienter Formen darstellen lässt. Dasselbe ist dann auch für den $l$-gredienten Fall zu beachten und man bedarf nach einem hieher zu adaptierenden Theoreme Kronecker's höchstens $lr+1$ Formen zur Darstellung jeder $l$-gredienten Verwandtschaft.

Aber sowie die Collineation die Darstellung durch eine einzige Form gestattet, wenn eine Variabelnreihe in den Coordinaten genommen wird, welche zur anderen Reihe contragredient sind, so ist es auch möglich, die $l$-grediente Verwandtschaft im allgemeinen durch eine einzige Form darzustellen, wenn man eine Variabelnreihe in den Coordinaten nimmt, welche contragredient zu den übrigen $l-1$ unter einander cogredient bleibenden Reihen sind.

Denn die Punktgruppen ($\infty^{r(l-1)}$ an Mächtigkeit) des letzten $R_r$ können als ganz zerfallene $M_{r-1}$, etwa der $m^{\text{ten}}$ Classe, angesehen werden. Sie bilden also eine Mannigfaltigkeit $V$, die in der Mannigfaltigkeit — $D_{(r-1,m)}$ — aller ganz zerfallenen $M_{r-1}^m$ enthalten ist und welche $V$ die Eigenschaft hat, auf die Gesammtheit aller aus den Punkten von $l-1$ $R_r$ zu bildenden Punkt-($l$—1)-tupel eindeutig abbildbar zu sein. Es muss also für $V$ eine Parameterdarstellung durch rationale Functionen geben. Da nun ihre Coordinaten die Coefficienten von $M_{r-1}^m$ sind, so können die Parameterausdrücke für diese Coefficienten in die Gleichung der $M_{r-1}^m$ eingesetzt werden. Es entsteht dann eine Form in $l$ Reihen, von denen eine die Coordinaten $u_1, \ldots, u_{r+1}$ von $M_{r-1}^m$, die anderen $l-1$ jene Parameter der Discriminantenmannigfaltigkeit sind und diese Form ist die gewünschte.

Sei nun eine solche Verwandtschaft $\mathrm{T}_l$ gegeben; die $l$ Träger mögen coincidieren, die Anzahl der Punkte, welche

im $R_r^{(i)}$ entstehen, wenn $l-1$ Punkte je in $R_r^{(1)}, \ldots R_r^{(i-1)}$, $R_r^{(i+1)}, \ldots R_r^{(l)}$ festgesetzt werden, sei $\alpha_i$ — wozu, wie wir sehen werden, noch eine Reihe anderer Gradzahlen kommt — und es soll die Anzahl der Punkte bestimmt werden der Lage, dass, wenn man einen solchen Punkt als $l-1$ $R_r$ angehörig nimmt, einer der entsprechenden Punkte des $l^{\text{ten}}$ $R_r$ mit ihm coincidiert, die Coincidenzen der $l$-gredienten Verwandtschaft.

Die $l_1$-gredienten Verwandtschaften, welche, wenn $l-l_1$ einzelne Punkte in $l-l_1$ der $l$ Räume festgesetzt werden, in den übrigen $l_1$ entstehen, will ich als die in $T_l$ »enthaltenen« complementären $T_{l_1}$ bezeichnen.

## II. Ein Hilfssatz.

Dem Beweise muss ich ein Lemma und ein Theorem vorausschicken, deren eigenthümliche Herleitung auch an sich ein Interesse haben dürfte.

Lemma. In einem $R_r$ bilden die $R_i$, welche gegebene $R_{\lambda_1}, \ldots, R_{\lambda_{i+1}}$ je in einem Punkte treffen, wobei

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_{i+1} = r - i,$$

einen Complex, von welchem durch jeden Punkt des $R_r$ ein einziger $R_i$ geht.

Einen particulären Fall, nämlich $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{i+1} = 1$, $2i = r-1$, habe ich in Cr. J., Bd. 118, erwähnt und benützt. Wenn jetzt durch einen Punkt $P$ von $R_r$ zwei $R_i$ giengen, so mögen diese die Stützräume — $R_{\lambda_1}, \ldots, R_{\lambda_{i+1}}$ — in

$$Q_1, Q_1'; Q_2, Q_2'; \ldots; Q_{i+1}, Q_{i+1}'$$

schneiden. Dann bestimmen die Geraden $Q_1, Q_1'; \ldots; Q_{i+1}, Q_{i+1}'$ einen $R_{2i+1}$ durch $P$, in dem $i+1$ Geraden — nämlich die Geraden $QQ'$ — im Punkte $P$ und zwei durch $P$ gehende und diese Geraden treffende $R_i$ enthalten wären, entgegen dem für diesen Fall geltenden Satze (l. c.).

Theorem I. Sind in einem $R_{(i+1)(l-1)-1}$ $l$ in $l$-gredienter Verwandtschaft stehende $R_i$ gegeben, so ist die Anzahl der verwandten Punkt-$l$-tupel, welche in je einem $R_{l-2}$ statt in einem durch sie bestimmten $R_{l-1}$ enthalten sind, gleich der

Anzahl Coincidenzen, welche in den $l$ $l$-gredient verwandten $R_i$ entstehen, wenn sie denselben Träger besitzen.

Durch jeden Punkt des $R_{(i+1)(l-1)-1}$ geht ein einziger $R_{l-2}$, welcher die $l-1$ $R_i$ überhaupt in je einem Punkte trifft, gemäß dem hier bewiesenen Lemma. Wird also ein $l^{\text{ter}}$ $R_i$ hinzugenommen, so entsteht durch die Treff-$R_{l-2}$ dieser aller eine $M_{i+l-2}$, deren Ordnung wir gar nicht benöthigen (cf. übrigens Cr. J., Bd. 118) und aber die sämmtlichen $\infty^{l-1}$ $R_i$, welche $i+1$ dieser $R_{l-2}$ treffen, gehören ebenfalls der $M_{i+l-2}$ an.

Somit können mit Hilfe der Transversal-$R_{l-2}$ die verwandten Punkt-$l$-tupel auf einen $(l+1)^{\text{ten}}$ $R_i$ der Reihe übertragen werden, indem man durch je $l$ verwandte Punkte je einen $R_{l-2}$ dieser zweiten Erzeugung zieht und mit diesen den $(l+1)^{\text{ten}}$ $R_i$ schneidet. Fallen solche $l$ verwandte Punkte in einen zusammen, so fallen gleichzeitig $l$ verwandte Punkte der $l$ $R_i$ in einen $R_{l-2}$ und ebenso aber kann man aus jeder $l$-gredienten Verwandtschaft in einem $R_i$ der $M_{i+l-2}$ eine $l$-grediente Verwandtschaft unter $l$ anderen $R_i$ derselben Erzeugung der $M_{i+l-2}$ herleiten.

### III. Das Princip und sein Beweis.

Das in I. gestellte Problem wird durch folgendes Theorem gelöst:

Theorem II. Die Anzahl der Coincidenzpunkte einer $l$-gredienten Verwandtschaft im $R_r$, falls dieselbe der Natur der Verwandtschaft nach eine endliche Zahl ist, ist

$$\sum_{i_1,\ldots i_l} [i_1,\ldots,i_l] \qquad \begin{array}{l} i_1+\ldots+i_l = r \\ i_1 = 0,\ldots r \\ i_2 = 0,\ldots r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_l = 0,\ldots r, \end{array}$$

worin $[i_1,\ldots,i_l]$ die Anzahl der verwandten Punkt-$l$-tupel ist, von denen einer in einem gegebenen $R_{i_1}$ des ersten, einer in einem gegebenen $R_{i_2}$ des zweiten u. s. w., endlich einer in einem gegebenen $R_{i_l}$ des $l^{\text{ten}}$ $R_r$ enthalten ist.

Es sind also diejenigen Klammern, wo alle $i$ bis auf eines gleich Null sind, das übrige aber $r$ ist, die sogenannten Gradzahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_l$ der $l$ bezogenen Punkträume. Für $r = 1$ bedarf das Theorem keines ausführlichen Beweises.

Im $R_i$. Ich beginne mit $l = 3$ und verlege die drei $R_i$, bezeichnet $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$, $R_i^{(3)}$, deren verwandte Punktetripel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seien, in einen $R_{2i+2}$. Durch jeden Punkt $P$ des $R_{2i+2}$ geht nur eine endliche Anzahl $R_2$, welche drei entsprechende Punkte $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ verbinden. Auf Grund des Theorems I. in II. ist es diese Zahl, welche bestimmt werden muss.

Ich verbinde $P$ mit $R_i^{(3)}$ und schneide mit diesem $R_{i+1}$ den Raum $R_{2i+1}$, den die beiden $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$ bestimmen, in einem Hilfsraume $R_i = H$. Wenn durch $P$ eine $R_2$ jenes $\infty^{2i}$-Complexes von $R_2$ geht, welchen die drei trigredient verwandten $R_i$ bestimmen, so schneidet sie den Raum $PR_i^{(3)}$ in einer Geraden und den $R_{2i+1}(R_i^{(1)} R_i^{(2)})$ in einer Geraden. Nun seien in dem $(i+1)$-dimensionalen Raume $PR_i^{(3)}$ die beiden Räume $R_i^{(3)}$ und $H$ in folgender Weise bigredient bezogen:

»Jeden Punkt $\gamma_3$ von $R_i^{(3)}$ verbinde ich mit $P$ und bringe diese Gerade zum Schnitt mit $H$ in einem Punkte $h_3$. Dann entspricht aber dem Punkte $\gamma_3$ im $R_{2i+1}$ eine bigrediente Correspondenz unter $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$, die complementäre zu $\gamma_3$ in $T_3$ und folglich auch die Regelfläche der Geraden, welche die entsprechenden Punktepaare $\gamma_1 \gamma_2$ dieser beiden $R_i$ verbinden. Die Correspondenz hat die charakteristischen Zahlen

$$[0, i, 0], [i, 0, 0], [1, i-1, 0], [2, i-2, 0], \ldots, [i-1, 1, 0],$$

die Regelfläche ist daher auf Grund des bigredienten Principes von Zeuthen-Schubert von der Ordnung

$$[0, i, 0] + [i, 0, 0] + [1, i-1, 0] + \ldots + [i-1, 1, 0].$$

»In so vielen Punkten $h_{12}$ schneidet die Regelfläche die $H$ und sie sind jene Punkte, welche in der beabsichtigten Hilfscorrespondenz $(h_{12}, h_3)$ auf $H$ dem $h_3$ entsprechen.

»Ist dann $h_{12}$ gegeben, so geht von ihm über $R_i^{(1)} R_i^{(2)}$ eine einzige Gerade, deren Stützpunkten mit diesen beiden Räumen $\alpha_3$ Punkte $\gamma_3$, also $\alpha_3$ Geraden $P\gamma_3$, also $\alpha_3$ Punkte $h_3$ entsprechen«.

Die Coincidenzen dieser bigredienten Correspondenz sind die Punkte, in denen die gesuchten Ebenen von $P$ aus eintreffen.

Lässt man ferner, um die übrige Beschreibung dieser Hilfscorrespondenz zu liefern, $h_{12}$ in einer Geraden variieren, dann bewegen sich die eben genannten Stützpunkte auf zwei anderen Geraden, respective in $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$, welche hiedurch projectiv bezogen sind. Nun handelt es sich, auszuwerten, wie viele von den diesen $\infty^1$ Punktepaaren innerhalb der $T_3$ entsprechenden Punkten $\gamma_3$ von $R_i^{(3)}$ in einem $R_{i-1}^{(3)}$ enthalten sind. Die Stützpunkte mögen $k_1$, $k_2$ heißen. Dem $k_2$ entspricht in der Geraden, welche $k_1$ durchläuft, ein Punkt vermöge der Projectivität. Dieser hat eine complementäre Correspondenz in $T_3$ und in dieser entspricht dem $R_{i-1}^{(s)}$ eine $M_{i-1}$ der Ordnung $[0, 1, i-1]$, welche die Gerade der $k_2$ in ebensovielen Punkten schneidet. Ist umgekehrt dieser Schnittpunkt $y$ gegeben, so hat man eine zu $y$ als $\gamma_2$ complementäre Correspondenz, in welcher dem $R_{i-1}^{(s)}$ eine $M_{i-1}$ der Ordnung $[1, 0, i-1]$ entspricht. Diese schneidet die Gerade der $k_1$ in ebensovielen Punkten und diesen entsprechen in der Projectivität unter den beiden Geraden ebensoviele Punkte $k_2$. So entsteht in der Geraden eine Correspondenz unter $y$, $k_2$, welche die Grade

$$[0, 1, i-1], \ [1, 0, i-1]$$

und also $[0, 1, i-1]+[1, 0, i-1]$ Coincidenzen besitzt. Dies ist die erste charakteristische Zahl.

Die nächste charakteristische Zahl der Correspondenz $h_3$, $h_{12}$ wird bestimmt, indem man $h_{12}$ in einem $R_2$ bewegt, von ihm die Transversalen über $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$ zieht, deren Stützpunkte zwei $R_2$ beschreiben werden $K_2^{(1)}$, $K_2^{(2)}$, die collinear bezogen sind, und nun die Ordnung des Ortes $M_2$ der $\gamma_3$ bestimmt, welche diesen $\infty^2$ Paaren $k_1$, $k_2$ in $T_3$ entsprechen. Die complementären Correspondenzen von $k_1$, $k_2$ liefern durch die Verwandlung eines $R_{i-2}^{(s)}$, der die $M_2$ schneiden soll, in zwei $M_{i-2}$ der Ordnungen $[0, 2, i-2]$, $[2, 0, i-2]$ die Grade der Correspondenz $k_2, y$ in $K_2^{(2)}$, welche wie vorhin zu definieren ist. Für sie fehlt noch die dritte charakteristische Zahl, welche die Ordnung der $M_{i-1}$ ist: Ort der $M_{i-2}$, welche dem $R_{i-2}^{(s)}$ in den

$\infty^1$ Correspondenzen entsprechen, die zu den einzelnen Punkten $k_2$ einer Geraden complementär in $\mathbf{T}_3$ sind, also auch die Zahl der Punktetripel von $\mathbf{T}_3$, welche in einer Geraden von $k_2$, in irgend einer Geraden des $R_i^{(1)}$ und in dem $R_{i-2}$ von $R_i^{(3)}$ enthalten sind, das ist aber nach unserer Bezeichnung die Zahl $[1, 1, i-2]$. Die zweite charakteristische Zahl der Correspondenz $(h_3, h_{12})$ ist also

$$[0, 2, i-2]+[2, 0, i-2]+[1, 1, i-2].$$

Die dritte charakteristische Zahl der Correspondenz $h_3$, $h_{12}$ wird bestimmt, indem man $h_{12}$ in einem $R_3$ bewegt, von ihm die Transversalen über $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$ zieht, deren Stützpunkte zwei $R_3$ beschreiben werden $K_3^{(1)}$, $K_3^{(2)}$, die collinear bezogen sind und nun die Ordnung des Ortes $M_3$ der $\gamma_3$ bestimmt, welche diesen $\infty^3$ Paaren $k_1$, $k_2$ in $\mathbf{T}_3$ entsprechen, also der Anzahl der Schnittpunkte dieser $M_3$ mit einem willkürlichen $R_{i-3}^{(s)}$. Hiezu wird wieder in $R_i^{(2)}$ eine Hilfscorrespondenz $k_2$, $y$ eingerichtet, indem man zu dem $k_2$ die complementäre Correspondenz in $\mathbf{T}_3$, in dieser die dem $R_{i-3}^{(s)}$ entsprechende $M_{i-3}$ und deren Schnittpunkte mit $K_3^{(1)}$ und die dazu collinearen Punkte $y$ bestimmt. Die erste und letzte charakteristische Zahl ist $[3, 0, i-3]$, $[0, 3, i-3]$, die zweite wird die Ordnung der $M_{i-2}$, Ort der $M_{i-3}$, welche dem festen $R_{i-3}$ in den zu den Punkten $k_2$ einer Geraden complementären Correspondenzen entspricht, also die Zahl der Punktetripel, welche auf einem $R_2$ von $R_i^{(1)}$, einem $R_1$ von $R_i^{(2)}$ und einem $R_{i-3}$ von $R_i^{(3)}$ enthalten sind. Die weitere charakteristische Zahl ist die Ordnung der $M_{i-1}$, Ort der $M_{i-3}$, welche dem $R_{i-3}^{(s)}$ in den zu den Punkten $k_2$ eines $R_2$ complementären Correspondenzen entspricht. Somit ist die dritte charakteristische Zahl von $(h_3, h_{12})$

$$[3, 0, i-3]+[0, 3, i-3]+[2, 1, i-3]+[1, 2, i-3].$$

Die Bestimmung der charakteristischen Zahlen von $(h_3, h_{12})$ kann so fortgesetzt werden und man findet allgemein

$$[\lambda, 0, i-\lambda]+[0, \lambda, i-\lambda]+[1, \lambda-1, i-\lambda]+[2, \lambda-2, i-\lambda]+\ldots$$

Wird nun auf die Hilfscorrespondenz das bigrediente Princip angewendet, so findet man thatsächlich

$$\Sigma[i_1, i_2, i_3], \qquad \begin{aligned} i_1+i_2+i_3 &= i \\ i_1 &= 0,\ldots, i \\ i_2 &= 0,\ldots, i \\ i_3 &= 0,\ldots, i \end{aligned}$$

und gleichzeitig als Folgerung das

Theorem III. Sind im $R_r$ drei in trigredienter Verwandtschaft befindliche $R_i$ gegeben, so ist die Ordnung der Mannigfaltigkeit, welche falls $r > 2i+2$, von den $\infty^{2i}$ Verbindungs-$R_2$ gebildet wird, eben $\Sigma[i_1, i_2, i_3]$.

Ist $r = 2i+2$, so gehen ebensoviele der Verbindungs-$R_2$ durch jeden Punkt von $R_r$.

Ich nehme den Beweis für allgemeines $l-1$ als geliefert an und bediene mich nun derselben Schlussfolgerungen, um die Giltigkeit auf das nachfolgende $l$ auszudehnen. Ich verlege die $l$ $R_i$, bezeichnet $R_i^{(1)},\ldots,R_i^{(l)}$, deren verwandte Punkt-$l$-tupel $\gamma_1,\ldots\gamma_l$ seien, in einen $R_{(l-1)(i+1)}$; sei $\sigma = (l-1)(i+1)$. Durch jeden Punkt $P$ des $R_\sigma$ geht nur eine endliche Anzahl $R_{l-1}$, welche entsprechende $l$-tupel $\gamma$ verbinden. Auf Grund des Theorems I. in art. II. ist es diese Zahl, welche bestimmt werden muss. — Werde wieder $P$ mit $R_1^{(l)}$ verbunden, dieser $R_{i+1}$ mit dem $R_{(l-1)i+1}$, den die $R_i^{(1)},\ldots, R_i^{(l-1)}$ bestimmen, in einem Hilfsraume $R_i \equiv H$ geschnitten. Wenn durch $P$ ein $R_{l-1}$ jenes $\infty^{(l-1)i}$-Complexes von $R_{l-1}$ geht, den die $l$ $l$-gredient verwandten $R_i$ bestimmen, so schneidet er den Raum $PR_i^{(l)}$ in einer Geraden und den $R_{\sigma-1}(R_i^{(1)},\ldots R_i^{(l-1)})$ in einem $R_{l-2}$. Nun seien in dem $R_{i+1}(PR_i^{(l)})$ die beiden Räume $R_i^{(l)}$ und $H$ in folgender Weise in bigredienter Correspondenz bezogen:

»Jeden Punkt $\gamma_l$ von $R_i^{(l)}$ verbinde ich mit $P$ und bringe diese Gerade zum Schnitte mit $H$ in einem Punkte $h_l$. Dann entspricht aber dem Punkte $\gamma_l$ im $R_{\sigma-1}$ eine $(l-1)$-grediente complementäre Correspondenz unter $R_i^{(1)},\ldots, R_i^{(l-1)}$ und folglich auch die $M_{\sigma-i-1}$ der $R_{l-2}$, welche die entsprechenden $(l-1)$-tupel der Correspondenz dieser $(l-1)$ $R_i$ verbinden. Die Ordnung dieser Mannigfaltigkeit ist nach Theorem III. (Hyp. für $l-1$)

$$h_\lambda = \Sigma[i_1, \ldots, i_{l-1}, 0] \qquad \begin{array}{c} i_1 + \ldots + i_{l-1} = i \\ i_1 = 0, \ldots i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_{l-1} = 0, \ldots i. \end{array}$$

In so vielen Punkten $h_\lambda$ schneidet die $M_{3-i-1}$ den $H$ und sie sind jene Punkte, welche in der beabsichtigten Hilfscorrespondenz $(h_\lambda, h_l)$ auf $H$ dem $h_l$ entsprechen.

Ist dann $h_\lambda$ gegeben, so geht von ihm über $R_i^{(1)}, \ldots, R_i^{(l-1)}$ gemäß dem Lemma in II. ein einziger $R_{l-2}$, dessen Stützpunkten mit diesen $(l-1)R_i$ $[0, \ldots, 0, i]$ Punkte $\gamma_l$, also $[0, \ldots, 0, i]$ Geraden $P\gamma_l$, also $[0, \ldots, 0, i]$ Punkte $h_l$ entsprechen«.

Diese Coincidenzen dieser bigredienten Correspondenz sind die Punkte, in denen die gesuchten $R_{l-1}$ von $P$ aus eintreffen.

Um die charakteristischen Zahlen außer der ersten und letzten (den beiden Deutigkeiten), die wir soeben bewertet haben, zu bestimmen, lassen wir wie bei $l = 3$ $h_\lambda$ in einem $R_1$, dann einem $R_2, \ldots$ allgemein einem $R_g$ variieren. Dann bewegen sich die oben genannten Stützpunkte auf den $R_i^{(1)}, \ldots, R_i^{(l-1)}$ in $(l-1)$ linearen Räumen $R_1$ oder $R_2, \ldots$ allgemein $R_g$, welche hiedurch collinear bezogen sind. Nun handelt es sich, auszuwerten, wie viele von den diesen $\infty^g$ Punkte-$(l-1)$-tupeln innerhalb der $T_l$ entsprechenden Punkten $\gamma_l$ von $R_i^{(l)}$ in einem willkürlichen $R_{i-g}^{(s)}$ dieses $R_i$ enthalten sind. Hiezu kommt wiederum eine abermals b i g r e d i e n t e Hilfscorrespondenz $k_{(l-1)}-y$, aber im $g$-dimensionalen Gebiete $K_g^{(l-1)}$. So entspricht dem $k_{l-1}$ in den $K_g^{(1)}, \ldots, K_g^{(l-2)}$ ein Punkt-$(l-2)$-tupel, das eine complementäre Correspondenz in $T_l$ besitzt, in der dem $R_{i-g}^{(s)}$ eine $M_{i-g}$ der Ordnung $[0, \ldots, 0, g, i-g]$ entspricht, womit eine Zahl gefunden ist. Ferner ist die Ordnung des Ortes der $M_{i-g}$ zu bestimmen, die dem $R_{i-g}^{(s)}$ in den $\infty^f$ Correspondenzen entsprechen, welche als complementäre entstehen, wenn $k_{l-1}$ sich in einem $R_1, \ldots, R_f$ bewegt. Und diese Ordnungen sind sämmtlich charakteristische Zahlen für $T_l$. So entstehen die folgenden successiven charakteristischen Zahlen für die Hilfscorrespondenz $(h_\lambda, h_l)$:

$$[0,\ldots 0, i]$$
$$[1,0,\ldots,0,i-1]+[0,1,\ldots,0,i-1]+\ldots+[0,\ldots,0,1,i-1]$$
$$[2,0,\ldots,0,i-2]+[1,1,\ldots,0,i-2]+\ldots+[0,\ldots,2,i-2]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma\,[i_1,\ldots,i_{l-1},0],$$

durch deren Summation die Formel des Theorems II. entsteht.

## IV. Zur Theorie der Erzeugung von Mannigfaltigkeiten.

Aus dem Theoreme II. können wir auf Grund von Theorem I. sofort die Folgerung ziehen:

Theorem IV. Sind im $R_{(i+1)(l-1)-1}$ $l$ in $l$-gredienter Verwandtschaft $T_l$ stehende $R_i$ gegeben, so ist die Anzahl der verwandten Punkt-$l$-tupel, welche in je einem $R_{l-2}$ statt in einem durch sie bestimmten $R_{l-1}$ enthalten sind,

$$\sum_{i_1,\ldots,i_l}[i_1,\ldots,i_l] \qquad \begin{array}{l} i_1+\ldots+i_l=i \\ i_1=0,\ldots,i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_l=0,\ldots,i, \end{array}$$

wo $[i_1,\ldots,i_l]$ die charakteristischen Zahlen von $T_l$ sind.

Außerdem:

Theorem V. Sind im $R_r$ $l$ in $l$-gredienter Verwandtschaft befindliche $R_i$ gegeben, so ist die Ordnung der Mannigfaltigkeit welche, falls $r > (l-1)(i+1)$ von den $\infty^{(l-1)i}$ Verbindungs-$R_{l-1}$ gebildet wird, eben $\Sigma\,[i_1,\ldots,i_l]$.

Ist $r=(l-1)(i+1)$, so ist dies die Anzahl der $R_{l-1}$ des erzeugten Complexes, die durch einen Punkt gehen.

Ist $r > (l-1)(i+1)$, so ist jene Zahl immer noch eine der Gradzahlen des $R_{l-1}$-Complexes.

## V. Die zugeordneten Arten $l$-gredienter Verwandtschaften.

Neben die Verwandtschaft $T_l$ stellt sich eine Anzahl $r-1$ anderer Classen von Verwandtschaften, welche auch $l$-gredient sind, wo aber je $l-1$ Punkten von $l-1$ der $l$ $R_r$ im $l^{\text{ten}}$ $R_r$

unendlich viele Punkte, respective einer $M_1, M_2, \ldots, M_{r-1}$ entsprechen. Diese sollen der Art nach mit $T_l^{(1)}, \ldots, T_l^{(r-1)}$ bezeichnet werden. Sind die $l$ Träger $R_r$ in einen vereinigt, so wird es eine Mannigfaltigkeit beziehungsweise von $1, 2, \ldots, r-1$ Dimensionen geben, deren jeder Punkt $l$-fach gezählt, als ein Punkt-$l$-tupel der $T_l$ aufzufassen ist. Die Ordnung dieser Incidenzörter wird gefunden, indem man einen Schnitt — $R_{r-1}$, —$R_{r-2}, R_{r-3}, \ldots, R_1$ annimmt, mit diesem sozusagen die Verwandtschaft $T_l^{(1)}, \ldots T_l^{(r-1)}$ schneidet, indem man zu je $l-1$ Punkten jenes $R_i$ die entsprechende $M_{r-i}$ in $T_l^{(r-i)}$ bestimmt und deren Schnittpunkte mit $R_i$ festsetzt. So wird in $R_i$ eine $T_l^{(0)}$ entstehen, deren charakteristische Zahlen $[i_1, \ldots, i_l]$ mit der Bedingung $i_1 + \ldots + i_l = i$ gleich charakteristischen Zahlen von $T_l^{(r-i)}$ im $R_r$ sind. Die Coincidenzen sind die Schnittpunkte mit der Incidenz —$M_{r-i}$ des $R_r$.

Für $T_l^{(i)}$ bedürfen wir also nur der charakteristischen Zahlen $[i_1, \ldots, i_l]$ mit $i_1 + \ldots + i_l = i$ und andere existieren auch im eigentlichen Sinne nicht, wenn wir festsetzen, dass das Symbol $[\ldots]$ stets nur eine discrete Zahl von Punkten bezeichnen solle. Also:

Theorem VI. Ist im $R_r$ unter $l$ coincidenten Punkträumen $R_r$ eine $l$-grediente Verwandtschaft $T_l$ gegeben, in der $l-1$ Punkte aus je $l-1$ Räumen $R_r$ durch $\infty^{r-i}$ $l$te Punkte — enthalten in einer $M_{r-i}$ — zu Punkt-$l$-tupeln der Verwandtschaft ergänzt werden, so ist der Ort der Punkte, welche $l$-fach gezählt verwandte Punkt-$l$-tupel darstellen, eine $M_{r-i}$ der Ordnung

$$\sum_{i_1, \ldots, i_l} [i_1, \ldots, i_l] \qquad \begin{array}{l} i_1 + \ldots + i_l = i \\ i_1 = 0, \ldots, i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_l = 0, \ldots, i. \end{array}$$

## VI. Die äußerste Verallgemeinerung des tetraedralen Complexes.

Eine eigenthümliche Anwendung dieser $T_l^{(i)}$ geschieht auf das folgende Problem: Im $R_r$ ist eine $l$-grediente Punkt-

verwandtschaft $T_l^{(0)}$ gegeben, $l \leqq r$. Dann bestimmen die $\infty^{(l-1)r}$ $R_{l-1}$, welche je $l$ verwandte Punkte verbinden, einen Complex, von dem die erste Gradzahl wie folgt bestimmt werden kann. Man nehme einen festen $R_{l-2}$ und projiciere aus diesem die $T_l^{(0)}$ auf einen $R_{r-l+1}$. Dort wird eine $l$-gradiente Verwandtschaft entstehen, in welcher $l-1$ Punkte durch $\infty^{(l-1)(l-1)}$ $l$te Punkte ergänzt werden. Denn die projicierten Originalpunkte aus dem $R_r$ können sich willkürlich in den $l-1$ projicierenden $R_{l-1}$ befinden, um im $R_{r-l+1}$ der Projection dennoch dieselben resultierenden $l-1$ Punkte zu geben. Diesen entspricht also als Ort der $l$ten Punkte eine

$$M_{(l-1)(l-1)+r-l+1-r} = M_{(l-1)(l-2)}.$$

Die Verwandtschaft in $R_{r-l+1}$ wird $T_l^{(l-1)(l-2)}$. Von einem $R_{l-1}$-Complexe im $R_r$ konnte ja nur dann geredet werden, wenn $(l-1)r \leqq l(r-l+1)$ oder $l(l-1) \leqq r$; dann aber ist sicher $(l-1)(l-2) \leqq r-l+1$ und also auch $(l-1)(l-1) < r$. Für den $R_{r-l+1}$ haben wir aber nur jene charakteristischen Zahlen von $T_l$ zu verwenden, wo jede der $l$ Zahlen $i_1, \ldots, i_l \geqq l-1$ ist. Daher:

Theorem VII. Die Verbindungs-$R_{l-1}$ der Punkt-$l$-tupel einer $l$-gredienten Verwandtschaft $T_l$ im $R_r$ ($l \leqq r$) erzeugen einen Complex, falls $l(l-1) \leqq r$, und die $R_{l-1}$, welche aus diesem durch irgend einen $R_{l-2}$ gehen, bilden eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2(l-1)$ und der Ordnung

$$\Sigma\,[i_1, \ldots, i_l], \qquad \begin{array}{l} i_1 + \ldots + i_l = r \\ i_1 \leqq r, \ldots, i_l \leqq r, \end{array}$$

wo die [...] nur jene charakteristischen Symbole von $T_l$ sein dürfen, in denen jede der Zahlen $i_1, \ldots i_l \geqq l-1$ ist.

Dass solche Symbole existieren, stimmt mit der Bedingung $r \geqq l(l-1)$ überein.

Bei dieser Gelegenheit sei aber hervorgehoben, dass auch diejenigen Fälle, wo infolge der Störung des Ungleichheitszeichens durch die Werte von $l$ und $r$ das Theorem illusorisch wird, dennoch und ebenso auch der Beweisgang eine große principielle Bedeutung besitzen.

Das Theorem VII. gestattet auch noch die folgende Verallgemeinerung, die sehr leicht zu beweisen ist.

Theorem VIII. Ist die Verwandtschaft unter den Punkten des $R_r$ nicht $T_l^{(0)}$, sondern $T_l^{(i)}$, so wird ein Complex $\infty^{(l-1)r+l+i-1}$ erzeugt und die Ordnung der $M_{2(l-1)+i}$ jener $R_{l-1}$, welche durch einen festen $R_{l-2}$ gehen, ist

$$\Sigma\,[i_1,\ldots,i_l], \qquad i_1+\ldots+i_l=r-i,$$

wo die $[\ldots]$ nur jene charakteristischen Symbole von $T_l^{(i)}$ sein dürfen, in denen jede der Zahlen $i_1,\ldots,i_l \geqq l-1$ ist.

## VII. Ein Correspondenzprincip auf $M_{r-1}$.

Ein Correspondenzprincip auf Flächen oder $M_{r-1}$, das ähnlich dem auf Curven wäre, ist bisher von niemandem gegeben worden, auch nicht für den Fall, dass die sogenannte Wertigkeit — ein Begriff, der von der Curve her leicht auf die Fläche und weiter übertragen werden kann — Null ist. Für diesen Fall und mit einer weiteren Einschränkung, die aber doch noch die Anwendung auf viele Probleme der synthetischen Geometrie offen lässt, will ich hier nicht nur ein bigredientes, sondern gleich ein $l$-gredientes Princip auf den $M_{r-1}$ aufstellen.

Theorem IX. Ist auf einer algebraischen $M_{r-1}^n$ im $R_r$ eine $l$-grediente Punktverwandtschaft $T_l^{(0)}$ gegeben, sodass eine endliche Anzahl von Coincidenzen entsteht und sind die den Symbolen $[0,\ldots, 0, r-1],\ldots$ entstammenden Punktgruppen ganz vollständige Schnittpunktegruppen auf $M_{r-1}$ und desgleichen infolge dessen auch die den Symbolen $[i_1,\ldots, i_l]$ entstammenden Schnittpunktegruppen, so ist die Anzahl der Coincidenzen von $l$ verwandten Punkten in je einen Punkt

$$\sum_{i_1,\ldots i_l} [i_1,\ldots,i_l], \qquad \begin{array}{l} i_1+\ldots+i_l=r-1 \\ i_1=0,\ldots,r-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_l=0,\ldots,r-1, \end{array}$$

wo aber nun $[i_1, \ldots, i_l]$ die Anzahl der Punkt-$l$-tupel, die sich auf eine ebene $M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_l}$ (bezüglich der $l$ Gebiete) vertheilen, dividiert durch $n^{p-1}$ bedeutet, wenn $p$ die Anzahl jener unter den $i_1, \ldots, i_l$ des Symboles ist, welche $> 0$ sind.[1]

Denn die $T_l^{(0)}$ auf $M_{r-1}$ kann, wie dies auch bei Curven üblich ist (cf. Brill, Math. Ann., Bd. VI, und Schubert, Calcül der abzählenden Geometrie, §. 18) als Schnitt mit einer Verwandtschaft $T_l^{(1)}$ im $R_r$ aufgefasst werden. Diese hat nach Theorem VI. eine Incidenzcurve dort angegebener Ordnung, deren Schnittpunkte mit $M_{r-1}$ die Coincidenzen sein werden. Nach den im Theoreme gemachten Voraussetzungen werden diese eine vollständige Schnittpunktegruppe sein. Die einzelnen Terme von $n\Sigma[a_1, \ldots, a_l]$, wo sich die $a_1, \ldots, a_l$ auf den äußeren Raum, also auf die $T_l^{(1)}$ beziehen, sind zu deuten. Diejenigen, wo die $[a]$ Ordnungen von Curven bedeuten, geben in den $n[a]$ die $l$ Grade der $T_l^{(0)}$ auf $M_{r-1}$. Wenn in einem der anderen $p$ verschiedene $a > 0$ sind, so ist $[a]$ die Ordnung einer Mannigfaltigkeit, welche einer Gesammtheit von $p-1$ linearen Räumen $R_{i_1}, \ldots R_{i_{l-1}}$ als Complement entspricht, also $n[a]$ gemäß den Voraussetzungen die Ordnung des Schnittes mit $M_{r-1}$, aber wenn wir die Mannigfaltigkeit suchen, welche auf $M_{r-1}$ das Complement der $M_{i_1}, \ldots, M_{i_{l-1}}$ ausschneidet, so müssen wir bedenken, dass diese sämmtlich von der Ordnung $n$ sind und daher jenes Complement die frühere Ordnung mit $n^{p-1}$ multipliciert haben wird und dann wird das Product mit $n^p$ aber die Ordnung ihres Schnittes mit $M_{r-1}$ sein. Von diesen $n^p$ haben wir nun in $n\Sigma[a]$ nur einen Factor $n$, wir müssen daher, wenn wir von der Formel $n\Sigma[a]$, welche sich noch in ihren Termen ganz auf den $R_r$ bezieht, auf eine Interpretation auf $M_{r-1}$ übergehen wollen, die Factoren $\frac{1}{n^{r-1}}$ so hinzufügen, wie es im Theoreme angewiesen ist.

[1] Aber hiebei ist die $M_0$ nicht als der Schnitt mit einer Geraden, also nicht etwa als ein Punkt-$n$-tupel, sondern nur als ein einzelner Punkt zu wählen.

Das Theorem IX. gestattet noch eine Verallgemeinerung, wenn auf $M_{r-1}$ selbst eine $T_l^{(i)}$ gegeben ist. Der Beweis geschieht wie soeben:

Theorem X. Ist auf $M_{r-1}$ eine $T_l^{(i)}$ gegeben mit derselben Bedingung, dass die Punktgruppen je eines der $l$ Gebiete vollständige Schnittpunktegruppen sind, so ist die Ordnung der $M_i$, welche die Coincidenzen von je $l$ Punkten enthält,

$$\Sigma\,[i_1, \ldots, i_l], \qquad i_1 + \ldots + i_l = r - i,$$

wo die Bedeutung der Symbole [...] dieselbe wie im Theoreme IX. ist.

Von diesen Theoremen, schon bei $l = 2$, kann eine Anwendung besonders auf den Fall geschehen, dass die Mannigfaltigkeiten, welche aus $M_{r-1}$ die Complemente in $T_l$ ausschneiden, lineare Räume $R_i$ eines gewissen $R_i$-Complexes sind, also auf die Lösung einer großen Zahl von Problemen, durch welche das in Schubert's »Calcül«, auf S. 85 stehende, in weitester Weise verallgemeinert wird.

## VIII. Ein neuer Beweis des bigredienten Correspondenzprincipes im $R_r$.

Bevor ich zu den Curven übergehe, will ich in Kürze einen von den bisherigen, soviel ich weiß, verschiedenen Beweis für das bigrediente Correspondenzprincip im $R_r$ geben.

Die $T_2^{(0)}$, welche unter den $R_{r-1}$ eines $R_r$ herrsche, möge von zwei Punkten $O$, $O'$ eines $R_{r+1}$, in dem sich $R_r$ befinde, projiciert werden. Je zwei entsprechende $R_r$ durch $O$, $O'$ schneiden sich in einem $R_{r-1} \equiv S_{r-1}$, der nun einen $\infty^r$-Complex beschreibt und es ist die Anzahl solcher $R_{r-1}$, die im $R_r$ enthalten sind, zu bestimmen. Statt eines willkürlichen $R_r$ werde nun für die Anzahlbestimmung ein durch $O$ gehender genommen. Er enthält $[0, r]$ $S_{r-1}$, Schnitte mit seinen entsprechenden durch $O'$ und andere durch $O$ gehende, welche nothwendig Schnitte von $O'$ und $O$ gleichzeitig enthaltenden $R_r$ des $O'$-Bündels mit entsprechenden des $O$-Bündels sind. Diese letzteren bilden einen Kegel von der Classe $[1, r-1]$. Unter dem $R_r$-Bündel durch die Gerade $OO'$ und den $R_r$ dieses

Kegels besteht also eine Correspondenz. Nehmen wir der leichteren Sprechweise wegen das Duale, so haben wir im $R_r$ einen $R_{r-1}$ und eine $M_{r-1}^{[1,r-1]}$ in Correspondenz $(r, [r, 0])$. Es ist der von den verwandten Punktepaaren erzeugte Strahlencomplex und besonders die Anzahl Strahlen durch einen Punkt $P$ zu bestimmen. Projiciert man von $P$ aus die $M_{r-1}$ auf den $R_{r-1}$, so erhält man in diesem eine Correspondenz $([1, r-1], [r, 0])$, deren übrige charakteristische Zahlen aber genau die charakteristischen Zahlen derjenigen unter $R_{r-1}$ und $M_{r-1}$ sind und das sind wieder genau die außer diesen beiden hier in Klammer erscheinenden und außer $[0, r]$ noch der ganz ursprünglichen Correspondenz unter den $R_{r-1}$ des $R_r$ angehörigen charakteristischen Zahlen.

Wird also das Princip als für $R_{r-1}$ bewiesen vorausgesetzt, so erhalten wir

$$[1, r-1]+[2, r-2]+\ldots+[r, 0]$$

Strahlen durch $P$ oder dual — was eigentlich unser Zweck war — ebensoviele $S_{r-1}$ durch $O$ im gewählten $R_r$. Also gehen von den $S_{r-1}$ insgesammt durch $O$

$$[0, r]+[1, r-1]+[2, r-2]+\ldots+[r, 0],$$

womit das Princip dann auch für den $R_r$ bewiesen erscheint.

Diese Schreibweise der bekannten bigredienten Formel hat gegenüber allen bisherigen, auch der von Mario Pieri, von dem der jüngste schöne Beweis herrührt, den Vortheil, dass eine Trennung von geradem und ungeradem $r$ in ihr nicht vorkommt.

## IX. Das $l$-grediente Correspondenzprincip auf Curven.

Theorem XI. Ist auf einer Curve vom Geschlechte $p$ eine $l$-grediente Correspondenz $\mathbf{T}_l$ unter ihren Punkten, so ist im allgemeinen die Anzahl der in je einem Punkte coincidierenden $l$-tupel

$$C_l = \sum_1^l \alpha_i + 2p\sum\gamma_{ik}, \qquad i = 1,\ldots l;\; k = 1,\ldots l;\; i \gtrless k,$$

wo die $\alpha_i$ die $l$ Grade, also die oben als $[0,\ldots, 0, \alpha_i, 0,\ldots, 0]$ bezeichneten Zahlen, die $\gamma_{ik}$ aber die »Wertigkeitszahlen« der $l(l-1):2$ in $T_l$ enthaltenen bigredienten Correspondenzen sind.

Diese bigredienten Correspondenzen bilden natürlich den Ausgangspunkt unseres Beweises. Das Theorem von Hurwitz über die algebraische Darstellung einer bigredienten Correspondenz, welches übrigens nur die oben schon erwähnten Brill-Schubert'schen Auffassungen zusammenfasst, lässt sich geometrisch so aussprechen:

»Eine Correspondenz $(\alpha_1, \alpha_2)$ in einer algebraischen Curve $K$ des $R_r$ und mit $\gamma \geqq 0$ ist immer abbildbar, indem man gleichzeitig eine bigrediente Form $\Phi(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)},\ldots; x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)},\ldots)$ unter zwei Punkträumen voraussetzt,[1] welche jedem Punkte von $R_r$ eine $M_{r-1}^n$ entsprechen macht, und jedem Punkte von $K$ die freien Schnittpunkte von $K$ mit der $M_{r-1}^n$ zuweist. Wenn $\gamma > 0$, ist $\Phi$ entweder eine Nullform oder es enthält ihre Incidenzvarietät die Curve $K$. Aber wenn $\gamma > 1$, kann man auch die Schubert'sche Auffassung zur Geltung bringen, wo die $M_{r-1}^n$ in den Punkten von $K$, denen sie entsprechen, nicht die $K$ $\gamma$-punktig berühren, sondern dort stets einen $\gamma$-fachen Punkt haben, wie übrigens (so will es wenigstens Schubert) im ganzen umgebenden Raume.

Nun macht $T_3$, indem man $P_1$ (das Punkt-$l$-tupel soll nämlich diesmal $P_1,\ldots, P_l$ heißen) auf der Curve fortbewegt, ein $\infty^1$-System von $T_2$ erscheinen, das das Geschlecht $p$ hat. Aber jede $M_1$ vom Geschlechte $p_1$, welchem linearen Raume sie auch angehöre, ist auch in einer unicursalen $M_2$ enthalten, wenn in keiner anderen, so sicher in einer monoidalen $M_2$. Ebenso ist $M_1$ in einer unicursalen $M_3,\ldots, M_i,\ldots$ bis $M_r$ enthalten. Die Coordinaten von $M_r$ sind nun als rationale Functionen von $r+1$ homogenen Parametern $a_1,\ldots, a_{r+1}$ ausdrückbar und indem man in $\Phi$ diese rationalen Functionen an Stelle der Coefficienten einsetzt, erhält man eine Function von $x_1^{(1)},\ldots; x_1^{(2)},\ldots; a_1,\ldots$ Diese $a$ können dann als eine dritte Variabelnreihe gedeutet werden und man hat

$$\Phi_1(x_1^{(1)},\ldots, x_{r+1}^{(1)}; x_1^{(2)},\ldots, x_{r+1}^{(2)}; x_1^{(3)}, x_{r+1}^{(3)}) = 0,$$

[1] Die Plücker'sche: aequatio directrix.

wo man durch eine weitere rationale Substitution für die $x_i^{(3)}$ bewirken kann, dass wenn man für $x_i^{(3)}$ die Coordinaten von $P_1$ setzt, die $\Phi_1$ den Wert von $\Phi$ in $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$ annehme.

Fügen wir noch die Bemerkung hinzu, dass die Zahl $\gamma$ für die $\infty^1$ $T_2$ $(\alpha_2, \alpha_3)$ dieselbe ist, da $\gamma$ als ganze Zahl nicht in stetiger Abhängigkeit von der stetigen Reihe der analytischen Functionen $T_2$ variieren kann und dass, wenn $\gamma < 0$ (Hurwitz), die obigen Schlüsse zweimal gemacht werden müssen. So entsteht die Folgerung, die wir gleich in $T_l$ aussprechen.

Lemma. Jede $T_l$ in einer algebraischen Curve $K$ von $R_r$ ist durch eine $l$-grediente Form im $R_r$

$$\Phi(x_1^{(1)}, \ldots, x_{r+1}^{(1)}; \ldots; x_1^{(l)}, \ldots, x_{r+1}^{(l)}) = 0$$

unter $l$ gedeckten $R_r$, die also eine $T_l^{(r-1)}$ ist, auf $K$ ausschneidbar, indem man $l-1$ Punkten $P_1, \ldots, P_{l-1}$ von $K$ die freien Schnittpunkte von $K$ mit der jenen $l-1$ Punkten complementären $M_{r-1}$ zuweist, oder wenn $\gamma < 0$, durch zwei solche Formen.

Dies vorausgeschickt, bemerken wir, dass in $T_l^{(0)}$ auf $K$ außer den $l(l-1):2$ zu $l-2$ Punkten complementären $T_2^{(0)}$ noch andere $T_2^{(0)}$ enthalten sind. Eine solche benöthigen wir. Ein Punkt $P_1$ wird durch eine $T_{l-1}^{(0)}$ ergänzt. Setzen wir voraus, dass das Theorem für $l-1$ gelte.

Dann hat diese $T_{l-1}^{(0)}$

$$C_{l-1,1} = \sum_2^l \alpha_i + 2p \, \Sigma \gamma_{ik} \qquad i = 2, \ldots, l; \; k = 2, \ldots, l; \; i \gtrless k$$

Coincidenzen $Q_{l-1,1}$. Unter $P_1$, $Q_{l-1,1}$ waltet nun die eben gemeinte $T_2^{(0)}$ nebst analogen.

Ist $Q$ gegeben, so ruft er $\alpha_1$ Punkte $P_1$ hervor. Es bleibt also noch die Wertigkeit $\gamma$ dieser Hilfscorrespondenz zu bestimmen.

Diese Zahl ist jene Anzahl der Schnittpunkte von $K$ mit der $M_{r-1}: \Phi_{s,1}$ — die $\alpha_1 P_1$ ausschneidet — welche durch den höheren Contact oder die Vielfachheit der $M_{r-1}$ in $Q_{l-1,1}$ ihr entrissen sind. Diese $\Phi$ entsteht aus der $\Phi$ des Lemmas, indem

$x_i^{(2)},\ldots;\ \ldots;\ x_i^{(l)},\ldots$ durch die Coordinaten von $Q_{l-1,1}$ ersetzt werden. Ich sage nun, dass

$$\gamma = \Sigma\,\gamma_{ik}, \qquad i = 2,\ldots,l;\ k = 1.$$

Es sei $\Phi_{i,1}$ die $M_{r-1}$, welche man erhält, indem man in $\Phi$ die Coordinaten von $l-1$ Punkten $P_2,\ldots,P_i,\ldots,P_l$ einsetzt; dann ist $\gamma_{i1}$ die Zahl der Schnittpunkte von $\Phi_{i,1}$ mit $K$, welche sich in $P_i$ befinden und $\Phi_{i1}$ bleibt dieselbe für $i = 2,\ldots,l$ (wegen der Art des Punktes $Q$) und dient also für sich allein dazu, durch ihre in $P_2$ oder $P_3,\ldots,P_l$ enthaltenen Schnittpunkte die Zahlen $\gamma_{21},\gamma_{31},\ldots,\gamma_{l1}$ zu bestimmen. Wenn dann $P_2,.\ .P_l$ sich in einem Punkte $Q_{l-1,1}$ vereinigen, wird $\Phi_{i1}$ die $\Phi_{s,1}$ und ihre Schnitte mit $K$ in $Q_{l-1,1}$ sind die Summe der $\gamma_{21},\ldots,\gamma_{l1}$, wie die letzte Formel behauptet.

Die Correspondenz $(P_1,\ Q_{l-1,1})$ hat also die Grade $(\alpha_1,\ C_{l-1,1})$ und die Wertigkeit $\gamma$, also ist die Zahl ihrer Coincidenzen, welche auch die Coincidenzen von $T_l$ selbst sind,

$$C_l = C_{l-1,1} + \alpha_1 + 2p\gamma.$$

Somit ist das Theorem bewiesen, da die Formel für $l = 2$ als die Cayley-Brill'sche existiert.

Für $\gamma < 0$ (Hurwitz) wird man dasselbe Beweisverfahren zweimal anlegen müssen.

## X. Anwendungen.

Das Princip aus IX. beherrscht, wenn es noch durch eine Theorie der sogenannten Neutralgruppen vervollständigt ist, die ganze sogenannte Geometrie auf der algebraischen Curve. Es sollen hier nur einige Resultate gegeben werden.

Eine nicht speciale $g_n^r$ auf einer Curve vom Geschlechte $p$ ist eine symmetrische $(r+1)$-grediente Verwandtschaft mit den Graden $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{r+1} = n-r$, also ist, weil $\gamma_{ik} = 1$, die Anzahl der $(r+1)$-fachen Punkte $(n-r)(r+1)+pr(r+1)$, das ist

$$(r+1)(n-r+rp)$$

ein bereits von C. Segre in seiner Introduzione, Ann. di Mat. XXII., gefundenes Resultat.

Die $g^{p-1}_{2(p-1)}$ auf der Curve vom Geschlechte $p$ (die canonische Reihe genannt) ist eine symmetrische $p$-grediente Verwandtschaft mit den Graden $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = p-1$, $\gamma_{ik} = 1$, also mit $p(p-1)+p.p(p-1) = p(p^2-1)$ je $p$-fachen Punkten, eine Zahl, zu deren Auffindung Hurwitz in Math. Ann., Bd. 41, eine Determinante aus Differentialquotienten von Integralen 1. Gattung nach einem Integrale 1. Gattung hat untersuchen müssen.

Die Schnittpunktegruppen einer Curve $C_m$ vom Geschlechte $p$ mit allen Curven $C_m$, wo $m > n$, bilden eine symmetrische $l$-grediente Verwandtschaft, wo $l = mn-p+1$, und deren Grade sind $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{mn-p+1} = p$; also gibt es

$$p(mn-p+1)^2$$

Punkte, in denen $C_n$ mit einer $C_m$, $m > n$, $(mn-p+1)$ zusammenfallende Schnittpunkte haben kann. Wenn aber die singulären Punkte theilweise zusammenfallende Tangenten besitzen, dann vermindert sich diese Anzahl.

Die Schnittpunktegruppen einer Curve $C_n$ vom Geschlechte $p$ mit allen Curven $C_m$, wo $m < n$, bilden eine symmetrische $l$-grediente Verwandtschaft, wo $l = u+1$, wenn $u$ die Gesammtdimension der $C_m$, also $m(m+3):2 = u$, und für welche nun $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{u+1} = mn-u$; also gibt es

$$(u+1)(mn-u+pu)$$

Punkte, in denen $C_n$ mit einer $C_m$, $m < n$, $u+1$ zusammenfallende Schnittpunkte haben kann. Auch diese Zahl vermindert sich, wenn die singulären Punkte theilweise zusammenfallende Tangenten besitzen.

Ich zweifle, dass diese Zahlen jemals berechnet worden sind.

Im $R_r$ schneiden die $M^m_{r-1}$ einer $\infty^u$-Reihe vom Index $i$ auf einer Curve $C_n$ vom Geschlechte $p$ die Punktgruppen einer $(u+1)$-gredienten Verwandtschaft aus; deren Grade

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{u+1} = i(mn-u)$$

sind, also:

In einer $\infty^u$-Reihe des Index $i$ von $M_{r-1}^m$ gibt es

$$(u+1)[pu+i(mn-u)]$$

$M_{r-1}^m$, welche eine Curve $C_n^p$ des $R_r$ in je einem Punkte $(u+1)$-punktig berühren.

Ob diese Zahl durch eine untere Grenze des $m$ beeinflusst werde, was etwa durch Beziehungen zur Specialreihe geschehen könnte, dafür fehlen bisher alle Indicien, indem bisher keine einzige Untersuchung über die nichtlinearen Reihen von Punktgruppen auf dem algebraischen Gebiete vorliegt.



# Die zweite Variation der einfachen Integrale

(V. Mittheilung)

von

**G. v. Escherich,**

w. M. k. Akad.

**(Vorgelegt in der Sitzung am 19. December 1901.)**

In dieser letzten Mittheilung[1] wird die bisher festgehaltene Voraussetzung, dass die Ordinaten der gesuchten Curve eindeutige Functionen der Abscisse seien, fallen gelassen. Die nunmehr erhaltenen Resultate umfassen die früheren und hätten auch in engerem Anschlusse an sie abgeleitet werden können. Doch wurde einer directen Entwickelung derselben, die eine Berufung auf die früheren Mittheilungen überflüssig macht, der Vorzug gegeben, zumal für einige wichtige Sätze einfachere Beweise gefunden wurden und eine übersichtlichere Gliederung und präcisere Fassung vielfach an Stelle der früheren gesetzt werden konnte. Diese Arbeit bildet also zugleich eine abschließende und zusammenfassende Redaction der vorangegangenen Mittheilungen.

Das Ziel der Untersuchung war, nothwendige Bedingungen für das Eintreten eines Max. Min. zu finden, die aber, wenn sie auch meines Erachtens an sich nicht zu unterschätzenden Wert besitzen, mir vornehmlich als Stufe dienen sollen, um leichter hinreichende Bedingungen zu erreichen. Ich verfolge damit den Weg, den Weierstraß in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung, wohl den bedeutendsten und tiefsinnigsten

[1] Mitth. I, II, III diese Sitzungsber., Bd. CVII, Abth. II. a, Mitth. IV. Bd. CVIII, Abth. II. a; sie werden hier unter Mitth. I, II, III, IV angeführt.

Forschungen[1] seit Euler und Lagrange in diesem Zweige der Mathematik, einhielt und der ihn zu seiner 𝔈-Function führte.

Einen Überblick über Inhalt und Anlage der Arbeit bieten das nachstehende Inhaltsverzeichnis und die Bemerkungen in §. 1.

---

# Inhalt.



---

[1] Ich sehe dabei ab von den originellen, überaus einfachen und fruchtbaren Methoden Hilbert's (Math. Probleme, Vortrag auf dem intern. Mathematiker-Congress 1900; Das Dirichlet'sche Princip, Festschrift, 1901; Ch. Noble, Eine neue Methode in der Variationsrechnung, 1901; Hamel, Über Geometrien etc., 1901).

### IV. Nothwendige Bedingungen.



### V. Der Hauptfall.

## I. Einleitung.

§. 1.

Als Leitfaden dienen den Betrachtungen in dieser Arbeit die Untersuchungen über den einfachsten Fall in der Variationsrechnung, die zum Theil bis auf Lagrange und Jacobi zurückgehen und zunächst hier in Kürze zusammengefasst werden sollen.[1]

Es sei in einem homogenen Continuum ($\mathfrak{C}$) der Veränderlichen $x, y, x', y'$, dem die Wertepaare $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$ angehören, 1. $f(x, y, x', y')$ homogen vom ersten Grade nach $x', y'$ und sammt ihren drei ersten Ableitungen nach $x, y, x', y'$ eindeutig und stetig, 2. bestehe darin eine nach $t$ eindeutige und stetige Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'} = y'G; \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} = -x'G \\ x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

von der die $(x, y)$ für $t = t_0$ und $t = t_1$ beziehungsweise die Werte $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$ annehmen und dadurch zwischen diesen Punkten ein Curvenstück $(C)$ bestimmen, längs dem $x'$ und $y'$ nie zugleich Null werden und

$$\frac{f''_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{f''_{x'y'}}{x'y'} = \frac{f''_{y'y'}}{x'^2} = F_1$$

nirgends verschwinde.

Das reguläre Curvenstück $(C)$ erfüllt dann eine nothwendige Bedingung, um

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(x, y, x', y')\, dt$$

zu einem Max. Min. zu machen.

Weitere nothwendige Bedingungen ergeben sich aus der Betrachtung der zweiten Variation von $J$. Sind $u(t)$ und $v(t)$

[1] Im Anschluss an die Vorlesungen Weierstraß'.

sammt ihren ersten Derivierten in $t_0 t_1$ eindeutige und stetige Functionen von $t$, die in $t_0$ und $t_1$ verschwinden, und ist $\varepsilon$ eine positive Größe, die beliebig klein genommen werden kann, so entspricht der Variation $\xi = \varepsilon u(t)$, $\eta = \varepsilon v(t)$ von $x$ und $y$ die zweite Variation

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial x}\xi + \frac{\partial}{\partial y}\eta + \frac{\partial}{\partial x'}\xi' + \frac{\partial}{\partial y'}\eta'\right]^2 f dt.$$

Setzt man

$$L = f''_{xx'} - y'y''F_1; \quad M = f''_{xy'} + x'y''F_1 = f''_{yx'} + y'x''F_1;$$
$$N = f''_{yy'} - x'x''F_1;$$

$$\frac{f''_{xx} - F_1 y''^2 - \frac{dL}{dt}}{y'^2} = -\frac{f''_{xy} + F_1 x''y'' - \frac{dM}{dt}}{x'y'} =$$
$$= \frac{f''_{yy} - F_1 x''^2 - \frac{dN}{dt}}{x'^2} = F_2,$$
$$w = \xi y' - \eta x',$$

so kann man $\delta^2 J$ die Form geben:

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \left[F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2\right] dt,$$

die mit Hilfe der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F_1 \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dF_1}{dt}\frac{dz}{dt} - F_2 z = 0 \qquad (\beta)$$

weiter vereinfacht werden kann.

Ist $z$ ein particuläres Integral derselben, das in $\tau_0\tau_1$ ($t_0 \leqq \tau_0 < \tau_1 \leqq t_1$) nicht Null ist, so wird für eine Variation der Curvenstrecke $\tau_0\tau_1$

$$\delta^2 J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} F_1 \left(\frac{zw' - z'w}{z}\right)^2 dt.$$

Die Forschung nach den Bedingungen für die Existenz eines solchen Integrals führen successive zu folgenden Sätzen:

1. Sind $x = \varphi(t, a, b)$, $y = \psi(t, a, b)$ das allgemeine Integral der Gleichung $G = 0$ (in $\alpha$), so bilden

$$z_1 = \frac{\partial x}{\partial a}y' - \frac{\partial y}{\partial a}x', \quad z_2 = \frac{\partial x}{\partial b}y' - \frac{\partial y}{\partial b}x'$$

für die $x, y$ von $C$ ein Fundamentalsystem der Gleichung ($\beta$) (Jacobi's Satz).[1]

2. Es bestehen immer particuläre Integrale von ($\beta$), die in einem beliebig angenommenen Punkte von ($C$) nicht Null sind.

3. Hieraus ergibt sich, als nothwendige Bedingung für die Existenz eines Max. Min., dass $F_1$ längs ($C$) überall dasselbe Vorzeichen besitzen muss. —

Sind $u$ und $v$ zwei particuläre Integrale von ($\beta$), so besteht die Relation

$$F_1(uv' - u'v) = \text{const.},$$

wo const. längs des ganzen Curvenstückes ($C$) denselben Wert beibehält. Aus ihr folgt:

4. Jedes particuläre Integral von ($\beta$) hat nur isolierte Nullstellen und ändert sein Zeichen beim Durchgang durch Null.

5. Verschwindet ein particuläres Integral in zwei Punkten von $t_0 t_1$ und nennt man zwei aufeinanderfolgende Nullstellen desselben conjugierte Punkte, so hat jedes davon linear unabhängige particuläre Integral eine und nur eine Nullstelle zwischen zwei conjugierten Punkten.

6. Hat $t_0$ keine conjugierte Stelle innerhalb des Integrationsintervalls, so existieren particuläre Integrale, die in $t_0 t_1$ nirgends Null sind.

7. Ist $t_1$ zu $t_0$ conjugiert, so bestehen verschwindende $\delta^2 J$.

8. Liegt innerhalb $t_0 t_1$ ein zu $t_0$ conjugierter Punkt, so lässt sich vermöge (4) zeigen, dass es verschieden bezeichnete $\delta^2 J$ und somit weder ein Max., noch Min. gibt (Jacobi's Kriterium).[2]

In den folgenden Blättern wird nun die Frage erörtert, inwieferne diese Sätze in dem von Clebsch[3] behandelten

---

[1] Bei Jacobi (J. f. Math., Bd. 17) als stillschweigende Voraussetzung.

[2] Mit unzureichendem Beweise zuerst in Jacobi's Dynamik.

[3] Crelle, J. f. Math., Bd. 55 u. 56.

Falle der relativen Max. Min. Analoga besitzen. Wie sich aus diesen Untersuchungen ergibt, haben die Sätze 1, 2, 3, 6, 7 immer vollständige Analoga, hingegen 8 nur unter gewissen Beschränkungen, die den Hauptfall ergeben.

Es ist nicht schwierig, solche Übertragungen zu erahnen: sie bieten sich zum Theile von selbst dar. Die Schwierigkeiten beginnen erst mit dem Versuche, diese Sätze richtig zu umgrenzen und aus möglichst wenigen und weiten Voraussetzungen zu beweisen.

§. 2.

Das allgemeine Problem der relativen Maxima und Minima lässt sich auf das folgende zurückführen:

$(n+1)$ eindeutige Functionen $y_0, y_1 \dots y_n$ von $t$ zu bestimmen, die für zwei Werte des $t$, sie mögen mit $t_0$ und $T$ bezeichnet werden, vorgegebene Werte annehmen, den $m$ Gleichungen

$$\varphi_k(y_0 \dots y_n, y'_0 \dots y'_n) = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots m < n),$$

wo $y'_i = \dfrac{dy_i}{dt}$ $(i = 0, 1 \dots n)$, genügen und

$$J = \int_{t_0}^{T} f(y_0, y'_0 \dots y_n, y'_n)\, dt \qquad (t_0 < T) \tag{1}$$

zu einem Max. Min. machen, wenn $f$ und die $\varphi_k$ homogen vom ersten Grade nach den $y'_0, y'_1 \dots y'_n$ sind.

Diese Aufgabe erhält einen klaren Sinn durch die Voraussetzung, dass die $(m+1)$ Functionen $f$ und $\varphi_k$, aufgefasst als Functionen der $2(n+1)$ Veränderlichen $y_0 \dots y_n$, $y'_0 \dots y'_n$ in einem homogenen Continuum $(\mathfrak{C})$[1] dieser Größen, dem auch die gegebenen Anfangs- und Endwerte der $y_0, y_1 \dots y_n$ angehören, definiert und in demselben sammt ihren drei ersten Differentialquotienten nach diesen $2(n+1)$ Veränderlichen eindeutig und stetig seien. *(a).*

Besitzt nun, wie weiter vorausgesetzt werde, das System der $(2n+m+2)$ Differentialgleichungen

---

[1] Pringsheim, Math. Encykl., Bd. II, S. 46.

$$\left.\begin{aligned} G_i \equiv \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0; \quad \frac{dy_i}{dt} = y_i' \quad (i = 0, 1 \ldots n) \\ \varphi_k(y_0 \ldots y_n, y_0' \ldots y_n') = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wo in $F = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$ die $\lambda_k$ neue unbekannte Functionen von $t$ bedeuten, eine eindeutige und stetige Lösung $y_0 \ldots y_n$, $y_0' \ldots y_n'$, $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, von der die $y_0 \ldots y_n, y_0' \ldots y_n'$ in ($\mathfrak{C}$) liegen und die $y_0, y_1 \ldots y_n$ für zwei Werte des $t$: $t_0$ und $T$ die gegebenen Anfangs- und Endwerte annehmen, so erfüllt die durch diese $y_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ bestimmte, von $t_0$ bis $T$ sich erstreckende Curve $(C)$ eine nothwendige Bedingung, damit

$$J = \int_{t_0}^{T} f dt = \int_{t_0}^{T} F dt \qquad (1)$$

zu einem Max. Min. werde, wenn zugleich $\varphi_k = 0$ $(k = 1, 2 \ldots m)$ *(b)*.

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich nun mit dem speciellen Falle, in dem vorausgesetztermaßen

*c)* die Curve $(C)$ aus einem einzigen regulären Stücke besteht, d. h. nicht nur die $y_0', y_1' \ldots y_n'$ längs $(C)$ sich stetig ändern, sondern auch nirgends zugleich Null werden und

*d)* in keinem Punkte von $(C)$ sämmtliche Subdeterminanten $\Delta_{kk}$ der Elemente $\frac{\partial^2 F}{\partial y_k' \partial y_k'}$ $(k = 0, 1 \ldots n)$ in der identisch verschwindenden Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_0' \partial y_0'}; \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_0' \partial y_n'}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0'}; \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_0'} \\ \cdot \quad \cdots & \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot \\ \cdot \quad \cdots & \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_0'}; \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial y_n' \partial y_n'}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}; \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0'}; \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}; & 0 \quad \ldots & 0 \\ \cdot \quad \cdots & \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot \\ \cdot \quad \cdots & \cdot & \cdot \quad \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_0'}; \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}; & 0 \quad \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Null sind.

§. 3.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die Construction der Lösung $(C)$ leicht erkennen.

1. Da $F$ ebenfalls homogen vom ersten Grade nach den $y'_0, y'_1 \dots y'_n$ ist, so besteht in jedem Punkte von $(C)$ die Relation

$$\sum_{i=0}^{n} G_i y'_i = 0.$$

Wegen der Voraussetzung $(c)$ ist also in jedem Punkte von $(C)$ eine der Gleichungen (2) eine Folge der übrigen. Jedes $y'$, das in irgend einem Punkte $t'$ von $(C)$ — der Parameterwert des Punktes soll zugleich zu seiner Bezeichnung dienen — nicht Null ist, hat eine größte Umgebung von $t'$, innerhalb der es nicht verschwindet. Ist $\rho(t')$ der Radius der größten dieser Umgebungen, so erhellt aus einer bekannten Schlussweise, dass $\rho(t)$ in $t_0 T$ eine von Null verschiedene untere Grenze besitzt, d. h. $(C)$ besteht aus einer endlichen Anzahl Theile, deren jedem ein darin nicht verschwindendes $y'$ zugeordnet ist.

Wird dadurch $t_0 T$ in die Theilintervalle $t_0 t_1, t_1 t_2, \dots t_\nu T$ zerlegt und ist $y'_{k_\lambda}$ dem Intervalle $t_{\lambda-1} t_\lambda$ zugeordnet, so darf man immer annehmen, dass $y'_{k_\lambda}$ in $t_{\lambda-1}$ nicht verschwinde und in $t_\lambda$ Null sei.

2. Ist in einem Punkte von $(C)$ etwa $y'_i \neq 0$, so folgt aus $\Delta = 0$:

$$\Delta_{ii} y'_k = \Delta_{ik} y'_i; \quad \Delta_{kk} y'_i = \Delta_{ik} y'_k$$

und hieraus, wenn $\dfrac{\Delta_{ii}}{y'_i} = \rho_i, \dfrac{\Delta_{ik}}{y'_i} = \rho_k$ gesetzt wird,

$$\Delta_{kk} = \rho_k y'_k \qquad (k = 0, 1 \dots n).$$

Da infolge der Voraussetzung nicht alle $\Delta_{kk}$ Null sind, so muss mindestens ein $\rho_k \neq 0$ sein. Dann ist aber $\Delta_{ik} = \rho_k y'_i \neq 0$ und somit auch $\Delta_{ii} \neq 0$. Aus der Annahme $\Delta_{ii} \neq 0$ ergibt sich ebenso $y'_i \neq 0$.

In jedem Punkte von $(C)$ sind $y'_i$ und $\Delta_{ii}$ zugleich Null oder davon verschieden.

3. Ist $\Delta_{ii} \neq 0$, so ist in diesem Punkte auch mindestens eine Determinante $m^{\text{ten}}$ Grades der Matrix

$$\left\| \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_\lambda} \right\|_{\lambda = 0, \ldots (i-1); (i+1) \ldots n}^{k = 1, 2 \ldots m}$$

nicht Null.

4. Für das $t_0 t_1$ zugeordnete $y'_{k_1}$ kann man, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, $y'_{k_1} = y'_0$ annehmen. Dann ist $t$ in $t_0 t_1$ eindeutige Function von $y_0$. Wird dies für $t$ eingeführt, so werden die ersten $(n+1)$ Gleichungen des Systems (2) äquivalent

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} - \frac{d}{dy_0} \frac{\partial \bar{F}}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

$$\bar{F} = F(y_0, y_1 \ldots y_n;\, 1, p_1 \ldots p_n);\; p_k = \frac{dy_k}{dy_0}.$$

Fügt man diesen die $m$ Gleichungen

$$\frac{d}{dy_0} \varphi_k(y_0, y_1 \ldots y_n;\, 1, p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

hinzu, so kann dieses System wegen $\Delta_{00} \neq 0$ auf die Normalform gebracht und daraus nach bekannten Integrationsmethoden[1] die Curvenstrecke $t_0 t_1$ berechnet werden. Ist etwa $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(p_1, p_2 \ldots p_m)}$ eine der in $t_0$ nicht verschwindenden Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades, so lassen sich nach einem bekannten Satze von Dini[2] die $p_1, p_2 \ldots p_m$ aus

$$\varphi_k(y_0, y_1 \ldots y_n;\, 1, p_1 \ldots p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

als eindeutige stetige Functionen der $y_0, y_1 \ldots y_n; p_{m+1} \ldots p_n$ darstellen in der Umgebung der Werte, welche diese Größen in $t_0$ besitzen. Als Ausgangspunkt für die Integration kann man $t_0$ oder einen anderen Punkt von $(C)$ in dieser Umgebung wählen und aus den zugehörigen Werten von $c_1 = y_1 \ldots c_n = y_n$;

[1] Die Methoden von Cauchy-Picard und Cauchy-Lipschitz sammt ihren Erweiterungen in neuerer Zeit.

[2] Analisi infinitesimale (lith. Pisa 1877/78) und Genocchi-Peano Calcolo.

$c_{n+1} = y'_{m+1}; \ldots c_{2m-n} = y'_n;\ c_{2n-m+1} = \lambda_1 \ldots c_{2n} = \lambda_m$ als Anfangswerten die Integration vollführen. Das so gefundene Curvenstück $t_0 t_1$ liegt dann hinsichtlich des obigen Normalsystems ganz in dem diesen Anfangswerten zugehörigen Regularitätsintervalle. Ist in $t_1$ etwa $y'_1 \neq 0$, so wird es wegen seiner Stetigkeit in $t_1$ auch in $t_1 - \tau$, wenn die positive Größe $\tau$ nur genügend klein genommen wird, von Null verschieden sein. Aus den eben berechneten Werten der Coordinaten von $(C)$ und der $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ in $t_0 t_1$ kann man von $t_1 - \tau$ als Anfangspunkt auf analoge Weise, wie $t_0 t_1$ von $t_0$ aus hergeleitet wurde, eine Fortsetzung von $t_0 t_1$ nach $t_1 t_2$ finden. Dieselbe ist unabhängig von der Wahl des $\tau$ und der in $t_1 - \tau$ nicht verschwindenden Derivierten $y'$, da sie stets dem Gleichungssysteme (2) genügt. Durch Aneinanderreihen einer — wie früher gezeigt — endlichen Anzahl solcher Fortsetzungen kann man also das ganze Curvenstück $(C)$ sich entstanden denken.

5. Da nach Voraussetzung auch die zweiten Differentialquotienten von $f$ und der $\varphi_k$ nach den $y_0, y_1 \ldots y_n, y'_0, y'_1 \ldots y_n$ stetig sind, so sind nach bekannten Sätzen[1] über die Differentiierbarkeit der Lösung eines Normalsystems, bezüglich der Anfangswerte, diese Größen in $t_0 t_1$ nach $c_1, c_2 \ldots c_{2n}$ differentiierbar und somit nach der Bildungsweise der Fortsetzungen längs dem ganzen Curvenstücke $C$.

6. Eine einheitliche und gleichförmige Darstellung der so stufenweise erhaltenen Werte von $y_0, y_1 \ldots y_n$ gewinnt man, indem man sie durch die Länge des von $t_0$ aus gerechneten Curvenbogens ausdrückt. Für diesen kann auch eine monotone Function von $t$ eingeführt werden, die den ganzen Bogen $C$ darstellt, wenn $t$ von $t_0$ aus beständig wachsend die Strecke $t_0 T$ durchmisst, und die zwei ersten Derivierten nach $t$ besitzt.

7. Da die $y_0, y_1 \ldots y_n$ längs $C$ eindeutige Functionen von $t$ sind und der Curvenbogen

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} y_k'^2}\, dt$$

[1] Bendixon, Bull. soc. math., t. 24 (1896) — Escherich, diese Sitzungsber., 1899, Bd. 108.

monoton mit $t$ wächst, so sind sie auch eindeutige Functionen von $s$, die ebenso wie nach $t$ auch nach $s$ erste und zweite Derivierte besitzen. Ist die Derivierte der $y_0, y_1 \dots y_n$ nach $t$, die in einem Punkte und somit in einem Stücke ($\gamma$) von ($C$) (§. 2, $c$) nicht verschwindet, $\frac{dy_0}{dt}$, so ergeben sich nach (4) die $y'_k$ und $\frac{dy'_k}{dy'_0}$ ($k = 1, 2 \dots n$) und daher wegen der Voraussetzungen ($a$) und ($d$) in §. 2 auch die $\frac{d^2 y_k}{dy_0^2}$ ($k = 1, 2 \dots n$) aus (2) als stetige Functionen von $y_0$ in ($\gamma$).

In ($\gamma$) ist $t$ und somit auch $s$ eindeutige Function von $y_0$, die erste und zweite Ableitungen nach $y_0$ besitzt. Für diese ergibt sich aus

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} y_k'^2}\,; \quad \frac{ds}{dy_0} = \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dy_k}{dy_0}\right)^2}$$

und

$$\frac{d^2 s}{dy_0^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{dy_k}{dy_0} \frac{d^2 y_k}{dy_0^2}}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dy_k}{dy_0}\right)^2}}$$

ihre Stetigkeit nach $y_0$ in ($\gamma$). Daher ist auch

$$\frac{d^2 y_0}{ds^2} = -\frac{d^2 s}{dy_0^2} : \left(\frac{ds}{dy_0}\right)^3$$

und somit sind

$$\frac{d^2 y_k}{ds^2} = \frac{d^2 y_k}{dy_0^2} \left(\frac{dy_0}{ds}\right)^2 + \frac{dy_k}{dy_0} \frac{d^2 y_0}{ds^2} \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

stetige Functionen von $s$ in ($\gamma$).

Infolge der Voraussetzungen (§. 2) sind die $y_0, y_1 \dots y_n$ sammt ihren ersten und zweiten Derivierten nach $s$ längs ($C$) stetige Functionen von $s$.

Führt man daher für $s$ eine eindeutige Function von $t$ ein, die monoton den Bogen ($C$) durchlauft, wenn $t$ monoton von $t_0$

bis $T$ wächst und überdies stetige erste und zweite Derivierte nach $t$ besitzt, so sind, wie

$$\frac{d^2y_k}{dt^2} = \frac{d^2y_k}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dy_k}{ds}\,\frac{d^2s}{dt^2}$$

zeigt, nicht nur die ersten, sondern auch zweiten Derivierten der $y_k$ $(k = 0, 1 \ldots n)$ längs $(C)$ bezüglich $t$ stetig.

In den folgenden Untersuchungen darf also angenommen werden, dass die $y_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ eindeutige Functionen von $t, c_1, c_2 \ldots c_{2n}$ sind, die sammt ihren ersten und zweiten Derivierten nach $t$ längs $(C)$ bezüglich $t$ stetig und nach den Integrationsconstanten $c_i$ $(i = 1, 2 \ldots 2n)$ differentiierbar sind.

## II. Das accessorische System linearer Differentialgleichungen.

### §. 4.

Denkt man sich die erhaltene Lösung in (2) substituiert, so führt die Differentiation nach irgend einer der Größen $c$ auf das System linearer Differentialgleichungen[1]

$$\left.\begin{aligned}
\psi_i(z, r) = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i\,\partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i\,\partial y'_k} z'_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i\,\partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i\,\partial y'_k} z'_k\right)\right] \\
+ \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k\right)\right] = 0 \qquad z'_i = \frac{dz_i}{dt} \\
(i = 0, 1 \ldots n) \\
\omega_i(z) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} z_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} z'_k\right) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m)
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

welches als accessorisches bezeichnet werden soll. In ihm bedeuten also $y_0, y_1 \ldots y_n$ die Coordinaten von $(C)$ und $y'_0, y'_1 \ldots y'_n$ ihre Derivierten nach $t$.

---

[1] Clebsch, l. c., Bd. 55. Mitth. I, §. 9, §. 10; Mitth. II, §. 11, §. 14, §. 15, §. 16.

Behufs seiner näheren Erforschung sollen zunächst einige Hilfsformeln abgeleitet werden.

Aus

$$F = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial y'_k} y'_k$$

folgt

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} y'_k.$$

Bildet man $\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y_i}$ einmal nach dieser Formel und dann direct, so erhält man

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k}\right] y'_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} \lambda'_k = 0. \qquad (4)$$

Aus

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k} y'_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} y''_k\right]$$

ergibt sich durch Substitution des obigen Ausdruckes für $\frac{\partial F}{\partial y_i}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k}\right) y'_k - \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} y''_k\right] - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \lambda'_k = 0. \qquad (5)$$

Da $F$ und $\varphi_k$ homogen vom ersten Grade bezüglich $y'_0, y'_1 \ldots y'_n$ sind, so ist auch

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} y'_k = 0; \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} y'_k = \varphi_i = 0. \qquad (6)$$

Mittels dieser Gleichungen, von denen die ersteren für $i = 0, 1 \ldots n$, die letzteren für $i = 1, 2 \ldots m$ gelten, ergibt sich sofort aus (3)

$$\sum_{i=0}^{n} y'_i \psi_i(z, r) = 0. \qquad (7)$$

Ist in einem Curvenstücke $y'_\nu \neq 0$ und setzt man

$$\left.\begin{aligned} \rho = \frac{z_\nu}{y'_\nu} \qquad Z_k &= z_k - \rho y'_k \qquad (k = 0, 1 \ldots n) \\ R_k &= r_k - \rho \lambda'_k \qquad (k = 1, 2 \ldots m) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

so wird

$$\begin{aligned} \psi_i(z, r) = \sum_{k=0}^{n} \Bigg\{ & \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} \right) z_k - \\ & - \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k} - \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} \right) z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} z'_k \right] \Bigg\} \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right) \right] \\ = & \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_\nu} \right) z_\nu - \\ & - \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_\nu} - \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_\nu} \right) z_\nu + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_\nu} z'_\nu \right] \\ & + \sum_k{}' \Bigg\{ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} \right) z_k - \\ & - \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k} - \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} \right) z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} z'_k \right] \Bigg\} \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right) \right], \end{aligned}$$

wo $\Sigma'$ sich über alle $k$ von 0 bis $n$ mit Ausnahme von $\nu$ erstreckt; vermöge (4), (5) und (6) geht das System (3) über in

$$\left.\begin{aligned} \psi_i(z, r) = \sum_{k=0}^{n} \Bigg[ & \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} Z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} Z'_k - \\ & - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y_k} Z_k + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} Z'_k \right) \Bigg] \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} R_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} R_k \right) \right] \quad (i = 0, 1 \ldots n) \\ \omega_\mu(z) = \sum_{k=0}^{n} & \left( \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y_k} Z_k + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial y'_k} Z'_k \right) \qquad (\mu = 1, 2 \ldots m) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hat man eine Lösung $Z_0, \ldots Z_{\nu-1}, Z_\nu = 0, Z_{\nu+1} \ldots Z_n$; $R_1, R_2 \ldots R_m$ von (9) für $i = 0, 1 \ldots \nu-1, \nu+1 \ldots n$; $\mu = 1, 2 \ldots m$ und genügen die $z_0, z_1 \ldots z_n$ den Gleichungen (8), so stellen $z_0, z_1 \ldots z_n, r_1, r_2 \ldots r_m$, wie (7) lehrt, eine Lösung von (3) dar.

Ist daher $\rho$ eine in $t_0 T$ eindeutige, zweimal nach $t$ differentiierbare, sonst aber ganz willkürliche Function von $t$, so genügen $z_k = \rho y'_k$ $(k = 0, 1 \ldots n)$, $r_k = \rho \lambda'_k$ $(k = 1, 2 \ldots m)$ dem Systeme (3), wie man auch unmittelbar erkennt. Derartige Lösungen sollen im folgenden besondere genannt werden. Bezeichnet $(z, r)$ ein System von $n+m+1$ Größen $z_0, z_1 \ldots z_n$; $r_1 \ldots r_m$, so soll unter $(z^0, r^0)$ eine besondere Lösung für $\rho \neq 0$, und zwar zumeist für $\rho = 1$, verstanden werden. Die $\nu$ Systeme von $(n+m+1)$ Größen $(z^{k_1}, r^{k_1}), (z^{k_2}, r^{k_2}) \ldots (z^{k_\nu}, r^{k_\nu})$ sollen linear unabhängig heißen, wenn zwischen ihnen in keinem Theile von $t_0 T$ Relationen von der Form bestehen

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu} \alpha_\lambda z_i^{k_\lambda} = \rho y'_i; \qquad \sum_{\lambda=1}^{\nu} \alpha_\lambda r_i^{k_\lambda} = \rho \lambda'_i,$$

$$(i = 0, 1 \ldots n) \qquad (i = 1, 2 \ldots m),$$

wo die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ Constante sind und $\rho$, wenn es nicht Null ist, die frühere Bedeutung hat. Bestehen auch nur in einem Theile von $t_0 T$ derartige Relationen, so sollen die Systeme linear abhängig genannt werden. Hingegen soll bei Systemen, deren jedes nur aus $(n+m)$ Gliedern besteht, die gewöhnliche Definition beibehalten werden.

## §. 5.

Die folgenden Untersuchungen beruhen auf den Sätzen: »Sind in dem Systeme linearer Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

die $a_{ik}$ in dem Intervalle $t_0 t_1$ eindeutige und stetige Functionen von $t$, so bestehen $n$ Systeme ebensolcher Functionen $x_k^i$ $(i, k = 1, 2 \ldots n)$, die ihnen genügen und ein Fundamental-

system bilden. Jede andere Lösung hat die Form $x_k = \sum_{i=1}^{n} c_i x_k^i$ $(k = 1, 2 \ldots n)$, wo die Constanten $c_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ in $t_0 t_1$ ihren Wert nicht ändern.

Die Determinante $|x_k^i|$ von $n$ Lösungen ist entweder in jedem oder keinem Punkte von $t_0 t_1$ Null. Im ersteren Falle sind die Lösungen linear abhängig, d. h. es bestehen $n$ Constante $c_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, die nicht alle Null sind und im ganzen Intervalle $t_0 t_1$ die Relation $\sum_{i=1}^{n} c_i x_k^i = 0$ herstellen; im letzteren sind sie in jeder Theilstrecke von $t_0 t_1$ linear unabhängig«.

1. Das accessorische System linearer Differentialgleichungen (3) ist in dem Systeme

$$\psi_i(z, r) = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots n); \quad \frac{d\omega_\mu}{dt} = 0 \quad (\mu = 1, 2 \ldots m) \quad (10)$$

enthalten. In einer Curvenstrecke $(\gamma)$, wo $y'_\nu \neq 0$ ist, kann man hierin die Ausdrücke aus (9) setzen, wodurch es in ein System von $(n+m)$ Gleichungen $(i = 0 \ldots \nu - 1, \nu + 1 \ldots n,$ $\mu = 1, 2 \ldots m)$ übergeht. Dasselbe kann man, da in dieser Curvenstrecke auch $\Delta_{\nu\nu} \neq 0$ ist (§. 3, 2), durch ein Normalsystem (10*) ersetzen, in dem die Coefficienten (§. 3, 7) in $t_0 T$ stetige Functionen von $t$ sind. Aus einer Lösung $Z_0 \ldots Z_{\nu-1}$, $Z_\nu = 0$, $Z_{\nu+1} \ldots Z_n, R_1, R_2 \ldots R_m$ desselben erhält man dann eine Lösung $z_0, z_1 \ldots z_n,\ r_1, r_2 \ldots r_m$ von (10), wobei für $z_\nu$ willkürlich eine eindeutige Function von $t$ angenommen werden kann, die längs $(\gamma)$ Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung besitzt. Um also das System (10) zu integrieren, wird man zunächst das dem Curvenstück $t_0 t_1$ entsprechende Normalsystem (10*) integrieren; aus den gewonnenen $Z_0, Z_1 \ldots Z_n$, $R_1, R_2 \ldots R_m$ die $z_0, z_1 \ldots z_n$; $r_1, r_2 \ldots r_m$ in der oben angegebenen Weise bestimmen und aus ihren Werten in $t_1 - \tau$, wo die positive Größe $\tau$ genügend klein zu nehmen ist, die Fortsetzung für $t_1 t_2$ bilden u. s. f.

2. Bildet man auf diese Weise $(2n+m)$ Lösungen von (10*) für die Curvenstrecke $(\gamma)$ und die zugehörigen von (10), so besteht, wie man ohneweiters ersieht, der Satz:

»Sind die $(2n+m)$ Lösungen $(Z^1,R^1),(Z^2,R^2)\ldots(Z^{2n+m},R^{2n+m})$ von $(10^*)$, deren jede nur aus $(n+m)$ Größen besteht, linear abhängig, so sind es auch alle entsprechenden Systeme von $(2n+m)$ Lösungen $(z^1, r^1), (z^2, r^2)\ldots(z^{2n+m}, r^{2n+m})$ von (10).«

Und umgekehrt: »Sind $(2n+m)$ Lösungen von (10) linear abhängig, so sind es auch die zugehörigen von $(10^*)$.«

Die $(2n+m)$ linear unabhängigen Lösungen von $(10^*)$ für die Curvenstrecke $t_0 t_1$ entsprechenden Lösungen von (10) bilden demnach ebenso wie ihre in der angegebenen Weise erhaltenen Fortsetzungen ein System von $(2n+m)$ linear unabhängigen Lösungen.

Damit die obigen Lösungen von $(10^*)$ in $(\gamma)$ linear unabhängig seien, ist nun nothwendig und hinreichend, dass die Determinante $(2n+m)^{\text{ten}}$ Grades

$$|(Z_0^k)'\ldots(Z_{\nu-1}^k)'; (Z_{\nu+1}^k)'\ldots(Z_n^k)'; Z_0^k\ldots Z_{\nu-1}^k, Z_{\nu+1}^k\ldots Z_n^k; R_1^k\ldots R_m^k|$$
$$(k = 1, 2\ldots(2n+m))$$

in einem und somit in allen Punkten von $(\gamma)$ nicht verschwinde. Setzt man hierin für $Z_i^k$ und $R_i^k$ die Werte (8) ein, so ergibt sich vermöge einer leichten Transformation dieser Determinante und aus der Bildungsweise der Fortsetzungen über $(\gamma)$ hinaus der Satz:

»Die Lösungen $(z^1, r^1), (z^2, r^2)\ldots(z^{2n+m}, r^{2n+m})$ von (10) sind im Sinne des (§. 4) linear unabhängig, wenn die Determinante $(2n+m+2)^{\text{ten}}$ Grades

$$D = \begin{vmatrix} y_0', & y_1'\ldots & y_n'; & 0, 0\ldots 0; & 0, 0\ldots 0 \\ (z_0^0)', & (z_1^0)'\ldots & (z_n^0)'; & z_0^0, z_1^0\ldots z_n^0; & r_1^0, r_2^0\ldots r_m^0 \\ (z_0^k)', & (z_1^k)'\ldots & (z_n^k)'; & z_0^k, z_1^k\ldots z_n^k; & r_1^k, r_2^k\ldots r_m^k \end{vmatrix} \quad (11)$$
$$k = 1, 2\ldots(2n+m), \qquad (z_i^0 = y_i')$$

die entweder in allen oder keinem Punkte von $t_0 T$ Null ist, nirgends daselbst verschwindet.«

»Ist D hingegen in einem Punkte von $t_0 T$ Null, so sind die Lösungen $(z^1, r^1), (z^2, r^2)\ldots(z^{2n+m}, r^{2n+m})$ linear abhängig«.

3. Die Lösungen von (3) sind nun jene von (10) und also $(10^*)$, für welche in

$$\omega_k = c_k \qquad (k = 1, 2\ldots m)$$

die Constante $c_k$, die überall in $t_0 T$ denselben Wert hat, für $k = 1, 2 \ldots m$ Null ist.

Versieht man die Constanten, die in (10) der Lösung $(z^\lambda, r^\lambda)$ zugehören, mit dem oberen Index $\lambda$, so lässt sich das Product von D mit $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_0, y'_1 \ldots y'_{m-1})}$ durch die Determinante

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} 0, 0 \ldots 0; & y'_m \ldots y'_n; & 0, 0 \ldots 0; & 0 \ldots 0 \\ 0, 0 \ldots 0; & (z^0_m)' \ldots (z^0_n)'; & z^0_0, z^0_1 \ldots z^0_n; & r^0_1 \ldots r^0_m \\ c^i_1, c^i_2 \ldots c^i_m; & (z^i_m)' \ldots (z^i_n)'; & z^i_0, z^i_1 \ldots z^i_n; & r^i_1 \ldots r^i_m \end{vmatrix}$$

$$i = 1, 2 \ldots (2n+m)$$

darstellen,[1] wo also

$$\mathfrak{D} = \mathrm{D}\,\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_0, y'_1 \ldots y'_{m-1})}.$$

Derartige Relationen erhält man so viele in unmittelbar ersichtlicher Weise aus der angeschriebenen, als sich Determinanten $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_{k_0}, y'_{k_1} \ldots y'_{k_{m-1}})}$ bilden lassen, also $\binom{n+1}{m}$. In allen diesen ist D ungleich oder gleich Null, je nachdem die $(2n+m)$ Lösungen: $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \ldots (z^{2n+m}, r^{2n+m})$ linear unabhängig sind oder nicht, während in mindestens einer der andere Factor nicht Null ist (§. 3, 3): Also ist im ersten Falle mindestens ein $\mathfrak{D} \neq 0$, während im zweiten alle $\mathfrak{D}$ verschwinden.

Wählt man die Anfangswerte der Lösungen $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$ so, dass die zugehörigen $c$ Null sind, so zerfällt $\mathfrak{D}$ in das Product aus

$$C = |c_k^{2n+i}|_{i, k = 1, 2 \ldots m}$$

und die Determinante $(2n+2)^{\text{ten}}$ Grades

$$D = \begin{vmatrix} y'_m \ldots y'_n; & 0, 0 \ldots 0; & 0, 0 \ldots 0 \\ y''_m \ldots y''_n; & y'_0, y'_1 \ldots y'_n; & \lambda'_1, \lambda'_2 \ldots \lambda'_m \\ (z^i_m)' \ldots (z^i_n)'; & z^i_0, z^i_1 \ldots z^i_n; & r^i_1, r^i_2 \ldots r^i_m \end{vmatrix}_{i = 1\, 2 \ldots 2n} \qquad (12)$$

---

[1] Mitth. I, §. IX, 2.

Es wird dann

$$\mathfrak{D} = CD = \mathrm{D}\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m)}{\partial(y'_0, y'_1 \ldots y'_{m-1})}$$

und analog jede andere der $\binom{n+1}{m}$ Determinanten $\mathfrak{D}$.

Da man die Anfangswerte der Lösungen $(z^{2n+1}, r^{2n+1}) \ldots (z^{2n+m}, r^{2n+m})$ von (10) stets so wählen kann, dass $C \neq 0$ ist, so ergibt sich aus obiger Formel:

Die Lösungen von (3) $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$ sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn an einer Stelle und somit allen Stellen von $t_0T$ eine der Determinanten $D$ nicht verschwindet.

Da D verschwindet, wenn $(2n+1)$ Lösungen den Gleichungen (3) genügen, so folgt hieraus leicht:

Aus $(2n)$ im obigen Sinne linear unabhängigen Lösungen von (3) und den besonderen setzen sich alle übrigen als lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten zusammen.

Ein solches System von $2n$ Lösungen soll ein Fundamentalsystem von (3) heißen.

§. 6.

Die Gleichungen (3) werden nun befriedigt durch

$$z_0 = \frac{\partial y_0}{\partial c_k};\ z_1 = \frac{\partial y_1}{\partial c_k};\ \ldots z_n = \frac{\partial y_n}{\partial c_k};\ r_1 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_k} \ldots r_m = \frac{\partial \lambda_m}{\partial c_k}$$

$$(k = 1, 2 \ldots 2n),$$

wo die $y_0, y_1 \ldots y_n$ die Coordinaten der Curve $(C)$ und die $c_1, c_2 \ldots c_{2n}$ die Integrationsconstanten (§. 3, 4 und 5) bedeuten.

Nimmt man

$$z_k^i = \frac{\partial y_k}{\partial c_i};\ r_k^i = \frac{\partial \lambda_k}{\partial c_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots 2n)$$

und bildet die Determinante $D$, welche aus (12) sich ergibt, wenn man in ihren $(n-m+1)$ ersten Colonnen die Combination $m, (m+1) \ldots n$ durch $0, m+1 \ldots n$ ersetzt, so zeigt die Darstellung der Lösungen von (2), dass in ihnen für $t = t_0$, an

welcher Stelle der Voraussetzung nach (§. 1, 4) $y_0' \neq 0$ ist, die verschiedenen

$$z_i^i;\ (z_{m+i}^{n+i})';\qquad r_i^{2n-m+i}$$

den Wert 1 besitzen, während alle übrigen Größen Null sind.

$D$ hat somit für diese $2n$ Lösungen den Wert $\pm y_0'^2$, ist also nicht Null. Nach den Sätzen in (§. 5, 3) folgt hieraus:

Die $2n$ Lösungen von (3):

$$z_k^i = \frac{\partial y_k}{\partial c_i}\qquad r_k^i = \frac{\partial \lambda_k}{\partial c_i}\qquad (i = 1, 2 \ldots 2n)$$

$$(k = 0, 1 \ldots n)\qquad (k = 1 \ldots m)$$

bilden ein Fundamentalsystem.

## §. 7.

Vermöge der quadratischen Form

$$\left.\begin{gathered}\Omega(z, z') = \Sigma(a_{ik} z_i' z_k' + 2 b_{ik} z_i z_k' + c_{ik} z_i z_k)\\ z' = \frac{dz}{dt};\ a_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_k'};\ b_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k'};\ c_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}\\ (i, k = 0, 1 \ldots n)\end{gathered}\right\} \tag{13}$$

kann man $\psi_i(z, r)$ in (3) die Form geben

$$\psi_i(z, r) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z_i'}\right] + \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} r_k\right)\right]. \tag{14}$$

Ist $(u, \rho)$ ein zweites System von $(n+m+1)$ Größen, so erhält man

$$\sum_{i=0}^{n}[u_i \psi_i(z, r) - z_i \psi_i(u, \rho)] = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left[z_i' \frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u_i'} - u_i' \frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z_i'} + z_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega(u, u')}{\partial u_i'} - u_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \Omega(z, z')}{\partial z_i'}\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\omega_k(u) r_k - \omega_k(z) \rho_k - \frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}(r_k u_i - \rho_k z_i)\right],$$

woraus sich ergibt

$$\sum_{i=0}^{n} \psi_i(z, r) u_i + \sum_{k=1}^{m} \omega_k(z) \rho_k - \left[ \sum_{i=0}^{n} \psi_i(u, \rho) z_i + \sum_{k=1}^{m} \omega_k(u) r_k \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i,k=0}^{n} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_i' \partial u_k'} (z_i u_k' - u_i z_k') + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_i' \partial u_k} (z_i u_k - u_i z_k) \right] \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} (r_k u_i - \rho_k z_i) \right\} = \frac{d}{dt} \psi(z, r; u, \rho), \quad (15)$$

wo also

$$\psi(z, r; u, \rho) = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} [a_{ik}(z_i u_k' - u_i z_k') + b_{ki}(z_i u_k - u_i z_k)] \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} (r_k u_i - \rho_k z_i) \right\} \quad (16)$$

gesetzt wurde.

Aus dieser Definition folgen unmittelbar einige Eigenschaften des bilinearen Differentialausdruckes (16):

$$\psi(z, r; u, \rho) = -\psi(u, \rho; z, r).$$

(Aus Formel 5)

$$\psi(z, r; z^0, r^0) = 0 \qquad (z^0 = \rho y', \ r^0 = \rho \lambda').$$

Ist $(u, \rho)$ eine Lösung von (3), die nicht eine besondere ist, so ergibt sich aus (15)

$$\sum_{i=0}^{n} \psi_i(z, r) u_i + \sum_{k=1}^{m} \omega_k(z) \rho_k = \frac{d}{dt} \psi(z, r; u, \rho).$$

Genügt überdies auch $(z, r)$ den Gleichungen (3), so ist

$$\psi(z, r; u, \rho) = C,$$

wo die Constante $C$ im ganzen Intervall $t_0 T$ denselben Wert hat. Ist dieser für zwei linear unabhängige Lösungen, von denen keine eine besondere ist, Null, so sollen die Lösungen conjugierte heißen. Verschwinden sowohl

$z_0, z_1 \ldots z_n$, als auch $u_0, u_1 \ldots u_n$ in demselben Punkte $\xi$ von $t_0 T$ und sind die Lösungen $(z, r)$ und $(u, \rho)$ linear unabhängig, so sind sie also auch conjugiert.

## §. 8.

Setzt man

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{ik} u'_k + b_{ki} u_k) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \rho_k = P_i(u),$$

so ist

$$\psi(z, r; u, \rho) = \sum_{i=0}^{n} [z_i P_i(u) - u_i P_i(z)]. \tag{17}$$

Sind nun $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \ldots (z^{2n+m}, r^{2n+m})$ Lösungen von (10) und multipliciert man die Determinante $(2n+m+2)^{\text{ten}}$ Grades D in (§. 5, 11), nachdem man jede der $m$ letzten Colonnen um $m$ vorgeschoben hat, mit

$$\Delta_{00} = \begin{vmatrix} 1, & 0 \ldots 0; & 0 \ldots 0; & 0, 0 \ldots 0 \\ a_{10}, & a_{11} \ldots a_{1n}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_1}; & 0, 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ a_{n0}, & a_{n1} \ldots a_{nn}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_n} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_n}; & 0, 0 \ldots 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_0}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1} \ldots \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_n}; & 0 \ldots 0; & 0, 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_0}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_1} \ldots \frac{\partial \varphi_m}{\partial y'_n}; & 0 \ldots 0; & 0, 0 \ldots 0 \\ 0, & 0 \ldots 0; & 0 \ldots 0; & 1, 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ 0, & 0 \ldots 0; & 0 \ldots 0; & 0, 0 \ldots 1 \end{vmatrix},$$

so ergibt sich mit Benützung der $(n+1)$ letzten Colonnen für $D\Delta_{00}$ das Product aus $y'_0$ in die Determinante $(2n+m+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$|P_1(z^i)\dots P_n(z^i);\ \omega_1(z_i)\dots\omega_m(z^i);\ z_0^i\dots z_n^i|_{i=0,1\dots 2n+m}$$
$$(z^0 = y';\ r^0 = \lambda').$$

Da $\omega_k(z^i) = c_k^i$, wo $c_k^i$ eine Constante ist, so wird

$$\mathrm{D}\Delta_{00} = \pm y_0'|P_1(z^i)\dots P_n(z^i);\ z_0^i\dots z_n^i;\ c_1^i\dots c_m^i|_{i=0,1\dots 2n+m}.$$

Befriedigen die $(z^1, r^1)$, $(z^2, r^2)\dots(z^{2n}, r^{2n})$ die Gleichungen (3), so geht diese Relation über in

$$\mathrm{D}\Delta_{00} = \pm y_0' C|P_1(z^i)\dots P_n(z^i);\ z_0^i\dots z_n^i|_{i=0,1\dots 2n},$$

wo

$$C = \Sigma \pm c_1^{2n+1}\dots c_m^{2n+m}$$

bei passender Wahl der Anfangswerte der Lösungen $(z^{2n+1}, r^{2n+1})\dots(z^{2n+m}, r^{2n+m})$ nicht Null ist.

Multipliciert man die Determinante $(2n+2)^{\text{ten}}$ Grades

$$y_0'|P_1(z^i)\dots P_n(z^i);\ z_0^i, z_1^i\dots z_n^i|_{i=0,1\dots 2n}$$

mit der Determinante gleichen Grades

$$y_0'|z_0^i\dots z_n^i;\ -P_1(z^i)\dots -P_n(z^i)|_{i=0,1\dots 2n}$$
$$= \pm y_0'|P_1(z^i)\dots P_n(z^i);\ z_0^i\dots z_n^i|_{i=0,1\dots 2n}$$

und berücksichtigt, dass immer $\psi(z, r;\ z^0, r^0) = 0$ ist, so erhält man

$$\{y_0'|z_0^i\dots z_n^i;\ P_1(z^i)\dots P_n(z^i)|_{i=0,1\dots 2n}\}^2$$
$$= y_0'^4\Psi,$$

wo

$$\Psi = |\psi(z^i, r^i;\ z^k, r^k)|_{i,k=1,2\dots 2n}. \tag{18}$$

Mithin ergibt sich

$$\mathrm{D}^2\Delta_{00}^2 = y_0'^4\Psi C^2.$$

Wählt man statt $\Delta_{00}$: $\Delta_{ii}$, so erhält man in derselben Weise oder vermittels (§. 3, 2)

$$\mathrm{D}^2\Delta_{ii}^2 = y_i'^4 C^2\Psi \qquad (i = 0, 1\dots n) \tag{19}$$

Sind die Lösungen $(z^1, r^1)$, $(z^2, r^2)\dots(z^{2n}, r^{2n})$ von (3) linear abhängig, so verschwindet die Constante $\Psi$. Tritt aber letzteres

ein, so muss, wie aus (19) hervorgeht, da ein $y'_i$ mitsammt $\Delta_{ii}$ nicht Null ist (§. 3, 2), $D = 0$ sein und daher auch (§. 5, 3) sämmtliche $D$. Hieraus ergibt sich:

Die $(2n)$ Lösungen $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \dots (z^{2n}, r^{2n})$ sind dann und nur dann linear unabhängig, wenn $\Psi$ nicht Null ist.

Die Determinante $\Psi$ soll die Determinante der $2n$ Lösungen $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \dots (z^{2n}, r^{2n})$ genannt werden.

§. 9.

1. Da $\Psi$ nicht verschwindet, wenn die $2n$ Lösungen linear unabhängig sind, so besteht außer den besonderen Lösungen keine, die zu jeder Lösung eines Fundamentalsystems conjugiert wäre. Es lassen sich aber in

$$z_k = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i z_k^i + \rho y'_k, \quad r_k = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i r_k^i + \rho \lambda'_k$$
$$(k = 0, 1 \dots n) \qquad (k = 1, 2 \dots m)$$

die Constanten $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{2n}$ so bestimmen, dass $(z, r)$ zu $(2n-1)$ Lösungen des obigen Fundamentalsystems, etwa $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \dots (z^{2n-1}, r^{2n-1})$ conjugiert ist, aber nicht zu $(z^{2n}, r^{2n})$. Ihre Werte ergeben sich aus dem Gleichungssysteme

$$\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi(z^i, r^i; z^k, r^k) = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots (2n-1))$$
$$\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi(z^i, r^i; z^{2n}, r^{2n}) = c \neq 0,$$

dessen Determinante $\Psi$ ist. Sie können nicht alle Null sein, und ist etwa $\alpha_i \neq 0$, so kann man $\Psi$ in der Weise transformieren, dass man ihre $i^{\text{te}}$ Zeile mit $\alpha_i$ multipliciert und dazu die übrigen addiert, nachdem man sie beziehungsweise mit $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{2n}$ multiplicierte. Verfährt man in derselben Weise in der neuen Determinante auch mit den Colonnen, so erhält man eine Determinante $\Psi_1$, die aus $\Psi$ sich ergibt, wenn man darin in die $i^{\text{te}}$ Zeile und Colonne $z, r$ für $z^i, r^i$ setzt, und die zu $\Psi$ in der Beziehung steht

$$\Psi_1 = \alpha_i^2 \Psi.$$

$\Psi_1$ ist demnach nicht Null, und da sie die der $\Psi$ entsprechende Determinante des Systems

$$z^1, r^1 \ldots z^{i-1}, r^{i-1};\ z, r;\ z^{i+1}, r^{i+1} \ldots z^{2n}, r^{2n}$$

ist, so ist dasselbe nach §. 8 ein Fundamentalsystem. Da $\alpha_{2n} = 0$ ist, so ist $i \neq 2n$ und da alle Glieder der $i^{\text{ten}}$ Zeile und Colonne mit Ausnahme des letzten, das gleich $c$ ist, Null sind, so ist $\Psi_1$ gleich dem Producte aus $c^2 = \psi(z, r; z^{2n}, r^{2n})^2$ in eine Determinante $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\Psi_2$.

Man gelangt also auf diese Weise von dem ursprünglichen Fundamentalsysteme zu einem neuen, das wieder wie das ursprüngliche mit

$$(z^1, r^1);\ (z^2, r^2) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$$

bezeichnet werden mag, in dem aber eine der Lösungen, etwa $(z^1, r^1)$ zu allen übrigen mit Ausnahme einer einzigen, die mit $(z^{2n}, r^{2n})$ bezeichnet werden soll, conjugiert ist. Die Determinante $\Psi$ dieses Systems reduciert auf $\psi(z^1, r^1; z^{2n}, r^{2n})^2\, \Psi_2$, wo $\Psi_2$ eine Determinante $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist, die aus $\Psi$ erhalten wird, indem man darin die Zeilen und Colonnen weglässt, die von $(z^1, r^1)$ und $(z^{2n}, r^{2n})$ herrühren.

In

$$z_k = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i z_k^i + \rho y_k'; \qquad r_k = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i r_k^i + \rho \lambda_k'$$

$$(k = 0, 1 \ldots n) \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

kann man nun wieder die $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$ so bestimmen, dass die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi(z^k, r^k; z^i, r^i) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots 2n-2, 2n)$$

$$\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i \psi(z^{2n-1}, r^{2n-1}; z^i, r^i) = c \neq 0$$

befriedigt werden. Die gefundene Lösung $(z, r)$ ist dann zu allen Lösungen mit Ausnahme von $(z^{2n-1}, r^{2n-1})$ conjugiert und bildet mit $(2n-1)$ von ihnen, zu denen auch $(z^1, r^1)$,

$(z^{2n-1}, r^{2n-1})$ und $(z^{2n}, r^{2n})$ gehören, ein Fundamentalsystem. Man kann dasselbe mit

$$(z^1, r^1);\ (z^2, r^2) \ldots (z^{2n-1}, r^{2n-1});\ (z^{2n}, r^{2n})$$

bezeichnen, wo $(z^1, r^1)$ nur zu $(z^{2n}, r^{2n})$ und $(z^2, r^2)$ nur zu $(z^{2n-1}, r^{2n-1})$ nicht conjugiert ist. Die Determinante $\Psi$ dieses Fundamentalsystems zerfällt in das Product aus

$$[\psi(z^1, r^1;\ z^{2n}, r^{2n})\,\psi(z^2, r^2;\ z^{2n-1}, r^{2n-1})]^2\,\Psi_4,$$

wo die Determinante $2(n-2)^{\text{ten}}$ Grades $\Psi_4$ aus $\Psi$ gebildet wird, indem man darin die Zeilen und Colonnen weglässt, die von $(z^1, r^1)$, $(z^2, r^2)$, $(z^{2n-1}, r^{2n-1})$, $(z^{2n}, r^{2n})$ herrühren.

Dieses Verfahren führt zu dem folgenden Satze:

Aus einem Fundamentalsystem des accessorischen Systems linearer Differentialgleichungen lässt sich stets ein neues

$$(z^1, r^1) \ldots (z^n, r^n);\ (z^{n+1}, r^{n+1}) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$$

ableiten, in dem die $n$ letzten Lösungen auch dem ursprünglichen angehören und jede der $n$ ersten Lösungen $z^i r^i$ zu allen übrigen conjugiert ist bis auf $z^{2n-(i-1)} r^{2n-(i-1)}$, zu der sie nicht conjugiert ist. Die Determinante des neuen Fundamentalsystems ist gleich dem Producte

$$\psi(z^1, r^1; z^{2n}, r^{2n})^2\,\psi(z^2, r^2; z^{2n-1}, r^{2n-1})^2 \ldots \psi(z^n, r^n; z^{n+1}, r^{n+1})^2.\text{*}$$

2. In dem erhaltenen Fundamentalsysteme kann man, ohne die im Satze angeführten Eigenschaften zu zerstören, irgend eine der $n$ letzten Lösungen, z. B. $(z^{n+k}, r^{n+k})$, durch

$$(\alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + z^{n+k};\ \alpha_1 r^1 + \alpha_2 r^2 + \ldots + \alpha_n r^n + r^{n+k})$$

ersetzen. Bezeichnet man dieselbe mit $(z, r)$, so ist zunächst

$$\psi(z^i, r^i; z, r) = 0$$

$$(i = 1, 2 \ldots n-k,\ n-k+2 \ldots n).$$

* Mitth. II, XV.

Bestimmt man nun die ($n$) Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ gemäß den Gleichungen

$$\psi(z^{n+i}, r^{n+i}; z, r) = \psi(z^{n+i}, r^{n+i}; z^{n+k}, r^{n+k}) + \\ + \alpha_{n-i+1}\psi(z^{n-i}, r^{n-i}; z^{n+i+1}, r^{n+i+1}) = 0 \\ (i = 1, 2 \ldots n),$$

was immer möglich ist, da $\psi(z^{n-i+1}, r^{n-i+1}; z^{n+i}, r^{n+i}) \neq 0$ ist, so bilden

$$(z^1, r^1) \ldots (z^{n+k-1}, r^{n+k-1}); (z, r); (z^{n+k+1}, r^{n+k+1}) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$$

wieder ein Fundamentalsystem, in dem nun auch $(z, r)$ zu allen übrigen Lösungen mit Ausnahme von $(z^{n-k+1}, r^{n-k+1})$ conjugiert ist. Man gewinnt so den Satz:

Aus einem gegebenen Fundamentalsysteme lassen sich andere ableiten, in deren jedem die einzelnen Lösungen einander derart paarweise zugeordnet sind, dass jede zu allen übrigen mit Ausnahme der zugeordneten conjugiert ist.

Ein solches Fundamentalsystem soll ein involutorisches heißen.

## §. 10.

Aus dem Vorangehenden ersieht man, dass es Systeme von $n$ linear unabhängigen Lösungen $(z^1, r^1)$, $(z^2, r^2) \ldots (z^n, r^n)$ gibt, in denen keine Lösung eine besondere ist und jede zu allen übrigen conjugiert ist. Ein solches System soll ein System conjugierter Lösungen oder kurz conjugiertes System und

$$|z_k^i|_{i, k = 0, 1 \ldots n} = \Delta(z^0, z^1 \ldots z^n),$$

wo $z_k^0 = y_k'$ $(k = 0, 1 \ldots n)$ ist, seine Determinante genannt werden. Wenn seine Glieder die obigen sind, soll die Bezeichnung $((z^k, r^k))$ benützt werden.

Es besteht nun der Satz:

Ist eine Lösung $(z, r)$, die keine besondere ist, zu jedem Gliede eines $((z^k, r^k))$ conjugiert, so ist $(z, r)$ von den Lösungen in $((z^k, r^k))$ linear abhängig.

Bilden die Glieder von $((z^k, r^k))$ mit den Lösungen $(z^{n+1}, r^{n+1})$, $(z^{n+2}, r^{n+2}) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$ ein Fundamentalsystem und ersetzt man darin etwa $(z^{2n}, r^{2n})$ durch $(z, r)$, so verschwindet die Determinante $\Psi$ dieses neuen Systems, und es sind somit die $2n$ Lösungen, die dasselbe bilden, von einander linear abhängig. Es ist also

$$z_k = \sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i z_k^i + \rho y_k'; \qquad r_k = \sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i r_k^i + \rho \lambda_k'$$

$$(k = 0, 1 \ldots n) \qquad (k = 1, 2 \ldots m).$$

Ist nun $\psi(z^k, r^k; z, r) = 0$ für $(k = 1, 2 \ldots n)$, so bestehen die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{n+i} \psi(z^k, r^k; z^{n+i}, r^{n+i}) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots n). \tag{20}$$

Da aber die dem Fundamentalsysteme $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$ zugehörige $\Psi \neq 0$ ist, so können nicht alle Determinanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Matrix

$$\| \psi(z^i, r^i; z^{n+k}, r^{n+k}) \|_{k=1,2\ldots n-1}^{i=1,2\ldots n}$$

Null sein, und es sind daher wegen (20) $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \ldots = \alpha_{2n-1} = 0$. Somit ist

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_k^i + \rho y_k'; \qquad r_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_k^i + \rho \lambda_k'$$

$$(k = 0, 1 \ldots n) \qquad (k = 1, 2 \ldots m),$$

w. z. b. w.

## §. 11.

1. Bilden im Fundamentalsysteme

$$(z^1, r^1) \ldots (z^n, r^n); (z^{n+1}, r^{n+1}) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$$

---

[1] Vermöge eines involutorischen Fundamentalsystemes lässt sich leicht auch die von Clebsch angegebene Form der conjugierten Systeme herleiten. J. f. Math., Bd. 56. S. Mitth. II.

die ersten $n$ Lösungen ein $((z^k, r^k))$, so reduciert sich seine Determinante $\Psi$ auf das Quadrat der Determinante

$$\Psi' = |\psi(z^{n+i}, r^{n+i}; z^k, r^k)|_{i,k=1,2\ldots n},$$

so dass $\Psi' \neq 0$. Es lassen sich daher die $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ in

$$z = z^{n+k} + \alpha_1 z^1 + \ldots + \alpha_n z^n; \qquad \dot{r} = r^{n+k} + \alpha_1 r^1 + \ldots + \alpha_n r^n$$

gemäß den Gleichungen

$$\psi(z, r; z^{n+i}, r^{n+i}) = 0$$

$$= \psi(z^{n+k}, r^{n+k}; z^{n+i}, r^{n+i}) + \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda \psi(z^\lambda, r^\lambda; z^{n+i}, r^{n+i})$$

$$(i = 1, \ldots (k-1), (k+1) \ldots n)$$

$$\psi(z, r; z^{n+k}, r^{n+k}) =$$

$$= \psi(z^{n+k}, r^{n+k}; z^{n+k}, r^{n+k}) + \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda \psi(z^\lambda, r^\lambda; z^{n+k}, r^{n+k}) \neq 0$$

bestimmen.

Ersetzt man $(z^{n+k}, r^{n+k})$ unter Beibehaltung dieser Bezeichnung im ursprünglichen Fundamentalsysteme durch die gefundene Lösung $(z, r)$, so erhält man wieder ein Fundamentalsystem, in dem aber $(z^{n+k}, r^{n+k})$ zu jedem Systeme $(z^{n+\lambda}, r^{n+\lambda})$ $(\lambda = 1, 2 \ldots n)$ conjugiert ist.

Durch wiederholte Anwendung des Verfahrens ergibt sich also:

B i l d e n  i m  F u n d a m e n t a l s y s t e m e $(z^1, r^1) \ldots (z^n, r^n)$; $(z^{n+1}, r^{n+1}) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$ d i e $n$ e r s t e n  L ö s u n g e n  e i n  c o n j u g i e r t e s  S y s t e m,  s o  l ä s s t  e s  s i c h  o h n e  Ä n d e r u n g  d e r $n$ e r s t e n  G l i e d e r  l i n e a r  i n  e i n  a n d e r e s  ü b e r f ü h r e n,  i n  d e m  a u c h  d i e $n$ l e t z t e n  L ö s u n g e n  e i n  c o n j u g i e r t e s  S y s t e m  b i l d e n.

2. $\Psi'^2$ ist die Determinante dieses Fundamentalsystems und $\Psi' \neq 0$ die des Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k^\lambda \psi(z^{n+k}, r^{n+k}; z^i, r^i) = 0 \qquad (i = 1 \ldots (\lambda-1); (\lambda+1) \ldots n)$$

$$\sum_{k-1}^{n} \beta_k^\lambda \psi(z^{n+k}, r^{n+k}; z^\lambda, r^\lambda) = c_\lambda \neq 0.$$

Bezeichnet $\Psi'_{n+k,\lambda}$ die Subdeterminante von $\psi(z^{n+k}, r^{n+k}; z^\lambda, r^\lambda)$ in $\Psi'$, so ergibt sich hieraus

$$\beta_k^\lambda = \frac{c_\lambda \Psi'_{n+k,\lambda}}{\Psi'}. \tag{21}$$

Die Lösung

$$\left(u^{n+1-\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^\lambda z^{n+k}; \quad \rho^{n+1-\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^\lambda r^{n+k}\right)$$

ist dann zu allen Lösungen des Fundamentalsystems bis auf $(z^\lambda, r^\lambda)$ conjugiert.

Für $\lambda = 1, 2 \ldots n$ ergeben sich auf diese Weise $n$ neue derartige Lösungen $(u^1, \rho^1) \ldots (u^n, \rho^n)$, die mit $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \ldots (z^n, r^n)$ ein involutorisches Fundamentalsystem bilden, da die Determinante dieser $(2n)$ Lösungen

$$\Psi'^2 |\beta_k^i|^2_{i,k=1,2\ldots n} = (c_1 c_2 \ldots c_n)^2 \neq 0$$

ist und $(z^\lambda, r^\lambda)$ zu allen anderen Lösungen des Fundamentalsystems conjugiert ist mit Ausnahme von $(u^{n+1-\lambda}, \rho^{n+1-\lambda})$. Somit:

Aus zwei conjugierten Systemen, die ein Fundamentalsystem bilden, kann man durch lineare Transformation des einen, während das andere ungeändert bleibt, ein involutorisches Fundamentalsystem herstellen.

§. 12.

1. In irgendwelchem Punkte $\tau$ von $t_0 T$ können, wenn $(z^1, r^1), (z^2, r^2) \ldots (z^{2n}, r^{2n})$ ein Fundamentalsystem bilden, nach den Sätzen in (§. 5, 3) nicht sämmtliche in

$$\| z_k^i \|_{k=0,1\ldots n}^{i=0,1\ldots 2n} \qquad (z_k^0 = y'_k, \ r_k^0 = \lambda'_k)$$

enthaltenen Determinanten $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, daher auch nicht alle $|z_k^i|_{k=0,1\ldots n}^{i=0,i_1\ldots i_n}$.

Ist $|z_k^i|_{i,k=0,1\ldots n}$ eine solche Determinante, so wird man stets die $\alpha_k^i$ gemäß den $n+1$ Gleichungen

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \alpha_\lambda^i (z_k^\lambda)_\tau = -\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{n+\lambda}^i (z_k^{n+\lambda})_\tau \qquad (k = 0, 1 \ldots n),$$

wo $(z_\nu^\mu)_\tau$ den Wert von $z_\nu^\mu$ in $\tau$ bedeute, bestimmen können. Bei dieser Bestimmung können die $\alpha_{n+\lambda}^i$ $(\lambda = 1, 2 \ldots n)$ willkürlich und daher für $i = 1, 2 \ldots n$ so angenommen werden, dass die Determinante $|\alpha_{n+\lambda}^i|_{i, \lambda = 1, 2 \ldots n} \neq 0$ ist. Die Lösungen

$$\left(u^i = \sum_{\lambda=0}^{2n} \alpha_\lambda^i z^\lambda; \quad \rho^i = \sum_{\lambda=0}^{2n} \alpha_\lambda^i r^\lambda\right)$$

für $(i = 1, 2 \ldots n)$ bilden dann wegen $(u_k^i)_\tau = 0$ $(k = 0, 1 \ldots n)$, $(i = 1, 2 \ldots n)$ ein conjugiertes und mit den Lösungen $(z^1, r^1)$, $(z^2, r^2) \ldots (z^n, r^n)$ ein Fundamental-System.

Ein solches conjugiertes System soll ein der Stelle $\tau$ conjugiertes System heißen.

Jede weitere Lösung $(u, \rho)$ in der $(u_k)_\tau = 0$ $(k = 0, 1 \ldots n)$ ist dann von den Gliedern von $((u^k, \rho^k))$ linear abhängig (§. 10). Die Determinanten der verschiedenen $\tau$ conjugierten Systeme unterscheiden sich also nur um constante Factoren, die nicht Null sind. Irgend eine von ihnen werde mit $\Delta(t, \tau)$[1] bezeichnet.

Diese Determinante ist bis auf einen constanten, von Null verschiedenen Factor gleich der Determinante $(2n+2)^{\text{ten}}$ Grades[1]

$$\begin{vmatrix} y'_0, & z_0^0, & z_0^1 & \ldots & z_0^n, & z_0^{n+1} & \ldots & z_0^{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y'_n, & z_n^0, & z_n^1 & \ldots & z_n^n, & z_n^{n+1} & \ldots & z_n^{2n} \\ 0, & (z_0^0)_\tau, & (z_0^1)_\tau & \ldots & (z_0^n)_\tau, & (z_0^{n+1})_\tau & \ldots & (z_0^{2n})_\tau \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & (z_n^0)_\tau, & (z_n^1)_\tau & \ldots & (z_n^n)_\tau, & (z_n^{n+1})_\tau & \ldots & (z_n^{2n})_\tau \end{vmatrix}$$

wie man unmittelbar ersieht, wenn man dieselbe zeilenweise mit

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 & \ldots & 0, & 0 & \ldots & 0 \\ 0, & \alpha_0^1, & \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1, & \alpha_{n+1}^1 & \ldots & \alpha_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \\ 0, & \alpha_0^n, & \alpha_1^n & \ldots & \alpha_n^n, & \alpha_{n+1}^n & \ldots & \alpha_{2n}^n \\ 0, & 1 & \cdot & \ldots & 0, & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & 0, & 0 & \ldots & 1, & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

multipliciert.

---

[1] A. Mayer (J. f. Math., Bd. 69).

2. In dem erhaltenen Fundamentalsysteme $(u^1, \rho^1)\ldots(u^n, \rho^n)$, $(z^1, r^1)\ldots(z^n, r^n)$ können nach (§. 11, 1) die $n$ letzten Glieder durch ein conjugiertes System ersetzt werden. Behält man für seine Glieder die gleiche Bezeichnung bei, so kann $\Delta(z^1, z^2 \ldots z^n)$, wie aus den Sätzen in (§. 5, 3) hervorgeht, in $\tau$ nicht verschwinden.

Es existieren also stets unendlich viele conjugierte Systeme, deren jedes eine Determinante besitzt, welche an einer beliebig angenommenen Stelle des Integrationsintervalls nicht verschwindet.

## §. 13.

Besteht zwischen einem Systeme von $(m+n+1)$ Größen $(z, r)$, in dem die $z_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ erste Derivierte besitzen, und $n$ Lösungen des accessorischen Gleichungssystems $(z^1, r^1)$, $(z^2, r^2)\ldots(z^n, r^n)$, unter denen sich keine besondere befinde, die Relation

$$z_i = \sum_{k=0}^{n} \rho_k z_i^k \qquad (i = 0, 1 \ldots n) \qquad (z_i^0 = y_i'),$$

so geht (16):

$$\begin{aligned}\psi(z, r; z^\lambda, r^\lambda) = \sum_{i,k} [a_{ik}(z_k (z_i^\lambda)' - z_i' z_k^\lambda) + b_{ik}(z_k z_i^\lambda - z_i z_k^\lambda)] \\ - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} (z_k^\lambda r_i - z_k r_i^\lambda) \\ = \sum_{\mu=0}^{n} \rho_\mu \Bigg\{ \sum_{i,k} [a_{ik}(z_k^\mu (z_i^\lambda)' - (z_i^\mu)' z_k^\lambda) + b_{ik}(z_i^\lambda z_k^\mu - z_i^\mu z_k^\lambda)] \\ - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} (z_k^\lambda r_i^\mu - r_i^\lambda z_k^\mu) \Bigg\} - \sum_{i,k} a_{ik} z_k^\lambda \sum_{\mu=0}^{n} \rho_\mu' z_i^\mu \\ + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{\mu=0}^{n} \rho_\mu r_i^\mu - r_i \right) z_k^\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'}\end{aligned}$$

über in

$$\psi(z, r; z^\lambda, r^\lambda) = \sum_{\mu=0}^{n} \rho_\mu \psi(z^\mu, r^\mu; z^\lambda, r^\lambda) - \sum_{i,k} a_{ik} z_k^\lambda \zeta_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{\mu=0}^{n} \rho_\mu r_i^\mu - r_i \right) \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} z_k^\lambda,$$

wo

$$\zeta_i = \sum_{\mu=0}^{n} \rho'_\mu z_i^\mu.$$

Ist nun $\omega_k(z) = 0$ $(k = 1, 2 \ldots m)$, so wird

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \rho'_\lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_k} z_k^\lambda = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

und aus obiger Formel ergibt sich

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \rho'_\lambda \psi(z, r; z^\lambda, r^\lambda) =$$

$$= - \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} \zeta_i \zeta_k + \sum_{\lambda,\mu=0}^{n} \rho'_\lambda \rho_\mu \psi(z^\mu, r^\mu; z^\lambda, r^\lambda). \tag{22}$$

Bilden die Lösungen $(z^1, r^1) \ldots (z^n, r^n)$ ein conjugiertes System $((z^k, r^k))$, so reduciert sich diese Relation auf

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \rho'_\lambda \psi(z, r; z^\lambda, r^\lambda) = - \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} \zeta_i \zeta_k. \tag{23}$$

Wählt man für $((z^k, r^k))$ eines der conjugierten Systeme, deren Determinante im beliebig angenommenen Punkte $\tau$ des Integrationsintervalls nicht Null ist, so erhält man für die Umgebung von $\tau$

$$\zeta_i = \frac{1}{\Delta(z^0 \ldots z^n)} \begin{vmatrix} z_i' & ; z_0, z_1 \ldots z_n \\ (z_i^0)' ; & z_0^0, z_1^0 \ldots z_n^0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ (z_i^n)' ; & z_0^n, z_1^n \ldots z_n^n \end{vmatrix} = \frac{\chi_i(z)}{\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)} \qquad (24)$$

$$(i = 0, 1 \ldots n)$$

$$\rho_\lambda = \frac{\Delta(z^0 \ldots z^{\lambda-1}, z, z^{\lambda+1} \ldots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)} \qquad (\lambda = 0, 1 \ldots n)$$

Durch Substitution dieses Wertes von $\rho_\lambda$ in obige Identität gelangt man zu der Grundformel:

Verschwindet die Determinante des conjugierten Systems $((z^k, r^k))$ an einer Stelle des Integrationsintervalls und somit in einer Umgebung derselben nicht, haben ferner die $z_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ eines Systems von $(n+m+1)$ Größen $(z, r)$ in derselben erste stetige Derivierte[1] nach $t$ und genügen sie den $m$ Gleichungen $\omega_k(z) = 0$, so ist daselbst

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \psi(z^\lambda, r^\lambda; z, r) \frac{d}{dt} \frac{\Delta(z^0 \ldots z^{\lambda-1}, z, z^{\lambda+1} \ldots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)} = \sum_{i,k} a_{ik} \zeta_i \zeta_k, \qquad (25)$$

wo die $\zeta_i$ die Werte in (24) besitzen und den Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k'} \zeta_k = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m) \qquad (26)$$

genügen.

Ist $(z, r)$ speciell eine Lösung von (3) und überdies nur zur Lösung $(z^\lambda, r^\lambda)$ von $((z^k, r^k))$ nicht conjugiert, so vereinfacht sich (25) in

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta(z^0 \ldots z^{\lambda-1}, z, z^{\lambda+1} \ldots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)} = \frac{-1}{\psi(z, r; z^\lambda, r^\lambda)} \sum_{i,k} a_{ik} \zeta_i \zeta_k. \qquad (25^*)$$

---

[1] Die Existenz zweiter Derivierter wird nicht vorausgesetzt.

## III. Transformation.[1]

§. 14.

In (3) werde der folgende Theil von $\psi_i(z, r)$, der bloß erste Derivierte von $z_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ und $r_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ enthält, mit $\chi_i(z, r)$ bezeichnet:

$$\chi_i(z, r) = \\ = \sum_{k=0}^{n} \left[ (c_{ik} - b'_{ki}) z_k + (b_{ik} - b_{ki}) z'_k \right] + \sum_{k=1}^{m} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right) \right). \quad (27)$$

Wenn die $z_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ auch zweite Derivierte besitzen, so ist

$$\chi_i(z, r) = \psi_i(z, r) + \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{n} a_{ik} z'_k$$

und daher für jede Lösung $(z, r)$ von (3):

$$\chi_i(z, r) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{n} a_{ik} z'_k. \quad (27^*)$$

Haben in den Systemen von je $(m + n + 1)$ Größen $(z, r)$ und $(u, \rho)$ die $z_\nu$ und $u_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ erste Derivierte und genügen sie den Gleichungen $\omega_k(z) = \omega_k(u) = 0$ $(k = 1, 2 \ldots m)$, so besteht die Relation

$$\sum_{i=0}^{n} [u_i \chi_i(z, r) - z_i \chi_i(u, \rho)] = \frac{d}{dt} \chi(z, r; u, \rho), \quad (28)$$

wo also nach (16)

$$\chi(z, r; u, \rho) = \psi(z, r; u, \rho) + \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}(u_i z'_k - z_i u'_k) \quad (29)$$

ist und keine Ableitungen von $z$ und $u$ enthält.

[1] Mitth. I, §. 10; Mitth. IV, §. 23.

Sind speciell $(z, r)$ und $(u, \rho)$ zwei zueinander conjugierte Lösungen von (3), so wird

$$\chi(z, r; u, \rho) = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}(u_i z_k' - z_i u_k'). \tag{29*}$$

Vermöge dieser Bezeichnungen nimmt die Grundformel (25) die Gestalt an

$$\sum a_{ik}\zeta_i\zeta_k = \sum_{\lambda=0}^{n}\left\{\left[\sum_{i,k} a_{ik}(z_i^\lambda z_k' - (z_k^\lambda)' z_i) + \chi(z^\lambda, r^\lambda; z, r)\right]\frac{d}{dt}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{Z_\nu^\lambda z_\nu}{Z}\right\},$$

wo $Z = \Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)$ und $Z_\nu^\lambda$ die Subdeterminante darin von $z_\nu^\lambda$ bedeutet. Wendet man auf

$$\sum a_{ik}\zeta_i\zeta_k = \sum_{\lambda,i,k}\left\{\left[a_{ik}(z_i^\lambda z_k' - (z_k^\lambda)' z_i)\right]\sum_{\nu=0}^{n}\left[\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}z_\nu' + \left(\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}\right)' z_\nu\right]\right\}$$

$$+\frac{d}{dt}\sum_{\lambda,\nu=0}^{n}\chi(z^\lambda, r^\lambda; z, r)\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}z_\nu - \sum_{\lambda,\nu=0}^{n}\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}z_\nu\frac{d}{dt}\chi(z^\lambda, r^\lambda; z, r)$$

die Formel (28) an, so erhält man hieraus

$$\sum a_{ik}\zeta_i\zeta_k = \frac{d}{dt}\sum_{\lambda,\nu=0}^{n}\chi(z^\lambda, r^\lambda; z, r)\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}z_\nu + \sum_{i=0}^{n}\chi_i(z, r)z_i$$

$$-\sum_{i,\lambda,\nu=0}^{n}\chi_i(z^\lambda, r^\lambda)\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}z_i z_\nu + \sum_{i,k,\lambda,\nu} a_{ik}\left(\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}\right)' z_k^\lambda z_\nu z_i'$$

$$+\sum_{i,k,\lambda,\nu} a_{ik}\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}z_i^\lambda z_\nu' z_k' - \sum_{i,k,\lambda,\nu}\left(\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}z_\nu\right)' a_{ik}(z_k^\lambda)' z_i.$$

Berücksichtigt man (27*) und dass

$$\frac{d}{dt}\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}z_k^\lambda = 0 = \sum_{\lambda=0}^{n}\left(\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}\right)' z_k^\lambda + \sum_{\lambda=0}^{n}\frac{Z_\nu^\lambda}{Z}(z_k^\lambda)',$$

so geht obige Formel über in

$$\sum a_{ik}\zeta_i\zeta_k = \sum_{i,k} a_{ik} z_i' z_k' + \sum_{i=0}^{n} \chi_i(z, r) z_i$$

$$+\frac{d}{dt}\sum_{\lambda=0}^{n}\left[\chi(z^\lambda, r^\lambda; z, r) - \sum_{i,k} a_{ik}(z_k^\lambda)' z_i\right]\frac{\Delta(z^0 \ldots z^{\lambda-1}, z, z^{\lambda+1} \ldots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)}. \quad (30)$$

Anmerkung. Zu dieser Formel kann man auf viel kürzerem Wege gelangen, wenn man nicht die Annahme vermeiden will, dass die $z_1, z_2 \ldots z_n$ auch zweite Derivierte besitzen.

§. 15.

Die $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$, die alle in $\tau_0$ und $\tau_1$ ($t_0 \leqq \tau_0 < \tau_1 \leqq T$) verschwinden, seien sammt ihren ersten[1] Derivierten eindeutige und stetige Functionen des $t$, welche die $y_0 \ldots y_n$, $y_0' \ldots y_n'$ von $C$ wieder in Punkte $y_0+\eta_0, \ldots y_n+\eta_n$; $y_0'+\eta_0', \ldots y_n'+\eta_n'$ von ($\mathfrak{C}$) überführen und den Bedingungen

$$\varphi_k(y_0+\eta_0 \ldots y_n+\eta_n; y_0'+\eta_0' \ldots y_n'+\eta_n') = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots m)$$

genügen, die aber den Gleichungen

$$\omega_k(\eta) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'}\eta_i'\right) = 0 \ (k = 1, 2 \ldots m)$$

äquivalent seien.

Ertheilt man den $y_0, y_1 \ldots y_n$ in ($C$) eine Variation, die in $t_0\tau_0$ und $\tau_1 T$ Null und in $\tau_0\tau_1$ bezüglich $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ ist, so ist die zugehörige zweite Variation des Integrals

$$\delta^2 J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Omega(\eta, \eta')\,dt.$$

[1] Die Existenz der zweiten Derivierten wird nicht vorausgesetzt.

Nun ist

$$\Omega(\eta,\eta') = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_k}\eta_k + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta'_k}\eta'_k\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_k}\eta_k + \eta'_k\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta'_k\partial\eta_i}\eta_i + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta'_k\partial\eta'_i}\eta'_i\right)\right]$$

$$= \sum_{i,k} a_{ik}\eta'_i\eta'_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_k} - \frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta_i\partial\eta'_k}\cdot\eta_i\right]\eta_k$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i,k}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta_i\partial\eta'_k}\eta_i\eta_k.$$

Benützt man $\chi_i(\eta, r)$ (§. 14, 27), nachdem man es vermöge (14, §. 7) umgestaltet hat in:

$$\chi_i(\eta, r) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_i} - \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta'_i\partial\eta_k}\eta_k\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}r_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i}r_k\right)\right],$$

so erhält $\delta^2 J$, da die $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ in $\tau_0$ und $\tau_1$ Null sind, die Form

$$\delta^2 J = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\Omega(\eta,\eta')dt =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1}\left\{\sum_{i,k} a_{ik}\eta'_i\eta'_k + \sum_{i=0}^{n}\chi_i(\eta, r)\eta_i - \sum_{i=1}^{m}\omega_i(\eta)r_i\right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i}r_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\eta_i\partial\eta'_k}\eta_k\right]\eta_i\right\}dt$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1}\left[\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\eta'_i\eta'_k + \sum_{i=0}^{n}\chi_i(\eta, r)\eta_i\right]dt. \tag{31}$$

Besitzen die $\eta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ auch zweite Derivierte in $\tau_0\tau_1$, so erhält man vermöge (27), da $\omega_i(\eta) = 0$ $(i = 1 \ldots m)$, aus der ersteren der oben stehenden Formeln

$$
\left.\begin{aligned}
\delta^2 J &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{i=0}^{n} \eta_i \psi_i(\eta, r)\, dt \\
&+ \left\{ \sum_{i=0}^{n} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right] \eta_i \right\}_{\tau_0}^{\tau_1} \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sum_{i=0}^{n} \psi_i(\eta, r)\, \eta_i\, dt.
\end{aligned}\right\} \tag{31*}
$$

Existiert nun ein System conjugierter Lösungen $((z^k, r^k))$, dessen Determinante in $\tau_0 \tau_1$ nirgends verschwindet, so lässt sich hierauf die Formel (30) in §. 14 anwenden. Man erhält dann die von Clebsch[1] in anderer Weise abgeleitete reducierte Form von $\delta^2 J$:

$$
\delta^2 J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Sigma a_{ik} \zeta_i \zeta_k\, dt, \tag{32}
$$

wo die $\zeta_i$ die in §. 13 (24) angegebenen Werte besitzen.

Die quadratische Form $\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} \zeta_i \zeta_k$, in der die $\zeta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ den Gleichungen (26):

$$
\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \zeta_i = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m)
$$

unterworfen sind, soll mit $W(t) = Q(\zeta_0, \zeta_1 \ldots \zeta_n)$ bezeichnet werden.

Anmerkung. Man kann obige reducierte Form auch direct mittels des Ansatzes[2] $\eta_k = \sum_{\lambda=0}^{n} \rho_\lambda z_k^\lambda$ $(k = 0, 1 \ldots n)$ gewinnen. Setzt man $r_k = \sum_{\lambda=0}^{n} \rho_\lambda r_k^\lambda$ $(k = 1, 2 \ldots m)$, so ist

[1] J. f. Math., Bd. 55.

[2] Er kommt für einen speciellen Fall schon bei Hesse (J. f. Math., Bd. 54) vor und wurde auf den vorliegenden, wo er sich unmittelbar aus den Formeln von Clebsch ergibt, zuerst von A. Mayer (l. c.) angewendet. Doch setzt dessen Ableitung, in der $t = x$ angenommen ist, voraus, dass die Variationen $\eta$ auch zweite Derivierte besitzen.

$$\sum_{k=0}^{n} \chi_k(\eta, r)\eta_k = \sum_{\lambda=0}^{n} \rho_\lambda \sum_{k=0}^{n} \chi_k(\eta, r) z_k^\lambda$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} \rho_\lambda \left[ \frac{d}{dt} \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) + \sum_{k=0}^{n} \chi_k(z^\lambda, r^\lambda)\eta_k \right] \quad (\text{§. 14, 28})$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} \left[ \frac{d}{dt} (\rho_\lambda \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)) - \rho'_\lambda \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) + \right.$$

$$\left. + \rho_\lambda \sum_{i,k} \eta_k \frac{d}{dt} (a_{ik}(z_i^\lambda)') \right] \quad (\text{§. 14, 27*})$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{\lambda=0}^{n} \rho_\lambda \left[ \sum_{i,k} a_{ik}(z_i^\lambda)'\eta_k + \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) \right] - \sum_{\lambda=0}^{n} \rho'_\lambda \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)$$

$$- \sum_{\lambda, i, k} a_{ik}(z_i^\lambda)'(\rho_\lambda \eta_k)'$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{\lambda=0}^{n} \rho_\lambda \left[ \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) + \sum_{i,k} a_{ik}(z_i^\lambda)'\eta_k \right] - \sum_{\lambda=0}^{n} \rho'_\lambda \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)$$

$$- \sum_{\lambda=0}^{n} \rho'_\lambda \sum_{i,k} a_{ik}(\eta_k (z_i^\lambda)' - z_k^\lambda \eta'_i) - \sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{i,k} a_{ik}(\rho_\lambda (z_i^\lambda)' + \rho'_\lambda z_i^\lambda)\eta'_k$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{\lambda=0}^{n} \rho_\lambda \left[ \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) + \sum_{i,k} a_{ik}(z_i^\lambda)'\eta_k \right]$$

$$- \sum_{\lambda=0}^{n} \rho'_\lambda \left[ \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) + \sum_{i,k} a_{ik}(\eta_k (z_i^\lambda)' - z_k^\lambda \eta'_i) \right] - \sum_{i,k} a_{ik} \eta'_i \eta'_k$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{\lambda=0}^{n} \rho_\lambda \left[ \chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda) + \sum_{i,k} a_{ik}(z_i^\lambda)'\eta_k \right] - \sum_{\lambda=0}^{n} \psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)\rho'_\lambda$$

$$- \sum_{i,k} a_{ik} \eta'_i \eta'_k. \quad (\text{§. 14, 29})$$

Daher

$$\sum_{k=0}^{n}\chi_k(\eta, r)\eta_k+\sum_{i,k}a_{ik}\eta_i'\eta_k' = -\sum_{\lambda=0}^{n}\psi(\eta, r; z^\lambda, \rho^\lambda)\rho_\lambda'+\frac{dP}{dt},$$

wo also

$$P = \sum_{\lambda=0}^{n}\left[\chi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)+\sum_{i,k}a_{ik}(z_i^\lambda)'\eta_k\right]\rho_\lambda.$$

Ist wieder $((z^k, r^k))$ ein conjugiertes System, dessen Determinante in $\tau_0\tau_1$ nirgends verschwindet, so ist nach (23)

$$\sum_{\lambda=0}^{n}\psi(\eta, r; z^\lambda, r^\lambda)\rho_\lambda' = -\sum a_{ik}\zeta_i\zeta_k,$$

also

$$\sum_{k=0}^{n}\chi_k(\eta, r)\eta_k+\sum_{i,k}a_{ik}\eta_i'\eta_k' = \sum a_{ik}\zeta_i\zeta_k+\frac{dP}{dt}.$$

Da $P$ in $\tau_0$ und $\tau_1$ verschwindet, so ergibt sich hieraus wieder die obige reducierte Form für $\delta^2 J$.

## IV. Nothwendige Bedingungen.

§. 16.[1]

In $\tau_0$ $(t_0 \leqq \tau_0 \leqq T)$ ist mindestens eine $m$-reihige Determinante der Matrix $\left\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}\right\|_{i=0,1\ldots n}^{k=1,2\ldots m}$ nicht Null (§. 3, 3). Ist daselbst etwa $\left\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}\right\|_{i=0,1\ldots(m-1)}^{k=1,2\ldots m} \neq 0$, so kann man für eine Umgebung von $\tau_0$ zu $(n-m+1)$ willkürlichen, stetigen Functionen von $t$: $\zeta_{m+i}$ $(i = 0, 1\ldots n-m)$, die in $\tau_0$ bezüglich die vorgegebenen Werte $\zeta_{m+i}^0$ $(i = 0, 1\ldots n-m)$ annehmen, $m$ weitere $\zeta_i$ $(i = 0, 1\ldots m-1)$ finden, so dass die $(n+1)$ Functionen $\zeta_i$ $(i = 0, 1\ldots n)$ den Gleichungen (26):

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}\zeta_i = 0 \qquad (k = 1, 2\ldots m)$$

[1] Mitth. III, §. 17.

genügen und in $\tau_0$ bezüglich die vorgegebenen Werte $\zeta_i^0$ $(i = 0, 1 \ldots n)$, welche daselbst ebenfalls diese Gleichungen befriedigen sollen, besitzen.

Ist in $\tau_0$ die quadratische Form $W(t) = \Sigma a_{ik}\zeta_i\zeta_k$ nicht Null, so wird sie wegen der Stetigkeit auch in der Umgebung von $\tau_0$ das Zeichen von $W(\tau_0)$ beibehalten.

$v_k$ $(k = 0, 1 \ldots (n+1))$ seien in dieser Umgebung linear unabhängige stetige Functionen von $t$ und $\alpha_k$ $(k = 0, 1 \ldots (n+1))$ willkürliche Constante. Jedes der Systeme $\alpha_k v_k \zeta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ genügt den Gleichungen (26) und daher auch

$$Z_i = \zeta_i \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k v_k \qquad (i = 0, 1 \ldots n). \tag{a}$$

Ist $((u^k \rho^k))$ eines der conjugierten Systeme (§. 12, 2), dessen Determinante $U$ in $\tau_0$ nicht Null ist, so sei $\delta$ der Radius der Umgebung von $\tau_0$, in der 1. $U$ nirgends verschwindet und 2. $W(t)$ überall das Zeichen von $W(\tau_0)$ besitzt. Sind $\tau_1$ und $\tau_2$ $(\tau_1 \leqq \tau_0 \leqq \tau_2)$ zwei Stellen dieser Umgebung, so lassen sich $(n+1)$ Größen $\eta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ bestimmen, die sämmtlich in $\tau_1$ und $\tau_2$ verschwinden und den Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \eta_\nu', & \eta_0, & \eta_1 & \ldots & \eta_n \\ (u_\nu^0)', & u_0^0, & u_1^0 & \ldots & u_n^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (u_\nu^n)', & u_0^n, & u_1^n & \ldots & u_n^n \end{vmatrix} = UZ_\nu \qquad \begin{matrix} (u^0 = y') \\ (\nu = 0, 1 \ldots n) \end{matrix}$$

genügen. Setzt man zu dem Behufe $\eta_i = \sum_{k=0}^{n} r_k u_i^k$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ und bezeichnet mit $U_\mu^k$ die Subdeterminante von $u_\mu^k$ in $U$, so erhält man zunächst

$$r_k = \sum_{\mu=0}^{n} \int_{\tau_1}^{t} \frac{U_\mu^k}{U} Z_\mu dt \qquad (k = 0, 1 \ldots n)$$

und daraus $\eta_k$ $(k = 0, 1 \ldots n)$.

Bestimmt man, was immer möglich ist, die $\alpha_i$ $(i = 0, 1 \ldots n+1)$ derart, dass

$$(r_k)_{\tau_2} = \sum_{\lambda=0}^{n+1} \alpha_\lambda \int_{\tau_1}^{\tau_2} v_\lambda \sum_{\mu=0}^{n} \frac{U_\mu^k}{U} \zeta_\mu dt = 0 \qquad (k = 0, 1 \ldots n),$$

so verschwinden sämmtliche $\eta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$, die wegen *(a)* den Gleichungen $\omega_i(\eta) = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ genügen, sowohl in $\tau_1$, als auch $\tau_2$. Sie können aber nicht sämmtlich im ganzen Intervalle $\tau_1\tau_2$ Null sein, wenn man die $(n+2)$ willkürlichen Functionen $v_k$ $(k = 0, 1 \ldots n+1)$ linear unabhängig wählt — also etwa das Fundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung, für die $\tau_0$ nicht singuläre Stelle ist — denn anderenfalls müsste in $\tau_1\tau_2$ überall

$$Z_i = \zeta_i \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k v_k = 0 \qquad (i = 0, 1 \ldots n)$$

und daher für eine Umgebung von $\tau_0$, da in $\tau_0$ nicht sämmtliche $\zeta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ Null sein können, $\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k v_k = 0$ sein, was der obigen Festsetzung widerspräche.

Ertheilt man also den $y_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ in $t_0\tau_1$ und $\tau_2 T$ die Variationen Null und in $\tau_1\tau_2$ bezüglich die Variationen $\eta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$, so ersieht man aus der Transformation (32) des zugehörigen $\delta^2 J$:

»Ist die quadratische Form $W(t)$ an der Stelle $\tau_0$ für das Größensystem $\zeta_i^0$ $(i = 0, 1 \ldots n)$, das in $\tau_0$ die Gleichungen (26) befriedigt, nicht Null, so existieren Variationen der $y_0, y_1 \ldots y_n$, deren zugehörige $\delta^2 J$ das Zeichen von $W(t_0)$ besitzen.«

Hieraus folgt unmittelbar:

Damit die $\delta^2 J$ nicht verschiedene Vorzeichen annehmen, ist nothwendig, dass für die verschiedenen Systeme der $\zeta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$, welche den Gleichungen (26) genügen, die quadratische Form $W(t)$ weder in demselben Punkte, noch in verschiedenen Punkten des Integrationsintervalls entgegengesetzter Vorzeichen fähig sei.[1]

---

[1] Dieser Satz, der die Verallgemeinerung von (§. 1, 3) ist, wurde zuerst von Hesse (l. c.) für den Jacobi'schen Fall bewiesen und dann von Scheefer (Math. Ann., Bd. 25) für $x = t$ für den vorliegenden ausgesprochen. Doch gibt

§. 17.

Aus bekannten Sätzen über quadratische Formen ergibt sich der Lehnsatz:

»Eine quadratische Form $Q(x_0, x_1 \dots x_n)$ von $(n+1)$ Argumenten mit den linearen homogenen Nebenbedingungen $\varphi_k = 0$ $(k = 1, 2 \dots m)$ lässt sich dann und nur dann durch eine andere von weniger Variabeln, zwischen denen wieder $m$ lineare, homogene Gleichungen bestehen, darstellen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_0 \partial x_0}, \dots \frac{\partial^2 Q}{\partial x_0 \partial x_n}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}, \dots \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_0} \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot & \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot & \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x_n \partial x_0}, \dots \frac{\partial^2 Q}{\partial x_n \partial x_n}; & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}, \dots \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}, \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}; & 0, \dots 0 \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot & \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot & \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_0}, \dots \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}; & 0, \dots 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Hiefür ist nothwendig und hinreichend, dass $(n+1)$ Constante $k_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ bestehen, welche für $x_i = k_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ die Gleichungen $\varphi_\lambda = 0$ $(\lambda = 1, 2 \dots m)$ befriedigen und für alle zulässigen $x_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ die Relation $\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i} k_i = 0$ erfüllen.

Bezeichnet $\lambda$ eine beliebige Größe, so ist dann:

$$Q(x_0, x_1 \dots x_n) = Q(x_0 + \lambda k_0, x_1 + \lambda k_1 \dots x_n + \lambda k_n)$$

$$\varphi_i(x_0, x_1 \dots x_n) = \varphi_i(x_0 + \lambda k_0, x_1 + \lambda k_1 \dots x_n + \lambda k_n) \; (i = 1, 2 \dots m).«$$

er einen Beweis bloß für $m = 0$ und begnügt sich im Falle $m > 0$ mit einigen Bemerkungen, die aber nicht geeignet scheinen, selbst unter weiteren einschränkenden Voraussetzungen, einen strengen Beweis anzubahnen. Bemerkenswert ist überdies gerade, dass der Satz nur den Bedingungen in §. 2 unterliegt.

Da die Determinante $\Delta$ (§. 2, $d$) Null ist, so lässt sich hienach die quadratische Form $W(t) = Q(\zeta_0, \zeta_1 \dots \zeta_n)$ mit den Nebenbedingungen (26) in jedem Punkte $\tau$ des Integrationsintervalls durch nur $n$ Argumente darstellen. Hiezu verhelfen die Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial Q}{\partial \zeta_i} y'_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} y'_i = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots m),$$

aus denen folgt

$$Q(\zeta_0 \dots \zeta_n) = Q(\zeta_0 + \lambda y'_0 \dots \zeta_n + \lambda y'_n);$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} (\zeta_i + \lambda y'_i) = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots m).$$

In keinem Punkte des Integrationsintervalls verschwinden nach Voraussetzung (§. 2, $c$) sämmtliche $y'_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$. Ist in $\tau$ etwa $y'_i \neq 0$ und wählt man $\lambda = -\frac{\zeta_i}{y'_i}$, so gehen die obigen Gleichungen, wenn man $\xi_\lambda = \zeta_\lambda - \frac{\zeta_i}{y'_i} y'_\lambda$ $(\xi_i = 0)$ setzt, über in

$$Q(\zeta_0, \zeta_1 \dots \zeta_n) = Q(\xi_0, \xi_1 \dots \xi_n); \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \xi_i = 0 \quad (k = 1, 2 \dots m).$$

Nimmt nun $Q(\zeta_0, \zeta_1 \dots \zeta_n)$ für die zulässigen $\zeta_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ nicht verschiedene Vorzeichen an, so ist die quadratische Form $Q(\xi_0, \xi_1 \dots \xi_n)$ für die zulässigen $\xi_0 \dots \xi_{i-1}, \xi_{i+1} \dots \xi_n$, da ihre Determinante $\Delta_{ii} \neq 0$ in $\tau$ ist (§. 3, 2), definit. Hienach kann man dem Satze in §. 16 die Fassung geben:

Damit die $\delta^2 J$ nicht verschiedene Vorzeichen annehmen, ist nothwendig, dass die quadratische Form $W(t) = Q(\zeta_0, \zeta_1 \dots \zeta_n)$ nur für $\zeta_i = \rho y'_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$, wo $\rho$ eine willkürliche, im Integrationsintervalle stetige Function von $t$ bezeichnet, verschwinde und für alle übrigen zulässigen Systeme der $\zeta_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ sowohl in demselben Punkte, als auch in verschiedenen

Punkten des Integrationsintervalls einerlei Vorzeichen besitze.

In den folgenden Untersuchungen wird angenommen, dass $W(t)$ diese Bedingung (I) erfülle.

§. 18.

Nimmt man die Voraussetzungen des §. 15 über die $\eta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ und die Determinante des conjugierten Systems $((z^k, r^k))$ in $\tau_0\tau_1$ wieder auf, so haben die $\zeta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ die in (24) angegebenen Werte. Verschwindet daher $W(t)$ im ganzen Intervalle $\tau_0\tau_1$, so muss nach §. 17 in $\tau_0\tau_1$

$$\zeta_\nu = \frac{1}{\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)} \begin{vmatrix} \eta'_\nu, & \eta_0 & \ldots & \eta_n \\ (z^0_\nu)', & z^0_0 & \ldots & z^0_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (z^n_\nu)', & z^n_0 & \ldots & z^n_n \end{vmatrix} = \rho y'_\nu \qquad (\nu = 0, 1 \ldots n)$$

sein.

Diesem Systeme linearer Differentialgleichungen wird genügt durch $\eta_\nu = \sigma y'_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$, wenn $\sigma = \int_{\tau_0}^{t} \rho\, dt$ ist, und daher ist seine allgemeine Lösung $\eta_\nu = \sigma y'_\nu + \sum_{k=0}^{n} c_k z^k_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$, wo die $c_k$ $(k = 0, 1 \ldots n)$ willkürliche Constanten sind. Da aber $\eta_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ in $\tau_0$ und $\tau_1$ Null ist, so muss $c_k = 0$ $(k = 0, 1 \ldots n)$ und $\sigma$ auch in $\tau_1$ Null sein.

Besteht nun eine Lösung $(z, r)$ von (3), deren $z_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ sowohl in $\tau_0$, als auch $\tau_1$ Null sind, so kann man $\eta_\nu = z_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ nehmen. Das zugehörige $\delta^2 J$ verschwindet also dann und nur dann, wenn $z_\nu = \sigma y'_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ in $\tau_0\tau_1$ ist. Ist daher (§. 5) in einem Punkte von $\tau_0\tau_1$ auch $r_k = \sigma\lambda'_k$ $(k = 1, 2 \ldots m)$, so ist $(z, r)$ eine besondere Lösung; ist hingegen in $\tau_0\tau_1$ nirgends $r_k = \sigma\lambda'_k$, so soll $(z, r)$ eine in $\tau_0\tau_1$ oder schlechtweg anormale Lösung genannt oder von ihr gesagt werden, sie sei in $\tau_0\tau_1$ anormal.

Ist in $\tau_0\tau_1$ die Determinante eines conjugierten Systems nirgends Null und verschwinden die $z_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ einer Lösung $(z, r)$ von (3) sowohl in $\tau_0$, als auch $\tau_1$, so ist das zugehörige $\delta^2 J$ dann und nur

dann Null, wenn $(z, r)$ eine besondere oder in $\tau_0\tau_1$ anormale Lösung ist.[1]

## §. 19.

Ist $(u, \rho)$ eine Lösung von (3), die nicht zu jeder Lösung des conjugierten Systems $((z^k, r^k))$ conjugiert ist, so kann man, wenn $(u, \rho)$ etwa nicht zu $(z^n, r^n)$ conjugiert ist, die $n^2$ Constanten $\alpha_k^i$ $(i, k = 1, 2 \ldots n)$ gemäß den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda^k \psi(u, \rho; z^\lambda, r^\lambda) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots n-1);$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda^n \psi(u, \rho; z^\lambda, r^\lambda) = C \neq 0$$

so bestimmen, dass die Determinante $A = |\alpha_k^i|_{i,k=1,2\ldots n}$ nicht Null ist. Denn in $A_n^n = |\alpha_k^i|_{i,k=1,2\ldots(n-1)}$ bleiben die $\alpha_k^i$ willkürlich, so dass $A_n^n \neq 0$ gewählt werden kann und wegen $A\psi(u, \rho; z^n, r^n) = A_n^n \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda^n \psi(u, \rho; z^\lambda, r^\lambda)$ ist daher auch $A \neq 0$.

Setzt man

$$u_\nu^k = \sigma_k y_\nu' + \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda^k z_\nu^\lambda \qquad (\nu = 0 \ldots n);$$

$$\rho_\nu^k = \sigma_k \lambda_\nu' + \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda^k r_\nu^\lambda \qquad (\nu = 1, 2 \ldots m),$$

so bilden also die Lösungen

$$(u^1, \rho^1) \ldots (u^{n-1}, \rho^{n-1}), (u^n, \rho^n) \text{ und } (u^1, \rho^1) \ldots (u^{n-1}, \rho^{n-1}), (u, \rho)$$

je ein conjugiertes System. Die beiden Systemen nicht gemeinsamen Lösungen $(u^n, \rho^n)$ und $(u, \rho)$ sind nicht conjugiert und da $\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n) = A\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)$ ist, so verschwinden auch $\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n)$ und $\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)$ in $\tau_0\tau_1$ zugleich.

Die Determinante des zweiten Systems stellt sich als das Product zweier Matrices dar, und zwar ist

[1] Die Bemerkungen dieses Paragraphen sind bei Mayer (l. c.), der sie zur Grundlage seiner Betrachtungen machte, unvollständig und daher auch die Folgerungen.

$$\Delta(u^0, u^1 \ldots u^{n-1}, u) =$$

$$= \begin{vmatrix} z_0^0 & , z_0^1 & \ldots z_0^n & , u_0 \\ z_1^0 & , z_1^1 & \ldots z_1^n & , u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ z_{n-1}^0, & z_{n-1}^1 & \ldots z_{n-1}^n, & u_{n-1} \\ z_n^0 & , z_n^1 & \ldots z_n^n & , u_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & , 0 & \ldots & 0 & , 0 \\ \sigma_1 & , \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1 & , 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ \sigma_{n-1}, & \alpha_1^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1}, & 0 \\ 0 & , 0 & \ldots & 0 & , 1 \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Delta(z^0 \ldots z^{k-1}, u, z^{k+1} \ldots z^n) A_k^n,$$

wenn $A_k^n$ die Subdeterminante von $\alpha_k^n$ in $A$ bezeichnet. Substituiert man hierin den Wert von $A_k^n$ aus

$$A\psi(u, \rho; z^k, r^k) = \psi(u, \rho; u^n, \rho^n) A_k^n,$$

so erhält man

$$\Delta(u^0, u^1 \ldots u^{n-1}, u) =$$

$$= \frac{A}{\psi(u, \rho; u^n, \rho^n)} \sum_{k=0}^{n} \Delta(z^0 \ldots z^{k-1}, u, z^{k+1} \ldots z^n) \psi(u, \rho; z^k, r^k)$$

und somit

$$\frac{\Delta(u^0 \ldots u^{n-1}, u)}{\Delta(u^0 \ldots u^{n-1}, u^n)} =$$

$$= \frac{1}{\psi(u, \rho; u^n, \rho^n)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta(z^0 \ldots z^{k-1}, u, z^{k+1} \ldots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)} \psi(u, \rho; z^k, r^k). \quad (33)$$

Man gelangt also mit Rücksicht auf §. 13, (25*) zu dem Ergebnisse:

Ist $(u, \rho)$ **mindestens** zu einer Lösung des conjugierten Systems $((z^k, r^k))$, die mit $(z^n, r^n)$ bezeichnet werde, nicht conjugiert, so lässt sich durch lineare Verbindung seiner Lösungen ein conjugiertes System $((u^k, \rho^k))$ bilden, in dem **nur** eine Lösung, die analog mit $(u^n, \rho^n)$ bezeichnet werde, zu $(u, \rho)$ nicht conjugiert ist. Verschwindet die Determinante von $((z^k, r^k))$ in einer Strecke des Integrationsintervalls nicht, so gilt in derselben die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta(u^0,\ldots u^{n-1},u)}{\Delta(u^0,\ldots u^{n-1},u^n)} = \frac{1}{\psi(u^n,\rho^n;\, u,\rho)}\,\frac{\Sigma a_{ik}\chi_i(u)\chi_k(u)}{\Delta(u^0,u^1\ldots u^n)^2}. \quad (25^*)$$

Hieraus geht hervor:

»Es verschwindet die obige quadratische Form in der Strecke[1] $\tau_0\tau_1$, auf der kein Nullpunkt von $\Delta(z^0, z^1\ldots z^n)$ liegt, dann und nur dann identisch, wenn

$$u_\nu = \rho y'_\nu + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k_\nu = \sigma y'_\nu + \sum_{k=1}^{n} \beta_k z^k_\nu \qquad (\nu = 0, 1\ldots n)$$

ist. Sind an einer Stelle von $\tau_0\tau_1$ sämmtliche $u_\nu$ $(\nu = 0, 1\ldots n)$ Null, so sind auch die $\alpha_k$ und $\beta_k$ $(k = 1, 2\ldots n)$ Null und die Lösung $(u, \rho)$ ist eine anormale.«

## §. 20.

1. Sind von der Lösung $(u, \rho)$ die $u_\nu$ $(\nu = 0, 1\ldots n)$ sowohl in $\tau_0$, als auch $\tau_1$ Null und ist sie zu jeder Lösung von $((z^k, r^k))$ conjugiert, so verschwindet $\Delta(z^0, z^1\ldots z^n) = A\Delta(u^0, u^1\ldots u^n)$ in $\tau_0$ und $\tau_1$. Trifft diese Annahme nicht zu, so folgt aus obiger Formel, dass, wenn die Lösung $(u, \rho)$ weder eine besondere, noch anormale ist, die Determinante $\Delta(u^0, u^1\ldots u^n)$ innerhalb $\tau_0\tau_1$ verschwinden muss, wenn sie weder in $\tau_0$, noch $\tau_1$ Null ist. Denn verschwände $\Delta(u^0, u^1\ldots u^n)$ auch nicht innerhalb, so ergäbe die Integration von (25*) zwischen $\tau_0$ und $\tau_1$ auf der linken Seite Null und auf der rechten eine davon verschiedene Größe. Es besteht sonach der Satz:

Verschwinden alle Glieder $z_\nu$ $(\nu = 0, 1\ldots n)$ einer Lösung $(z, r)$, die weder eine besondere, noch anormale ist, in zwei Punkten des Integrationsintervalls, so verschwindet die Determinante eines jeden conjugierten Systems, wenn nicht innerhalb der von den Punkten begrenzten Strecke, so doch mindestens an einer Grenze derselben.

2. Ist unter den Lösungen des conjugierten Systems $((z^k, r^k))$ eine in $\tau_0\tau_1$ anormale enthalten, so verschwindet offenbar seine Determinante $\Delta(z^0, z^1\ldots z^n)$ in $\tau_0\tau_1$ identisch. Ist nun $((z^k, r^k))$

[1] Es wird unterschieden zwischen in oder auf und innerhalb einer Strecke.

ein dem Punkte $\tau_0$ conjugiertes System und $\tau_0$ in $\tau_0\tau_1$ nicht isolierte Nullstelle von $\Delta(z^0 z^1 \ldots z^n)$, so besteht eine Lösung $(u, \rho)$, die sich aus den Lösungen von $((z^k, r^k))$ linear so zusammensetzt, dass die $u_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ nicht nur in $\tau_0$, sondern auch in $\tau(\tau_0 < \tau \leqq \tau_1)$ verschwinden. Durch lineare Transformation eines der conjugierten Systeme, deren Determinante in $\tau_0$ nicht Null ist (§. 12), kann man ein anderes $((u^k, \rho^k))$ ableiten (§. 19), in dem $(u, \rho)$ zu jeder der $(n-1)$ ersten conjugiert ist, aber nicht zu $(u^n, \rho^n)$.

Nimmt man die Nullstelle $\tau$ von $\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)$ so nahe an $\tau_0$, dass $\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n)$ in $\tau_0\tau$ nicht verschwindet, so lehrt der obige Satz, dass $(u, \rho)$ eine anormale Lösung sein muss.

Die Determinante des einem Punkte conjugierten Systems hat dann und nur dann in ihm keine isolierte Nullstelle, wenn unter den dem Punkte conjugierten Lösungen auch eine anormale enthalten ist.

3. Verschwindet die Determinante eines $\tau_0$ conjugierten Systems auch in $\tau_1$, ohne in der ganzen Strecke $\tau_0\tau_1$ identisch Null zu sein, so besteht eine Lösung $(u, \rho)$, von der alle $u_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ sowohl in $\tau_0$, als auch $\tau_1$ verschwinden und die nicht für die ganze Strecke $\tau_0\tau_1$ eine anormale ist.

Es folgt sonach aus (1):

Verschwindet die Determinante des einem Punkte conjugierten Systems noch in einem zweiten Punkte des Integrationsintervalls, aber nicht identisch in der von ihnen begrenzten Strecke, so hat die Determinante eines jeden conjugierten Systems in dieser Strecke mindestens einen Nullpunkt.

Hieraus und aus (1) ergibt sich ferner:

»Unter den vorstehenden Voraussetzungen besteht zu jedem Punkte des Integrationsintervalls, der außerhalb der Strecke liegt, eine Lösung $(u, \rho)$, von der sämmtliche $u_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ außer im Punkte noch in einem zweiten Punkte der Strecke verschwinden.«

Verschwindet die Determinante eines Punktes noch in einem zweiten Punkte des Integrationsintervalls, aber nirgends innerhalb der von ihnen begrenzten Strecke, so können nur von einer anormalen

Lösung $(u, \rho)$ die sämmtlichen $u_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ in zwei Punkten innerhalb der Strecke verschwinden.

§. 21.

Hat $\Delta(t, t_0)$ im Intervalle $(t_0+0, T)$ keine Nullstelle,[1] so kann für jede Strecke $\tau_0\tau_1$ $(t_0 < \tau_0 < \tau_1 \leqq T)$ die einer Variation der Curve $(C)$ längs $\tau_0\tau_1$ entsprechende zweite Variation des Integrals $\delta^2 J$ in die reducierte Form übergeführt werden. Von diesen $\bar{\delta}^2 J$ haben keine zwei wegen der (nach Voraussetzung) erfüllten Bedingung I (§. 17) verschiedene Zeichen. Aus den $t_0$ und $T$ conjugierten Systemen lassen sich aber in diesem Falle conjugierte Systeme herstellen, deren Determinanten auch im ganzen Intervalle $(t_0 T)$ nirgends verschwinden.

Da $\Delta(T, t_0) = \pm\Delta(t_0, T)$, so verschwindet $\Delta(t, T)$ in $t_0$ und somit in einer Umgebung $(t_0, t_0+\tau)$ nicht. Jedes $t_0$ conjugierte System ist daher von jedem $T$ conjugierten Systeme linear unabhängig, und beide zusammen bilden ein Fundamentalsystem. Zu einem $t_0$ conjugierten Systeme $((z^k, r^k))$ lässt sich nach (§. 11, 2) ein $T$ conjugiertes $((u^k, \rho^k))$ herstellen, so dass beide ein involutorisches Fundamentalsystem bilden. Sind $(z^{n-i}, r^{n-i})$ und $(u^{i+1}, \rho^{i+1})$ $(i = 0, 1 \ldots n-1)$ die einander zugeordneten Lösungen in demselben und bezeichnen $c_k$ $(k = 1 \ldots n)$ $n$ willkürliche Constante, die zum Theile auch Null sein können, so constituieren die Lösungen

$$(c_1 u^1 + z^n, c_1\rho^1 + r^n), (c_2 u^2 + z^{n-1}, c_2\rho^2 + r^{n-1}), \ldots (c_n u^n + z^1, c_n\rho^n + r^1),$$

wie aus

$$\begin{aligned}\psi(c_i u^i + z^{n+1-i}, c_i\rho^i + r^{n+1-i}; c_k u^k + z^{n+1-k}; c_k\rho^k + r^{n+1-k})\\ = c_i c_k \psi(u^i, \rho^i; u^k, \rho^k) + c_i\psi(u^i, \rho^i; z^{n+1-k}, r^{n+1-k}) +\\ + c_k\psi(z^{n+1-i}, r^{n+1-i}; u^k, \rho^k)\\ + \psi(z^{n+1-i}, r^{n+1-i}; z^{n+1-k}, r^{n+1-k}) = 0\end{aligned}$$

erhellt, ein conjugiertes System.

Hieraus ersieht man, dass $(c_n z^n + u^1; c_n r^n + \rho^1)$ zu jeder der $(n-1)$ ersten Lösungen in $((z^k, r^k))$ conjugiert ist, aber, wie aus

[1] Mitth. III, §. 19.

$$\psi(c_n z^n + u^1, c_n r^n + \rho^1; z^n, r^n) = \psi(u^1, \rho^1; z^n, r^n) \neq 0$$

hervorgeht, nicht zu $(z^n, r^n)$.

Nach (§. 19, 25*) gilt also im ganzen Intervalle $(t_0+0, T)$ die Formel

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta(z^0 \ldots z^{n-1}, c_n z^n + u^1)}{\Delta(z^0 \ldots z^{n-1}, z^n)} = \frac{\Sigma a_{ik}\chi_i(u^1)\chi_k(u^1)}{\psi(z^n, r^n; u^1, \rho^1)\Delta(z^0, z^1 \ldots z^{n-1}, z^n)^2}.$$

Der rechtsstehende Bruch ändert im ganzen Intervalle $(t_0+0, T)$ nicht sein Zeichen und ist in $(t_0+0, t_0+\tau)$ nicht überall Null; der linksstehende hat in $T$ den Wert $c_n$ und wird also von $c_n$ ab, wenn $t$ von $T$ bis $t_0+0$ monoton abnimmt, entweder nicht abnehmen oder nicht zunehmen, je nachdem der rechtsstehende Bruch ein positiver oder negativer ist. Wählt man daher im ersten Falle $c_n > 0$ und im zweiten $c_n < 0$, so verschwindet $\Delta(z^0 \ldots z^{n-1}; c_n z^n + u^1)$ nirgends in $(t_0+0, T)$.

In ganz analoger Weise kann man mittels des eben gewonnenen Systems durch passende Wahl des Zeichens von $c_{n-1}$ ein neues conjugiertes System ableiten

$$(z^1, r^1) \ldots (z^{n-2}, r^{n-2}); (c_{n-1}z^{n-1} + u^2, c_{n-1}r^{n-1} + \rho^2), (c_n z^n + u^1; c_n r^n + \rho^1),$$

dessen Determinante in $(t_0+0, T)$ nirgends Null wird. Stufenweise gelangt man so vermöge $n$ nur dem Zeichen nach bedingter Größen $c_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ zu einem conjugierten Systeme

$$(c_1 z^1 + u^n; c_1 r^1 + \rho^n); (c_2 z^2 + u^{n-1}; c_2 r^2 + \rho^{n-1}); \ldots (c_n z^n + u^1; c_n r^n + \rho^1),$$

dessen Determinante $\Delta(z^0, c_1 z^1 + u^n, \ldots c_n z^n + u^1)$ in $(t_0+0, T)$ gewiss nirgends verschwindet und somit, da sie in $t_0$ den Wert $\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n) = \pm C\Delta(t_0, T)$ annimmt, im ganzen Intervalle $t_0 T$ nirgends Null wird.

Zu demselben Ergebnisse gelangt man, wenn $\Delta(t, T)$ in $(t_0, T-0)$ keine Nullstelle besitzt, wodurch man zu dem Satze geführt wird:

Verschwindet die Determinante des der einen Grenze des Integrals conjugierten Systems weder

innerhalb, noch im anderen Endpunkte des Integrationsintervalls, so lassen sich unendlich viele conjugierte Systeme herstellen, deren Determinanten nirgends im Integrationsintervalle verschwinden. In diesem Falle lassen sich alle zweiten Variationen des Integrals für die hier angewandten Variationen der Curve (§. 15) in die reducierte Form überführen.[1]

## §. 22.

Auch in diesem Falle gibt es aber, wie aus folgendem Satze ersichtlich ist, Variationen der Curve, deren entsprechende $\delta^2 J$ Null sind.

Verschwindet die Determinante des der einen Grenze des Integrals conjugierten Systems weder innerhalb des Integrationsintervalls, noch an seiner anderen Grenze, so existieren immer Variationen der Curve, deren entsprechende $\delta^2 J$ Null sind. Diese Variationen der Curve werden aus den besonderen Lösungen von (3) erhalten.

Verschwindet $\Delta(t, t_0)$ zwar nirgends innerhalb $t_0 T$, aber in $T$, so kann, wenn $((z^k, r^k))$ ein $t_0$ conjugiertes System bedeutet, keine lineare Verbindung seiner Lösungen in irgendwelcher Theilstrecke von $t_0 T$ die Werte einer besonderen oder anormalen Lösung annehmen, da sonst $\Delta(t, t_0)$ darin identisch verschwinden würde. Bestimmt man daher aus $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (z_\nu^k) = 0$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$, wo die Klammern die Werte der eingeschlossenen Größen in $T$ anzeigen, die Constanten $\alpha_k$ $(k = 0, 1 \ldots n)$, so sind sie nicht alle Null und die Lösung $\left(u = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k, \rho = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k r^k\right)$, in der $u_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ in $t_0$ und $T$ verschwinden, ist nirgends anormal.

---

[1] Der Satz ist eine Verallgemeinerung von (§. 1, 6) und kommt für den Jacobi'schen Fall schon bei Hesse (l. c.) vor. Für den vorliegenden Fall und $x = t$ wurde er zuerst von Mayer (l. c.) bewiesen, aber unter so vereinfachenden Voraussetzungen, dass er als unmittelbare Folge des ersten Satzes in (§. 20, 3) sich ergibt.

Verschwindet die Determinante des der einen Grenze des Integrals conjugierten Systems zwar nicht innerhalb des Integrationsintervalls, aber an der anderen Grenze desselben, so bestehen Variationen der Curve, die weder Glieder von besonderen, noch anormalen Lösungen von (3) sind und $\delta^2 J$ zu Null machen.[1]

§. 23.

Es werde nun vorausgesetzt, dass $\Delta(t, \tau_0)$, wo $\tau_0$ einen Punkt des Integrationsintervalls bezeichnet, noch in einem anderen Punkte $\tau_1$ innerhalb desselben verschwinde.

1. An diese Voraussetzung werde zunächst die andere gefügt, dass $\Delta(t, \tau_0)$ an zwei Stellen $\tau$ und $\tau'$ des Integrationsintervalls, von denen die eine rechts, die andere links von $\tau_1$ liege, entgegengesetzte Zeichen besitze. Um diesen Fall zu untersuchen, ziehe man das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \psi_i(\bar{z}, \bar{r}) = \psi_i(\bar{z}, \bar{r}) - \varepsilon \bar{z}_i &= 0 \qquad (i = 0, 1 \ldots n) \\ \omega_k(\bar{z}) &= 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m), \end{aligned} \tag{3*}$$

wo $\varepsilon$ eine beliebige Constante sei, heran. Um es aufzulösen, setze man, wenn $(z, r)$ eine Lösung von (3) bezeichnet, in (3*) $\bar{z}_i = z_i + \varepsilon v_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ $\bar{r}_i = r_i + \varepsilon \rho_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$, wodurch sich zur Bestimmung von $(v_i, \rho_i)$ ergibt

$$\psi_i(v, \rho) = z_i + \varepsilon v_i \quad (i = 0, 1 \ldots n); \qquad \omega_k(v) = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots m).$$

Die $v_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ und $\rho_i$ $(i = 1, 2 \ldots m)$ ergeben sich hieraus als stetige Functionen des $t$ und $\varepsilon$ im ganzen $t_0 T$.[2]

Nimmt man die Anfangswerte der $v_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ $\rho_i$ $(i = 1 \ldots m)$ gleich Null, so stimmen die $z_i$ und $\bar{z}_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ $r_i$ und $\bar{r}_i$ $(i = 1 \ldots m)$ in ihren Anfangswerten überein. Zwei solche Lösungen $(z, r)$ und $(\bar{z}, \bar{r})$ mögen entsprechende heißen.

[1] Diese Bemerkung findet sich für den Jacobi'schen Fall schon bei Hesse (l. c.) und für den vorliegenden, aber $t = x$, bei Mayer (l. c.) vor.

[2] Picard, Traité, t. III; Escherich, Über Systeme von Differentialgl. Diese Sitzungsber., Bd. CVIII.

Construiert man auf diese Weise zu jeder Lösung $(z^k, r^k)$ eines $\tau_0$ conjugierten Systems $((z^k, r^k))$ in (3) aus ihren Anfangswerten in $\tau_0$ eine entsprechende $(\bar{z}^k, \bar{r}^k)$ in (3*) und setzt

$$\Delta(z^0, z^1 \dots z^n) = \Phi(t),$$

so wird

$$\Delta(\bar{z}^0, \bar{z}^1 \dots \bar{z}^n) = \Phi(t) + \varepsilon Q(t, \varepsilon),$$

wo $Q(t, \varepsilon)$ eine nach $t$ und $\varepsilon$ stetige Function' ist. Ihr absoluter Betrag wird für alle $\varepsilon$, die absolut unter einer positiven Zahl $\eta$ bleiben, im ganzen Intervalle $t_0 T$ eine positive Zahl $M$ nicht überschreiten. Nimmt man daher $|\varepsilon|$ genügend klein und so, dass

$$|\varepsilon| < \eta, \quad \frac{|\Phi(\tau)|}{M}, \quad \frac{|\Phi(\tau')|}{M},$$

so wird mit $\Phi(t)$ auch $\Delta(\bar{z}^0, \bar{z}^1 \dots \bar{z}^n)$ in $\tau$ und $\tau'$ entgegengesetzte Zeichen haben. Es wird somit $\Delta(\bar{z}^0, \bar{z}^1 \dots \bar{z}^n)$ in einem Punkte $\tau_1'$ zwischen $\tau$ und $\tau'$ verschwinden und daher existiert eine lineare Verbindung der Lösungen, $(\bar{z}^k, \bar{r}^k)$ $(k = 0, 1 \dots n)$, also eine Lösung $(w, r)$ von (3*), von der sämmtliche $w_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ in $\tau_0$ und $\tau_1'$ Null sind, ohne dass alle in $\tau_0 \tau'$ identisch verschwinden, da $\Delta(\bar{z}^0, \bar{z}^1 \dots \bar{z}^n)$ in keinem der Punkte $\tau$ und $\tau'$ Null ist.

Da die $w_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ auch zweite Derivierte nach $t$ besitzen, so ergibt sich aus (31*), wenn $\eta_i = w_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ genommen wird,

$$\delta^2 J = \int_{\tau_0}^{\tau_1'} \sum_{i=0}^{n} \psi_i(w, r) w_i \, dt = \varepsilon \int_{\tau_0}^{\tau_1'} \sum_{i=0}^{n} w_i^2 \, dt.$$

Da hierin $\varepsilon$ sowohl positiv, als auch negativ genommen werden darf und die nach $t$ stetige Function $\Sigma w_i^2$ in $\tau_0 \tau_1'$ nicht identisch verschwindet, so gibt es unter den gemachten Voraussetzungen entgegengesetzt bezeichnete $\delta^2 J$.

Verschwindet die Determinante eines einem Punkte des Integrationsintervalls conjugierten Systems in einem zweiten Punkte **innerhalb** des Integrationsintervalls und besitzt sie in zwei Punkten zu verschiedenen Seiten des letzteren entgegengesetzte

Vorzeichen, so bestehen $\delta^2 J$ mit entgegengesetzten Vorzeichen.[1]

2. Die obige Bedingung, dass die Determinante $\Delta(t, \tau_0)$, die in $\tau_1$ verschwindet, zu verschiedenen Seiten dieses Punktes entgegengesetzte Werte annehme, lässt sich durch die weitere ersetzen, dass an einer Stelle $\tau_2$ von $t_0 T$ außerhalb $\tau_0\tau_1$ weder $\Delta(t, \tau_0)$ noch $\Delta(t, \tau_1)$ verschwinden.

Da $\Delta(\tau_0, \tau_2) = \pm\Delta(\tau_2, \tau_0)$ und $\Delta(\tau_1, \tau_2) = \pm\Delta(\tau_2, \tau_1)$, so verschwindet infolge dieser Voraussetzung $\Delta(t, \tau_2)$ weder in $\tau_0$, noch $\tau_1$ und muss daher mindestens einen Nullpunkt $\tau_2'$ innerhalb $\tau_0\tau_1$ besitzen. Es besteht demnach eine Lösung $(z, r)$ von (3), die nicht im ganzen Intervall $\tau_2\tau_2'$ anormal sein kann und die Eigenschaft hat, dass in $\tau_2$ und $\tau_2'$: $z_i = 0$ $(i = 0, 1 \dots n)$ ist. Diese Lösung und die Lösungen des $\tau_0$ conjugierten Systems $((z^k, r^k))$ sind daher linear unabhängig. Verschwindet nun, wie vorausgesetzt werden soll, $\Delta(t, \tau_0)$ nirgends innerhalb $\tau_0\tau_1$, so folgt dann aus der im ganzen Intervalle $(\tau_0+0, \tau_1-0)$ giltigen Gleichung (§. 13, 25)

$$\frac{d}{dt}\sum_{\lambda=0}^{n}\psi(z^\lambda, r^\lambda; z, r)\frac{\Delta(z^0, \dots z^{\lambda-1}, z, z^{\lambda+1} \dots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \dots z^n)} = \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

$$= \sum a_{ik}\frac{\chi_i(z)\chi_k(z)}{\Delta(z^0, z^1 \dots z^n)^2},$$

da der Bruch links, der mit $\Phi(t)$ bezeichnet wurde, innerhalb $(\tau_0+0, \tau_1-0)$ Null wird und die rechte Seite, die ihr Zeichen nicht ändert, nicht überall Null sein kann, dass es mindestens zwei Stellen $\tau_3$ und $\tau_4$ innerhalb $\tau_0\tau_1$ zu verschiedenen Seiten von $\tau_2'$ gibt, an denen er entgegengesetzte Zeichen hat.

Construiert man nun zur Lösung $(z, r)$ aus den Werten ihrer Glieder in $\tau_2$ und zu $(z^i, r^i)$, aus denen in $\tau_0$ als Anfangswerten die entsprechende Lösung in (3*), die bezüglich $(\bar{z}, \bar{r})$ und $(\bar{z}^i, \bar{r}^i)$ sei, so ist, wenn man den $\Phi(t)$ entsprechenden Ausdruck in (3*) mit $\bar{\Phi}(t, \varepsilon)$ bezeichnet,

$$\bar{\Phi}(t, \varepsilon) = \Phi(t) + \varepsilon Q(t, \varepsilon).$$

[1] Dieser Satz wurde in engerer Fassung und unter engeren Voraussetzungen, so dass er als unmittelbare Übertragung von (§. 1, 8) erscheint, zuerst von Scheeffer (l. c.) ausgesprochen. Doch gilt von seinem versuchten Beweise gleichfalls Fußnote zu §. 16.

Aus den Überlegungen in 1 geht dann hervor, dass $\overline{\Phi}(t, \varepsilon)$ zwischen $\tau_3$ und $\tau_4$, etwa in $\tau_2''$, verschwinden muss, wenn $|\varepsilon|$ unter einer positiven Größe $\eta$ bleibt. Die Entwickelungen in (§. 7) zeigen, dass auch das System (3*) sich selbst adjungiert ist, und zwar ist nach der dort angewandten Bezeichnungsweise $\overline{\psi}(\bar{z}, \bar{r}; \bar{u}, \bar{\rho}) = \psi(\bar{z}, \bar{r}; \bar{u}, \bar{\rho})$. Es sind daher je zwei der Lösungen $(\bar{z}^k, \bar{r}^k)$ $(k = 0, 1 \ldots n)$ conjugiert. Auch die Entwickelungen in (§. 13) behalten für (3*) Giltigkeit, und (§. 18) modificiert sich dahin, dass wenn $\Sigma a_{ik} \chi_i(\bar{z}) \chi_k(\bar{z})$ in einer Strecke überall Null ist, daselbst $\bar{z}_i = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k \bar{z}_i^k$ ist. Ist daher diese Form in $(\tau_0, \tau_2)$ überall Null, so ist $\bar{z}_i = 0$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ auch in $\tau_0$; ist sie aber daselbst nicht überall Null, so muss $\Delta(\bar{z}^0, \bar{z}^1 \ldots \bar{z}^n)$ innerhalb $\tau_0 \tau_2$ mindestens einen Nullpunkt haben. Anderenfalls wäre nämlich im ganzen Intervall $\tau_2 \tau_2''$

$$\frac{d}{dt} \overline{\Phi}(t, \varepsilon) = \frac{\Sigma a_{ik} \chi_i(\bar{z}) \chi_k(\bar{z})}{\Delta(\bar{z}^0, \bar{z}^1 \ldots \bar{z}^n)^2},$$

was unmöglich ist, denn $\overline{\Phi}(t, \varepsilon)$ ist in $\tau_2$ und $\tau_2''$ Null und die quadratische Form rechts kann nicht in jedem Punkte von $\tau_2'' \tau_2$ Null sein, weil $\overline{\Phi}(t, \varepsilon)$ nicht in $\tau_3$ und $\tau_4$ und daher nicht im ganzen Intervalle $\tau_2'' \tau_2$ identisch Null ist.

Es besteht somit immer eine Lösung $(\bar{z}, \bar{r})$ von (3*), in der die $\bar{z}_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ sämmtlich in $\tau_0$ und einem zweiten Punkte des Integrationsintervalls verschwinden. Dieselben Schlüsse wie in 1 ergeben somit den Satz:

Verschwindet die Determinante $\Delta(t, \tau_0)$ noch in einem Punkte $\tau_1$ **innerhalb** des Integrationsintervalls, aber nirgends innerhalb $\tau_0 \tau_1$ und besteht außerhalb $\tau_0 \tau_1$ im Integrationsintervalle ein Punkt, in dem weder $\Delta(t, \tau_0)$, noch $\Delta(t, \tau_1)$ Null sind, so gibt es verschieden bezeichnete $\delta^2 J$.

## §. 24.[1]

Dieser Satz ist noch einer Erweiterung fähig, wenn auch Variationen der Curve $(C)$ zugelassen werden, die nicht mehr wie $(C)$ selbst aus einem einzigen regulären Stücke bestehen.[2]

---

[1] Mitth. IV, §. 26 und 27.

[2] Weierstraß' Vorlesungen.

1. Das Curvenstück $\tau_0\tau_1$ ($t_0 \leqq \tau_0 < \tau_1 \leqq T_1$) zerlege man durch den Punkt $\tau$ in die beiden $\tau_0\tau$ und $\tau\tau_1$. Den Coordinaten von $\tau_0\tau$ werden die Variationen $\eta_i$ ($i = 0, 1 \ldots n$) ertheilt, die in $\tau_0$ sämmtlich Null seien, und denen von $\tau\tau_1$ die Variationen $\bar{\eta}_i$ ($i = 0, 1 \ldots n$), die in $\tau$ bezüglich dieselben Werte besitzen wie die $\eta_i$ ($i = 0, 1 \ldots n$) und in $\tau_1$ sämmtlich Null seien;[1] sowohl die $\eta_i$, als auch $\bar{\eta}_i$ sollen überdies den Bedingungen in §. 15 genügen. Die Variationen der beiden Curvenstücke $\tau_0\tau$ und $\tau\tau_1$ stellen sich als eine Variation von $\tau_0\tau_1$ dar, deren zugehörige zweite Variation des Integrals gegeben ist durch

$$\delta^2 J = \int_{\tau_0}^{\tau} \Omega(\eta, \eta')\,dt + \int_{\tau}^{\tau_1} \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')\,dt.$$

Setzt man ferner voraus, dass die $\eta_i$ in $\tau_0\tau$ und die $\bar{\eta}_i$ in $\tau\tau_1$ auch zweite Derivierte besitzen, so erhält man durch Anwendung der ersten der beiden Formeln in (31*) auf jeden der obigen Summanden

$$\delta^2 J = \int_{\tau_0}^{\tau} \sum_{i=0}^{n} \psi_i(\eta, r)\eta_i\,dt + \int_{\tau}^{\tau_1} \sum_{i=0}^{n} \psi_i(\bar{\eta}, \bar{r})\bar{\eta}_i\,dt$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} \left\{ \eta_i \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right] - \right.$$
$$\left. - \bar{\eta}_i \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(\bar{\eta}, \bar{\eta}')}{\partial \bar{\eta}'_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \bar{r}_k \right] \right\}_{\tau}$$
$$= \int_{\tau_0}^{\tau} \sum_{i=0}^{n} \psi_i(\eta, r)\eta_i\,dt + \int_{\tau}^{\tau_1} \sum_{i=0}^{n} \psi_i(\bar{\eta}, \bar{r})\bar{\eta}_i\,dt$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Omega(\eta, \eta')}{\partial \eta'_i \partial \eta'_k} (\eta_i \eta'_k - \bar{\eta}_i \bar{\eta}'_k) + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta_i \partial \eta'_k} (\eta_i \eta_k - \bar{\eta}_i \bar{\eta}_k) \right) \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} (r_k \eta_i - \bar{r}_k \bar{\eta}_i) \right) \right\}_{\tau}.$$

[1] Scheffer, l. c.

oder da in $\tau$: $\eta_i = \bar{\eta}_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ ist, nach (16)

$$\delta^2 J = \int_{\tau_0}^{\tau} \sum_{i=0}^{n} \psi_i(\eta, r)\eta_i dt + \int_{\tau}^{\tau_1} \sum_{i=0}^{n} \psi_i(\bar{\eta}, \bar{r})\bar{\eta}_i dt + \psi(\bar{\eta}, \bar{r}; \eta, r)_\tau.$$

Sind daher $(\eta, r)$ und $(\bar{\eta}, \bar{r})$ zwei Lösungen des accessorischen Systems (3), so ist $\psi_i(\eta, r) = \psi_i(\bar{\eta}, \bar{r}) = 0$ $(i = 0, 1 \dots n)$ und daher

$$\delta^2 J = \psi(\bar{\eta}, \bar{r}; \eta, r). \tag{34}$$

2. Ist $((z^k, r^k))$ eines der conjugierten Systeme, dessen Determinante an der Stelle $\tau$ des Integrationsintervalls nicht Null ist, so lässt sich stets eine Lösung $(z, r)$ des accessorischen Gleichungssystems bestimmen, die zu jeder Lösung in $((z^k, r^k))$ conjugiert ist und in der die $z_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ in $\tau$ vorgeschriebene Werte $\zeta_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ annehmen. Man hat zu dem Behufe die $\beta_i$ $(i = 0, 1 \dots n)$ in

$$z_k = \sum_{i=0}^{n} \beta_i z_k^i \quad (k = 0, 1 \dots n); \qquad r_k = \sum_{i=0}^{n} \beta_i r_k^i \quad (k = 1, 2 \dots m)$$

aus den Gleichungen $\zeta_k = \sum_{i=0}^{n} \beta_i (z_k^i)_\tau$ zu bestimmen, wodurch man erhält

$$z_k = \sum_{i=0}^{n} \left. \frac{\Delta(z^0 \dots z^{i-1}, \zeta, z^{i+1} \dots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \dots z^n)} \right]_\tau z_k^i \quad (k = 0, 1 \dots n). \tag{35}$$

Ist $(u, \rho)$ eine Lösung des accessorischen Systems, die zu $(z^n, r^n)$ nicht conjugiert ist, so lässt sich aus $((z^k, r^k))$ (§. 19) ein conjugiertes System $((u^k, \rho^k))$ herstellen, in dem nur $(u^n, \rho^n)$ nicht zu $(u, \rho)$ conjugiert ist. Es ist dann (§. 19, 33)

$$\frac{\Delta(u^0 \dots u^{n-1}, u)}{\Delta(u^0 \dots u^{n-1}, u^n)} =$$

$$= \frac{1}{\psi(u, \rho; u^n, \rho^n)} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta(z^0 \dots z^{i-1}, u, z^{i+1} \dots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \dots z^n)} \psi(u, \rho; z^i, r^i).$$

Aus (35) folgt aber

$$\psi(u, \rho; z, r) = \sum_{i=0}^{n} \left. \frac{\Delta(z^0 \dots z^{i-1}, \zeta, z^{i+1} \dots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \dots z^n)} \right]_\tau \psi(u, \rho; z^i, r^i).$$

Ist daher in $\tau$

$$z_i = u_i = \zeta_i \qquad (i = 0, 1 \ldots n),$$

so wird

$$\left.\frac{\Delta(u^0 \ldots u^{n-1}, u)}{\Delta(u^0 \ldots u^{n-1}, u^n)}\right\}_\tau =$$

$$= \frac{1}{\psi(u, \rho;\, u^n, \rho^n)} \sum_{i=0}^{n} \left.\frac{\Delta(z^0 \ldots z^{i-1}, u, z^{i+1} \ldots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)}\right\}_\tau \psi(u, \rho;\, z^i, r^i)$$

$$= \frac{1}{\psi(u, \rho;\, u^n, \rho^n)} \sum_{i=0}^{n} \left.\frac{\Delta(z^0 \ldots z^{i-1}, z, z^{i+1} \ldots z^n)}{\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)}\right\}_\tau \psi(u, \rho;\, z^i, r^i)$$

$$= \frac{\psi(u, \rho;\, z, r)}{\psi(u, \rho;\, u^n, \rho^n)}. \tag{36}$$

Wird in $\tau\tau'$ die Determinante $\Delta(u^0 \ldots u^{n-1}, u^n) = C\Delta(z^0, z^1 \ldots z^n)$ nicht Null, so ist nach (§. 19, 25*) darin

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\Delta(u^0 \ldots u^{n-1}, u)}{\Delta(u^0 \ldots u^{n-1}, u^n)} = \frac{1}{\psi(u^n, \rho^n;\, u, \rho)}\,\frac{\Sigma a_{ik}\chi_i(u)\chi_k(u)}{\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n)^2}.$$

Verschwinden nun in $\tau'$ sämmtliche $u_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ so ist daher

$$\left.\frac{\Delta(u^0 \ldots u^{n-1}, u)}{\Delta(u^0 \ldots u^{n-1}, u^n)}\right\}_\tau = \frac{1}{\psi(u^n, \rho^n;\, u, \rho)} \int_{\tau'}^{\tau} \frac{\Sigma a_{ik}\chi_i(u)\chi_k(u)}{\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n)^2}\,dt$$

und somit wegen (36)

$$\psi(u, \rho;\, z, r) = -\int_{\tau'}^{\tau} \frac{\Sigma a_{ik}\chi_i(u)\chi_k(u)}{\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n)^2}\,dt. \tag{37}$$

## §. 25.[1]

Sind die Endpunkte einer Theilstrecke $\tau_0\tau_0'$ des Integrationsintervalls in $\tau_0\tau_0'$ isolierte Nullstellen von $\Delta(t, \tau_0)$, so besteht eine Lösung des accessorischen Gleichungssystems $(u, \rho)$, von der sämmtliche $u_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ in $\tau_0$ und $\tau_0'$ Null sind, aber sonst in keinem Punkte ihrer in $\tau_0\tau_0'$ gelegenen Umgebung $(\delta)$ vom

[1] Mitth. IV, §. 29.

Radius $\delta$. In jeder dieser Umgebungen kann also $(u, \rho)$ auch nicht anormal sein.

Ist $\Delta(t, \tau_0')$ an einer Stelle $\tau_1$, die außerhalb $\tau_0\tau_0'$ und näher an $\tau_0'$ als $\tau_0$ liege, nicht Null, so ist auch $\Delta(t, \tau_1)$ in $\tau_0'$ nicht Null. Also besteht eine Umgebung von $\tau_0'$, in der $\Delta(t, \tau_1)$ nirgends Null ist. $\tau$ sei eine beliebige Stelle, die in beiden Umgebungen von $\tau_0'$ liegt. Ist $((u^k, \rho^k))$ ein der Stelle $\tau_1$ conjugiertes System, in dem nur $(u^n, \rho^n)$ zu $(u, \rho)$ nicht conjugiert ist, so lässt sich nach (§. 24, 2) eine Lösung $(z, r)$ herstellen, von der alle $z_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ in $\tau_1$ verschwinden und in $\tau$ vorgegebene Werte annehmen. Wählt man hiefür die Werte, welche die $u_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ in $\tau$ besitzen, so ist nach (§. 24, 37)

$$\psi(u, \rho; z, r) = -\int_{\tau_0'}^{\tau} \frac{\Sigma a_{ik}\chi_i(u)\chi_k(u)}{\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n)^2}\, dt,$$

wo die quadratische Form in $\tau\tau_0'$ nicht überall Null sein kann, da $(u, \rho)$ in $(\delta)$ von $\tau_0'$ nicht anormal ist (§. 18).

Werden den Coordinaten $y_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ der Curve $(C)$ in $\tau\tau_1$ die Variationen $z_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ und den Coordinaten in $\tau_0\tau$ die Variationen $u_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ ertheilt, so entspricht dieser Variation der Curvenstrecke $\tau_0\tau_1$

$$\delta^2 J = \psi(z, r; u, \rho) = -\int_{\tau}^{\tau_0'} \frac{\Sigma a_{ik}\chi_i(u)\chi_k(u)}{\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n)}\, dt. \qquad (38)$$

Nimmt man hingegen $\tau_1$ innerhalb $\tau_0\tau_0'$ in der Umgebung $(\delta)$ von $\tau_0$ an, so kann $\Delta(t, \tau_1)$ nicht in $\tau_0$ verschwinden, da $\Delta(\tau_0, \tau_1) = \pm\Delta(\tau_1, \tau_0)$. Ist $\tau$ ein Punkt in der Umgebung von $\tau_0$, in der $\Delta(t, \tau_1)$ nicht Null wird, zwischen $\tau_0$ und $\tau_1$, so lässt sich, da auch $\Delta(t, \tau_0)$ in $\tau$ nicht Null ist, eine Lösung $(u, \rho)$ herstellen, von der sämmtliche $u_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ in $\tau_0$ Null sind und in $\tau$ der Reihe nach vorgegebene Werte $\zeta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ besitzen (§. 24, 2). Unter den zu $\tau_1$ conjugierten Systemen bestehen solche $((u^k, \rho^k))$, in denen nur die Lösung $(u^n, \rho^n)$ zu $(u, \rho)$ nicht conjugiert ist. Durch lineare Verbindung der Lösungen von $((u^k, \rho^k))$ lässt sich (§. 24, 2) eine Lösung $(z, r)$ bilden, in der $z_i = \zeta_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ in $\tau$ wird.

Ertheilt man den Coordinaten der Curvenstrecke $\tau_0\tau$ die Variationen $u_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$ und denen von $\tau\tau_1$ die Varia-

tionen $z_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$, so erhält man für diese Variation der Curvenstrecke $\tau_0 \tau_1$

$$\delta^2 J = \psi(z, r; u, \rho) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\Sigma a_{ik} \chi_i(u) \chi_k(u)}{\Delta(u^0, u^1 \ldots u^n)^2} dt \tag{39}$$

(§. 24, 37), wo die quadratische Form nicht im ganzen Intervalle Null sein kann, da wegen der Annahme, dass $\Delta(t, \tau_0)$ innerhalb $\tau_0 \tau_0'$ nicht verschwinde, $(u, \rho)$ in $(\delta)$ nicht anormal sein kann.

Der Vergleich der beiden Werte (38) und (39) von $\delta^2 J$ führt somit zu dem Satze:

Ist dem einen Endpunkte $\tau_0$ einer Strecke $\tau_0 \tau_0'$ des Integrationsintervalls ein System von Lösungen conjugiert, dessen Determinante in der Strecke die Endpunkte zu isolierten Nullstellen hat, und ist die Determinante des dem anderen Endpunkte conjugierten Systems außerhalb der Strecke in einem Punkte des Integrationsintervalls, der näher $\tau_0'$ als $\tau_0$ liegt, nicht Null, so gibt es zweite Variationen des Integrals mit verschiedenen Vorzeichen.

## V. Der Hauptfall.

### §. 26.

Eigens hervorgehoben zu werden verdient der Fall, in dem das accessorische Gleichungssystem keine anormalen Lösungen (§. 18) besitzt. Der Anblick von (3) lehrt aber:

Eine anormale Lösung von (3) existiert dann und nur dann nicht, wenn das überzählige System linearer Differentialgleichungen

$$\sum_{k=1}^{m} \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} r_k \right) \right] = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots n) \tag{40}$$

in jedem Punkte des Integrationsintervalls nur durch die Werte $r_k = 0$ $(k = 1, 2 \ldots m)$ befriedigt wird.

Dieser Fall, der also als der allgemeinere sich darstellt, soll der Hauptfall[1] genannt werden. Auf ihn haben sich

[1] Mitth. IV, §. 24 u. f.

bisher stets, theils stillschweigend, theils ausdrücklich, die Untersuchungen in Variationsrechnung beschränkt. Auf den Hauptfall führt z. B.

$$J = \int_{t_0}^{T} f(x, x'; y, y' \dots y^{(n)})\, dt \qquad \left(x' = \frac{dx}{dt};\ y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k}\right),$$

wenn $f(x, x', y, y' \dots y^{(n)})$ homogen vom I. Grade nach $x', y' \dots y^{(n)}$ ist.

Dieses Problem erhält die frühere Form (§. 2), wenn man

$$y_1 = \frac{dy}{dt},\ y_2 = \frac{dy_1}{dt} \dots y_{n-1} = \frac{dy_{n-2}}{dt}$$

setzt und für $t$ eine neue Veränderliche $\tau$ einführt, die monoton das Intervall $\tau_0 \tau_1$ durchläuft, wenn $t$ monoton von $t_0$ bis $T$ wächst. Es ergibt sich so

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f\left(x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dy_1}{d\tau} \dots \frac{dy_{n-1}}{d\tau}\right) d\tau$$

$$\varphi_1 = y_1 \frac{dt}{d\tau} - \frac{dy}{dt};\ \varphi_k = y_k \frac{dt}{d\tau} - \frac{dy_{k-1}}{d\tau} \qquad (k = 2 \dots n-1)$$

und damit die Richtigkeit der Behauptung.

Hat das Integral die allgemeinere Form

$$J = \int_{t_0}^{T} f(x, x'; y, y' \dots y^{(m)};\ z, z' \dots z^{(n)}; \dots)\, dt$$

und ist

$$f(x, x', y \dots y^{(m)}, z \dots z^{(n)})$$

homogen vom I. Grade nach $x', y' \dots y^{(m)}, z' \dots z^{(n)} \dots$, so zeigt dieselbe Behandlungsweise, dass wieder der Hauptfall vorliegt.

Anders verhält es sich schon im Falle des einfachen isoperimetrischen Problems. Soll bei gegebenen Anfangs- und Endwerten der $y_0 y_1 \dots y_n$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(y_0, y_0'; \dots y_n, y_n')\, dt$$

zu einem Max. Min. werden, während die $m$ Integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} f_k(y_0, y_0'; \dots y_n, y_n')\, dt \qquad (k = 1, 2 \dots m)$$

gegebene Werte annehmen und sind $f$ und $f_k$ homogen vom I. Grade bezüglich $y'_0, y'_1 \ldots y'_n$, so wird bekanntlich das Problem durch Einführung von $m$ neuen Veränderlichen $y_{n+1} \ldots y_{n+m}$, die durch die Gleichungen

$$y'_{n+k} = f_k(y_0, y'_0 \ldots y_n, y'_n) \qquad (k = 1, 2 \ldots m)$$

definiert sind, auf die bisher behandelte Form gebracht. Zwischen den $(n+m+1)$ Veränderlichen $y_i$ $(i = 0, 1 \ldots, n+m)$ bestehen dann die Gleichungen

$$\varphi_k = y'_{n+k} - f_k(y_0, y'_0, \ldots; y_n, y'_n) = 0 \qquad (k = 1, 2 \ldots m).$$

Im Systeme der $(n+m+1)$ Gleichungen (40)

$$\sum_{k=1}^{m} \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} r_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} r_k \right) \right] = 0 \qquad (i = 0, 1 \ldots, (n+m))$$

ergeben die letzten $m$

$$r'_1 = r'_2 = \ldots = r'_m = 0,$$

woraus folgt, dass die $r_1, r_2 \ldots r_m$ nach $t$ constant sind. Die übrigen $(n+1)$ Gleichungen kommen also auf

$$\sum_{k=1}^{m} \left[ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} \right) \right] r_k = 0$$

zurück. Aus ihnen lässt sich nun nicht schließen, dass die $r_1, r_2 \ldots r_m$ im ganzen Integrationsintervalle Null sein müssen, und es muss also nicht jedes einfache isoperimetrische Problem dem Hauptfalle angehören. In dem Falle aber, dass obige Gleichungen nicht die einzige Lösung $r_k = 0$ $(k = 1, 2 \ldots m)$ besitzen, verliert auch der Beweis für die isoperimetrische Constante, den Scheeffer[1] nach dem Vorgange Weierstraß' zu geben versuchte, seine Giltigkeit.[2]

---

[1] L. c., §. 4, S. 583.

[2] Die Annahme, dass $\Sigma \pm (\Delta J_1)_{\eta'} \ldots (\Delta J_{m''})_{\eta^{m''}}$ (S. 584) einen von Null verschiedenen Wert besitze, ist dann unzulässig, da er immer Null ist. Weierstraß in seinen Vorlesungen und Kneser (Lehrbuch der Variationsr., 1900) schließen schon bei $n = 1$, $m = 1$ diesen Fall ausdrücklich aus.

## §. 27.

Da im Hauptfalle das accessorische Differentialgleichungssystem keine anormalen Lösungen besitzt, so vereinfachen sich mehrere der in §. 20 gefundenen Sätze folgendermaßen:

Die Determinante jedes einem Punkte conjugierten Systems hat in ihm eine isolierte Nullstelle.

Verschwindet die Determinante eines einem Punkte conjugierten Systems noch in einem zweiten Punkte des Integrationsintervalls, so hat die Determinante jedes conjugierten Systems in der von den beiden Punkten begrenzten Strecke mindestens einen Nullpunkt.

Jeder Punkt des Integrationsintervalls hat also in diesem Falle eine größte Umgebung, in der die Determinante seines conjugierten Systems ihn zum alleinigen Nullpunkt hat. Aus obigen Sätzen folgt nach bekannter Schlussweise, dass für die Punkte des Integrationsintervalls die untere Grenze der Radien dieser Umgebung nicht Null sein kann.

Da jeder Punkt des Integrationsintervalls für die Determinante seines conjugierten Systems eine isolierte Nullstelle ist, so hat sie, wenn er nicht ihr einziger Nullpunkt im Integrationsintervalle ist, einen ihr zunächst vorangehenden und (oder) folgenden Nullpunkt. Jeder der letzteren soll ein zum ersteren zugeordneter oder conjugierter Punkt heißen, so dass also zwischen einem Punkte und seinem conjugierten kein Nullpunkt der Determinante des dem ersteren conjugierten Systems liegt.

Aus §. 25 folgt daher für den Hauptfall der Satz:

Verschwindet die Determinante eines einem Punkte conjugierten Systems noch in einem zweiten Punkte des Integrationsintervalls und fallen nicht beide Punkte mit den Endpunkten des Integrationsintervalls zusammen, so bestehen verschieden bezeichnete $\delta^2 J$.

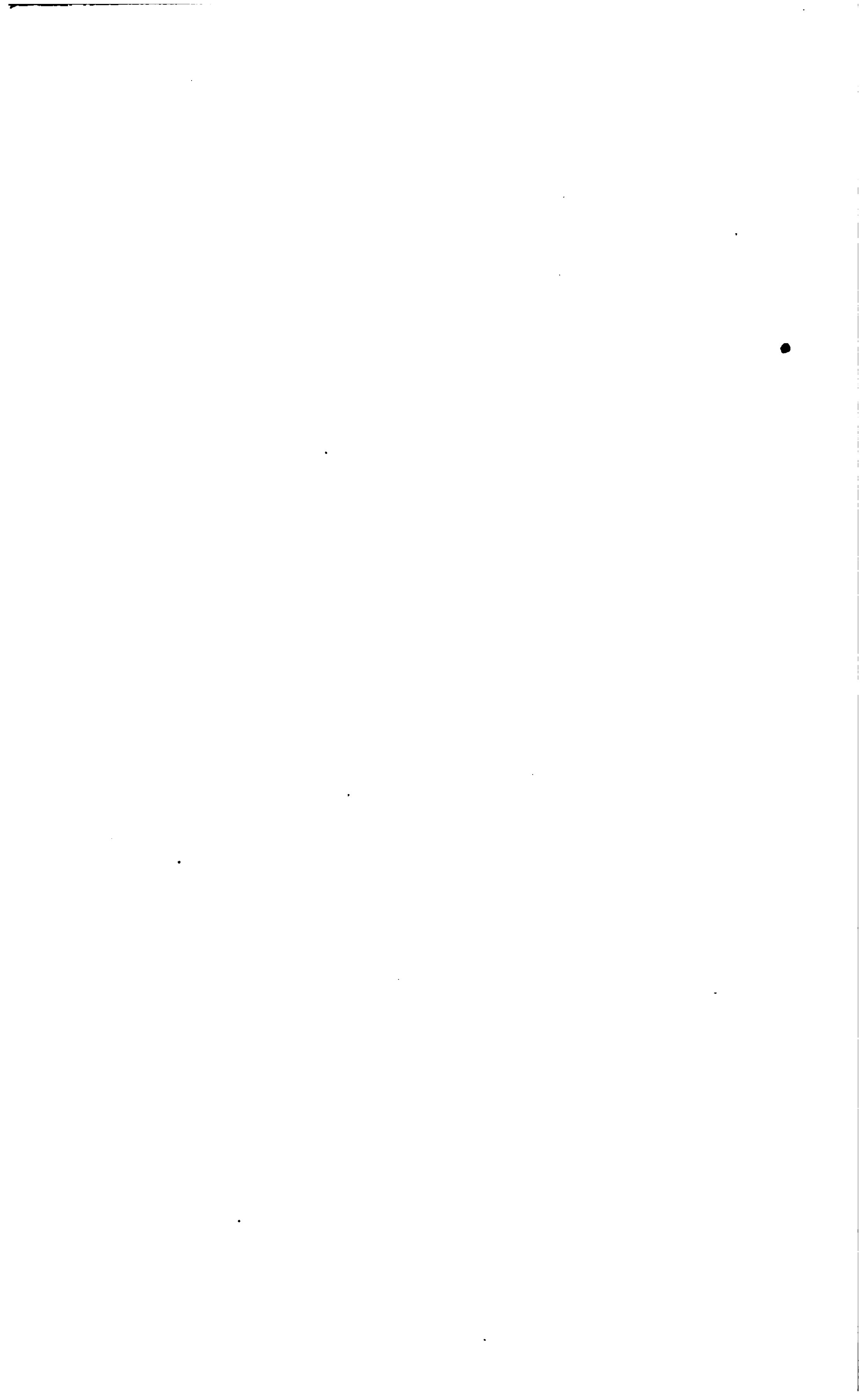
Sieht man von Variationen der Curve ab, die Glieder besonderer Lösungen des accessorischen Systems sind, so lassen sich die voranstehenden Bemerkungen mit §. 21 und §. 22 in folgenden Satz zusammenfassen:

Ist die nothwendige Bedingung I (§. 17) im Hauptfalle erfüllt und verschwindet die Determinante eines und somit aller dem einen Endpunkte des Integrationsintervalls conjugierten Systeme

1. weder innerhalb, noch im anderen Endpunkte des Integrationsintervalls, so haben alle $\delta^2 J$ für die in (§. 15) festgesetzten Variationen der Curve einerlei Vorzeichen;

2. im anderen Endpunkte, so gibt es verschwindende $\delta^2 J$;

3. innerhalb des Integrationsintervalls, so bestehen verschieden bezeichnete $\delta^2 J$.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichnisse ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Carl Gerold's Sohn (Wien, I., Barbaragasse 2) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: »Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften« herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 10 K oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 3 K oder 3 Mark.



